О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

3-є видання, перероблене

2018

УДК 681.513
В68

Рекомендована до друку вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України
(протокол № 2 від 10 жовтня 2017 року)

Рецензенти: Воронін А.М. - д.т.н., професор,
Національний авіаційний університет;

Зайченко Ю.П.- д.т.н., професор,
Інститут прикладного системного аналізу НТУ України «КПІ ім. І. Сікорського»;

Волошин О.Ф., Мащенко С.О.

В 68 **Моделі та методи прийняття рішень**: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – 3-є вид., переоб. – К.: «Видавництво Людмила», 2018. – 292 с.

ISBN 978-617-7638-05-5

Містить основи теорії прийняття рішень. Викладено базові основи прийняття рішень, основи теорії корисності, експертні процедури для прийняття рішень, теорії прийняття рішень в умовах визначеності, прийняття рішень в умовах конфлікту та нечіткої інформації, кооперативне прийняття рішень. Теорія ілюструється численними прикладами застосувань та навчальними вправами.

Посібник розраховано на студентів, які навчаються за напрямами: математика, прикладна математика, інформатика, системний аналіз, комп'ютерні науки, економіка; фахівців, які цікавляться подібними питаннями.

ЗМІСТ

ВСТУП

Читач, сподіваємось, не буде заперечувати проти такого визначення: "життя – це процес прийняття рішень". Рішення приймають політики, військові, виробники, споживачі, продавці, покупці, водії, пішоходи ("йти чи не йти на червоне світло"), дорослі ("що робити з дітьми"), діти ("що робити з іграшкою"), рішення приймають навіть студенти ("йти чи не йти на лекцію, а якщо йти, то що робити – слухати лектора, розмовляти з сусідом). Рішення приймаються колективні (вибори президента), індивідуальні (за якого кандидата голосувати), стратегічні ("куди піти вчитися"), тактичні ("брати чи не брати з собою парасольку"), миттєві (воротар – "в який кут стрибати"), розтягнуті в часі та просторі, важливі (з точки зору цивілізації, партії, окремого індивіда), несуттєві ("яку програму по телевізору дивитися") і т.п. Рішення приймаються на основі знань, досвіду, інтуїтивно, за допомогою випадкового механізму, за підказкою інших, за бажанням, за необхідністю і т.д. В багатьох практично цікавих випадках основним моментом є саме метод (алгоритм) прийняття рішення, а вже потім вивчення властивостей прийнятого рішення. Більш того, в деяких випадках апріорне задання властивостей шуканого рішення (у вигляді аксіом) призводить до його неіснування або до неможливості його знаходження заданою процедурою.

Хоча вивченням окремих задач прийняття рішень людство займалось давно, теорія прийняття рішень як наукова дисципліна сформувалось в другій половині XX ст., що пов'язано в значній мірі з розвитком обчислювальної техніки та інформатики.

Термін "прийняття рішень" зустрічається в багатьох дисциплінах, прийняття рішень є одним з основних напрямків прикладної математики. Моделі та методи теорії прийняття рішень знайшли широке застосування, в першу чергу, в економіці, військовій справі, політиці, медицині. Історично теорія прийняття рішень виокремилась з наукового напрямку, відомого під назвою "дослідження операцій". В свою чергу, теорія прийняття рішень стимулювала розвиток нового наукового напрямку "штучний інтелект".

РОЗДІЛ 1
БАЗОВІ ОСНОВИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Якщо дотримуватись класифікації проблем прийняття рішень американських вчених Г.Саймона й А.Н'юєлла [1], то типові задачі дослідження операцій відносяться до добре структурованих або кількісно сформульованих. У таких проблемах суттєві залежності відомі настільки добре, що можуть бути вираженими в числах або символах, котрі у кінцевому результаті отримують чисельні оцінки. Вивчення реальної ситуації, що моделюється, може вимагати великого обсягу часу. Необхідна інформація може мати високу вартість, але при наявності засобів і високої кваліфікації дослідників маються всі можливості знайти адекватне кількісне описання проблеми, критерій якості та кількісні зв'язки між змінними.

По іншому складається справа у слабо структурованих проблемах. Тут частина інформації, що необхідна для повного й однозначного визначення вимог до розв'язку, принципово відсутня. Дослідник, як правило, може визначити основні змінні, встановити зв'язок між ними, тобто побудувати модель, що адекватно описує ситуацію. Але при цьому залежності між критеріями взагалі не можуть бути визначеними на основі об'єктивної інформації, що мається у дослідника.

Більш того, існують проблеми, у яких відомий лише перелік основних параметрів, але кількісні зв'язки встановити між ними неможливо. У таких випадках структура, що розуміється як сукупність зв'язків між параметрами, невизначена і проблема називається неструктурованою.

Будемо вважати, що *структуровані* (добре структуровані) задачі відносяться до предмета дослідження операцій, *слабо структуровані* – до компетенції прийняття рішень, *неструктуровані* – до штучного інтелекту.

§1. Загальна задача прийняття рішень

Схему прийняття рішень у найбільш загальному вигляді можна описати у наступному вигляді (див. рис 1.1).

В загальному випадку кожен блок 1-5 приведеної схеми ("загальної задачі прийняття рішень" – ЗЗПР) потребує конкретизації та певної формалізації. Задача із заданою множиною альтернатив Ω та принципом оптимальності ОП називається загальною задачею оптимізації, зміст якої полягає у виділенні множини "кращих" альтернатив ОП(Ω), зокрема, якщо принцип оптимальності задається скалярною функцією вибору на Ω, то маємо звичайну *оптимізаційну задачу* (наприклад, лінійного програмування). Якщо принцип оптимальності задається множиною *критеріальних функцій*, то маємо задачу *багатокритеріальної оптимізації*. Задача з відомою множиною альтернатив Ω та явно заданим принципом оптимальності називається *задачею вибору*.

Рис. 1.1.

У процесі розв'язку загальної задачі прийняття рішень, як правило, беруть участь три групи осіб: *особи, що приймають рішення* (ОПР), *експерти* (Е) та *консультанти* (К).

ОПР називають людину (або колективний орган такий, як науковий заклад, Верховна рада тощо), що має (формує) ціль, котра служить мотивом постановки задачі та пошуку її розв'язання. ОПР визначає також, які засоби є допустимими (недопустимими) для досягнення мети.

Експерт – це спеціаліст у своїй галузі, що володіє інформацією про задачу, але не несе прямої відповідальності за результати її розв'язання. Експерти допомагають ОПР на всіх стадіях постановки та розв'язання ЗПР.

Аналітиками (консультантами, дослідниками) називають спеціалістів з теорії прийняття рішень. Вони розробляють модель (математичну, інформаційну і т.п.) задачі прийняття рішень (ЗПР), процедури прийняття рішень, організовують роботу ОПР і експертів.

У найпростіших ситуаціях ОПР може виступати одним у трьох ролях, у більш складних – ОПР може поєднувати функції аналітика, звертаючись до спеціалістів з вузьким профілем для вирішення часткових проблем. У загальному випадку ОПР (наприклад, президент або профільний комітет Верховної ради) залучає до вирішення державних проблем аналітиків –консультантів, які, в свою чергу, звертаються до експертів. ОПР – головнокомандуючий має колективного консультанта – Генеральний штаб, який, у свою чергу, організовує роботу експертів – спеціалістів з озброєння, хімічного та біологічного захисту, політологів, метеорологів тощо.

В практичних (прикладних) задачах прийняття рішень формалізація кожного кроку процесу прийняття рішень (представлених на рис. 1.1) пов'язана з певними, іноді дуже складними, проблемами. У першу чергу, постає проблема визначення мети та засобів її досягнення. Можна ставити апріорі недосяжні або навіть абсурдні чи злочинні цілі ("моя мета – пробігти стометрівку за 5 секунд", "наша ціль – комунізм", "наша ціль – чистота раси" і т.д.). Можна використовувати нецивілізовані, навіть злочинні, методи досягнення цілком досяжної мети ("мета – стати президентом", "стати багатим", "отримати п'ятірку на іспиті" і т.д. і т.п.).

Але мова зараз не про це. Нас цікавить формалізація ЗЗПР, її описання на мові математики з метою моделювання практичних ситуацій прийняття рішень. І якщо математична модель приведе до факту неіснування розв'язку поставленої задачі, наша мета буде досягнутою. Припустимо тепер, що ціль і методи її досягнення визначені. Постає проблема побудови множини альтернатив – варіантів дій, направлених на досягнення мети. Тут, у першу чергу, виникає проблема побудови "повного списку" альтернатив. Можлива ситуація, коли невключення певної альтернативи приведе до неможливості розв'язання задачі або до її "неякісного" розв'язання. Так, не включення до економічної системи колишнього СРСР ринкових механізмів у кінцевому рахунку привело до деградації суспільства та розпаду СРСР.

Не менш складною є проблема оцінки альтернатив – "до чого приведе та чи інша вибрана дія". Як правило, оцінки альтернатив носять суб'єктивний характер, вони отримуються на основі обробки експертної інформації. Навіть якщо можна оцінювати альтернативи за допомогою "об'єктивних" процедур (наприклад, вимірювати вагу товару, відстань між населеними пунктами тощо), постає проблема визначення всіх або хоча б "найважливіших" аспектів оцінки кожної альтернативи. Тут також неврахування навіть одного аспекту в оцінці варіантів дії може призвести до катастрофічних наслідків (згадаймо Чорнобильську катастрофу – неврахування ризику аварії при будівництві АЕС привело до трагічних результатів).

Остання принципова складність (але не остання за значенням) – вибір принципу порівняння альтернатив і на його основі - принципу оптимальності. Якщо на попередньому етапі визначені числові оцінки альтернатив, то вибір принципу оптимальності зводиться до вибору критерію (критеріїв) оптимізації, котрий у максимальній мірі відповідає меті ЗЗПР. Так, якщо для тренера футбольної команди мета – перемога у наступному матчі, то за принцип оптимальності може слугувати такий критерій: "Перемагає та команда, яка виконує за матч більшу сумарну кількість успішних тактично-технічних елементів" (передач м'яча, відборів, ударів по воротах і т.д.). Такий принцип не раз висловлював В.В.Лобановський. Як правило, визначення (побудова, прийняття) принципу оптимальності відбувається у декілька етапів. Так, якщо ціль ЗЗПР описується декількома числовими критеріями (і, отже, маємо задачу багатокритеріальної оптимізації), необхідно визначити – на основі якого "глобального" принципу оптимальності будуть порівнюватись (і вибиратись кращі) альтернативи.

Проблеми реалізації останнього блоку схеми пов'язані, у першу чергу, з математичними труднощами розв'язання задач, що виникають. Тут і велика розмірність, і проблеми існування розв'язку, і збіжність процедур його побудови і т.д. і т.п.

Розглянемо приклади змістовної інтерпретації блоків ЗЗПР.

1. Визначення мети та засобів. Розглянемо такі приклади.

1.1. Християнська доктрина визначає мету земного існування людини як "спасіння душі". Засоби – будь-які, що не суперечать заповідям "Нового заповіту" (не вбивай; не гнівайся на ближнього; не чини перелюбу; не клянись, але виконуй клятви свої перед Господом; не протився злому, і коли вдарить тебе, хто у праву щоку твою, – підстав йому й іншу; любіть і ворогів своїх; про милостиню; про піст; складайте собі скарби на небі; покладайте на Бога надію свою; не судіть своїх ближніх ("Не суди, але викривай"); ходіть дорогою вузькою; стережіться фальшивих пророків; чиніть волю отця вашого небесного; не будуйте на піску).

1.2. Сучасна гуманістична доктрина визначає ціль життя людини як "самореалізацію" (див. Эрих Фромм: "Бегство от свободы"; "Человек для самого себя"). Засоби досягнення цієї мети визначаються, перш за все, "Декларацією прав людини", у якій на першому місці, безумовно, стоїть християнський принцип "не убий" ("право на життя"). Інші біблейські принципи не є категоричними імперативами. З принципом «Не вбивай» тісно пов’язана проблема смертної кари. Якщо мета – “справедливість за будь-яку ціну” (зокрема, ”око за око, зуб за зуб”), то смертна кара допустима. Але, якщо дещо переформулювати проблему смертної кари – чи згодні ви, щоб разом з шістьма злочинцями був страчений один невинуватий (а саме така статистика хибних смертних вироків за останні 150 років в Європі і Америці), то принцип ”справедливість за будь-яку ціну” стає зовсім не очевидним.

1.3. Видатний філософ XX сторіччя Микола Бердяєв визначав мету життя людини не як "спасіння", а як "творче сходження", засіб - "свобода" (див. його праці "О назначении человека", "Смысл творчества", "Философия свободы").

1.4. "Хто ж вони, справжні філософи? Ті, хто метою мають істину" (Платон).

"Життя перестає прив'язувати до себе щойно зникає мета" (І. Павлов).

"Минуле і теперішнє – наші засоби, тільки майбутнє – наша мета"   (Блез Паскаль).

1.5. Мета – вилікувати хворого. Засоби – усе те, що надається системою охорони здоров'я.

1.6. Мета – побудувати літак. Засоби – 10 млн. грн.

1.7. Мета – виграти футбольний матч, засоби у тренера – сформувати команду на даний матч із наявних 25 футболістів.

1.8. Мета – "щастя всього людства". Цю мету висували й висувають філософи, політики, пророки, авантюристи. І якщо з метою все зрозуміло (про формалізацію терміна "щастя" зараз мова не йде - на Всесвітньому економічному форумі у Давосі в січні 2006 року один із семінарів мав назву "Щастя – це..."), то із засобами її досягнення набагато складніше. Згадаймо хоча б Ф. Достоєвського – "щастя всього людства не варте однієї сльозинки дитини"; графа Каліостро – "якщо хтось не захоче бути щасливим, то він повинен померти" (див. фільм С. Говорухіна “Формула любви”); Ф.Ніцше – "хочеш бути щасливим – не мрій".

Доцільно тут згадати і слова: "Політики – це люди, найбільш нерозбірливі у засобах (досягнення мети)". Сучасна історія, на жаль, повністю підтверджує цей вислів. Прикладів тут безліч і читач легко може їх привести. Ми ж лише приведемо слова Максима Горького про те, що "Леніну, як вождю, притаманна для цієї ролі необхідність у відсутності моралі" і слова Мітчела Канора (розробника "Lotus"), який називає Білла Гейтса "найбільш успішним і яскравим представником тих, хто грає на стратегії – перемога за будь-яку ціну". А взагалі проблема "мета – засоби" стара як світ (читачам радимо прочитати серію чудових романів А. Кьостлера, присвячених цій темі, - "Слепящая тьма", "Призрак грядущого", "Гладиаторы"). Ми ж приєднуємось до думки, що історичний досвід показує, що відмова від вимог моралі у кінцевому рахунку є завжди програшною стратегією.

1.9. Мета – отримання максимального задоволення від життя (про формалізацію поняття задоволення див. вище у Е. Фромма). Засоби студента – 50 грн. (на початок 2009 року).

1.10. Мета викладача – навчити студента своєму предмету, засоби викладання – ”цікаво, зрозуміло і … весело” (принцип видатного вченого і педагога XX сторіччя академіка П. Капіци).

Загальний підхід до поняття мети був розвинутий на початку 40-х років XX ст., у першу чергу, Н.Вінером, який писав, що термін "цілеспрямоване" означає, що дія або поведінка допускає тлумачення як направлені на досягнення деякої мети, тобто деякого кінцевого стану, при якому об'єкт вступає у певний зв'язок у просторі або часі з деякими іншими об'єктами або подіями. З філософськими аспектами в об'єктивізації поняття мети можна ознайомитись у роботі [1].

Розглянемо основні типи цілей та способи їх формалізації, що застосовуються при прийнятті рішень.

"Якісна" ціль характеризується тим, що всякий результат або повністю задовольняє цій цілі або повністю не задовольняє, причому результати, що задовольняють цій цілі нерозрізненні між собою точно так як нерозрізненні між собою і результати, що не задовольняють цій цілі. Наприклад, ціль – стати чемпіоном. І якщо ціль досягнуто, то немає значення, як її досягнуто – наполегливим тренуванням, підкупом суддів, знищенням конкурентів тощо. Якісну ціль можна формалізувати у вигляді деякої підмножини A множини всіх можливих результатів, де всякий результат $a \in A$ задовольняє цій цілі, а всякий результат $a \notin A$ не задовольняє їй. Множина A при цьому називається цільовою підмножиною. Так, якщо ціль "зайняти призове місце", то цільова множина A – перші три місця з усіх можливих.

Якісну ціль (її можна назвати якісною "чіткою" ціллю) можна узагальнити наступним чином. Нехай кожному результату a відповідає "ступінь" виконання цілі $\mu(a)$, $0 \le \mu(a) \le 1$. Зокрема, $\mu(a) = 1$, якщо $a \in A$; $\mu(a) = 0$, якщо $a \notin A$.

"Кількісна" ціль є результатом вибору на множині результатів, що описуються кількісно, за допомогою деякої дійснозначної функції $f: A \to E^1$. Задача прийняття рішень у цьому випадку зводиться до знаходження оптимуму (максимуму чи мінімуму) функції f на множині A. Відмітимо, якщо "якісну" ціль формально можна звести до "кількісної" (поклавши, наприклад, $f(a) = 1$, $a \in A$; $f(a) = 0$.

Якщо цільова функція є векторною, тобто кожен результат описується набором чисел, що характеризують його "вартість", "ефективність", "надійність" тощо, то маємо задачу багатокритеріальної оптимізації.

Відмітимо, якщо ціль задано з допомогою скалярної цільової функції f, то можна визначити пов'язану з цією ціллю перевагу серед результатів: з двох результатів кращим буде той, якому відповідає більше (менше) значення цільової функції (при рівних значеннях цільової функції говорять про байдужність результатів). Назвемо таку перевагу перевагою, що пов'язана з цільовою функцією f. Але можна говорити про перевагу і без наявності цільової функції, задаючи множину пар результатів, для яких перший результат у парі є кращим за другий (або не гіршим). З формальної точки зору останнє означає, що на декартовому добутку результатів $A \times A$ задане деяке бінарне відношення. У загальному випадку за заданим бінарним відношенням неможливо побудувати цільову функцію, пов'язану з ним. Відомі достатні умови (властивості), яким повинно задовольняти бінарне відношення для того, щоб існувала цільова функція, пов'язана з ним (див. Розділ 2 "Основи теорії корисності"). Отже, задання переваг у вигляді бінарного відношення на множині результатів є більш загальною формою формалізації цілі. З іншого боку, на практиці дуже часто відношення переваги задається саме бінарним порівнянням – про це говорить і народна мудрість "Все пізнається у порівнянні".

2. Побудова множини варіантів дій та їх наслідків. Формально блоки 2 та 3 схеми ЗЗПР є незалежними, змістовно – зв'язаними (для чого розглядати альтернативи, які не можна принципово оцінити?). Тому на прикладах розглянемо їх сумісно. У блоці 2 альтернативи будуються на основі евристичних, неформальних процедур; у блоці

3 на основі формально-математичних, експертних процедур здійснюється оцінювання їх наслідків.

Розглянемо основні типи залежностей між альтернативами та наслідками.

Найпростіший тип залежності – *детермінований*, коли кожна альтернатива приводить до єдиного наслідку. При цьому між альтернативами та наслідками існує функціональна залежність і такі ЗПР називаються *ЗПР в умовах визначеності*. Наявність функціональної залежності приводить до того, що ЗПР достатньо описувати тільки у термінах цілі та альтернатив.

Найчастіше вибрана альтернатива може привести до множини наслідків. Такий тип залежності називається *недетермінованим*. При цьому між альтернативами та наслідками не існує функціональної залежності і такі ЗПР називаються *ЗПР в умовах невизначеності*. Невизначеність є проявом впливу на наслідок зовнішнього середовища, як ще кажуть – природи. Якщо невизначеність є проявом впливу на наслідок інших ОПР, які мають свої цілі, то така задача називається ЗПР *в умовах конфлікту*.

Пропонуємо читачу (у якості завдання на самостійну роботу) побудувати множину варіантів для досягнення мети в умовах визначених засобів для приведених вище прикладів.

Більш детально проаналізуємо проблему 1.9 –"Отримати максимальне задоволення за 50 грн.". Можливі дії: a_1 - піти у кіно; a_2 - піти на дискотеку; a_3 - купити книгу; a_4 - залишитись вдома (і зекономити 50 грн.) і т.д.

Цілком можливо, що два різні індивіди оцінять альтернативи (наслідки вибраних дій) наступним чином: a_1 – 5 балів, a_2 – 4, a_3 – 2, a_4 – 1 (екстраверт, кінолюб); a_1 – 2, a_2 – 1, a_3 – 5, a_4 –3 (інтраверт, бібліофіл).

В цій задачі зв'язок між альтернативами та наслідками є детермінованим, ЗПР достатньо описувати тільки у термінах цілі та альтернатив.

Табл. 1.1

Y / A	y_1	y_2	y_3	y_4
a_1	5	2	2	1
a_2	3	5	3	3
a_3	2	3	2	3
a_4	2	4	5	4

Зв’язок між альтернативами та наслідками найчастіше є недетермінованим, залежним від "станів природи".

Так, збираючись зранку на заняття, в залежності від станів природи $y_1 - y_4$ (тепло – сонячно, тепло – дощ, холодно – сонячно, холодно – дощ), студент повинен вибрати одну з альтернатив $a_1 - a_4$ (йти в одному костюмі, взяти парасольку, одягти плащ, одягти пальто). Оцінки альтернатив (у чотирьохбальній шкалі) внесемо у табл. 1.1.

Якщо в прикладі 1.6. замовником виступає уряд промисловості, то альтернативами можуть бути конструкторські бюро та літакобудівні заводи України (Київ, Харків), Росії тощо. При виборі меню ОПР оцінює комплексний обід за трьома критеріями за п'ятибальною шкалою – вартість (f_1 - мінімізувати), калорійність (f_2 - максимізувати або мінімізувати), смакові якості (f_3 - максимізувати). Крім того, нехай оцінки за переліченими критеріями залежать від стану "природи" (у якого з трьох постачальників було закуплено продукти), причому відомі ймовірності реалізації станів (з ймовірністю $1/4$ товари було закуплено у І або ІІ постачальника, з імовірністю $1/2$ – у ІІІ). Нехай також ОПР вибирає альтернативи за допомогою деякого випадкового механізму, зумовленого

Табл. 1.2.

Y / A	y_1			y_2			y_3			P
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	
a_1	4	5	4	3	5	3	2	4	2	$2/7$
a_2	3	4	4	2	4	3	2	4	3	$2/7$
a_3	2	3	3	1	3	2	1	2	1	$3/7$
q	$1/4$			$1/4$			$1/2$			

тим, що двічі на тиждень доцільно вибирати пісну дієту (альтернатива a_3 - салат з капусти, овочевий суп, каша, компот), двічі – рибну (a_2 – салат з огірків, борщ, риба, сік) і тричі – м'ясну (a_1 - салат з капусти, солянка, котлети, компот). Тоді оцінки наслідків можна описати табл. 1.2 (q – ймовірносний розподіл станів природи, p– розподіл альтернатив).

У прикладі 1.7 ОПР (тренер) знає лише "порівняльний" стан готовності футболістів, наприклад, нападників (усього їх четверо). Цю інформацію представимо у табл. 1.3, де елемент $a_{ij} = 1$, якщо у футболіста a_i готовність краща, ніж у a_j, $(i \neq j)$; $a_{ij} = 0$, якщо стан го-

Табл. 1.3.

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	0
a_2	-1	0	1	1
a_3	-1	-1	0	1
a_4	0	-1	-1	0

товності однаковий (зокрема, $a_{ii} = 0$); $a_{ij} = -1$, якщо у футболіста a_i готовність гірша, ніж у a_j $(i \neq j)$. На основі цієї таблиці необхідно побудувати відношення пріоритету серед чотирьох нападників. Якщо склад команди формує не один тренер, потрібно спочатку "інтегрувати" думки тренерів, представлені таблицями виду 1.3.

В якості "стану природи" може виступати інший ОПР і задача "прийняття рішення в умовах конфлікту" опишеться наступною таблицею 1.4, де a_1, a_2 – дії (стратегії) першого ОПР (гравця); b_1, b_2 – другого.

Табл. 1.4.

II / I	b_1	b_2
a_1	$(f_1(a_i,b_j), f_2(a_i,b_j))$	
a_2		

При виборі стратегії a_i першим гравцем, b_j – другим, виграш першого складе $f_1(a_i,b_j)$, другого – $f_2(a_i,b_j)$. У якості подібної задачі розглянемо відому проблему "Дилема бандита"[2]. Двох спійманих злочинців, котрих підозрюють у скоєнні групового злочину (за груповий злочин покарання більше), розсаджують у різні камери (інформаційний обмін між ними – "переговори"– неможливі). "Виграші" наведені у Табл. 1.5, де a_1, b_1 – стратегія "признатись", a_2, b_2 – "не признаватися", (f_1, f_2) – кількість років, які "світять" кожному з бандитів.

Табл. 1.5.

II / I	b_1	b_2
a_1	(10,10)	(0,25)
a_2	(25,0)	(1,1)

3. Визначення принципу оптимальності та структурування множини альтернатив. Знову ж таки з формальної точки зору блоки 4, 5 загальної схеми принципово різні – у блоці 4 на основі неформальних міркувань вибирається принцип оптимальності, у блоці 5 – на основі формально-математичних процедур розв'язуються задачі вибору; з практичної точки зору – блоки 4 і 5 доцільно розглядати сумісно.

Будемо вважати, що в таблиці 1.1 стани природи рівноймовірні, тоді логічним принципом оптимальності може бути вибір за середньою або сумарною оцінкою альтернатив (і буде вибрано a_4). Не менш логічними будуть такі міркування – при виборі a_1 найгірша оцінка дорівнює 1, a_2 – 3, a_3 – 2, a_4 - 2. Отже, якщо вибрати a_2, то менше за 3 отримати не можна. За таким критерієм буде вибрано (і теж цілком логічно) альтернатива a_2. Найменша залежність від "станів природи" (різниця між найкращою і найгіршою оцінками) гарантується альтернативою a_3. Зверніть увагу, що "логічні" міркування привели до протилежних наслідків.

Нехай тепер стани природи у цій задачі не рівноймовірні – ймовірність стану y_1 $p(y_1)=0.4$; $p(y_2)=0.3$; $p(y_3)=0.2$; $p(y_4)=0.1$. Тоді в за "сумарну оцінку" альтернатив логічно взяти матемтичне сподівання $M(a_i)=\sum_j f(a_i,y_j)p(y_j)$. Маємо: $M(a_1)=5\cdot 0.4+2\cdot 0.3+2\cdot 0.2+0.1=3.7$; $M(a_2)=3.6$; $M(a_3)=2.4$; $M(a_4)=3.4$. Отже, при певних ймовірностях станів природи кращою альтернативою стала альтернатива a_1 (хоча, звичайно, з ймовірністю 0.1 вибір альтернативи a_1 гарантує незагартованому студенту ОРЗ).

Для таблиці 1.2 логічно взяти середню оцінку для кожної альтернативи по кожному постачальнику (нехай усі критерії максимізуються, оцінку "вартості" візьмемо зі знаком мінус) і підрахувати математичне сподівання по розподілу ймовірностей вибору постачальника: $M(a_1)=5\cdot 0.25+5\cdot 0.25+4\cdot 0.5=4.5$; $M(a_2)=5$; $M(a_3)=2.5$. Далі, прийнявши за оцінку кожної альтернативи $M(a_i)$, логічно оцінити її математичним сподіванням з врахуванням ймовірності її реалізації: $\tilde{M}(a_i)=M(a_i)q_i$. Маємо: $\tilde{M}(a_1)=4.5\cdot\frac{2}{7}=\frac{9}{7}$; $\tilde{M}(a_2)=\frac{10}{7}$; $\tilde{M}(a_3)=\frac{7.5}{7}$. Таким чином, буде вибрана альтернатива a_2.

Розглянемо "Дилему бандита". Начебто непоганий вибір (a_2,b_2), але тоді у кожного з бандитів виникатиме бажання "відхилитися" від даної ситуації: якщо перший поміняє a_2 на a_1, то його відпустять (перший признається і "топить" колегу). Аналогічно у другого теж виникає бажання відхилитись від ситуації (a_2, b_2). Якщо прийняти за принцип оптимальності "невигідність відхилення", то як не парадоксально, буде вибраною ситуація (a_1, b_1)! Аби бандити могли домовлятись, то можливий вибір ситуації (a_2, b_2) (з мінімізацією спільного терміну ув'язнення).

Контрольні завдання

1. Визначте мету свого життя на наступний тиждень, місяць, рік (можна й більше).
2. Які засоби отримання позитивної оцінки на іспиті з курсу "Теорія прийняття рішень" для вас є допустимими (можливими, бажаними) – регулярне відвідування лекцій, своєчасне виконання лабораторних робіт, відвідування консультацій викладача, «використання інтелекту» сусіда на контрольних роботах і т.п.
3. Конкретизуйте мету "щастя всього людства" (на ваш погляд) та визначте допустимі для вас засоби її досягнення.
4. Як ви інтерпретуєте вислів Ф. Ніцше "хочеш бути щасливим – не мрій".
5. Оцініть засоби досягнення мети "вироблення комуністичного людства" за М. Бухаріним: "Пролетарське присилування в усіх формах, починаючи від розстрілів і закінчуючи трудовою повинністю, є, як не парадоксально звучить, засобом вироблення комуністичного людства з людського матеріалу капіталістичної епохи".
6. Прокоментувати вислів: "Вибирай цілі, враховуючи засоби".
7. Запропонуйте цікаві і корисні приклади, аналогічні описаним табл. 1.1-1.5, які б можна було б привести в наступним виданнях посібника (з посиланням на автора прикладу–див. Розділ 3, § 3).

§2. Бінарні відношення

Нехай задана множина альтернатив (об'єктів) Ω, принцип оптимальності безпосередньо у числовій формі не задано, але експерт для деяких пар об'єктів може вказати, який з об'єктів пари кращий (переважає) за іншого. У цьому випадку говоритимемо, що ці два об'єкти знаходяться у бінарному відношенні. Оскільки, з одного боку, народна мудрість говорить: "Все пізнається у порівнянні" (для вибору кращого потрібно порівнювати), з іншого – найпростіше порівнювати два об'єкти (ще одна народна мудрість : "У трьох соснах заблукав"), бінарні відношення широко використовуються у теорії прийняття рішень.

Бінарним відношенням R на множині Ω називається довільна підмножина *R* декартового добутку $\Omega \times \Omega$ (нагадаймо, що декартовим добутком двох множин *A* і *B* називається множина пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b \in B$). Якщо пара елементів *x* і *y* знаходиться у бінарному відношенні *R*, то будемо позначати цей факт як $(x,y) \in R$ або *xRy*. Якщо потрібно вказати множину Ω, на якій задано бінарне відношення *R*, то будемо писати $R(\Omega)$ або (R,Ω).

Крім безпосереднього задання всіх пар, для котрих виконується відношення *R*, існує три основних способи задання відношень: матрицею, графом, перетинами.

Нехай множина Ω містить *n* елементів: $\Omega = \{x_1,...,x_n\}$. Тоді матриця бінарного відношення *A(R)* задається елементами a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$: $a_{ij}(R) = 1$, якщо $x_i R x_j$; $a_{ij}(R) = 0$, якщо не виконується $x_i R x_j$. З іншого боку, якщо задана матриця *A* розміром $n \times n$ з нулів і одиниць та вибрано нумерацію елементів множини Ω, що складається з *n* елементів, то тим самим на Ω задається деяке відношення *R=R(A)* таке, що $x_i R x_j$, виконано тоді і лише тоді, коли $a_{ij}(R) = 1$.

Задання бінарного відношення *R* графом здійснюється наступним чином. Елементам скінченої множини $\Omega = \{x_1,...,x_n\}$ (при деякій нумерації) ставиться у взаємно-однозначну відповідність вершини графа *G*. Проведемо дугу від вершини x_i до вершини x_j тоді і лише тоді, коли виконується $x_i R x_j$ (при *i=j* дуга (x_i, x_j) перетворюється у петлю при вершині x_i).

Якщо задано довільний граф *G* з *n* вершинами і вибрано нумерацію на множині Ω, то тим самим на Ω задається деяке відношення $R = R(\Omega)$ таке, що $x_i R x_j$ виконується тоді і лише тоді, коли у графі *G* є дуга (x_i, x_j). Граф є геометричним представленням відношення аналогічно тому, як графік є геометричним представленням функції. Геометрична мова корисна, якщо граф достатньо простий. Навпаки, вивчати й описувати складні графи з великою кількістю вершин часто зручно у термінах відношень.

Оскільки у багатьох практичних випадках ЗПР кількість альтернатив скінченна (або стає скінченною після попереднього аналізу інформації), то попередні способи задання бінарного відношення широко використовуються (особливо наочним є задання графом).

Універсальним способом задання відношень (зокрема, на нескінченних областях) є задання за допомогою перетинів.

Верхнім перетином $R^{+}(x)$ називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(y, x) \in R$: $R^{+}(x) = \{y \in \Omega : \ (y, x) \in R\}$. Аналогічно задається *нижній перетин*: $R^{-}(x) = \{y \in \Omega : \ (x, y) \in R\}$.

Відношення називається *порожнім* і позначається $\varnothing$, якщо воно не виконується ні для однієї пари $(x, y) \in \Omega^2 \equiv \Omega \times \Omega$. Для порожнього відношення справедливо:

- ♦ при заданні матрицею $a_{ij}(\varnothing) = 0$ для всіх i, j;
- ♦ граф $G(\varnothing)$ не має дуг;
- ♦ $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \varnothing$ для будь-якого x (далі будемо позначати: $\forall\ x \in \Omega$).

Відношення U називається *повним*, якщо $U = \Omega^2$ (воно виконується для всіх пар $(x, y) \in \Omega^2$). Для повного відношення U справедливо:

- ♦ $a_{ij}(U) = 1$ для $\forall\, i,j$;
- ♦ граф $G(U)$ містить всі дуги і всі петлі;
- ♦ $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \Omega$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Відношення E називається *діагональним* (або відношенням рівності або одиничним відношенням), якщо xEy тоді і лише тоді, коли $x=y$ (позначатимемо: $xEy \Leftrightarrow x=y$). Для діагонального відношення виконується:

- ♦ $a_{ij}(E) = 1$ при $i=j$; $a_{ij}(E) = 0$ при $i \neq j$;
- ♦ граф $G(E)$ має петлі при всіх вершинах, інші дуги відсутні;
- ♦ $R^{+}(x) = R^{-}(x) = \{x\}$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Відношення $\overline{E}$ називається *антидіагональним*, якщо $x\overline{E}y \Leftrightarrow x \neq y$. Для антидіагонального відношення $\overline{E}$ виконується:

- ♦ $a_{ij}(\overline{E}) = 0$ при $i=j$; $a_{ij}(\overline{E}) = 1$ при $i \neq j$;

- граф $G(\overline{E})$ має всі дуги, петлі відсутні;
- $R^+(x) = R^-(x) = \Omega \setminus \{x\}$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Нагадаємо основні операції над відношеннями, вважаючи, що всі вони задані на одній і тій же множині Ω.

Відношення R_1 і R_2 *рівні* ($R_1 = R_2$), якщо $xR_1y \Leftrightarrow xR_2y$, $\forall\ (x, y) \in R_1, R_2$.

Відношення R_1 *вкладається* у відношення R_2 (позначається $R_1 \subseteq R_2$), якщо з xR_1y випливає xR_2y.

Відношення R_1 *строго вкладається* у відношення R_2 ($R_1 \subset R_2$), якщо $R_1 \subseteq R_2$ і $R_1 \neq R_2$.

Очевидно, що з $R_1 \subseteq R_2$ випливає $a_{ij}(R_1) \leq a_{ij}(R_2)$ для $\forall\, i,j$; $R_1^+(x) \subseteq R_2^+(x)$, $R_1^-(x) \subseteq R_2^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* до відношення *R*, якщо $\overline{R} = \Omega^2 \setminus R$, тобто воно виконується для тих і лише тих пар, для яких не виконується відношення *R*. Очевидно, що:

- $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R)$ для $\forall\, i,j$;
- $\overline{R}^+(x) = \Omega \setminus R^+(x)$, $\overline{R}^-(x) = \Omega \setminus R^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$;
- у графі $G(\overline{R})$ маються ті і лише ті дуги, котрі відсутні у графі *G(R)*.

Легко бачити, що $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$, антидіагональне відношення $\overline{E}$ є доповненням діагонального відношення *E*.

В загальному випадку $\overline{\overline{R}} = \Omega^2 \setminus (\Omega^2 \setminus R) = R$.

Перетином відношень R_1 і R_2 (позначається $R_1 \cap R_2$) називається відношення, що визначається перетином відповідних підмножин з Ω^2.

Легко перевірити, що для будь-яких R_1 і R_2:

$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = a_{ij}(R_1) \wedge a_{ij}(R_2)$ для $\forall\, i,j$, де $\wedge$ – знак кон'юнкції;

$(R_1 \cap R_2)^+(x) = R_1^+(x) \cap R_2^+(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Аналогічно визначається *об'єднання* $R_1 \cup R_2$, для якого справедливо:

$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = a_{ij}(R_1) \vee a_{ij}(R_2)$ для $\forall\, i,j$, де $\vee$ – знак диз'юнкції;

$(R_1 \cup R_2)^-(x) = R_1^-(x) \cup R_2^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Оберненим до відношення *R* називається відношення R^{-1}, що визначається умовою: $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$.

Очевидно, що для оберненого відношення R^{-1} виконується:

- ♦ $a_{ij}\left(R^{-1}\right)=a_{ji}(R)$ для $\forall\, i,j$;
- ♦ граф $G\left(R^{-1}\right)$ отримують з графа *G(R)* зміною направлення всіх дуг (зокрема петлі залишаються, нові не добавляються);
- ♦ $\left(R^{-1}\right)^{+}(x)=R^{-}(x)$, $\left(R^{-1}\right)^{-}(x)=R^{+}(x)$.

Оскільки за визначенням $x\left(R^{-1}\right)^{-1}y \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$, то $\left(R^{-1}\right)^{-1}=R$. Аналогічно легко показати, що $\left(\overline{R^{-1}}\right)=\left(\overline{R}\right)^{-1}$.

Двоїстим до *R* називається відношення $R^{d}=\left(\overline{R^{-1}}\right)$ або, у силу попереднього, $R^{d}=\left(\overline{R}\right)^{-1}$. Маємо $\left(R^{d}\right)^{d}=\overline{\left(\overline{R^{-1}}\right)^{-1}}=\overline{\left(\left(\overline{R}\right)^{-1}\right)^{-1}}=\overline{\overline{R}}=R$. Використовуючи правило де Моргана легко показати, що $\left(R_1 \cup R_2\right)^{d}=R_1^{d} \cap R_2^{d}$, $\left(R_1 \cap R_2\right)^{d}=R_1^{d} \cup R_2^{d}$. Для того, щоб перейти від графа *G(R)* до графа $G\left(R^{d}\right)$, необхідно:

- ♦ видалити з графа *G(R)* усі пари протилежних дуг і усі петлі;
- ♦ з'єднати вершини *i, j* дугами (i,j), (j,i), якщо вони не з'єднані у *G(R)*;
- ♦ добавити петлі (i,i), котрі були відсутні у *G(R)*.

Добутком відношень R_1 і R_2 називається відношення $R=R_1 \cdot R_2$, що визначається наступним чином: існує $z \in \Omega$ таке, що xR_1z і zR_2y. Для добутку відношень виконується асоціативний закон: $\left(R_1 \cdot R_2\right) \cdot R_3=R_1 \cdot \left(R_2 \cdot R_3\right)$, тобто добуток $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ визначається однозначно. Зокрема, $R \cdot R \cdot R=R^{3}$. Легко показати, що матриця добутку відношень $A\left(R_1 \cdot R_2\right)=A\left(R_1\right) \cdot A\left(R_2\right)$, де добуток матриць $A^{1}=A\left(R_1\right)$ і $A^{2}=A\left(R_2\right)$ визначається формулою: $a_{ik}=\overset{n}{\underset{j=1}{\vee}}\left(a_{ij}^{1} \wedge a_{jk}^{2}\right)$.

Відношення $\left(R_1,\Omega_1\right)$ називається *звуженням* відношення (R,Ω) на множину Ω_1, якщо $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і $R_1=R \cap \Omega_1^{2}$. Граф $G\left(R_1\right)$ відношення $\left(R_1,\Omega_1\right)$ – це підграф графа *G(R)*, що породжується множиною вершин $\Omega_1 \subseteq \Omega$.

Нехай на множинах Ω_1 та Ω_2 задані відповідні відношення R_1 та

R_2. Відношення (R_1,Ω_1) і (R_2,Ω_2) називаються *ізоморфними*, якщо існує взаємно-однозначне відображення φ: $\Omega_1 \to \Omega_2$, що $xR_1y \Leftrightarrow \varphi(x)R_2\varphi(y)$, φ при цьому називається *ізоморфізмом* (R_1,Ω_1) і (R_2,Ω_2).

Відображення φ: $\Omega_1 \to \Omega_2$ називається *гомоморфізмом* (R_1,Ω_1) у (R_2,Ω_2), якщо $xR_1y \Rightarrow \varphi(x)R_2\varphi(y)$.

Приведемо основні властивості бінарних відношень, що необхідні для аналізу задач прийняття рішень.

Рефлексивність. Відношення R називається рефлексивним, якщо для $\forall x$, xRx, іншими словами: $E \subseteq R$, де E – діагональне відношення. У матриці $A(R)$ рефлексивного відношення на головній діагоналі стоять одиниці; у графі $G(R)$ при кожній вершині мається петля; $x \in R^+(x)$, $x \in R^-(x)$ для $\forall$ $x \in \Omega$.

Антирефлексивність. Відношення R називається антирефлексивним, якщо з xRy випливає $x \neq y$, іншими словами: $R \subseteq \overline{E}$. У матриці $A(R)$ антирефлексивного відношення на головній діагоналі стоять нулі; у графі $G(R)$ відсутні петлі; $x \notin R^+(x)$, $x \notin R^-(x)$ для $\forall$ $x \in \Omega$. Легко показати, що якщо відношення R рефлексивне, то R^d антирефлексивне; якщо R – антирефлексивне, то R^d – рефлексивне.

Симетричність. Відношення R називається симетричним, якщо з xRy випливає yRx, іншими словами: $R \subseteq R^{-1}$. Матриця $A(R)$ симетричного відношення R симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i,j$); у графі $G(R)$ разом з кожною дугою (x,y) входить і дуга (y,x); $R^+(x) = R^-(x)$ для $\forall$ $x \in \Omega$. З визначення симетричного відношення ($R \subseteq R^{-1}$) випливає, що $R^{-1} \subseteq \left(R^{-1}\right)^{-1} = R$, отже необхідною й достатньою умовою симетричності відношення є умова $R = R^{-1}$.

Асиметричність. Відношення R називається асиметричним, якщо з xRy випливає $y\overline{R}x$, іншими словами: $R \cap R^{-1} = \varnothing$. У матриці $A(R)$ асиметричного відношення $a_{ij}(R) \wedge a_{ji}(R) = 0$ для $\forall i,j$; граф $G(R)$ не може мати одночасно дуг (x,y) і (y,x); для $\forall$ $x \in \Omega$ і $\forall$ $y \in R^-(x)$, $x \notin R^-(y)$. Якщо відношення R асиметричне, то воно антирефлексивне. Дійсно, нехай для деякого x виконується xRx, тоді $xR^{-1}x$ і

$x\left(R \cap R^{-1}\right)x$, тобто $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$, що суперечить асиметричності.

Антисиметричність. Відношення *R* називається антисиметричним, якщо з *xRy* і *yRx* випливає *x=y* або $R \cap R^{-1} \subseteq E$. У матриці *A(R)* антисиметричного відношення для $i \neq j$, $a_{ij}(R) \wedge a_{ji}(R) = 0$; граф *G(R)* не може містити одночасно дуги (x, y) і (y, x) при $x \neq y$; для $\forall\ x \in \Omega$ і $y \in R^{-}(x)$, $x \neq y$, $x \notin R^{-}(y)$.

Транзитивність. Відношення *R* називається транзитивним, якщо з *xRz* і *zRy* випливає *xRy* або $R^2 \subseteq R$. У матриці *A(R)* транзитивного відношення для $\forall\, i, k$ $\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(R) \wedge a_{jk}(R)\right) \leq a_{ik}(R)$; у графі *G(R)* існує дуга (x, y), якщо існує шлях з *x* в *y*; для $\forall\ x \in \Omega$ і $y \in R^{+}(x)$ $R^{+}(y) \subseteq R^{+}(x)$. За індукцією для транзитивного відношення *R* маємо: з xRz_1, $z_1 R z_2$, …, $z_{k-1} R y$ випливає *xRy*. Якщо транзитивне відношення *R* є рефлексивним, то $E \subseteq R$, звідки $E \cdot R \subseteq R \cdot R$, отже, $R = R^2$.

Ациклічність. Відношення *R* називається ациклічним, якщо з xRz_1, $z_1 R z_2$,…, $z_{k-1} R y$ випливає $x \neq y$. Легко показати, що ациклічне відношення асиметричне; антирефлексивне транзитивне відношення є ациклічним. Якщо точки *x* і *y* в графі ациклічного відношення з'єднані шляхом, то у ньому не має дуги (y, x); якщо $z_1 \in R^{-}(x)$, $z_2 \in R^{-}(z_1)$, …, $y \in R^{-}(z_{k-1})$, то $x \notin R^{-}(y)$ (аналогічні співвідношення виконуються для верхніх перерізів). Ациклічність і транзитивність відношень особливо важливі у теорії вибору та прийняття рішень, так як ці властивості виражають деякі природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт *x* у якомусь розумінні кращий за *z*, об'єкт *z* кращий за *y*, то природно вважати, що *y* не кращий за *x* (ациклічність), а у деяких випадках *x* буде кращим за *y* (транзитивність).

Негативна транзитивність. Відношення *R* називається негативно транзитивним, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

Сильна транзитивність. Відношення *R* називається сильно транзитивним, якщо воно одночасно транзитивне і негативно транзитивне. Структуру сильно транзитивних відношень визначає наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай (R, Ω) – сильно транзитивне відношення на

Ω, $|\Omega| < \infty$. Тоді існує розбиття $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$ таке, що: *xRy*, $x \in \Omega_i$, $y \in \Omega_j$, *i*<*j*; звуження відношення *R* на будь-яке із Ω_i є або порожнім або повним на Ω_i.

Зв'язність. Відношення *R* називається зв'язним, якщо виконується $xRy \vee yRx$, тобто між будь-якими вершинами *x* і *y* існують дуги (зокрема, петлі).

Використаємо розглянуті властивості для виділення відношень, важливих для теорії вибору та прийняття рішень.

Відношення еквівалентності (еквівалентність). Відношення *R* називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне (позначення "$\cong$"). Нехай задано розбиття $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Введемо на Ω наступне відношення *R*: *xRy* тоді і лише тоді, коли існує підмножина Ω_i, що містить *x* і *y*. Легко перевірити, що задання еквівалентності на деякій підмножині Ω рівносильне розбиттю на класи еквівалентних один одному елементів. Навпаки, будь-яке розбиття Ω визначає відповідну йому еквівалентність.

Відношення нестрогого порядку (нестрогий порядок). Відношення *R* називається відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне (позначення – "$\preceq$").

Відношення строгого порядку (строгий порядок). Відношення *R* називається відношенням строгого порядку, якщо воно антирефлексивне, асиметричне і транзитивне (позначення – "$\prec$"). Якщо $\preceq$ – нестрогий порядок на Ω, то йому можна зіставити строгий порядок $\prec$, що визначається наступним чином: $x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \wedge x \neq y$. Навпаки, якщо $\prec$ – строгий порядок на Ω, то йому можна зіставити нестрогий порядок $\preceq$ наступним чином: $x \preceq y \Leftrightarrow x \prec y \vee x = y$. Отже, нестрогому порядку однозначно відповідає строгий порядок (і навпаки). Тому зазвичай за основу береться нестрогий порядок, який називається частковим порядком.

Відношення включення (підпорядкованості). Нехай на множині $B(\Omega)$ всіх підмножин фіксованої множини Ω задане відношення *R* наступним чином: $XRY \Leftrightarrow X \subseteq Y$. Таке відношення є частковим порядком, про що свідчить наступна теорема.

Теорема 2.2. Довільний частковий порядок на множині Ω ізоморфний звуженню відношення "включення" на деяку підмножину $B(\Omega)$, тобто існує таке відображення $\Theta: \Omega \to B(\Omega)$, що $x \preceq y \Leftrightarrow \Theta(x) \preceq \Theta(y)$.

Відношення лінійного порядку (лінійний порядок). Частковий порядок на Ω називається лінійним порядком, якщо він задовольняє умові зв'язності, тобто виконується одна з трьох умов: $x \prec y$, $x=y$, $x \succ y$.

Відношення домінування (домінування). Відношення R називається домінуванням, якщо воно антирефлексивне й асиметричне. Отже, строгий частковий порядок – це частинний випадок відношення домінування (з додатковою властивістю транзитивності).

Відношення подібності (толерантність). Відношення R називається відношенням подібності, якщо воно рефлексивне й симетричне (позначення – "$\approx$"). Отже, *еквівалентність* – частинний випадок подібності (з додатковою властивістю транзитивності).

Відношення нестрогої переваги (перевага). Відношення "$\geq$" називається перевагою, якщо воно задовольняє властивості рефлексивності.

Отже, відношення подібності, у свою чергу, є частинним випадком відношення переваги. Рефлексивність відношень нестрогої переваги відображає той природний факт, що будь-яка альтернатива є не гіршою за себе. У свою чергу, можна узагальнити відношення часткового порядку (строгого часткового порядку), відмовившись від властивості антисиметричності (асиметричності), отримавши відношення *квазіпорядку (строгого квазіпорядку)*. Відмітимо, що відношення строгого квазіпорядку і строгого часткового порядку співпадають, оскільки з антирефлексивності та транзитивності випливає асиметричність: якщо $xRy \wedge yRx$, то xRx (із транзитивності), що невірно (R – антирефлексивне). Отже, одне з відношень xRy або yRx не виконується, тобто R – асиметричне.

Введені відношення зведемо у таблицю 2.1.

Якщо принципи оптимальності (Блок 4 у схемі ЗЗПР) задаються бінарним відношенням, то відповідним чином здійснюється структурування множини альтернатив (Блок 5):

Табл. 2.1.

Назва \ Властивість	Рефлексивність	Антирефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричн.	Транзитивність	Зв'язність
Перевага	*						
Подібність (толерантність)	*		*				
Еквівалентність	*		*			*	
Квазіпорядок	*					*	
Впорядкування	*					*	*
Частковий порядок	*				*	*	
Лінійний порядок	*				*	*	*
Строгий квазіпорядок		*				*	
Строгий порядок		*			*	*	
Домінування		*		*			
Строгий частковий порядок		*		*		*	
Строгий лінійний порядок		*		*		*	*

♦ розбиття на класи (наприклад, використовуючи теореми 2.1, 2.2);

♦ упорядкування (за відповідними відношеннями порядку). Вибір кращого (кращих) елементів множини здійснюється за допомогою поняття *R* – оптимальності.

Визначення R – максимуму (мінімуму). Елемент $x \in \Omega$ називається максимумом за відношенням *R* (*R* – максимумом), якщо *xRy* для $\forall\ y \in \Omega$. Аналогічно визначається *R* – мінімум *x*: *yRx* для $\forall\ y \in \Omega$. *R*– максимуми і *R*– мінімуми можуть як існувати, так і ні, у випадку існування можуть бути не єдиними. Так, для відношення "більше або рівне" на множині дійсних чисел не існує ні максимуму, ні мінімуму.

Визначення R– мажоранти (міноранти). Елемент $x \in \Omega$ називається мажорантою за відношенням *R* (*R*– мажорантою), якщо $y\overline{R}x$ для $\forall\ y \in \Omega$. Аналогічно визначається *R*– міноранта $x \in \Omega$: $x\overline{R}y$ для $\forall\ y \in \Omega$. Позначимо через $\Omega^{+}(R)$ – множину *R*– максимумів, $\Omega_{+}(R)$ – *R*– мажорант, $\Omega^{-}(R)$ – *R*– мінімумів, $\Omega_{-}(R)$ – *R*– мінорант.

Теорема 2.1. $\Omega^{+}(R) = \Omega^{-}(R^{-1})$, $\Omega^{-}(R) = \Omega^{+}(R^{-1})$, $\Omega_{+}(R) = \Omega_{-}(R^{-1})$,

$\Omega_-(R)=\Omega_+\left(R^{-1}\right)$.

Доведення. Доведемо першу нерівність (інші – аналогічно). Нехай $x\in\Omega^+(R)\Leftrightarrow xRy,\ \forall\ y\in\Omega\Leftrightarrow\ yR^{-1}x,\ \forall\ y\in\Omega\Leftrightarrow\ x\in\Omega^-\left(R^{-1}\right)$.♦

Теорема 2.2. $\Omega^+(R)=\Omega_+\left(R^d\right),\ \Omega^-(R)=\Omega_-\left(R^d\right)$.

Доведення. $x\in\Omega^+(R)\Leftrightarrow xRy,\ \forall\ y\in\Omega\Leftrightarrow\ yR^{-1}x$, $\forall\ y\in\Omega\Leftrightarrow\ y\left(\overline{R^{-1}}\right)x,\ \forall\ y\in\Omega\Leftrightarrow\ yR^dx\Rightarrow x\in\Omega_+\left(R^d\right)$. Співвідношення $\Omega^-(R)=\Omega_-\left(R^d\right)$ доводиться аналогічно.♦

Множина $\Omega_+(R)$ грає важливу роль у теорії вибору. У цій теорії вона називається також множиною недомінованих за R елементів; елементи, що входять у множину $\Omega_+(R)$, називаються також R – оптимальними. Множину R – оптимальних елементів позначатимемо через Ω^R, множину максимальних елементів – Ω_R.

Максимальним ланцюгом по відношенню R, заданому на Ω, називається найкоротша послідовність $x_1,\ldots,x_m$ така, що x_iRx_{i+1}, $i=\overline{1,m-1}$.

Теорема 2.3. Гомоморфізм φ відношення (R,Ω) у лінійний порядок існує для довільного ациклічного R; $|\varphi(\Omega)|\geq m$, де m – довжина максимального ланцюга в Ω.

Доведення. Нехай Ω_1^R – множина недомінованих за R елементів Ω, тобто $\Omega_1^R=\Omega^R$. Покладемо $\Omega_2^R=\left(\Omega\setminus\Omega_2^R\right)^R$, $\Omega_3^R=\left(\Omega\setminus\left(\Omega_1^R\setminus\Omega_2^R\right)\right)^R$, …, $\Omega_s^R=\left(\Omega\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s-1}\Omega_i^R\right)^R$, $\Omega\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s}\Omega_i^R=\varnothing$. Гомоморфізм φ можна задати формулою $\varphi(x)=s-i$, якщо $x\in\Omega_i^R$.♦

Контрольні завдання до §2

1. Скільки існує різних відношень з множини A в множину B, якщо $|A|=n$, $|B|=m$ (будемо говорити: n-множина і m-множина).

2. Скільки є таких відношень R з n-множини в m-множину, що: a) $\forall x\ \ \exists y\ \ (xRy)$, b) $\forall y\ \ \exists x\ \ (xRy)$.

3. Яку особливість має граф відношення R з A в B, якщо:

3.1. $xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$; 3.2. $xRy \wedge zRz \Rightarrow x = z$;

3.3. $\forall x \ \exists y \ (xRy)$; 3.4. $\exists y \ \forall x \ (xRy)$; 3.5. $\forall y \ \exists x \ (xRy)$;

3.6. $\exists x \ \forall y \ (xRy)$; 3.7. $\overline{\forall} x \ \exists y \ (xRy)$; 3.8. $\forall x \ \overline{\exists} y \ (xRy)$;

3.9. $\overline{\forall} y \ \exists x \ (xRy)$; 3.10. $\forall y \ \overline{\exists} x \ (xRy)$; 3.11. $\overline{\exists} x \ \forall y \ (xRy)$;

3.12. $\exists x \ \overline{\forall} y \ (xRy)$.

4. Скільки існує різних рефлексивних, симетричних, антисиметричних відношень у n-елементній множині?

5. Довести, що максимум по частковому порядку не є єдиним.

6. Навести приклади відношень:

6.1. Рефлексивного і симетричного, але не транзитивного;

6.2. Рефлексивного і транзитивного, але не симетричного;

6.3. Симетричного і транзитивного, але не рефлексивного.

7. Довести, що якщо R-відношення часткового порядку, то R^{-1} також є частковим порядком.

8. Довести, що для лінійно впорядкованої множини поняття мажоранти (міноранти) і максимума (мінімума) співпадають.

9. Довести, що серед будь-яких шести осіб знайдуться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих.

3. Функції вибору

Нехай задано скінченну множину альтернатив $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ і ОПР, користуючись своїм особистим уявленням про кращі альтернативи, для кожної множини $X \subseteq \Omega$ вибирає підмножину кращих *C(X)*. Єдина вимога, яка накладається на вибір: $C(X) \subseteq X$ – кращі альтернативи можна вибирати з того, що пропонують, зокрема, $C(\varnothing) = \varnothing$.

Уже на множині з двох альтернатив $\Omega = \{x_1, x_2\}$ можна зробити 16 виборів! Дійсно, коли пропонується одна альтернатива – виборів два (вибирати її або не вибирати), коли пропонується дві альтернативи – виборів чотири (не вибирати жодної, вибирати одну (2 вибори) і вибирати обидві). Отже, всього виборів $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$. На множині з 7 альтернатив виборів більше за 10^{120} (це число має порядок кількості можливих шахових партій, що, у свою чергу, має порядок кількості атомів у "видимому всесвіті"!). Тобто описувати явно вибір, задаючи вибір кращих альтернатив *C(X)* на кожній підмножині *X* "універсальної" множини Ω, неможливо вже у найпростіших випадках! Що ж робити? Як здійснювати "розумний", "логічний" і т.і. вибір? Один із шляхів цього – у блоці 4 загальної схеми задавати "принципи логічності" і вивчати результуючий вибір (множини альтернатив, що задовольняють цим принципам). Наприклад, нехай Ω – групи факультету кібернетики третього курсу. "Логічно" вважати, що краща група на курсі повинна бути кращою на своїй спеціальності. Формально ця умова (умова "спадковості" – див. нижче) записується наступним чином: $Y \subseteq X$, $x \in Y \cap C(X) \Rightarrow x \in C(Y)$. Конкурс на кращу групу, у якому краща група курсу виявиться не кращою групою на своїй спеціальності, навряд чи можна вважати об'єктивним, незалежно від того, за якими показниками підводяться його підсумки.

Будемо називати *функцією вибору* C [3], задану на Ω, відображення, що зіставляє кожній підмножині $X \subseteq \Omega$ її підмножину $C(X)$, тобто $C:\ 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$, $C(X) \subseteq X$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Вище ми відмічали, що вибір найпростіше здійснювати, порівнюючи дві альтернативи, тобто на Ω задавати деяке бінарне відношення *R*. Тоді розглядаючи звуження цього бінарного відношення на будь-яку підмножину $X \subseteq \Omega$ можна задати дві функції: $C^R(X) = \{x \in X \mid \forall y \in X\ \ y\overline{R}x\}$ – множина мажорант на множині *X*; $C_R(X) = \{x \in X \mid \forall y \in X\ \ xRy\}$ – множина максимумів на *X*. Функція вибору C^R називається *блокуванням*, C_R – *перевагою*.

З властивостей бінарних відношень безпосередньо випливає

Теорема 3.1. Функції вибору C^R і C_R зв'язані співвідношеннями $C^R = C_{R^d}$, $C_R = C^{R^d}$, де R^d – двоїсте до *R*.

Таким чином, з двох функцій вибору, що породжуються заданим бінарним відношенням *R*, досить розглядати одну. Далі будемо зіставляти бінарному відношенню *R* функцію блокування C^R і називати її "функцією вибору, породжену бінарним відношенням *R*". Такі функції називаються *нормальними*. Довільна функція вибору *C* не обов'язково є нормальною. Розглянемо наступну функцію вибору на

$$\Omega = \{x, y\}: C(x) = x,\ C(y) = \varnothing,\ C(x, y) = \{x, y\} \tag{3.1}$$

(прийнято писати $C(x) = x$ замість формального $C(\{x\}) = \{x\}$).

Нехай існує бінарне відношення *R*, яке породжує функцію вибору

(3.1). Тоді із $C^R(y)=\varnothing$ випливає, що yRy вірно й невірно $y\overline{R}y$, тобто $y\notin C^R(x,y)$, що суперечить (3.1). На мові графів усе дуже наглядно: оскільки $C(y)=\varnothing$, вершина y повинна блокуватись (при ній повинна бути петля), а, з іншого боку, вершина y не повинна блокуватись, оскільки $C(x,y)=\{x,y\}$.

Приведемо всі, окрім порожньої, функції вибору на множині з двох елементів $\Omega=\{x,y\}\equiv\{\text{сир},\text{ковбаса}\}$ (табл. 3.1). Можна змістовно описати всі можливі вибори. Наприклад, $C(x)=C(y)=C(x,y)=\varnothing$ – "піст"; $C(x)=x$, $C(y)=\varnothing$, $C(x,y)=x$ – "вегетаріанець"; $C(x)=x$, $C(y)=y$, $C(x,y)=\{x,y\}$ – "студент"; $C(x)=x$, $C(y)=y$, $C(x,y)=\varnothing$ – "буриданів осел" і т.д.

Цікаво відмітити, що не існує чисельної оцінки кількості нормальних функцій вибору при фіксованому *n*. Відмітимо також, що одну і ту ж нормальну функцію вибору можуть породжувати різні бінарні відношення. Доцільно в останньому випадку виділяти "мінімальне" відношення, граф якого має мінімальне число дуг.

Для формального описання класу нормальних функцій вибору визначимо для $X\subseteq\Omega$ покриваюче сімейство $\{X_i\}$, $X_i\subseteq\Omega$, $i\in J$, таке, що $X\subseteq\bigcup\limits_{i\in J}X_i$.

Теорема 3.2. Функція вибору *C* є нормальною тоді і лише тоді, коли для будь-якої множини $X\subseteq\Omega$ і будь-якого покриваючого її сімейства $\{X_i\}_{i\in J}$ виконується:

$$X\setminus C(X)\subseteq X\setminus\bigcap_{i\in J}C(X_i). \tag{3.2}$$

Отже, якщо функція вибору нормальна, то всякий об'єкт із *X*, що не є кращим у *X*, не є кращим хоча б для однієї множини з покриваючого сімейства. Зокрема, якщо елемент не вибирається з деякої підмножини *X*, то він не повинен вибиратись з будь-якої множини, що її містить.

Доведення. *Необхідність.* Нехай *C* – нормальна, тобто існує бінарне відношення *R* таке, що $C=C_R$. Нехай $x\in X\setminus C_R(X)\Rightarrow x\in X$, $x\notin X\setminus C_R(X)\Rightarrow\exists y\in X:\ yRx$ ($\exists$ – квантор існування).

Табл. 3.1.

$C(x)$	$C(y)$	$C(x,y)$	R	R^d
x	y	$\{x,y\}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
x	y	x	$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
x	y	y	$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$
x	y	$\varnothing$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
x	$\varnothing$	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
$\varnothing$	y	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
x	$\varnothing$	x	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
x	$\varnothing$	y	Не існує	Не існує
$\varnothing$	y	y	$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
$\varnothing$	y	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
x	$\varnothing$	$\varnothing$	$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$
$\varnothing$	y	$\varnothing$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{x,y\}$	Не існує	Не існує
$\varnothing$	$\varnothing$	x	Не існує	Не існує
$\varnothing$	$\varnothing$	y	Не існує	Не існує

Нехай y належить деякій множині X_i з покриваючого сімейства. Тоді:

$$\exists y \in X_i: \ yRx \Rightarrow x \notin C_R(X_i) \Rightarrow x \notin \bigcap_i C_R(X_i) \Rightarrow x \in X \setminus \bigcap_i C(X_i).$$

Достатність. Нехай C – функція вибору, що задовольняє (3.2). Задамо відношення R формулою: $R = \bigcup_{X \subseteq \Omega} C(X)$. Покажемо, що $C = C_R$. Нехай $xRy \Rightarrow \forall X: \ x \in C(X), \ y \in X, \ C(X) \subseteq X \Rightarrow x, y \in X$: $xRy \Rightarrow x \in C_R(x)$. Тобто $C(x) \subseteq C_R(X)$.

Покажемо, що $C_R(X) \subseteq C(X), \ \forall x \in \Omega$. Нехай

$$\begin{cases} x \in C_R(X) \Rightarrow xRy, \forall y \in X_i, \ \forall i \Rightarrow x \in C(X_i), \\ x \notin C(X) \Rightarrow \text{із (3.2) } \exists i: x \notin C(X_i). \end{cases}$$

З отриманого протиріччя випливає: $C_R(X) \subseteq C(X)$. Теорему доведено♦

Теорема 3.3. $C^R(X) \neq \varnothing$ для $\forall X \subseteq \Omega$ тоді і лише тоді, коли відношення R є ациклічним.

Доведення. *Достатність*. Нехай R – ациклічне бінарне відношення, $x \in X \subseteq \Omega$. Якщо для всіх $y \in X$, $y\overline{R}x$, то $x \in C(X)$ і тому $C(X) \neq \varnothing$. Інакше, знайдеться $y^* \in X$ такий, що y^*Rx. При цьому або $y^* \in C(X)$, або знайдеться z таке, що zRy^*.

Продовжуючи цей процес, знайдемо $v \in X$ таке, що для всіх $w \in X$ виконується $w\overline{R}v$, тобто $v \in C(X)$. Інакше у силу скінченності X отримаємо протиріччя з ациклічністю R. Таким чином, при ациклічному R вибір $C^R(X)$ не порожній.

Необхідність. Нехай $C^R(X) \neq \varnothing$ для $\forall X \subseteq \Omega$, але R не є ациклічним. Це означає, що існують $x_i \in \Omega$ такі, що $x_{i+1}Rx_i$, $i = \overline{1, k-1}$, і x_1Rx_k. Але тоді із визначення C^R маємо, що $C(X) = \varnothing$, де $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Отримане протиріччя показує, що бінарне відношення R, що породжує функцію вибору C^R, є ациклічним. Теорему доведено.♦

Отже, кожному бінарному відношенню R на Ω відповідає деяка функція вибору C^R на Ω; різним бінарним відношенням R можуть відповідати однакові C^R; функції вибору C, котрі співпадають з C^R

для деякого бінарного відношення (R,Ω), називаються нормальними; не всі функції вибору нормальні.

Функція вибору *C*, визначена на множині Ω з *n* елементів, має множину визначення з 2^n елемента (кількість підмножин). Уже для досить малого *n* представлення функції вибору є дуже громіздким.

Зручним апаратом для представлення функцій вибору є булеві функції.

Будь-якій підмножині $X \subseteq \Omega = \{x_1,...,x_n\}$ зіставимо вектор:

$$\beta(X) = (\beta_i(X))_{i=\overline{1,n}}\text{ , де } \beta_i(X) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x_i \in X, \\ 0, \text{ якщо } x_i \notin X. \end{cases}$$

Множині Ω відповідає, зокрема, вектор $\beta(\Omega) = (1,...,1)$ (*n* одиниць), множині $\varnothing$ – вектор $\beta(\varnothing) = (0,...,0)$ (*n* нулів).

Нехай на Ω задано функцію вибору *C*. Розглянемо сімейство з *n* бульових функцій від *n-1* змінної $f_i(\gamma_1,...,\gamma_{n-1}),\, i = \overline{1,n}$, побудованих за правилом:
$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X), \tag{3.3}$$
де $f_i(\beta) = f_i(\beta_1,...,\beta_{i-1},\beta_{i+1},...,\beta_n),\ i \neq 1,\ i \neq n$,
$$f_1(\beta) = f_1(\beta_2,...,\beta_n), \tag{3.4}$$
$$f_n(\beta) = f_n(\beta_1,...,\beta_{n-1}).$$

Логічною формою функції вибору C (ЛФФВ(C)) називається сімейство функцій $\langle f_1,..., f_n \rangle$ від *n-1* змінної, побудованих за формулою (3.3).

Навпаки, якщо задане довільне сімейство бульових функцій $\langle f_1,..., f_n \rangle$ від *n-1* змінної, то співвідношення (3.3) однозначно визначає функцію вибору *C*. Отже, задання функції вибору є еквівалентним заданню ЛФФВ(C).

Розглянемо приклад на побудову ЛФФВ(C).

Нехай $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ і задано функцію вибору *C* наступним чином: $C(x_i) = x_i$, $C(x_i, x_j) = x_k$, де $k = \min\{i, j\}$, $C(\Omega) = x_1$ (див. табл. 3.2). Побудуємо таблиці 3.3-3.5, що задають бульові функції f_i, $i = \overline{1,3}$.

За таблицями 3.3–3.5 побудуємо розклад функцій у досконалу диз'юнктивну нормальну форму: $f_1(\beta_2, \beta_3) \equiv 1$,
$f_2(\beta_1, \beta_3) = \overline{\beta}_1\overline{\beta}_3 \vee \overline{\beta}_1\beta_3 = \overline{\beta}_1(\overline{\beta}_3 \vee \beta_3) = \overline{\beta}_1$, $f_3(\beta_1, \beta_2) = \overline{\beta}_1\overline{\beta}_2$.

Табл.3.2.

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
x_1 x_2 x_3	x_1 x_2 x_3	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)
x_1, x_2 x_1, x_3 x_2, x_3	x_1 x_1 x_2	(1,1,0) (1,0,1) (0,1,1)	(1,0,0) (1,0,0) (0,1,0)
x_1, x_2, x_3	x_1	(1,1,1)	(1,0,0)

Табл.3.3

β_2	β_3	f_1
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Табл.3.4

β_1	β_3	f_2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Табл.3.5

β_1	β_2	f_3
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Табл.3.6

β_2	β_3	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Табл.3.7

β_1	β_3	f_2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Табл.3.8

β_1	β_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Використовуючи табл. 3.6–3.8 і формулу (3.3), отримаємо табл.3.9.

Розглянемо приклад на "відновлення" функції вибору за її логічною формою. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$ і задано сімейство бульових функцій: $f_1(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_1$, $f_2(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_2$, $f_3(\gamma_1,\gamma_2)\equiv 0$. Перенумеруємо змінні у відповідності з (3.4): $f_1(\beta_2,\beta_3)=\beta_2$, $f_2(\beta_1,\beta_3)=\beta_3$, $f_3(\beta_1,\beta_2)\equiv 0$, отримані функції зведемо у табл. 3.6–3.8.

Табл 3.9

X	β_1	β_2	β_3	$\beta_1\ f_1$	$\beta_2\ f_2$	$\beta_3\ f_3$	$C(X)$
x_1	1	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_2	0	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_3	0	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_1, x_2	1	1	0	1	0	0	x_1
x_1, x_3	1	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_2, x_3	0	1	1	0	1	0	x_2
Ω	1	1	1	1	1	0	x_1, x_2

За логічною формою функції вибору легко отримати формулу для кількості всіх функцій вибору, заданих на множині Ω з *n* елементів. Очевидно, що різних бульових функцій від *n-1* змінної $2^{2^{n-1}}$ (кількість наборів змінних довжини *n-1* дорівнює 2^{n-1}, на кожному наборі функція приймає 2 значення), логічна форма функції вибору складається з *n* функцій, отже $\left|C(\Omega)\right| = \left(2^{2^{n-1}}\right)^n = 2^{n2^{n-1}}$.

Представлення функцій вибору (ФВ) їх логічними формами створює єдину основу для дослідження всіх властивостей функцій вибору, їх класифікації та декомпозиції на більш прості.

Операції над функціями вибору.

Функція вибору C_1 *вкладається* у функцію вибору C_2 ($C_1 \subseteq C_2$), якщо $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Об'єднанням ФВ C_1 і C_2 називається функція вибору $C = C_1 \bigcup C_2$, що визначається : $C(X) = C_1(X) \bigcup C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Перетин визначається : $C(X) = C_1(X) \bigcap C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Доповненням до ФВ C називається функція $\overline{C}$, для якої: $\overline{C}(X) = X \setminus C(X),\ \forall\ X \subseteq \Omega$.

Установимо відповідність між введеними операціями над функціями вибору та операціями над ЛФФВ.

Теорема 3.4. Нехай 1) $C_1 \subseteq C_2$; 2) $C = C_1 \bigcup C_2$; 3) $C = C_1 \bigcap C_2$; 4) задано $\overline{C}$. Тоді для $\forall\ i = \overline{1,n}$:1) $f_i^{C_1} \le f_i^{C_2}$; 2) $f_i^C = f_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$;

3) $f_i^C = f_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$; 4) $f_i^{\overline{C}} = \bar{f}_i^C$.

Доведення. 1) Нехай $X \subseteq \Omega$, $x_i \in C_1(X)$. З визначення логічної форми маємо: $\beta_i(X) \wedge f_i^{C_1}(\beta(X)) = 1$. Оскільки $C_1(X) \subseteq C_2(X)$, то $x_i \in C_2(X)$ і, отже, $\beta_i(X) \wedge f_i^{C_2}(\beta(X)) = 1$. Звідси випливає, що $f_i^{C_1} = f_i^{C_2}$. Якщо $x_i \notin C_1(X)$, але $x_i \in C_2(X)$, тоді $\beta_i(X) \wedge f_i^{C_1}(\beta(X)) = 0$ і $f_i^{C_1} = 0 \vee 1 = 1$. Оскільки $f_i^{C_2} = 1$, то маємо $f_i^{C_1} \leq f_i^{C_2}$. 2) Нехай $X \subseteq \Omega$, $x_i \in C_1(X) \bigcup C_2(X)$. В силу (3.3) маємо:

$$\left(\beta_i(X) \wedge f_i^{C_1}(\beta(X))\right) \vee \left(\beta_i(X) \wedge f_i^{C_2}(\beta(X))\right) = 1. \qquad (3.5)$$

Звідси маємо: $\beta_i(X) \wedge \left(f_i^{C_1}(\beta(X)) \vee f_i^{C_2}(\beta(X))\right) = 1$. Отже, з $x_i \in C(X) \Rightarrow \beta_i(X) \wedge f_i^C = 1$. Навпаки, нехай $\beta_i(X) \wedge f_i^C(\beta(X)) = 1$. З (3.5) випливає, що хоча б одна зі складових у (3.5) рівна 1. Тоді $x_i \in C_1(X) \bigcup C_2(X) = C(X)$ і з $f_i \wedge f_i^C = 1 \Rightarrow x_i \in C(X)$. Співвідношення 3), 4) доводяться аналогічно. Теорему доведено.♦

Композицією функцій вибору C_1 і C_2 називається функція вибору $C = C_1 \cdot C_2$, що визначається рівністю: $C(X) = C_2(C_1(X))$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$. Змістовно операція полягає у наступному. Спочатку відбувається вибір у відповідальності з функцією вибору C_1, а потім з $C_1(X)$ відбувається вибір за функцією C_2. Так, з десяти кандидатів у президенти спочатку вибираються двоє, потім вибирається один.

Теорема 3.5. Нехай $C = C_1 \cdot C_2$. Тоді

$$\begin{gathered} f_i^C = f_i^{C_1}(\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\ldots,\beta_n) \wedge \\ f_i^{C_2}(\beta_1 \wedge f_i^{C_1}(\beta_2,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_n),\ldots, \\ \beta_{i-1} \wedge f_{i-1}^{C_1}(\beta_1,\ldots,\beta_{i-2},1,\beta_i,\ldots,\beta_n),\ \beta_{i+1} \wedge f_{i+1}^{C_1}(\beta_2,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+2},\ldots,\beta_n), \\ ,\ldots,\beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta_2,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_{n-1})). \end{gathered} \qquad (3.6)$$

Доведення. Розглянемо $Y = C_1(X)$, тоді

$$\beta(Y) = \left(\beta_1 \wedge f_1^{C_1}(\beta(X)),\ldots,\beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta(X))\right).$$

Побудуємо ЛФФВ функції $C = C_1 \cdot C_2$, підставивши у (3.3) замість $\beta(X)$ вираз $\beta(Y) = \beta(C_1(X))$. Отримаємо: $x_i \in C(X)$ $\Leftrightarrow$ $\left(\beta_i \wedge f_i^{C_1}(\beta(X))\right) \wedge f_i^{C_2}(\beta_1 \wedge f_i^{C_1}(\beta(X))\ ,\ldots,\ \beta_{i-1} \wedge f_{i-1}^{C_1}(\beta(X)), \beta_{i+1} \wedge f_{i+1}^{C_1}(\beta(X)),$

$\ldots, \beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta(X)))$, звідки випливає (3.6).♦

Установимо взаємозв'язок між властивостями функцій і результатів операцій над ними.

Теорема 3.6. Нехай C_1 і C_2 – нормальні функції вибору. Тоді $C_1 \bigcap C_2$ – також нормальна функція вибору.

Доведення. Нехай $C_1 = C^{R_1}$, $C_2 = C^{R_2}$. Доведемо, що $C_1 \bigcap C_2 = C^{R_1 \cup R_2}$. Нехай $X \subseteq \Omega$, $x \in C_1(X) \bigcap C_2(X)$. Тоді з визначення "блокування" маємо: для $\forall\ y \in X$, $y\overline{R}_1 x$, $y\overline{R}_2 x$ або $y(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2)x$. (3.7)

В силу правила де Моргана: $y(\overline{R_1 \cap R_2})x$, (3.8)

звідки $C_1(X) \bigcap C_2(X) \subseteq C^{R_1 \cup R_2}(X)$. Навпаки, нехай $x \in C^{R_1 \cup R_2}(X)$. Тоді для всіх $y \in X$ виконано (3.8), звідки випливає (3.7), тобто $x \in C_1(X) \bigcap C_2(X)$. ♦

Коли ОПР здійснює вибір, він природно хотів би, щоб його результат задовольняв певним "розумним" умовам (наприклад, краща група на курсі повинна бути кращою на своїй спеціальності). Функції, котрі задовольняють певній умові, утворюють деякий "клас функцій, що задовольняють цій умові". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору.

1. Умова *спадковості* (СП): $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \bigcap C(X_2) \subseteq C(X_1)$.

2. Умова *незалежності від відкинутих альтернатив* (умова Неша – Н): $C(X_2) \subseteq X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) = C(X_2)$.

3. Умова *згоди* (З): $\bigcap_k C(X_k) \subseteq C\left(\bigcup_k X_k\right)$.

4. Умова *незалежності вибору від шляху* (умова Плотта – П (квазісуматорність)): $C\left(\bigcup_k X_k\right) = C\left(\bigcup_k C(X_k)\right)$.

5. Умова *суматорності* (СМ): $C\left(\bigcup_k X_k\right) = \bigcup_k C(X_k)$.

6. Умова *мультиплікаторності* (МП): $C\left(\bigcap_k X_k\right) = \bigcap_k C(X_k)$.

7. Умова *монотонності* (М): $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) \subseteq C(X_2)$.

Зміст умов 1–7 очевидний. Кожна з них визначає деякий клас функцій вибору, що задовольняють даній умові. За цими класами збережемо позначення відповідних умов та розглянемо, яким умовам повинні задовольняти логічні форми функцій вибору *C*.

Теорема 3.7. Функція вибору *C* є:

1) спадковою;2) незалежною від відкинутих альтернатив; 3) що задовольняє умові згоди; 4) квазісуматорною; 5) суматорною; 6) мультиплікаторною; 7) монотонною; тоді і лише тоді, коли для $\forall\ i = \overline{1,n}$:

1) $\beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2)$;

2) $\beta_i^2 \wedge f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^2 \wedge f_i(\beta^2) = \beta_i^1 \wedge f_i(\beta^1)$;

3) $\underset{k}{\wedge} f_i(\beta^k) \le f_i(\underset{k}{\vee} \beta^k)$;

Розглянемо випадок *n=2*:

4) $(\beta_i^1 \vee \beta_i^2) \wedge f_i(\beta^1 \wedge \beta^2) = (\beta_i^1 \wedge f_i(\beta^1)) \vee (\beta_i^2 \wedge f_i(\beta^2)) \wedge$
$f_i((\beta_1^1 \wedge f_1(\beta^1)) \vee (\beta_1^2 \wedge f_1(\beta^2)), \ldots, (\beta_n^1 \wedge f_n(\beta^1)) \vee (\beta_n^2 \wedge f_n(\beta^2)))$;

5) $f_i(\beta) \equiv 0 \vee f_i(\beta) \equiv 1$;

6) $f_i\left(\underset{k}{\wedge} \beta^k\right) = \underset{k}{\wedge} f_i(\beta^k)$;

7) $\beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \le f_i(\beta^2)$.

Доведення безпосередньо випливає із представлення відповідних умов з допомогою бульових функцій, що утворюють логічну форму. Для прикладу приведемо доведення умови 1. Із умови спадковості отримуємо: $\beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow \beta_i^1 \wedge (\beta_i^2 \wedge f_i(\beta^2)) \le \beta_i^1 \wedge f_i(\beta^1)$. Якщо $\beta_i^1 = 0$, то маємо тотожність $0 \equiv 0$, якщо $\beta_i^1 = 1$, то $\beta_i^2 = 1$ і маємо нерівність: $f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1)$.♦

Клас нормальних функцій вибору *N* описується такою теоремою.

Теорема 3.8. Функція вибору *C* на $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ є нормальною тоді і лише тоді, коли існує розбиття множини індексів елементів $N = \{\overline{1,n}\}$ на три підмножини J, J_0, J_1 (деякі з них можуть бути порожніми) такі, що:

$$\forall\ i \in J\ \ \exists J_i \subseteq J,\ J_i \ne \varnothing:\ f_i = \underset{k \in J_i}{\wedge} \overline{\beta}_k;$$

$$\forall\ i \in J_0:\ f_i \equiv 0;$$

$$\forall\ i \in J_1:\ f_i \equiv 1.$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай $C \in N$, тобто $\exists R \subseteq \Omega^2$: $C = C^R$. Для $\forall\ x_i$ можлива одна з трьох ситуацій:

$$\exists i_1,...,i_l \in N: \ x_{i_s} R x_i,\ i_s \neq i,\ s = \overline{1,l},\ y\overline{R}x,\ y \notin \{x_{i_1},...,x_{i_l}\};$$

$$x_i R x_i;$$

$$R^+(x_i) = \varnothing.$$

Утворимо множину J з індексів, що відносяться до першої ситуації, множину J_0 – до другої, множину J_1 – до третьої. Очевидно, що множини утворюють необхідне розбиття.

Достатність. Визначимо $R \subseteq \Omega^2$ наступним чином: $x_j R x_i$ для $\forall\ i \in J$ і $\forall\ j \in J_i$; $x_i R x_i$ для $\forall\ i \in J_0$. Очевидно, що $C = C^R$.♦

Розглянемо деякі властивості функцій вибору, котрі є природнім узагальненням властивостей бінарних відношень.

Функція вибору C називається:

- ♦ *рефлексивною*, якщо $C(\{x_i\}) = \varnothing$ для $\forall x_i \in \Omega$;
- ♦ *антирефлексивною*, якщо $C(\{x_i\}) \neq \varnothing$ для $\forall x_i \in \Omega$;
- ♦ *повною*, якщо $C(X) \neq \varnothing$, для $\forall\ X \neq \varnothing$;
- ♦ *транзитивною*, якщо з умови: $C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \neq \varnothing$, $C(X_2 \cup X_3) = C(X_2) \neq \varnothing$ випливає $C(X_1 \cup X_3) = C(X_1)$ $\forall\ X_1,\ X_2,\ X_3$;
- ♦ *ациклічною*, якщо з умови: $C(X_k \cup X_{k+1}) = C(X_k) \neq \varnothing$, $k = \overline{1,n-1}$, випливає: $X_1 \neq X_n$ для $\forall\ X_k$, $k = \overline{1,n}$.

Проілюструємо змістовно умови транзитивності та ациклічності (зміст умов 1–3 очевидний).

Нехай за результатами сесії серед студентів групи *А* і *В* кращими виявились два студенти групи *А*, кращими серед студентів *В* і *С* – 3 студенти з групи *В*. Тоді кращими серед студентів групи *А* і *С* будуть вказані студенти з групи *А*, при цьому вони будуть кращими і серед усіх трьох груп. Відповідна функція вибору ("кращими є студенти з максимальною сумою балів на іспитах") є транзитивною.

Нехай тепер знову кращими серед студентів груп *А* і *В* визнано 2 студенти з групи *А*. Нехай далі взяли залікові книжки студентів однієї з груп *А* або *С* (позначимо цю групу через *Х*). Тоді, якщо серед студентів груп *В* і *Х* стали три студенти з групи *В*, то ясно, що група *Х* не є групою *А*. Відповідна функція вибору ациклічна.

Розглянуті властивості у термінах властивостей логічних форм описуються наступною теоремою.

Теорема 3.9. Функція вибору *C* є: 1) рефлексивною; 2) антирефлексивною; 3)повною; 4) транзитивною; 5) ациклічною тоді і лише тоді, коли для $\forall \ i=\overline{1,n}$:

1) $f_i(0,...,0)=0$; 2) $f_i(0,...,0)=1$; 3) $\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i f_i(\beta)=1$ для $\forall \ \beta$;

4) $(\beta_i^1 \vee \beta_i^2) f_i(\beta_i^1 \vee \beta_i^2) = \beta_i^1 f_i(\beta^1)$, $(\beta_i^2 \vee \beta_i^3) f_i(\beta_i^2 \vee \beta_i^3) = \beta_i^2 f_i(\beta^2)$, $\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \bigvee_{i=1}^{n} \beta_i^2 f_i(\beta^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad (\beta_i^1 \vee \beta_i^3) f_i(\beta_i^1 \vee \beta_i^3) = \beta_i^1 f_i(\beta^1)$;

5) $(\beta_i^k \vee \beta_i^{k+1}) f_i(\beta_i^k \vee \beta_i^{k+1}) = \beta_i^k f_i(\beta^k)$, $i=\overline{1,n}$, $\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i^k f_i(\beta^k)=1$, $k=\overline{1,n-1}$ $\Rightarrow \ \beta^1 \neq \beta^n$.

Розглянемо деякі взаємозв'язки між нормальними функціями вибору, що мають вказані властивості, та бінарними відношеннями з аналогічними властивостями, що їх породжують.

Теорема 3.10. *Якщо* відношення *R*: а) транзитивне; б) ациклічне, то функція вибору C_R є: а) транзитивною; б) ациклічною.

Доведення. а) Нехай $C_R(X \cup Y) = C_R(X) \neq \varnothing$. Це означає: $\forall \ x \in C_R(X)$, $\forall \ y \in Y$: xRy. Аналогічно, $C_R(Y \cup Z) = C_R(Y) \neq \varnothing \ \Leftrightarrow$ $\forall \ y \in C_R(Y)$, $\forall \ z \in Z$: yRz. В силу транзитивності *R* це означає, що $\forall \ x \in C_R(X)$, $\forall \ z \in Z$: xRz, тобто $C_R(X) \subseteq C_R(X \cup Z)$. Звідси випливає, що $\forall \ x \in X \setminus C_R(X) \ \Rightarrow \ x \notin C_R(X \cup Z)$. Нехай $z \in Z \setminus X$ і $z \in C_R(X \cup Z)$. Тоді $\forall \ x \in X$, zRx і, отже, $\forall \ y \in Y$, zRx, тобто $z \in C_R(Y \cup Z)$. Це означає, що $z \in C_R(Y) \subseteq Y$, звідки yRx для $\forall \ x \in X$, що суперечить $C_R(X \cup Y) = C_R(X)$.

б) Нехай $C(X_k \cup X_{k+1}) = C(X_k) \neq \varnothing$, $k=\overline{1,n-1}$, і $X_N = X_1$. Це означає, що існують $x_i \in X_i$, $i=\overline{1,n}$, такі, що $x_i R x_{i+1}$, $i=\overline{1,n-1}$, і $x_n R x_1$, що суперечить ациклічності *R*.♦

Теорема 3.11. *Якщо* *R* – антирефлексивне і C^R – транзитивна функція вибору, то відношення *R* транзитивне.

Доведення. Нехай C^R транзитивна, xRy, yRz. Тоді *C(x,y)=x*,

$C(y,z)=y$, значить, $C(x,z)=x$, тобто xRz і відношення R транзитивне.♦

Теореми 3.9 і 3.11 дозволяють використовувати апарат логічних форм функцій вибору при вивченні класів функцій вибору.

Теорема 3.12. Функція вибору нормальна тоді й лише тоді, коли вона належить перетину класів спадковості та згоди ($N = \text{СП} \bigcap \text{З}$).

Доведення. В силу умов 1 та 3 теореми 3.7 і теореми 3.8 достатньо довести, що бульова функція $g(\alpha_1,...,\alpha_r)$ задовольняє одночасно умовам 1 та 3 теореми 3.7 тоді і лише тоді, коли вона задовольняє умові теореми 3.8.

Необхідність. Нехай g задовольняє умові 3. Тоді при $g \not\equiv 0$:

$$g(\alpha^s)=1,\ s=\overline{1,k} \Rightarrow g\left(\bigcup_{s=1}^{k}\alpha^s\right)=1. \tag{3.9}$$

Знайдемо вид функції g, для чого запишемо її розвинення у досконалу диз'юнктивну нормальну форму: $g(\alpha_1,...,\alpha_r)=\bigcup\limits_{p=1}^{d}\alpha_1^{\sigma_1^p}...\alpha_r^{\sigma_r^p}$.

Розіб'ємо $J=\{\overline{1,r}\}$ на дві підмножини: $J^- = \{i | g(\alpha_1,...,\alpha_r)=1\}$, $J^+ = \{i | \exists\alpha^* = (\alpha_1^*,...,\alpha_{i-1}^*,1,\alpha_{i+1}^*,...,\alpha_r^*): g(\alpha^*)=1\}$. Нехай $J^+ = \{\overline{1,q}\}$. Тоді $g(\alpha)=\varphi(\alpha_1,...,\alpha_q)\wedge\left(\mathop{\wedge}\limits_{t=q+1}^{r}\overline{\alpha}_t\right)$, де $\varphi(\alpha_1,...,\alpha_q)=\bigcup\limits_{p=1}^{d}\alpha_1^{\sigma_1^p}...\alpha_q^{\sigma_q^p}$.

Доведемо, що $\varphi(\alpha_1,...,\alpha_q)=1$, тобто g задовольняє умові 1 (при $J^- \neq \varnothing$) або 3 (при $J^- = \varnothing$) техреми 3.8. Припустимо супротивне – нехай існує набір $\overline{\alpha}=(\overline{\alpha}_1,...,\overline{a}_q,0,...,0)$ такий, що $g(\overline{\alpha})=\varphi(\overline{\alpha}_1,...,\overline{a}_q)=0$. Із визначення J^+ випливає, що для $i=\overline{1,q}$ існує набір $\alpha^*(i)$ такий, що $g(\alpha^*(i))=1$ і $a_i^*(i)=1$. Ясно, що $\overline{\overline{\alpha}}=\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{q}\alpha^*(i)=(1,...,1,0,...,0)$, звідки у силу (3.9) $g(1,...,1,0,...,0)=1$. Таким чином, $\overline{\alpha}\le\overline{\overline{\alpha}}$, $g(\overline{\alpha})=0$, $g(\overline{\overline{\alpha}})=1$, що суперечить умові 1 теореми 3.8. Отже, $g\equiv 0$ і умова 2 теореми 3.8 задовольняється.

Достатність. Нехай $g(\alpha_1,...,\alpha_r)=\mathop{\wedge}\limits_{s=1}^{l}\overline{\alpha}_{i_s}$. Тоді функція g відмінна від нуля лише на наборах, у яких $\alpha_{i_s}=0$, $s=\overline{1,l}$. Але диз'юнкція будь-яких таких наборів також має цю властивість, тому умова 3 теореми 3.8 виконується. Виконання умови 1 очевидне, так як функція $f(\alpha)=\overline{\alpha}_i$ монотонно спадає і, отже, функція g, що дорівнює кон'юнкції $\overset{l}{\underset{s=1}{\wedge}} \alpha_{i_s}$ також монотонно спадає. При $g \equiv 0$ або $g \equiv 1$ умови 1 і 2 також виконуються. ♦

Функція вибору C на Ω називається *загальною скалярною* функцією, якщо існує числова функція $g:\ \Omega \to E^1$ така що:

$$C(X) = Arg\max_{x\in\Omega} g(x), \tag{3.10}$$

і називається *скалярною*, якщо $g(x) \neq g(y)$ при $x \neq y$.

Теорема 3.13. Функція вибору C є загальною скалярною функцією вибору тоді і лише тоді, коли вона породжується сильно транзитивним антирефлексивним бінарним відношенням.

Доведення. *Необхідність*. Нехай C – загальна скалярна функція. Покладемо $\Omega_1 = Arg\max\limits_{\Omega} g$, $\Omega_2 = Arg\max\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} g$,…, $\Omega_k = Arg\max\limits_{\Omega\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}\Omega_i} g =$ $= Arg\min\limits_{\Omega} g$. Ясно, що $\Omega_1,...,\Omega_k$ утворюють розбиття Ω. Визначимо на Ω бінарне відношення R наступним чином: $aRb \Leftrightarrow a\in\Omega_i$, $b\in\Omega_j$ та $i < j$. В силу (3.10) $C^R = C$. Сильна транзитивність побудованого відношення R випливає з теореми 2.1. Необхідність доведено.

Достатність. Структура сильно транзитивних відношень встановлена теоремою 2.1. Нехай $\Omega_1,...,\Omega_k$ – розбиття Ω. Покладемо $g(x)=k-i$, якщо $x\in\Omega_i$. Функція вибору C^R, очевидно, співпадає з функцією C, що побудована за формулою (3.10). Достатність доведено. ♦

Оскільки множина визначення функції вибору скінченна, то для будь-якої загальної функції вибору знайдуться скалярні функції $C_1,...,C_r$ такі, що $C = \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ (для цього досить ввести різні функції для співпадаючих значень – якщо для $x \neq y$ $g(x)=g(y)$, то $C_1(x)= g(x)$, $C_1(y)=\alpha \neq g(x)$, $C_2(x)=\alpha \neq g(y)$, $C_2(y)= g(y)$).

Функція вибору C, що є об'єднанням скалярних, називається *су-*

купно екстремальною (отже, загальна скалярна функція є сукупно екстремальною). Клас сукупно екстремальних функцій позначимо через *CE*. Зміст введеного поняття полягає у наступному. На Ω задається r числових функцій (критеріїв) $g_1,...,g_r$. З кожної множини $X \subseteq \Omega$ спочатку вибираються елементи, що є оптимумами за першим критерієм, потім – за другим і т.д. У якості вибору береться об'єднання отриманих виборів.

Для будь-якої множини *A* функцій вибору виділимо підмножину $A^{\overline{\varnothing}} : A^{\overline{\varnothing}} = \left\{ C \in A \middle| \ \forall X \subseteq \Omega,\ X \neq \varnothing:\ C(X) \neq \varnothing \right\}$.

Функція вибору *C* на Ω називається *паретівською* (П), якщо існують числові функції $g_1,...,g_m$ такі, що:

$$C(X) = \left\{ x \middle| \ \nexists y \in X,\ \ y \neq x:\ \ g_i(y) \geq g_i(x),\ \ i = \overline{1,m} \right\}.$$

Сформулюємо основні теореми про взаємозв'язок класів ФВ.

Теорема 3.14. Клас сукупно екстремальних функцій

$$CE = (H \cap C\Pi)^{\overline{\varnothing}} = H^{\overline{\varnothing}} \cap C\Pi^{\overline{\varnothing}}.$$

Теорема 3.15. $KC = H \cap C\Pi$.

Теорема 3.16. $\Pi = (H \cap C\Pi \cap З)^{\overline{\varnothing}}$.

В практичних ситуаціях прийняття рішень ОПР при виборі деякої альтернативи з множини Ω керується власним уявленням про "кращі" альтернативи. У різних ОПР в одній і тій же ситуації (в множині $X \subset \Omega$) уявлення про кращі альтернативи можуть різнитися, при цьому кожна з них може привести цілком розумне пояснення зробленого вибору. Навіть при виборі одних і тих же альтернатив різними ОПР обґрунтування вибору в конкретній ситуації може мати відмінності. Таким чином, за відомим вибором в конкретній ситуації X навряд чи можна відновити логіку вибору ОПР, тобто передбачити її вибір у множині $Y \subset \Omega, Y \neq X$. Але в цьому випадку логіку вибору ОПР не можна визнати коректною "в цілому", глобально (не можна в певних ситуаціях притримуватись певних моральних принципів, в інших – ні, тобто змінювати свої принципи під впливом ситуації). Аналіз функцій вибору якраз і дає розуміння логіки вибору ОПР в будь-яких ситуаціях (множинах $X \subset \Omega$), описує правила "розумного" вибору ОПР глобально, на всій множині вибору. Так, якщо ОПР здаються логічними умови спадковості (СП), незалежності від відкинутих альтернатив (Н), згоди (3), то моделювання її вибору "адекватно" реалізується за допомогою задачі багатокритеріальної оптимізації (див. теорему 3:16 та Розділ 4, §3 – "Методи багатокритеріальної оптимізації").

Контрольні завдання до §3

1. Скільки існує різних бінарних відношень, різних функцій вибору на множині з двох елементів?
2. Довести теореми 3.14 – 3.16.
3. Побудувати логічну форму функції вибору для $\Omega = \{x, y, z\}$:

3.1. $C\ (x) = x$, $C\ (x, y) = y$, $C\ (\Omega) = z$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

3.2. $C\ (x) = x$, $C\ (x, y) = x$, $C\ (\Omega) = y$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

3.3. $C\ (z) = z$, $C\ (x, z) = z$, $C\ (\Omega) = z$, для інших $X : C\ (X) = \varnothing$;

4. За логічною формою відновити функції вибору:

4.1. $f_1(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1$, $f_2(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2$, $f_3 \equiv 0$;

4.2. $f_1(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 \wedge \gamma_2$, $f_2 \equiv 0$, $f_3 \equiv \gamma_1$;

4.3. $f_1(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 \vee \gamma_2$, $f_2 \equiv 1$, $f_3 \equiv \gamma_2$;

4.4. $f_1(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2$, $f_2 = \gamma_1$, $f_3 \equiv \gamma_1$.

5. Дослідити функції вибору з п.3, п.4 на належність до класів спадковості, Неша, згоди.

Питання для самоперевірки до розділу 1

1. Дайте визначення наступних ключових понять:

1.1. Загальна задача прийняття рішень.

1.2. Бінарне відношення.

1.3. Лінійний порядок.

1.4. Домінування.

1.5. Толерантність.

1.6. Функція вибору.

1.7. Логічна форма функції вибору.

1.8. Умови спадковості, Неша, згоди.

2. Сформулюйте теорему про нормальність функції вибору.
3. Приведіть основні операції над функціями вибору.
4. Приведіть основні властивості функції вибору.
5. Сформулюйте основні взаємозв’язки між функціями вибору.

РОЗДІЛ 2
ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОРИСНОСТІ

Математизація будь-якої науки полягає у формалізації змістовних понять, які склалися в ній. Центральне місце в процесі математизації займає питання побудови кількісних оцінок характеристик явищ, що суттєво сприяє їх вивченню та використанню.

Нехай маємо множину об'єктів, які ОПР може порівнювати за їх перевагою для себе, тобто нехай він хоча б для деяких пар об'єктів у змозі вказати, який з них є для нього більш переважним. При цьому виникає питання: чи можна в цих умовах, спираючись тільки на результати зроблених порівнянь, так приписати об'єктам, що порівнюються, кількісні оцінки, щоб більш переважному об'єкту відповідала більша оцінка? Функція, яка встановлює таку відповідність і називається *функцією корисності*.

У цьому розділі будуть розглядатися елементарні властивості відношення переваги на множині альтернатив, умови існування функції корисності при різних умовах прийняття рішень та різних способах завдання відношення переваги.

Відношення переваги. Нехай X – задана множина альтернатив. *Відношенням нестрогої переваги* на X будемо називати (див. Розділ 1) будь-яке задане на цій множині рефлексивне бінарне відношення.

Рефлексивність відношення нестрогої переваги (далі будемо казати – відношення переваги і позначати як "$\geq$" чи $R_{\geq}$) відбиває той природний факт, що будь-яка альтернатива $x \in X$ не гірше за себе.

За заданим на множині X відношенням переваги $R_{\geq}$ можна однозначно визначити два відповідних йому відношення:

♦ байдужості $R_{\sim} = (X \times X \setminus R_{\geq} \cup R_{\geq}^{-1}) \cup (R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1})$ *(далі будемо позначати як "~"), інколи, це відношення називають* толерантністю *;*

♦ *строгої переваги* $R_{>} = R_{\geq} \setminus R_{\geq}^{-1}$ (далі будемо позначати як ">"),

де $R_{\geq}^{-1}$ – відношення, що є оберненим до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$, тобто "$\leq$".

В теорії корисності в основному розглядаються відношення строгої переваги ">" і відношення байдужості "~", яке можна охарактеризувати відсутністю строгої переваги: $x \sim y \Leftrightarrow (x \overline{<} y,\ y \overline{<} x)$.

Байдужість може виникати декількома шляхами.

По-перше, ОПР може щиро вважати, що фактично немає жодної різниці між x і y, тобто бажано мати x в такій само мірі, як і y, і навпаки.

По-друге, байдужість може наступити, коли ОПР не впевнена у своїй перевазі між x і y. Вона може вважати факт порівняння x з y важким і відмовлятися судити про строгу перевагу, не будучи впевненою, чи розглядає вона x і y як однаково бажані (або небажані).

По-третє, ситуація $x \sim y$ може виникнути у випадку, коли ОПР вважає x і y зовсім не порівнянними за перевагою.

Відношення строгої переваги розподіляють на два типи (див. Розділ 1):

♦ слабке впорядкування *(асиметричне і від'ємне транзитивне відношення);*

♦ строге впорядкування *(слабко зв'язане слабке впорядкування).*

Слабке впорядкування. Основною рисою слабкого впорядкування є асиметричність. Якщо для вас елемент x є кращим за елемент y, то водночас не може бути y кращим за x.

Транзитивність є наслідком асиметричності та від'ємної транзитивності і представляється розумним критерієм істинності для індивідуальних переваг. Якщо для вас x переважніше, ніж y, а y переважніше, ніж z, то здоровий глузд підказує, що x переважніше, ніж z.

Якщо відношення строгої переваги "<" є слабким упорядкуванням, а байдужість "~" визначається як відсутність строгої переваги, то від супротивного легко показати, що відношення "~" є еквівалентністю (рефлексивне, симетричне і транзитивне).

Однак концепція слабкого порядку в цілому вразлива для критики тому, що наділяє ОПР занадто необмеженою можливістю судження про перевагу, використовуючи транзитивність. Щоб показати, як транзитивність може порушуватися, розглянемо приклад.

Приклад. Припустимо, що при вкладанні капіталу в яку-небудь справу ви відчуваєте, що сума в 1000 у.о. є найкращим вкладенням. Ваша перевага зменшується, якщо ви відхиляєтеся від 1000 у.о. у будь-який бік. Хоча для вас переважніше 955 у.о. ніж 950 у.о., може виявитися, що ви не можете впевнено вибрати кращу суму між 950 і 1080 у.о. або між 955 і 1080 у.о. Але тоді одержимо:

$$955 \text{ у.о.} > 950 \text{ у.о.},$$
$$950 \text{ у.о.} \sim 1080 \text{ у.о.},$$
$$955 \text{ у.о.} \sim 1080 \text{ у.о.},$$

що суперечить транзитивності відношення байдужності. У цьому прикладі відношення байдужності не є транзитивним.

Строге впорядкування. Це відношення строгої переваги є слабко зв'язаним ($x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx, \forall x, y \in X$) слабким упорядкуванням. Воно відповідає реалії більш, ніж слабке впорядкування, оскільки враховує нетранзитивну байдужість, що з'являється через "недосконалість здатності людського розуму, що розрізняє, чому нерівності встановлюються лише при досить великій різниці величин" [4].

Надалі ми будемо враховувати цю властивість шляхом відмовлення від вимоги транзитивності відношення байдужості.

§1. Функції корисності в умовах визначеності

Функції корисності на зліченних множинах. Найбільш прості умови існування функцій корисності можна сформулювати у випадку зліченної множини альтернатив.

Теорема 1.1 (про функцію корисності для слабких упорядкувань). Якщо відношення "<" на *X* є слабким впорядкуванням, а множина класів еквівалентності на *X* за відношенням "~" (далі будемо позначати цю множину через $X_{\sim}$) є зліченною, то існує дійснозначна функція *u* на *X*, для якої:

$$x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y); x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y), \forall x, y \in X .$$

Доведення. Оскільки за умовою теореми множина класів еквівалентності $X_{\sim}$ є зліченною, то позначимо всі її елементи $a_1, a_2, \ldots$, а через $r_1, r_2, \ldots$ деякий перелік множини раціональних чисел.

Введемо на множині класів еквівалентності $X_{\sim}$ строге упорядкування, яке позначимо >' ($a <' b \Leftrightarrow \exists x \in a, \exists y \in b : x < y$). Це потрібно, оскільки, на відміну від множини *X*, елементами множини $X_{\sim}$ є множини.

Визначимо наступним чином дійснозначну функцію *u* на $X_{\sim}$.

Будемо вважати $u(a_1) = 0$. Далі за індукцією для a_m на кожному кроці буде реалізовуватися одна з трьох можливостей:

1. $a_i <' a_m$ для усіх $i<m$; у цьому випадку покладемо $u(a_m) = m$.

2. $a_m <' a_i$ для усіх $i<m$; у цьому випадку покладемо $u(a_m) = -m$.

3. $a_i <' a_m <' a_j$ для деяких $i,j<m$ і для жодного $h<m$, відмінного від i,j, не виконується $a_i <' a_h <' a_j$; у цьому випадку покладемо

$u(a_m)$ рівним першому у переліку $r_1, r_2, \ldots$ числу r_k , для якого $u(a_i) < r_k < u(a_j)$.

За побудовою $u(a_m) \neq u(a_i),\ \forall i < m$, і $a_i <' a_j \Leftrightarrow u(a_i) < u(a_j)$, $\forall i, j \leq m$. Це має місце для будь-якого натурального m, тому виконується на всій множині $X_{\sim}$. Остаточно визначимо на X функцію u, поклавши $u(x) = u(a),\ \forall x \in a$.

Якщо тепер $a <' b$, то за введеним вище строгим упорядкуванням $<'$ для $\forall x \in a,\ \forall y \in b \Rightarrow x < y$, звідки випливає: $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y),\ \forall x, y \in X$. Співвідношення $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$, $\forall x, y \in X$ доводиться з визначення байдужості ($x \sim y \Leftrightarrow (x \overline{<} y,\ y \overline{<} x)$) від супротивного.♦

Розглянемо тепер відношення переваги, якщо воно є строгим частковим упорядкуванням. Нагадаємо, що бінарне відношення R на множині Y буде *строгим частковим упорядкуванням*, якщо воно є не рефлексивним і транзитивним.

Оскільки сам факт того, що "<" – строге часткове упорядкування на X, допускає співвідношення ($x \sim y,\ y \sim z,\ x < z$), відношення "~" не зобов'язане бути транзитивним і тому – еквівалентністю. Однак інше відношення – відношення подібності "$\approx$", визначене як $x \approx y \Leftrightarrow (x \sim z \Leftrightarrow y \sim z)$, $\forall z \in X$, у цих умовах виявляється транзитивним і відповідно є еквівалентністю (рефлективність і симетричність випливає з визначення, а також рефлективності та симетричності відношення "~"). Таким чином, відношення $x \approx y$ виконується тоді, коли з байдужості x у порівнянні з деяким $z \in X$ випливає, що y також знаходиться у відношенні байдужості з z і навпаки.

Наступна теорема стверджує: якщо відношення "<" є не рефлексивним і транзитивним, а множина класів еквівалентності на X за відношенням "$\approx$" (далі будемо позначати цю множину через $X_{\approx}$) є зліченною, то елементам множини X можна так поставити у відповідність числа, щоб їх порядок відповідав як відношенню "<", так і "$\approx$". Однак через те, що відношення "$\approx$" може виявитися не транзитивним, ми не можемо стверджувати, що з $x \sim y$ та $x \overline{\approx} y$ випливає $u(x)=u(y)$. У випадку $x \sim y$ та $x \overline{\approx} y$ може виявитися справедливим будь-яке з трьох співвідношень $u(x)=u(y)$, $u(x)<u(y)$, $u(x)>u(y)$.

Теорема 1.2 (про функцію корисності для строгих часткових упорядкувань). Якщо відношення "<" на X є строгим частковим упорядкуванням, а множина $X_{\approx}$ класів еквівалентності на X за відношенням "$\approx$" є зліченною, то існує дійснозначна функція u на X, для якої: $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$; $x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$, $\forall x, y \in X$.

Доведення цієї теореми спирається на доведення попередньої теореми та відому теорему Шпільрайна [4] про взаємозв'язок слабкого та строгого часткового упорядкувань на множині класів еквівалентності відповідно за відношеннями байдужості та подібності.

Таким чином, можна зробити наступні висновки.

Бінарне відношення є слабким упорядкуванням, якщо воно є асиметричним і від'ємно транзитивним. Визначаючи відношення байдужості "~" як відсутність строгої переваги, отримуємо, що воно є еквівалентністю (тобто рефлексивним, симетричним і транзитивним), якщо відношення "<" на X є слабким упорядкуванням. Якщо множина $X_{\sim}$ класів еквівалентності, у сенсі відношення "~", є зліченною, то за умови, що відношення "<" є слабким упорядкуванням, елементам x, y, ... множини X можна поставити у відповідність корисності $u(x)$, $u(y)$,… таким чином, що $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$. Звідси випливає, що $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$.

Розглянемо строге часткове упорядкування. Віповідне йому відношення байдужості може не бути транзитивним, але відношення подібності "$\approx$" є еквівалентністю. Якщо відношення "<" на множині X – строге часткове упорядкування, а множина $X_{\approx}$ є зліченною, то корисності можуть бути поставлені у відповідність елементам множини X таким чином, що $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y)$ і $x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$.

Функції корисності на незліченних множинах. Поширимо теорему про функцію корисності для слабких упорядкувань на випадок, коли множина $X_{\sim}$ класів еквівалентності на X за відношенням "~" є не обов'язково зліченною. Введемо для цього так звану умову *сепарабельності*, яка має відношення до поняття щільності множини щодо впорядкування.

Нехай R є бінарним відношенням на множині Y. Множина $Z \subseteq Y$ називається *R – щільною у множині Y*, якщо для $\forall x, y$, що належать Y, але не належать Z, і для яких xRy, знайдеться таке $z \in Z$, що (xRz, zRy).

Наприклад, оскільки між двома будь-якими дійсними числами мається раціональне число, то зліченна множина раціональних чисел є "<" – щільною у E^1.

Теорема 1.3 (про функцію корисності для слабких впорядкувань на незліченних множинах). Існує така дійснозначна функція u на множині X, що еквівалентність $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y),\ \forall x, y \in X$, має місце тоді і тільки тоді, коли відношення "<" на X є слабким впорядкуванням та існує зліченна підмножина множини $X_{\sim}$, яка є " <' " – щільною у $X_{\sim}$, де $a <' b \Leftrightarrow \exists x \in a,\ \exists y \in b : x < y$ - строге впорядкування на множині класів еквівалентності $X_{\sim}$.

На жаль, ця умова сепарабельності щодо впорядкування не має простої інтуїтивної інтерпретації. Щоб показати, як ця умова може порушуватись, візьмемо $X = E^2$ та покладемо відношення "<" – лексикографічним впорядкуванням:

$$(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1, x_2 < y_2).$$

Тоді $X_{\sim} = \{\{x\} | x \in X\}$, так, що $\{x\} <' \{y\} \Leftrightarrow x < y$. При фіксованому x_1 потрібно щонайменше зліченна підмножина множини E^1, щоб одержати щільну щодо впорядкування "<" підмножину множини $\{x_1\} \times E^1$. Але таких x_1 є незліченна множина, звідки випливає, що множина E^2 щодо впорядкування "<" не є сеперабельною.

Розглянемо тепер відповідне узагальнення теореми про функцію корисності для строгих часткових впорядкувань.

Теорема 1.4 (про функцію корисності для строгих часткових упорядкувань на незліченних множинах). Припустимо, що відношення "<" на множині X є строгим частковим впорядкуванням та існує зліченна підмножина множини $X_{\approx}$ класів еквівалентності на X за відношенням "$\approx$", яка є " <* " – щільною у $X_{\approx}$, де $a <^* b \Leftrightarrow \exists x \in a,\ \exists y \in b : x < y$ - строге часткове впорядкування на множині класів еквівалентності $X_{\approx}$. Тоді існує u – така дійснозначна функція на X, що $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y),\ x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y),\ \forall x, y \in X$.

У цьому випадку умова сепарабельності щодо впорядкування не є необхідною, як це було у попередній теоремі. Припустимо, наприклад, що $X = E^1$, і покладемо $x < y \Leftrightarrow x < y, y = x + n$ для деякого цілого додатнього n. Тоді функція $u(x) = x$ відповідає твердженню теореми і $X_{\approx} = \{\{x\} | x \in X\}$.

Якщо підмножина $Z \subseteq X$ є зліченною, то існує таке x, що ні x, ні x + 1 не належать Z. Але тому, що x < x + 1, не існує такого $z \in Z$, що буде виконуватись $x < z < x + 1$. Звідси випливає, що не існує зліченної підмножини в $X_{\approx}$, яка є " <*" – щільною в $X_{\approx}$. Таким чином, можна зробити наступні висновки.

Якщо множина X не є зліченною і відношення " < " на X – слабке впорядкування, то переваги можуть бути адекватно описані за допомогою дійснозначних функцій в тому і лише в тому випадку, коли множина X містить зліченну підмножину Y, для якої з $x<y$ випливає існування такого $z \in Y$, що ($x <z$ або $x \sim z$) і ($z \sim y$ чи $z < x$).

Лексикографічні впорядкування за перевагою являють собою приклади, коли умова щільності порушується. Якщо відношення "<" є лише строгим частковим впорядкуванням, то сепарабельність щодо впорядкування є достатньою, але не необхідною умовою існування дійснозначної функції корисності.

Контрольні завдання до §1

1. Довести, що множина $\{2,4,6,...\}$ є зліченою.

2. Довести, що множина $\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ є зліченою.

3. Довести, що множина усіх раціональних чисел є зліченою.

4.Довести, що якщо транзитивне замикання відношення “<” є асиметричним, то то відношення “<” є строгим частковим впорядкуванням.

5. Довести, що дісназначна функція u на зліченій множині X, яка задовольняє умові $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y);\ x \approx y \Leftrightarrow x \Leftrightarrow u(x) = u(y),\ \forall x, y \in X$, існує тоді й лише тоді, коли відношення “<” є асиметричним.

6. Нехай a і b – числа, причому $a < b$. Довести, що існує раціональне число з інтервалу (a,b) (використати той факт, що існує таке додатне число n, що $1 < n(b-a)$; покласти, що m дорівнює найменшому цілому числу не меншому за a та показати, що $m/n \in (a,b)$).

§2. Функції корисності в умовах ризику та невизначеності

Найважливішим застосуванням теорії очікуваної корисності є можливість формалізації процесу прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.

В загальному випадку задача прийняття рішень (ЗПР) є визначеною на наступній тріаді множин: X – множина альтернатив; Y- множина наслідків; S – множина станів.

Множина S є проявом стохастичної невизначеності в прийнятті рішень, причому конкретна інтерпретація станів залежить від формулювання задачі (наприклад, попит на ту чи іншу продукцію, погода і т.п.). Множину S також називають множиною "станів природи" чи "станів зовнішнього середовища", щоб підкреслити властиву їй невизначеність і незалежність від ОПР.

Відомі (див. §2) дві форми взаємозв'язку тріади множин, кожній з яких відповідає своє визначення множини станів і свій підхід до оцінки очікуваної корисності альтернатив. Це – екстенсивна та нормальна форми.

В екстенсивній формі стан визначається як відображення альтернатив у наслідки $s: X \to Y$. Цей підхід сформульований Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном (див. §2). При такій постановці множина станів природи в явному вигляді в задачі не фігурує. Стохастична невизначеність тут описується розподілом ймовірностей на множині наслідків Y, що відповідають альтернативам із X. Переваги ОПР повинні бути виражені у вигляді функцій корисності $u(y)$, визначеній на множині наслідків Y. Очікувана корисність альтернативи x може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(y), p(x, y))$, де $p(x, y)$ – розподіл ймовірностей на множині наслідків Y, що відповідають альтернативі x. Оскільки кожній альтернативі однозначно відповідає свій розподіл ймовірностей, то в такій постановці ЗПР можна говорити про вибір найкращого розподілу ймовірностей.

Для ЗПР у нормальній формі альтернативи $x \in X$ визначаються як відображення станів у наслідки $x: S \to Y$. Цей підхід був сформульований Л. Севіджем (див. §2). Тут множина станів S явно фігурує в ЗПР, а стохастична невизначеність описується за допомогою одного незалежного від альтернатив розподілу ймовірностей на S і задається відповідною щільністю $p(s),\ s \in S$. Переваги ОПР, як і у попередньому випадку, задаються функціями корисності, але тепер вони будуються не на множині наслідків Y, а на множині $X \times S$, оскільки будь-який наслідок однозначно визначається парою $(x, s) \in X \times S$. Для ЗПР у нормальній формі очікувана корисність альтернативи x може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(x,s), p(x))$.

При наявності фундаментальної погодженості (коли невизначеність вважається викликаною тими самими причинами) екстенсивна та нормальна форми ЗПР еквівалентні з погляду очікуваної корисності розглянутих альтернатив.

Розглянемо конкретні види функцій корисності (критеріїв) для нормальної форми ЗПР, які найбільш часто вживаються в методах прийняття рішень [5].

Мінімаксний критерій. Мінімаксний критерій (ММ) використовує функцію корисності альтернатив $E_{MM}(x) = \min_{s \in S} u(x,s)$, що відповідає позиції крайньої обережності. Шукана альтернатива вибирається з умови $x^* \in \mathrm{A\,rg} \max_{x \in X} E_{MM}(x) = \mathrm{A\,rg} \max_{x \in X} \min_{s \in S} u(x,s)$. Обрані таким чином альтернативи цілком виключають ризик. Це означає, що які б стани природи $s \in S$ не реалізувалися, відповідний результат не може виявитися гіршим за $E_{MM}(x^*)$. Ця властивість робить мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в практичних задачах він застосовується найчастіше.

Однак відсутність ризику може привести до певних втрат. Продемонструємо це на прикладі.

Табл. 3.1.

	s_1	s_2	$E_{MM}(x)$
x_1	1	100	1
x_2	1.1	1.1	1.1
		Max	1.1

Приклад. Нехай числові оцінки наслідків альтернатив x_1, x_2 при станах s_1, s_2 задаються нижчеприведеною табл. 2.1.

Хоча альтернатива x_1 здається більш вигідною, оптимальною за ММ – критерієм буде альтернатива x_2. Ухвалення рішення за цим критерієм може, однак, виявитися ще менш розумним, якщо:

- ♦ стан s_2 зустрічається частіше ніж s_1;
- ♦ рішення реалізується багаторазово.

Вибираючи альтернативу, що пропонується за ММ -критерієм, щоправда, уникаємо невдалого значення 1, що реалізується при альтернативі x_1 при стані s_1, одержуючи замість нього при цьому стані не набагато кращий результат 1.1, зате в стані s_2 втрачаємо виграш

100, одержуючи всього лише 1.1. Цей приклад показує, що в численних практичних ситуаціях песимізм мінімаксного критерію може виявитися дуже невигідним.

Застосування ММ – критерію буде виправданим, якщо ситуація, у якій приймається рішення, характеризується такими обставинами:

- ♦ про можливості появи зовнішніх станів нічого не відомо;
- ♦ необхідно рахуватися з появою різних станів природи $s \in S$;
- ♦ рішення реалізується лише один раз;
- ♦ необхідно виключити будь-який ризик, тобто при жодних $s \in S$ не допускається отримання результату, меншого за $E_{MM}(x^*)$.

Критерій Байеса – Лапласа. На відміну від мінімаксного критерію, цей критерій враховує кожен із можливих наслідків альтернативи.

Нехай $p(s)$ - ймовірність появи стану $s \in S$, тоді для BL – критерію корисність кожної альтернативи характеризується математичним сподіванням корисностей її наслідків

$$E_{BL}(x) = \int\limits_{s \in S} p(s)u(x,s)ds \ .$$

Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^* \in \operatorname{A rg} \max_{x \in X} E_{BL}(x) = \operatorname{A rg} \max_{x \in X} \int\limits_{s \in S} p(s)u(x,s)ds \cdot$$

При цьому вважається, що ситуація, у якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами:

- ♦ ймовірності появи станів відомі і не залежать від часу;
- ♦ рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
- ♦ для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

При досить великій кількості реалізацій середнє значення корисностей альтернативи x наближається до математичного сподівання корисностей її наслідків. Тому при повній (нескінченній) реалізації будь-який ризик практично виключається. BL – критерій є більш оптимістичним, ніж ММ – критерій, однак він вимагає вищого рівня інформованості та досить тривалої реалізації.

Критерій мінімізації дисперсії оцінки. Цей критерій використовують, коли ОПР, зацікавлена в отриманні "стійкого" щодо станів середовища рішення і відомо, що ймовірності станів середовища мають нормальний розподіл. При виборі цього критерію кожна альтернатива оцінюється дисперсією функції корисності її наслідків при всіх станах середовища, яка мінімізується:

$$E_D(x)=\int\limits_{s\in S} p(s)(\int\limits_{s\in S} p(s)u(x,s)ds-u(x,s))^2 ds=\int\limits_{s\in S} p(s)(E_{MM}(x)-u(x,s))^2 ds$$

$$x^*\in \mathrm{Arg}\min_{x\in X} E_D(x)=\mathrm{Arg}\min_{x\in X}\int\limits_{s\in S} p(s)(E_{MM}(x)-u(x,s))^2 ds\,.$$

Інші умови такі ж самі, як і для попереднього критерію.

Критерій максимізації ймовірності. При використанні цього критерію ОПР фіксує величину оцінки функції корисності наслідків $u^*:\min\limits_{x\in X}\min\limits_{s\in S} u(x,s)\le u^*\le \max\limits_{x\in X}\max\limits_{s\in S} u(x,s)$, яку він хоче найбільш ймовірно досягти. Для кожної альтернативи x визначається ймовірність $p\{u(x,s)\ge u^*\}$того, що функція корисності наслідків буде не менша за u^* для кожного стану середовища $s\in S$. Критерій полягає у максимізації ймовірності досягнення значення заданої оцінки

$$E_F(x)=\int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\ge u^*}} p(s)ds\,,\quad x^*\in \mathrm{Arg}\max_{x\in X} E_F(x)=\mathrm{Arg}\max_{x\in X}\int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\ge u^*}} p(s)ds\,.$$

Умови застосування цього критерію такі ж самі, як і для BL – критерію.

Модальний критерій. Суть цього критерію полягає у виборі альтернативи, виходячи з найбільш ймовірного стану середовища $s^*\in S: s^*=\arg\max\limits_{s\in S} p(s)$. При використанні цього критерію ОПР вважає, що середовище знаходиться у стані s^* і вибирає альтернативу з умови: $E_{MOD}(x)=\max\limits_{x\in X} u(x,s^*)$. Хоча цей критерій є досить песимістичним, він має певні переваги:

♦ достатньо виділити лише найбільш ймовірний стан середовища і не потрібно знати точне значення ймовірності його виникнення;

♦ зменшується об'єм обчислень, оскільки розрахунки ведуться лише для найбільш ймовірного стану середовища.

Критерій Севіджа. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується $E_{SE}(x)=\max\limits_{s\in S}(\max\limits_{z\in X} u(z,s)-u(x,s))$.

Цю величину можна інтерпретувати як максимальні втрати (штрафи), що виникають при заміні оптимальної альтернативи на альтернативу x. Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації цих втрат:

$$x^*\in \mathrm{Arg}\min_{x\in X} E_{SE}(x)=\mathrm{Arg}\min_{x\in X}\max_{s\in S}(\max_{z\in X} u(z,s)-u(x,s))\,.$$

До ситуації прийняття рішень за цим критерієм висуваються такі ж самі вимоги, що і у випадку ММ – критерію.

Критерій Гурвіца. Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Л. Гурвіц запропонував критерій GW, функція корисності якого забезпечує компроміс між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною $E_{GW}(x) = \alpha \max_{s \in S} u(x,s) + (1-\alpha) \min_{s \in S} u(x,s)$, де $\alpha \in [0,1]$ – ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність ОПР до ризику.

Рішення приймається з умови:
$x^* \in \mathrm{A\,rg} \max_{x \in X} E_{GW}(x) = \mathrm{A\,rg} \max_{x \in X} (\alpha \max_{s \in S} u(x,s) + (1-\alpha) \min_{s \in S} u(x,s))$ Для $\alpha = 0$ GW-критерій перетворюється в ММ-критерій. Для $\alpha = 1$ він перетворюється в критерій азартного гравця. На практиці вибрати цей коефіцієнт буває так само важко, як правильно вибрати сам критерій. Навряд чи можливо знайти кількісну характеристику для тих часток оптимізму й песимізму, що присутні при прийнятті рішення. Тому найчастіше $\alpha = 0.5$ без заперечень приймається в якості деякої "середньої" точки зору.

Інколи величина α використовується для обґрунтування вже прийнятого рішення. Для рішення, що сподобалося, обчислюється ваговий коефіцієнт α і він інтерпретується як показник співвідношення оптимізму та песимізму. Таким чином, позиції, виходячи з яких приймаються рішення, можна розсортувати принаймні заднім числом.

Вибір відповідно до GW – критерію може, незважаючи на цілком урівноважену точку зору, приводити до нераціональних рішень. Розглянемо приклад, побудований так, що оптимальне (відповідно до GW – критерію) рішення є незалежним від α.

Приклад. Нехай вибирається одна з двох альтернатив, які мають оцінки, наведені у таблиці 2.2.

Табл.2.2.

	s_1	s_2	…	s_{n-1}	s_n
x_1	10000	1	…	1	1
x_2	9999	9999	…	9999	0.99

З цієї таблиці бачимо, що x_1 буде вибраним за GW – критерієм при будь-якому $\alpha \in [0,1]$, але більш вдалим вибором буде x_2.

GW – критерій висуває до ситуації, у якій приймається рішення, наступні вимоги:

♦ про ймовірності появи станів нічого не відомо;

♦ з появою нових станів необхідно рахуватися;

♦ реалізується мала кількість рішень;

♦ допускається деякий ризик.

Критерій Ходжеса-Лемана. Цей критерій спирається одночасно на ММ – критерій і BL – критерій. Функція корисності альтернатив визначається як:

$$E_{HL}(x) = \alpha \int\limits_{s \in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s).$$

За допомогою параметра $\alpha \in [0,1]$ виражається ступінь довіри до використовуваного розподілу ймовірностей $p(s),\ s \in S$. Якщо ця довіра висока, то акцентується BL – критерій, у протилежному випадку перевага віддається ММ – критерію. Рішення приймається за умовою:

$$x^* \in \mathrm{A\,rg}\max_{x \in X} E_{HL}(x) =$$

$$\mathrm{A\,rg}\max_{x \in X}(\alpha \int\limits_{s \in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s)).$$

Для $\alpha = 0$ HL – критерій перетворюється в ММ-критерій, а для $\alpha = 1$ він перетворюється в BL – критерій. Ступінь впевненості $\alpha \in [0,1]$ в будь-якому розподілі ймовірностей $p(s),\ s \in S$, практично не піддається оцінці. Таким чином, вибір параметра α є повністю суб'єктивним. Крім того, без уваги залишається і число реалізацій рішень. Тому HL – критерій має обмежену галузь застосування.

Ситуації, у яких приймається рішення, характеризуються такими властивостями:

♦ ймовірності появи станів не відомі, але деякі припущення про розподіл ймовірностей можливі;

♦ прийняте рішення теоретично допускає нескінченно багато реалізацій;

♦ при малих числах реалізацій допускається деякий ризик.

Критерій Гермейєра. За підходом Ю.Гермейера до відшукання слабко ефективних рішень у задачах багатокритеріальної оптимізації (див. Розділ 4) можна запропонувати ще один критерій (GE).

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S=\{s_1,...,s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $p(s)>0,\ \forall s\in S$, $u(x,s)>0, \forall x\in X\ ,\forall s\in S$, тоді функція корисності альтернатив за GE – критерієм визначається як $E_{GE}(x)=\min\limits_{s\in S}u(x,s)/\,p(s)$, а рішення приймається з умови:

$$x^*\in \mathrm{Arg}\max_{x\in X}E_{GE}(x)=\mathrm{Arg}\max_{x\in X}\min_{s\in S}u(x,s)\,/\,p(s)\,.$$

Величини, які обернені до ймовірностей станів природи $p(s)>0,\ s\in S$, в цьому критерії можна інтерпретувати як вагові коефіцієнти функцій корисності $u(x,s), s\in S$, наслідків, які хочемо одночасно максимізувати. За теоремою Ю. Гермейєра про необхідну й достатню умови слабкої ефективності (див. Розділ 4, §3) фактично шуканий розв'язок x^* визначається як одна (відповідна ваговим коефіцієнтам $p(s),\ s\in S$) із слабко ефективних альтернатив задачі: $u(x,s)\to\max\limits_{x\in X}, s\in S$.

В певному відношенні GE – критерій узагальнює MM – критерій. У випадку рівномірного розподілу ймовірностей вони стають ідентичними. Умови його застосовності такі:

- ♦ множина станів є скінченною;
- ♦ ймовірності появи станів відомі;
- ♦ із появою тих або інших нових станів потрібно рахуватися;
- ♦ допускається деякий ризик;
- ♦ рішення може реалізуватися один або багато разів.

Якщо функція розподілу відома не дуже надійно, а реалізацій рішення мало, то за GE – критерієм одержують невиправдано великий ризик. Таким чином, залишається деяка воля для суб'єктивних дій.

Критерій добутків. Цей критерій базується на ідеї фільтрації інформації , яка застосовується у теорії нечітких множин (див. Розділ 7). Добутком функцій належності нечітких множин визначається одна з операцій перетину нечітких множин.

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S=\{s_1,...,s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $u(x,s)>0, \forall x\in X\ ,\ \forall s\in S$.

Критерій добутків MU використовує функцію корисності альтернатив $E_{MU}(x)=\prod_{s\in S}u(x,s)$. Шукана альтернатива вибирається з умови: $x^*\in \mathrm{Arg}\max_{x\in X} E_{MU}(x)=\mathrm{Arg}\max_{x\in X}\prod_{s\in S}u(x,s)$.

Застосування цього критерію обумовлено такими обставинами:

- ♦ множина станів є скінченною;
- ♦ ймовірності появи станів невідомі;
- ♦ із появою кожного із станів окремо необхідно рахуватися;
- ♦ критерій застосовують при малій кількості реалізацій рішення;
- ♦ деякий ризик допускається.

Вибір рішення відповідно до MU – критерію виявляється значно менш песимістичним, ніж, наприклад, вибір відповідно до MM – критерію. Можна сказати, що MU – критерій тісно пов'язаний з BL – критерієм при рівномірному розподілі ймовірностей (цей випадок часто називають нейтральним критерієм NN): $E_{NN}=\frac{1}{n}\sum_{s\in S}u(x,s)$. Зв'язок з нейтральним критерієм вбачається, наприклад, із наступного міркування. Зі строгої монотонності логарифмічної функції випливає, що значення $E_{MU}(x)=\prod_{s\in S}u(x,s)$ є максимальним за $x\in X$ саме тоді, коли є максимальним $\ln u(x,s)$. Тепер маємо $\ln E_{MU}(x)=\sum_{s\in S}\ln u(x,s)$ і ця величина досягає максимуму одночасно з $\frac{1}{n}\ln E_{MU}(x)=\frac{1}{n}\sum_{s\in S}\ln u(x,s)$. Останній вираз у точності відповідає нейтральному критерію, якщо тільки величини $u(x,s)$ у ньому замінити на логарифми $\ln u(x,s)$.

Таким чином, у результаті застосування MU – критерію відбувається деяке вирівнювання між великими й малими значеннями $u(x,s)$. Це може забезпечити іноді більшу вигоду, ніж при використанні MM-критерію, але при цьому повинна враховуватися можливість появи і гірших результатів. Слід зазначити, що при використанні цього критерію ні число реалізацій, ні інформація про розподіл ймовірностей не приймаються до уваги.

Якщо рішення, прийняте згідно з MU – критерієм, визначається переважно малими значеннями функції корисності наслідків $u(x,s)$, то це вказує на його песимістичний характер, аналогічний ММ – критерію. При великих значеннях функції корисності наслідків $u(x,s)$ песимістичний акцент знижується і, власне кажучи, відбувається все більше зближення даного критерію з нейтральним. Тим самим досягається певне вирівнювання між песимістичною й нейтральною точками зору.

Контрольні завдання до §2

1. Прийняти рішення в умовах невизначеності в задачі з втратами $L(w,x) = -(5/4 + \omega)x_1 - (7/4 - \omega)x_2$, які визачені на множині альтернатив $D = \{x = (x_1, x_2) | \ x_1 + x_2 \le 4,\ x_1 + 2x_2 \le 6,\ x_{1,2} \ge 0\ \}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \{\omega | \omega \in \{0,1\}\}$, що відбуваються з ймовірністю $p\{\omega = 0\} = 1/4,\ p\{\omega = 1\} = 3/4$ за критерієм Байєса-Лапласа.

2. Прийняти рішення в умовах невизначеності в задачі з втратами $L(w,x) = -(4/3 + \omega)x_1 - (5/3 - \omega)x_2$, які визначені на множині $D = \{x = (x_1, x_2) | \ x_1 + x_2 \le 5,\ -4x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 - 4x_2 \le 0,\ x_{1,2} \ge 0\ \}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \{\omega | \omega \in \{0,1\}\}$, що відбуваються з ймовірністю $p\{\omega = 0\} = 1/3,\ p\{\omega = 1\} = 2/3$ за критерієм мінімізації дисперсії оцінок.

3. Прийняти рішення в умовах невизначеності в задачі з втратами $L(w,x) = -(2 - \omega)x_1 - (1 - 2\omega)x_2$, які визачені на множині альтернатив $D = \{x = (x_1, x_2) | \ -x_1 + 2x_2 \le 2,\ 3x_1 - 2x_2 \le 6,\ x_{1,2} \ge 0\ \}$ і множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \{\omega | \omega \in \{0,1\}\}$, що відбуваються з ймовірністю $p\{\omega = 0\} = 1/2,\ p\{\omega = 1\} = 1/2$ за критерієм максимізації ймовірності розподілу оцінок при $L_2(w,x) \le -8$.

4. Прийняти рішення в умовах невизначеності в задачі з втратами $L(w,x) = -(1 + \omega)x_1 - (-1 - \omega)x_2$, які визачені на множині $D = \{x = (x_1, x_2) | \ x_1 - x_2 \le 3,\ -2x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 \le 5,\ x_{1,2} \ge 0\ \}$ і

множині станів зовнішнього середовища $\Omega = \{\omega | \omega \in \{0,1\}\}$ за критерієм Байда.

§3. Функції колективної корисності

Перед будь-якою людською спільнотою стоять дві основні задачі: створення і розподіл. Як у взаємодії з природою створити побільше благ, як розподілити витрати на створення цих благ і як розподілити самі блага між членами спільноти? І взагалі, якщо відомі функції індивідуальних корисностей, як побудувати функцію колективної корисності?

Формально задача колективного прийняття рішень формулюється наступним чином:

$$\max \{u_i(x) | x \in X \subseteq E^n\},\ i \in N = \{1,..., n\}, \tag{3.1}$$

де u_i – функція корисності i-го агента, X – множина альтернатив.

Існування альтернативи x^*, на якій одночасно досягають максимуму всі індивідуальні функції корисності, у практичних задачах настільки рідкісний випадок, що його можна не враховувати (у цьому випадку задачі колективного прийняття рішень, як такої, і немає). Отже, задача (3.1) в термінах Розділу 1 є слабоструктурованою. Необхідна додаткова інформація, яка б дозволила визначити, що розуміється під розв'язком задачі (3.1).

Можливо, наприклад, виділити "пріоритетного" члена спільноти ("царя", "вождя" і т.п.), індивідуальна функція корисності котрого максимізується, для інших індивідуальних функцій корисності встановлюються "порогові" рівні $\overline{u}_i = const$:

$$\max\{u_k(x) | u_i(x) \geq \overline{u}_i,\ i \neq k; x \in X\}. \tag{3.2}$$

Зокрема, $\overline{u}_i$ і $\overline{u}_j$, $i \neq j$, можуть співпадати. Якщо для фіксованих значень $\overline{u}_i$ задача (3.2) не буде мати розв'язку, то "пороги" (хоча б один) необхідно змінити.

Припускаючи ж, що апріорі всі члени суспільства рівні у своїх правах, навряд чи можна погодитись з постановкою (3.2). Більш логічними ("демократичними") будуть дві "крайні" такі постановки:

$$\sum_{i \in N} u_i(x) \to \max_{x \in X}, \tag{3.3}$$

$$u_1(x) = u_2(x) = \ldots = u_n(x) \to \max_{x \in X}. \qquad (3.4)$$

Задача (3.3) називається *утилітарною* постановкою (функція $W_y(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i \in N} u_i$ називається *утилітарною функцією колективної корисності*), задача (3.4) – *егалітарною* (від латинського слова "рівність"). Інтерпретуючи функції індивідуальної корисності u_i як прибуток i – го члена спільноти, отримуємо, що утилітаризм максимізує сумарний прибуток спільноти, не звертаючи уваги на його перерозподіл між членами спільноти (так, наприклад, в оптимальній точці x^* може бути, що $u_1(x^*) = 1$ млн. грн., $u_2(x^*) = \ldots = u_n(x^*) = 1$ грн. – в "багатому суспільстві" всі, крім одного,– бідні).

Егалітарна постановка може привести до ситуації, коли $u_1(x^*) = \ldots = u_n(x^*) = 1$ грн. – "рівність у бідності". Розглянуті ситуації ілюструє рис. 3.1. Оскільки ситуація з "абсолютною" рівністю здається "непродуктивною", як правило, розглядається функція колективної корисності у вигляді $W_e(u_1,\ldots,u_n) = \min_{i=\overline{1,n}}\{u_i\}$, яку необхідно максимізувати на множині альтернатив X. Ця функція називається *егалітарною функцією колективної корисності* (задачу (3.4) тоді доцільно називати "крайнім" або "абсолютним" егалітаризмом). "Економічна" інтерпретація егалітарної функції зрозуміла – суспільство намагається максимізувати мінімальну "зарплату" (прибуток найбіднішого агента). Спір між утилітаризмом та егалітаризмом точиться тисячоліттями, можна привести безліч аргументів "за" і "проти" як для першого, так і для другого. Ми ж будемо розглядати їх як "крайні" способи агрегації індивідуальних функцій корисності (ФК) у колективну (агреговану) функцію корисності (КФК).

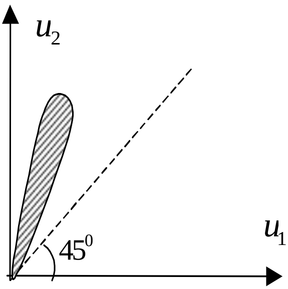


Рис. 3.1

Розглянемо цікаві приклади.

1. Два міста *A* і *B* з'єднані двома дорогами ("прямою" й "окружною") довжиною 3 км і 5 км відповідно (Рис. 3.2). Міста хочуть побудувати спільне підприємство (наприклад, лікарню), причому на ділянці *BC* (|BC| =2) з якихось причин це зробити неможливо. Чим ближче лікарня до міс-

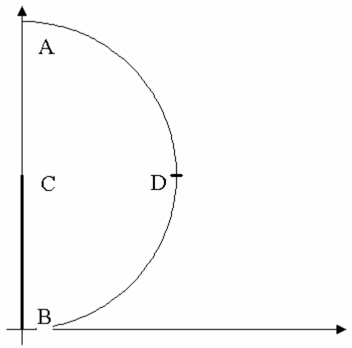


Рис. 3.2

та, тим краще. Абсолютно егалітарний розв'язок буде лежати на дорозі *ADB* у точці *D*, що є серединою дуги *AB* $(u_1(D) = u_2(D) = 2.5 км)$. Але точка *C* ($u_1(C) = 1 км$, $u_2(C) = 2 км$) і для першого і для другого агента кращі!

2. Два агенти "перетворюють" свою працю в кукурудзу, причому агент 2 має продуктивність вдвічі більшу, ніж агент 1: одна година роботи агента 2 дає 2 центнери кукурудзи, агента 1 – одна од. ФК в агентів однакові: $u(x, y) = \sqrt[3]{y(10 - x)}$, де *x* – витрати праці в годинах, *y* – отримана кукурудза в центнерах (ФК – монотонно зростає й угнута по *y*, спадає й опукла по *x*).
Маємо задачу:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sqrt[3]{y_1(10 - x_1)} + \sqrt[3]{y_2(10 - x_2)} \to \max, \\ y_1 + y_2 = x_1 + 2x_2, \;\; x_i, y_i \ge 0, \;\; i = 1{,}2. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Необхідні умови оптимальності для задачі (3.5), оскільки вона є опуклою задачею математичного програмування, будуть і достатніми, тому матимемо (викладки пропонуємо зробити читачеві самостійно): $y_1^* = 2y_2^*$, $(10 - x_1^*) = 4(10 - x_2^*)$. Таким чином, більш продуктивний агент отримує за свою працю вдвічі менше кукурудзи, маючи при цьому в 4 рази менше вільного часу.

3. Брат і сестра повинні поділити між собою одиницю нескінченно подільного пирога. Брат удвічі більш голодний, ніж сестра: один і той же шматок пирога *x* приносить брату (з функцією корисності u_1) вдвічі більшу корисність $u_1(x) = 2u_2(x)$, де u_2 – функція корисності сестри. Нехай функції u_1, u_2 є зростаючими, угнутими та диференційованими.

Розв'язок утилітарної задачі: $u_1(x) + u_2(1 - x) \to \max\limits_{x \in [0,1]}$ знаходиться з необхідних умов оптимальності, оскільки функція є угнутою. Маємо $u_1'(x^*) = u_2'(1 - x^*) = 0{,}5u_1'(1 - x^*) < u_1'(1 - x^*) \Rightarrow x^* > 1 - x^* \;\; \Rightarrow x^* > 0{,}5$. Розв'язок егалітарної задачі: $u_1(\bar{x}) = u_2(1-\bar{x}) = 0.5u_1(1-\bar{x}) < u_1(1-\bar{x}) \Rightarrow \bar{x} < 1-\bar{x} \Rightarrow \bar{x} < 0.5$.

Отже, утилітарист віддає більшу частину пирога більш голодному брату, егалітарист віддає йому меншу частину! Чому? Бо турбується перш за все за більш голодну сестру – компенсує їй знижений апетит.

Кожен може перевірити – ким є їх знайомі? Утилітаристи чи егалітаристи? Мірліс [6] пропонує такий тест. Два автомобілі зіштовхуються й спалахують. В одному автомобілі – одна людина, у другому – чотири. У єдиного свідка ДТП є час спасти лише одну машину. Кого будете спасати ви? Якщо машину з чотирма пасажирами, то ви утилітарист. Підсвідомо ви вважаєте, що "корисність" чотирьох людей апріорі більша за "корисність" одного. Егалітарист намагатиметься урівняти шанси кожного, наприклад, кине монету – яку машину спасати!

Не дивлячись на відмінність утилітаризму й егалітаризму, вони мають одну спільну "функціональну" рису. В обох випадках використовується функція колективної корисності (ФКК), що агрегує індивідуальні корисності в єдиний "індекс" корисності, що представляє колективний "добробут".

Між цими двома крайнощами "містяться" всі інші "колективні добробути", які визначимо наступним чином.

Нехай $N = \{\overline{1,n}\}$ – фіксована "спільнота", $u = (u_1,...,u_n)$ – розподіл корисностей, $u \in E^n_{>0}$. *Порядком колективного добробуту* (ПКД) називається впорядкування R у E^n (рефлексивне, транзитивне і зв'язне бінарне відношення на E^n).

Позначимо через P його строгу компоненту: $uPv \Leftrightarrow (uRv) \wedge (v\bar{R}u)$, через J – компоненту байдужності: $uJv \Leftrightarrow (uRv) \wedge (vRu)$. Припустимо, що ПКД задовольняє наступним двом додатковим властивостям (аксіомам).

А1. Анонімність (симетрія по агентах). Якщо u отримане з v перестановкою координат, то uJv.

А2. Одностайність. Якщо $u \geq v$ ($u_i \geq v_i$, для $\forall\ i = \overline{1,n}$), то uRv. Зокрема, якщо $u >> v$ ($u_i > v_i$ для $\forall\ i = \overline{1,n}$), то uPv.

Приведемо п р и к л а д. Нехай u^* отримано з $u \in E^n_{>0}$ перестановкою компонент по неспаданню. Вектори u і v еквівалентні за лексимінним впорядкуванням (*LM*), якщо $u^* = v^*$. Вектор u переважає вектор v за *лексимінним* впорядкуванням, якщо u^* лексикографічно переважає v^*, тобто існує $k = \overline{0, n-1}$ таке, що: $u_i^* = v_i^*$, для $i = \overline{1, k}$ і $u_{k+1}^* > v_{k+1}^*$. Зокрема, якщо $W_e(u) > W_e(v)$, то вектор u лексимінно переважає вектор v.

"Нестроге" лексимінне впорядкування будемо позначати через $LM(uLMv)$, строгу компоненту P_{LM}, компоненту байдужності – J_{LM}. Очевидно, що лексимінне впорядкування є ПКД. Розглянемо його властивості. Нехай S, $S \subseteq E^n_{>0}$ – множина допустимих векторів корисностей. Нижче припускатимемо, що S – компактна множина (обмежена й замкнена). Нехай $u, v \in E^n_{>0}$, $u > v$ означає, що $u \geq v$ і $u \neq v$.

Скажемо, що вектор u є *оптимальним за Парето (ефективним)* у S, якщо для $\forall v \in S \quad v > u \Rightarrow \quad v \notin S$. Вектор u називається *слабко-оптимальним за Парето (слабко-ефективним)* у S, якщо для $\forall v \in S$ $v >> u \Rightarrow \; v \notin S$ ..

Теорема 3.1. Нехай $W_e = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \{u_i\}$ – егалітарна функція корисності, $S_0 = Arg \max\limits_{u \in S} W_e$. Тоді множина $S_0 \neq \varnothing$, усі її елементи є слабко-ефективними та існує хоча б один ефективний елемент.

Теорема 3.2. Нехай множина S містить ефективний елемент u^0 такий, що $u_i^0 = u_j^0$ для $\forall \; i, j = \overline{1, n}$. Тоді $S_0 = \{u^0\}$.

Теорема 3.3. Нехай S містить слабко-ефективний елемент u_0 такий, що $(u_0)_i = (u_0)_j$, для $\forall \; i, j = \overline{1, n}$. Тоді $u_0 \in S_0$.

Розглянемо лексимінний порядок і позначимо через S_{LM} множину елементів множини S, максимальних за цим порядком.

Теорема 3.4. $S_{LM} \neq \varnothing$ і кожен елемент S_{LM} є ефективним у S. Нехай $u_0 \in S_0$, тоді $u^* = v^*$ (тобто множина S_0 скінченна). Якщо множина S опукла, то S_0 містить єдиний елемент.

Тепер нас, як і в "індивідуальній" теорії корисності, буде цікавити, чи можна на основі попарних порівнянь векторів колективної корисності (тобто, задаючи ПКД) співставити кожному векторові колективної корисності – "індекс" колективного добробуту.

Функцією колективної корисності (ФКК) називається дійснозначна функція *W*, що визначена на E^n й задовольняє наступним властивостям. *Анонімність*: *W* симетрична за змінними $u_1,...,u_n$; *одностайність*: $u \ge v \Rightarrow W(u) \ge W(v)$ (зокрема, якщо $u>>v \Rightarrow W(u)>W(v)$). Два приклади ми вже знаємо: це егалітарна ФКК $W_e(u)=\min_{i=\overline{1,n}} u_i$ та утилітарна $W_y(u)=\sum_{i=1}^{n} u_i$. Кожна ФКК *W* однозначно породжує ПКД *R*: $uRv \Leftrightarrow W(u) \ge W(v)$.

Представлення ПКД *R* за допомогою ФКК є так само зручним, як і представлення індивідуальних переваг за допомогою функції корисності. Але не всі ПКД можуть бути представлені ФКК.

Теорема 3.5. Лексимінний ПКД не представляється ФКК.

Доведення можна подивитись в [6].

Егалітарна програма здійснює перерозподіл добробуту від "багатого" до "бідного", утилітарна програма є байдужною до таких перерозподілів. Між цими двома крайніми випадками мається вельми широкий клас ПКД, кожен з яких в деякій мірі звертає увагу на перерозподіл від багатого до бідного, але також намагається підняти й загальну суму корисностей.

Принцип передачі Пігу-Дальтона стверджує, що передача корисності від одного агента до іншого, котра не збільшує розрив у їх добробуті, не може зменшити колективного добробуту.

Порядок *R* задовольняє принципу Пігу-Дальтона, якщо для двох агентів *i,j* й будь-яких векторів $u,v \in E^n$ виконується:

$$\left\{u_k = v_k \text{ для } \forall k \ne i, j, u_i + u_j = v_i + v_j \text{ та } \left|v_i - v_j\right| < \left|u_i - u_j\right|\right\} \Rightarrow vRu .$$

Якщо ПКД задовольняє принципу Пігу-Дальтона, то будемо говорити, що він не збільшує нерівності. Якщо при тих же умовах вектор *v* строго переважає *u*, то ПКД *R* скорочує нерівність.

Розглянемо *сепарабельно-адитивну ФКК* $W(u)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(u_i)$. Яка властивість функції α відповідає ПКД, що скорочує нерівність?

Покладемо $u_i = x$, $u_j = y+\varepsilon$, $v_i = x+\varepsilon$, $v_j = y$, $\varepsilon > 0$. З визначення принципу Пігу-Дальтона матимемо: $\forall\, x<y$, $\forall\ \varepsilon>0$:

$$\alpha(x+\varepsilon)-\alpha(x)\geq\alpha(y+\varepsilon)-\alpha(y).$$

Остання умова є, очевидно, просто угнутістю функції α . Таким чином, для того, щоб ФКК $\sum_{i=1}^{n}\alpha(u_i)$ не збільшувала (скорочувала) нерівність, необхідно й достатньо, щоб функція α була угнутою (строго угнутою). Можна легко перевірити, що лексимінний ПКД скорочує нерівність, а егалітарна ФКК його не збільшує.

Наступний результат показує, що принцип Пігу-Дальтона виконується не лише для сепарабельно-адитивних ФКК.

Теорема 3.6. Нехай ФКК є диференційованою. Тоді вона задовольняє принципу Пігу-Дальтона тоді й лише тоді, коли:

$$\forall\ u\in E^n:\ u_i\leq u_j\ \Leftrightarrow\ \frac{\partial W(u)}{\partial u_j}\leq\frac{\partial W(u)}{\partial u_i}.$$

Доведення. Нехай $v_i=u_i+\varepsilon$, $v_j=u_j-\varepsilon$, $v_k=u_k$, $k\neq i,j$; $u_i<u_j$; $\varepsilon\leq\frac{1}{2}(u_j-u_i)\Rightarrow W(u)\leq W(v)$, $\frac{d}{d\varepsilon}(W(v)-W(u))=$ $=\frac{\partial W(u)}{\partial u_j}-\frac{\partial W(u)}{\partial u_i}\leq 0$. ♦

Розглянемо 2 критерії характеризації принципу Пігу-Дальтона.

Вектор $L(u)=\left(u_1^*,u_1^*+u_2^*,\ldots,\sum_{i=1}^{n}u_i^*\right)=\left(W_e(u),\ldots,W_k(u),\ldots,W_y(u)\right)$, де $W_k(u)=(L(u))_k=\sum_{i=1}^{k}u_i^*$ – сума доходів k перших "найбідніших" членів, називається *кривою Лоренса*.

Як впливає перерозподіл корисностей Пігу-Дальтона на криву Лоренса? Нехай $u_i^*<u_j^*$, $i<j$. Збільшимо u_i^* до $u_i^*+\varepsilon$, одночасно знижуючи u_j^* до $u_j^*-\varepsilon$ так, щоб $u_i^*+\varepsilon<u_j^*-\varepsilon$ (тобто виберемо ε : $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(u_j^*-u_i^*)$). Нижче приведено приклад, в якому при перерозподілі віднімається 4 одиниці корисності від u_7^* й передається u_2^* (i=2, j=7, $\varepsilon=4$). Позначимо через v вектор, що отримується після перерозподлу:

$$u^* = (2,6,8,9,11,14,16,18) \to L(u) = (2,8,16,25,36,50,66,84),$$

$$v^* = (2,10,8,9,11,14,12,18) \to L(v) = (2,10,19,29,40,52,66,84).$$

Таким чином, після перерозподілу кожна координата кривої Лоренса або "піднімається", або залишається незмінною. Виявляється, що ця властивість загальна: будь-яка передача Пігу-Дальтона "піднімає" криву Лоренса. Цікаво, що справедливо і зворотне.

Скажемо, що вектор *u* *домінує за Лоренсом* вектор *v*, якщо його крива Лоренса *L(u)* домінує за Парето криву Лоренса *L(v)*:

$$L(u) > L(v) \Leftrightarrow \forall k: \sum_{i=1}^{k} u_i^* \geq \sum_{i=1}^{k} v_i^*,\ \exists j: \sum_{i=1}^{j} u_i^* > \sum_{i=1}^{j} v_i^*.$$

Теорема 3.7. Якщо *u* домінує за Парето *v* або *u* отримано із *v* передачею Пігу-Дальтона, то *u* домінує за Лоренсом *v*. Навпаки, якщо *u* домінує за Лоренсом *v*, то можна підібрати послідовність передач Пігу-Дальтона й покращень Парето, які дозволяють з *v* отримати *u*.

Отже, ПКД *R* не збільшує нерівність тоді й лише тоді, коли він є узгодженим з домінуванням Лоренса: $\forall\, u,v\ L(u)>L(v) \Rightarrow uRv\ (uPv)$.

Послідовність покращень Парето, про яку йде мова в теоремі, для кожного скорочуючого нерівність ПКД приведе до оптимального за Лоренсом елемента. Таким чином, оптимуми Лоренса є підмножиною множини оптимумів Парето. Розглянемо випадок для *n=2*. Тоді $L(u_1,u_2) = (\min\{u_1,u_2\}, u_1+u_2) = (W_e(u), W_y(u))$. Отже, вектор корисностей є оптимальним за Лоренсом тоді й лише тоді, коли він не може бути покращенним за утилітарною ФКК без погіршення за егалітарною ФКК й навпаки.

На рис. 3.3 показані типові конфігурації (без дилеми "рівність–ефективність" та з нею) для опуклої допустимої множини *S* й відповідні оптимуми Лоренса й Парето. Оптимуми Лоренса розміщені між розв'язками егалітарним α й утилітарним β.

Оптимуми Парето знаходяться на кривій $\delta\gamma$ на лівому рисунку й на кривій $\gamma\alpha$ – на правому.

Другий спосіб характеризації принципу Пігу-Дальтона носить технічний характер. Він стверджує, що опуклі (строго опуклі) ПКД не збільшують (скорочують) нерівності.

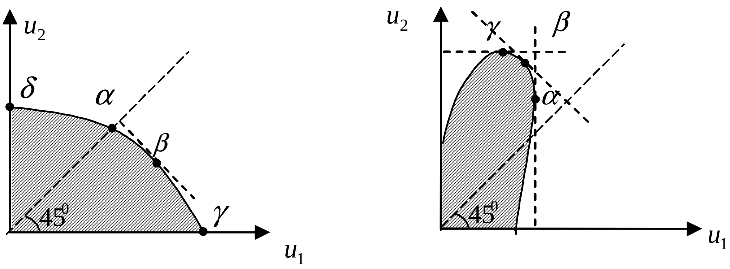


Рис. 3.3.

Скажемо, що $n \times n$ матриця $\varphi = (q_{ij})$ є *двічі стохастичною*, якщо $q_{ij} \geq 0$, $\sum_i q_{ij} = \sum_j q_{ij} = 1$ при всіх *i, j*. *Матриця перестановки* – це така двічі стохастична матриця, у якої $q_{ij} = 0$ або 1 для всіх *i,j*.

Теорема 3.8 (Харді, Літтлвуд, Пойа, 1934 р.). ПКД *R* не збільшує нерівність тоді і лише тоді, коли він задовольняє умові: для $\forall\ u \in E^n$ та будь-якої двічі стохастичної $n \times n$ матриці Q виконується:

$$(Qu)Ru\ . \tag{3.6}$$

Більш того, ПКД *R* скорочує нерівність тоді і лише тоді, коли виконується $(Qu)Pu$ для $\forall u$ з різними компонентами і для всіх двічі стохастичних матриць Q, що не є матрицями перестановок.

Наслідок з теореми 3.8. Скажемо, що ПКД R є опуклим (строго опуклим), якщо його верхні контурні множини $\{v \mid vRu\}$ є опуклими (строго опуклими). Опуклий ПКД не збільшує нерівності. Строго опуклий ПКД скорочує нерівність. Доведення теореми можна знайти в [6]. ПКД, що задовольняє умові (3.6), також називається опуклим за Шуром. Рис. 3.4 показує, що контур опуклого за Шуром ПКД може бути не опуклим. Утилітарна функція колективної корисності не звертає уваги на нерівномірність у розподілі індивідуальних корисностей, егалітарна – у першу чергу, намагається підвищити мінімальну індивідуальну корисність. Як чисельно виміряти нерівномірність у розподілі індивідуальних корисностей, а отже, визначити, яке суспільство більш "справедливе"?

Розглянемо ПКД R, що скорочує нерівність. Для будь-якого додатного вектора корисностей u ($u_i > 0$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, або $u \in E^n_{>0}$) визначимо еквівалентний йому рівний розподіл корисностей з рівнем $\varepsilon(u):(\varepsilon(u),\varepsilon(u),...,\varepsilon(u))Ju$ або $(\varepsilon(u)\cdot e)Ju$, де $e=(1,...,1)$. Визначимо середню корисність $\bar{u}=\sum_{i=1}^{n}u_i\Big/n$ й визначимо "індекс нерівності J, пов'язаний з ПКД R", наступним чином:

$$J(u)=1-\frac{\varepsilon(u)}{\bar{u}}. \qquad (3.7)$$

Оскільки R скорочує нерівність, то розподіл $\bar{u}\cdot e$ не гірше за u. Отже, $(\bar{u}\cdot e)Ru\wedge uJ(\varepsilon(u)\cdot e)\Rightarrow(\bar{u}\cdot e)R(\varepsilon(u)\cdot e)\Rightarrow\bar{u}\geq\varepsilon(u)$.

Таким чином, J(u) невід'ємний для всіх u. Більш того, J(u)=0 тільки при $\varepsilon(u)=\bar{u}$, що можливе тільки, якщо u – рівний розподіл ($u=\bar{u}\cdot e$), оскільки R скорочує нерівність. Нарешті, $J(u)$ обмежений зверху 1, оскільки $\varepsilon(u)$ невід'ємне, вектор u додатній. Звідси маємо: $0\leq J(u)\leq 1$ для $\forall u$, причому $J(u)=0$ тоді й лише тоді, коли $u=\bar{u}\cdot e$.

Теорія індексів «паралельна» теорії ПКД. Дійсно, за індексом J, можна відновити функцію ε з (3.7) і ε буде ФКК, що представляє відношення R.

Індекс Аткінсона та індекс Джині. Оскільки індекс нерівності J представляє ПКД, що скорочує нерівність, то він буде зменшуватися в результаті передачі Пігу-Дальтона. Нарешті, покладемо, що індекси нерівності не змінюються при зміні масштабу корисностей. Підсумовуючи, скажемо, що індекс нерівності є функція J, яка визначена на $E^n_{>0}$ й задовольняє умовам:

1. $0\leq J(u)\leq 1$, причому $J(u)=0$ тоді й лише тоді, коли $u=\bar{u}\cdot e$;
2. $J(v)<J(u)$, якщо v отримано з u передачею Пігу-Дальтона;
3. $J(\lambda u)=J(u)$ для $\forall\ \lambda>0$.

Легко перевірити, що наступні ФКК скорочують нерівність:

$$W_q(u)=\sum_{i=1}^{n}u_i^q,\ 0<q<1;\ W_q(u)=-\sum_{i=1}^{n}u_i^q,\ q<0;\ W_0(u)=\sum_{i=1}^{n}\log u_i.$$

Відповідні міри нерівності ("*індекси Аткінсона*") отримуються безпосередніми обчисленнями з (3.7):

$$J_q(u)=1-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\overline{u}}\right)^q\right)^{1/q},\ 0<q<1;\ J_0(u)=1-\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\overline{u}}\right)^{1/n}.$$

З точністю до нормування "*індекс Джині*" є середнім розкладом корисностей за всіма парами агентів:

$$G(u)=\frac{1}{n^2\overline{u}}\sum_{1\le i,\,j\le n}\left|u_i-u_j\right|.$$

Відновлюючи з індексу Джині ФКК за формулою (3.7), маємо:

$$W(u)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2(n-k)+1)u_k^*.$$

Таким чином, ця ФКК є варіантом класичного утилітаризму, при якому ваги більш успішних агентів спадають лінійно у відповідності із збільшенням рангів.

Не дивлячись на привабливу інтерпретацію, індекс Джині має суттєвий недолік – відповідна ФКК не є "*сепарабельною*".

Приклад. $G_5(4,11,3,9,8)=1-\frac{1}{5^2\cdot 7}(9\cdot 3+7\cdot 4+5\cdot 8+3\cdot 9+11)=\frac{6}{25}$.

Нехай тепер, відбувся перерозподіл корисностей між першими трьома агентами без зміни загальної корисності всередині групи з $(4,11,3)$ до $(7,10,1)$. Маємо: $G_3(4,11,3)=8/27$, $G_3(7,10,1)=9/27$.

Тобто індекс Джині для групи $\{1,2,3\}$ збільшився, в той час, як індекс Джині для всієї спільноти зменшився: $G_5(7,10,1,9,8)=8/35<G_5(4,11,3,9,8)$.

Отже, індекс Джині не є "*сепарабельним*" за таким визначенням.

Визначення (*Сепарабельність за підгрупами*). Дано дві спільноти $N,\ T,\ T\subset N$, і два вектори $u_T, v_T\in E_{>0}^{|T|}$ такі, що $\overline{u}_T=\overline{v}_T$ і вектор $u_{N\setminus T}\in E_{>0}^{|N\setminus T|}$, тоді $J_T(u_T)\ge J_T(v_T)\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow J_n(u_T,u_{N\setminus T})\ge J_n(v_T,v_{N\setminus T})$.

Оскільки індекси Аткінсона відповідають сепарабельним ФКК, то вони є сепарабельними за підгрупами.

Контрольні завдання до §3

1. Знайти розв'язок задачі 3.5.
2. На множині векторів корисностей {u=(1,3,7,9,5), v=(3,2,5,4,6), w= (2,5,3,7,6)} знайти егалітарний, утилітарний, лексикографічний та лексимінний оптимуми.
3. На множині векторів з п.2 знайти оптимуми за Парето та Лоренса.
4. Обчислити індекс Джині для розподілів корисності з п.2.
5. Для розподілів корисностей з п.2 побудувати приклад "несепарабельності за підгрупами".
6. Для розподілів корисностей з п.2 обчислити індекси Аткінсона для q=0; 0.5; -2.

Питання для самоперевірки до розділу 2

1. Дайте визначення слабкого упорядкування, сформулюйте умови існування функції корисності для слабких упорядкувань.
2. Сформулюйте умови існування функції корисності для строгих часткових упорядкувань.
3. Сформулюйте умову сепарабельності.
4. Дайте визначення слабкої ймовірностної міри.
5. Сформулюйте аксіому Архімеда.
6. Що називається множиною сумішей?
7. Що називається станами природи?
8. Що називається екстенсивною формою задачі прийняття рішень в умовах невизначеності?
9. Сформулюйте критерії Байда, Гурвіца, Гермейєра.
10. Сформулюйте критерій "мінімальної залежності від природи".
11. Сформулюйте задачу колективного прийняття рішень.
12. Дайте визначення утилітарної, егалітарної функції корисності.
13. Дайте визначення порядку колективного добробуту, сформулюйте аксіоми анонімності та одностайності.
14. Дайте визначення колективної функції корисності.
15. Сформулюйте принцип передачі Пігу-Дальтона.
16. Що таке крива Лоренса? Дайте визначення оптимуму за Лоренсом.
17. Що таке індекси Лоренса? Дайте визначення індексу Джині.

РОЗДІЛ 3
ЕКСПЕРТНІ ПРОЦЕДУРИ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Експертна інформація відіграє важливу роль при використанні сучасних методів підтримки прийняття рішень. Методи її отримання, представлення й обробки утворюють невід'ємну частину технології підтримки прийняття рішень.

§1. Загальні проблеми

При підтримці прийняття рішень використовується експертна інформація двох видів: концептуально-понятійна й оціночна. Інформація першого типу представляє собою формування цілей, критеріїв, альтернатив, визначення принципів оптимальності. Вона представляється у текстовому вигляді на природній мові. До другого виду відноситься інформація про оцінку цілей, критеріїв та альтернатив. При цьому розрізняються абсолютні та відносні оцінки, останні, в свою чергу, поділяються на ординарні та кардинальні. Найкраще, звичайно, мати абсолютні оцінки (вартість засобів для досягнення цілі; час, необхідний на реалізацію рішення; ефективність отриманого рішення тощо), але, як правило, витрати на їх отримання дуже великі, а їх точність, навпаки, низька. Відносні оцінки отримати, як правило, простіше, з іншого боку, "все пізнається у порівнянні" ("У порівнянні з шестидесятитонним кашалотом десятитонні самочки здаються мініатюрними" (з TV передачі "У світі тварин")). У цьому сенсі "абсолютні" оцінки є результатом порівняння деякої альтернативи з усіма можливими.

Ординарні оцінки альтернатив являють собою їх *ранги* (місця) у послідовності переваг за деяким критерієм.

Кардинальні оцінки – це числа, що вказують відносну значимість альтернатив та цілей у тому або іншому сенсі у певній шкалі.

Шкали зручно поділити на дві групи – для кількісної та якісної оцінки альтернатив.

Розглянемо основні шкали першої групи. Прикладами оцінок альтернатив в *абсолютній шкалі* є: кількість об'єктів, час виконання роботи, ймовірність реалізації альтернативи тощо. Прикладами оцінок у *шкалі відношень* можуть бути: вага товару у кілограмах, фунтах, пудах; довжина у метрах, футах, сажнях тощо. У *шкалі інтервалів* зберігаються відношення різниць оцінок. Початок відліку й масштаб можуть змінюватись (температура у шкалах Цельсія, Фаренгейта, Кельвіна).

Для представлення якісних оцінок використовується номінальна шкала, шкали порядку й гіперпорядку. Оцінки у *номінальній шкалі* являють собою номери класів еквівалентності, у які були включені альтернативи у результаті їх класифікації (представлення множини студентів номером навчальної групи, потоку, спеціальності тощо). У *порядковій шкалі* представляються ординарні оцінки альтернатив, що відображають лише порядок альтернатив у ряду переваг за деяким критерієм (наприклад, "важливості", "корисності" тощо). У *шкалі гіперпорядку* зберігаються не лише порядок альтернатив, але й відношення порядку між різницями їх оцінок.

При розробці методів обробки експертної інформації необхідно враховувати психофізіологічні властивості людей, особливості їх поведінки та пам'яті у процесі прийняття колективних оцінок.

Найбільш обґрунтованою експериментальними даними у даний час є так звана трьохкомпонентна модель пам'яті [7,8]. Відповідно цій моделі розрізняють три види пам'яті: сенсорну, короткострокову й довгострокову (так же, як і у комп'ютері: регістри прийому інформації, оперативна пам'ять й пам'ять на зовнішніх носіях). Різноманіття видів пам'яті проявляється в об'ємі інформації, що зберігається, часі збереження й способі кодування. У *сенсорну* пам'ять інформація поступає від органів відчуттів і зберігається у ній біля третини секунди. Із сенсорної пам'яті інформація переписується у *короткострокову* пам'ять, де вона зберігається до 30 секунд й обробляється. Потім інформація або губиться, або поступає у *довгострокову* пам'ять з дуже великою ємністю і дуже великим часом зберігання (і ємність, і час вважаються практично необмеженими).

Дослідження психологів показують, що процеси прийняття рішень відбуваються за участю саме короткострокової пам'яті, у яку інформація може поступати із сенсорної та довгострокової. Об'єм короткострокової пам'яті обмежений 7 ± 2 одиницями (у залежності від індивідуума), які називаються *чанками* [7,8]. При цьому чанком може бути й простий символ, і складний образ, але важливо, що об'єкт, який описується чанком, сприймається людиною як єдиний образ. При порівнянні об'єктів (альтернатив, критеріїв) кожен з них описується чанком. Тому при розробці методів підтримки прийняття рішень число об'єктів, які повинен порівнювати експерт, необхідно обмежити цим "магічним" числом 7 ± 2.

Значний теоретичний та практичний інтерес мають оцінки виконання елементарних операцій, що використовуються у методах підтримки прийняття рішень:

♦ "*Складні*" (С), при виконанні яких ОПР допускає багато протиріч, використовує спрощені стратегії (наприклад, виключає частину альтернатив чи критеріїв).

♦ "*Допустимі*" (Д), ОПР може виконувати їх з малими протиріччями та з використанням складних стратегій.

♦ "*Допустимі при малій розмірності*" (ДМ), при невеликій кількості об'єктів ОПР виконує їх достатньо надійно.

♦ "*Невизначені*" (Н), ОПР може винести лише попередні висновки про допустимість (матимемо тип оцінки НД) або складності (тип оцінки НС) операції.

Особливо потрібно акцентувати увагу на психологічних аспектах прийняття колективних (групових) рішень. Основи теорії "групової свідомості" були вперше сформульовані у 1971 р. Ірвіном Янісом (Janis). Основні ознаки групової свідомості зводяться до наступного: належність до конкретної групи, ізоляція від інших; "стереотипування" інших – інші не розуміють їх; тиск на інакомислячих; загроза групі; ілюзія невразливості, ілюзія одностайності і т.д.

Експериментально доведено, що на ефективність групової свідомості впливають одностайність групи й колективна загроза. Якість групового рішення є гіршим в умовах сильної загрози й сильної одностайності й слабої загрози й слабої одностайності, ніж в умовах сильної загрози й слабої одностайності або слабої загрози й сильної одностайності.

№	**Назва елементарної операції**	Оцінка
1	**Операції з критеріями**	
1.1	Впорядкування за корисністю	НД
1.2	Призначення кількісних ваг критеріїв	С
1.3	Декомпозиція складного критерію на прості	ДМ
2	**Операції з оцінками альтернатив за критеріями**	
2.1	Кількісний еквівалент для якісної оцінки	НС
2.2	Побудова кривої корисності за критерієм	С
2.3	Якісне порівняння змін оцінок двох критеріїв	Д
2.4	Кількісне заміщення для двох критеріїв	НС

2.5	Визначення задовільного значення	НД
3	**Операції з альтернативами**	
3.1	Порівняння двох альтернатив як сукупності оцінок	ДМ
3.2	Порівняння двох альтернатив як цілісних об'єктів	НД
3.3	Знаходження ймовірнісних оцінок для альтернатив	С
3.4	Відношення альтернатив до класів рішень	ДМ
3.5	Кількісна оцінка корисності	С
3.6	Декомпозиція складної альтернативи на прості	ДМ
3.7	Призначення якісних оцінок ймовірностей	Д

Наслідком наявності ознак групової свідомості є прийняття "поганих" рішень. Існує декілька підходів до визначення мір утручання з метою компенсування групової свідомості. Так, наприклад, рекомендується запрошення експертів "ззовні"; запрошення "адвоката диявола" (тобто людини, яка помічає в інших лише недоліки); застосування методики "виконання декількох ролей" (членам групи пропонується поставити себе на місце інших); стимулювання інтелектуальної боротьби думок у групі, зокрема, захист думок меншості.

Загальна схема експертизи. Аналіз існуючих експертиз показує, що у процесі їх побудови можна виділити таку послідовність дій.

♦ Дослідник (консультант) знаходить множину "можливих" оцінок Ω, у якій знаходиться шукана оцінка.

♦ Дослідник (консультант) визначає множину допустимих оцінок $\tilde{\Omega}$, з котрої здійснюють вибір експерти.

♦ Кожен експерт вибирає свою оцінку $a_i = C_i(\tilde{\Omega}) \in \tilde{\Omega}$, $i = \overline{1, n}$, тобто розв'язує задачу вибору найкращої оцінки з $\tilde{\Omega}$.

♦ Дослідник (аналітик) проводить обробку отриманої від експертів інформації й знаходить результуючу (інтегральну, колективну) оцінку з $\tilde{\Omega}$, котра приймається за розв'язок початкової задачі оцінювання.

♦ Якщо отриманий розв'язок не задовольняє дослідника, він може організувати "обернений зв'язок", після чого експерти знову розв'язують відповідні задачі вибору.

На рис. 1.1. – блок-схема експертизи. Її параметри:

Ω та $\tilde{\Omega}$ – відповідно множини можливих та допустимих оцінок;

L – взаємодія між експертами; Q – обернений зв'язок; φ – обробка (відображення $\tilde{\Omega}^n \to \Omega$).

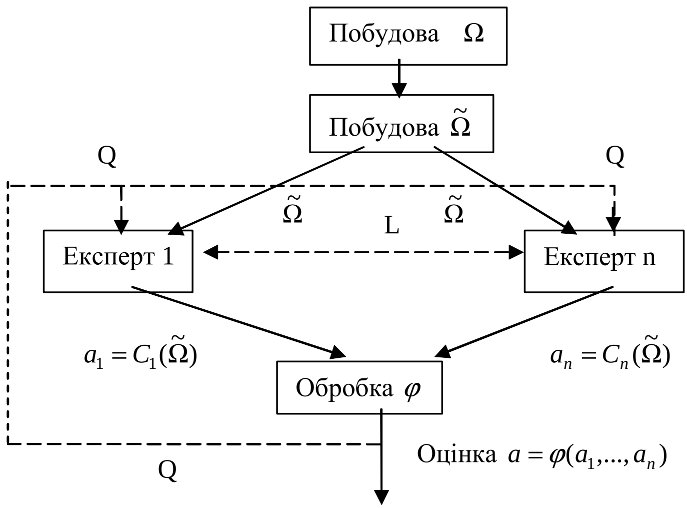


Рис.1.1.

Назвемо *схемою* експертизи п'ятірку параметрів, що представлені на блок-схемі. Під підготовкою експертизи будемо розуміти попередню розробку схеми експертизи та підбір експертів, під реалізацією експертизи – отримання інформації та її обробку.

Підготовка експертизи полягає у конкретизації параметрів:

І. Множина можливих оцінок (ММО) визначається задачею оцінювання, що розв'язується, наприклад, так:

1) $\Omega = \{0,1\}$. Відповідна задача попарного порівняння полягає у знаходженні кращого з двох об'єктів A і B. При цьому

$$C(\Omega) = \{1 | A \text{ краще за } B; 0 | \text{інакше}\}.$$

2) $\Omega = \{(i_1,...,i_n)\}$ – множина перестановок натуральних чисел від 1 до n. Відповідна задача ранжування полягає у впорядкуванні об'єктів за спаданням (зростанням) значення деякої ознаки. При цьому $C(\Omega) = (s_1,...,s_n)$, де s_i – номер i – го об'єкта.

3) $\Omega = \{1,...,l\}$. Відповідна задача класифікації полягає у віднесенні елемента $x \in S$ до однієї з l підмножин $S_1,...,S_l$. При цьому $C(\Omega) = i$, якщо $x \in S_i$.

4) $\Omega = E^m$. Відповідна задача чисельної оцінки полягає у співста-

вленні системі одного чи декількох чисел. При цьому $C(\Omega) = a$, якщо оцінкою системи є вектор $a \in E^m$.

II. Множина допустимих оцінок (МДО). Для конкретизації Ω необхідно описати вид його представлення експерту, котрий залежить від форми опитування експерта. Опитування типу *інтерв'ю* передбачає розмову дослідника з експертом, у ході якої дослідник ставить питання у відповідності з розробленою програмою. До недоліків методу відносяться складність формалізації та високі вимоги до дослідника та експерта.

Найчастіше застосовується форма опитування, що носить назву *анкетування*. Анкета – це набір питань, на які пропонується відповісти експерту. Багатьма дослідженнями встановлено, що людина краще відповідає на "якісні" питання ("гірше-краще"), ніж на кількісні. Рекомендується спочатку формувати загальні питання, потім часткові.

Аналітична форма опитування передбачає тривалу самостійну роботу експерта, направлену на аналіз характерних властивостей і тенденцій системи, що досліджується. Таку форму називають *методом доповідної записки*. Вона часто застосовується як перший етап більш складної експертизи, що дозволяє уточнити напрям досліджень і зміст питань, що будуть задаватись на таких етапах.

III. Виділяють три форми взаємодії експертів (параметр L):

1) експерти вільно обмінюються інформацією;
2) обмін інформацією між експертами регламентовано;
3) експерти ізольовані один від одного.

У схемі типу *круглого столу* взаємодія між експертами не регламентована. У процесі обговорення проблеми експерти вільно обмінюються думками, збагачуючись ідеями один одного. Негативний бік, обумовлений підвищеними вимогами до експертів: уміння висловити думку, що не залежить від думки більшості; здатність відмовитись від свого погляду, якщо він виявиться невірним.

Деяка регламентація спілкування експертів у схемі круглого столу дозволяє уникнути вказаних недоліків. Відповідна модифікація називається *методом мозкового штурму* (мозкової атаки). Він полягає у тому, що на протязі деякого проміжку часу будь-яка висловлена думка не обговорюється і не відкидається. Обговорення висловлених думок здійснюється на наступних етапах після того, як кожен експерт встигає обдумати їх, зіставити із своєю.

Якщо експерти ізольовані, то кожен висловлює свою думку незалежно від інших. Оцінки окремих експертів при цьому можна розглядати як незалежні реалізації випадкової величини.

IV. Обернений зв'язок в експертизі. Кожному експерту надають результуючу оцінку, взагалі кажучи, разом з деякою іншою інформацією (наприклад, з "найгіршою" й "найкращими" оцінками). На основі одержаних даних експерти уточнюють свої оцінки, після чого процедура повторюється знову, поки не буде одержана узгодженість оцінок, що задовольняє дослідника.

До числа найбільш відомих процедур з оберненим зв'язком відноситься *метод Делфі*. Експертам пропонується відповісти на ряд питань і свої відповіді аргументувати. Аналітик вивчає відповіді експертів і визначає їх узгодженість. Якщо думки експертів недостатньо узгоджені, то він повідомляє кожному з них додаткові відомості про систему, а також відповіді на поставлені питання та аргументації інших членів експертної групи. З врахуванням отриманої інформації експерти знову відповідають на сформульовані питання. Недоліком методу є великі витрати часу на проведення всіх турів опитування й велика трудомісткість процедури, що пов'язана з переглядом думок експертів.

V. Підбір експертів. Спочатку визначається число експертів – воно повинно бути достатньо великим для того, щоб були всебічно враховані суттєві властивості задачі, з іншого боку, при занадто великій кількості експертів виникають труднощі в організації процедури. Доцільно організовувати групу з 10-20 експертів, хоча можливі відхилення як у більшу, так і меншу сторону.

Коли чисельність групи визначена, переходять до підбору експертів. Для цього визначають перелік задач, що потребують розв'язання, і складають список осіб, що є компетентними спеціалістами у даній (або близьких до даної) області. Крім *компетентності*, хороший експерт повинен мати ще цілий ряд якостей. Основні з них наступні: *креативність* – здатність розв'язувати задачі, метод розв'язку котрих, повністю або частково невідомий; *евристичність* – здатність виявляти неочевидні проблеми; *інтуїція* – здатність "вгадувати" розв'язок без його обґрунтування; *предикатність* – здатність "передбачати" розв'язок; *незалежність* – здатність протистояти думці більшості; *всебічність* – здатність бачити проблему з різних точок зору.

Вимоги до експертів залежать також від методу організації експертизи. Так, при роботі експерта у комісії, де експерти вступають у безпосередній контакт, важливе значення набувають психологічні фактори, у першу чергу, сумісність, незалежність. Необхідно враховувати також зацікавленість експерта у результаті експертизи.

В деяких випадках при підборі експертів використовують числові оцінки, що характеризують їх якості. Такі оцінки носять або статистичний характер, або ґрунтуються на результатах психології та соціоніки.

Степінь компетентності експертів, як правило, визначають на основі статистичного аналізу участі експерта у попередніх експертизах, отримуючи так звані ваги експертів α_i, $i = \overline{1,n}$. Нехай $a_{\Phi j}$ – фактична оцінка у j – й експертизі, a_{ij} – оцінка i -го експерта. Тоді відносна похибка i – го експерта у j – й експертизі $\varepsilon_{ij} = \left| a_{\Phi j} - a_{ij} \right| / a_{\Phi j}$, а його вага

$$\alpha_i = \left(\left(\sum_{s=1}^{k_i} \varepsilon_{is} \right) \Big/ k_i \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{s=1}^{k_i} \varepsilon_{is} \right) \right) \Big/ k_i \right),$$

де k_i – кількість експертиз, у яких брав участь i-й експерт; як видно, α_i прямо залежить від його середньої похибки по усіх експертизах, і обернено – від суми середніх похибок усіх експертів, тому $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Ваги експертів можна обраховувати й іншими способами, зокрема, враховувати їх психофізіологічні характеристики (схильність до ризику, "правдивість", "незалежність", "реалістичність" і т.п.). Задачу визначення ваги експертів, у свою чергу, можна розглядати як задачу обробки експертної інформації. У загальному випадку ваги експертів можна визначати у довільних шкалах, тоді, як правило, їх нормалізують: $\alpha_i' = \alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, де α_i – вага i-го експерта у довільній шкалі ($\alpha_i \geq 0, \forall i$; $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$). Далі вважаємо ваги експертів нормалізованими.

Контрольні завдання до §1

1. Що таке ординарні та кардинальні оцінки альтернатив?
2. Оцініть об’єм своєї короткострокової пам’яті (від 1 до 9).
3. До чого зводяться ознаки “групової свідомості” за Янісом?
4. Опишіть схему експертизи.
5. Методами круглого столу, мозкового штурму, Делфі оцінити перспективи розвитку “штучного інтелекту” (за основу дискусії взяти книгу Дж.Хокінса “Об интеллекте”, 2007 р.):

   Чи можливе створення “розумних” машин?;

   Для чого створювати “розумні” машини?;

   Чи потрібно створювати “розумні” машини?
6. Оцінити (за шестибальною шкалою: “дуже висока”-5, “висока”-4, “середня”-3, “низька”-2, “дуже низька”-1, “нульова”-0) власну та «сусіда»: креативність, евристичність, інтуїцію, предикатність, незалежність, всебічність. Порівняти оцінки (самого себе та вас «сусідом»). Зробити висновки.
7. Оцінити степінь своєї компетентності по прогнозуванню рахунків футбольних матчів на основі прогнозів за тиждень та місяць (ті, хто апріорі оцінює свою футбольну компетентність як нульову, може оцінити свою компетентність прогнозуванням погоди, індексу інфляції, політичних змін тощо).

§2. Методи обробки експертної інформації

Методи обробки експертної інформації поділяються на три основні групи: статистичні методи, алгебраїчні методи й методи шкалювання. *Статистичні методи* базуються на припущенні, що відхилення оцінок експертів від істинних значень відбувається у силу випадкових причин. Суть *алгебраїчних методів* полягає у наступному: на множині допустимих оцінок задається відстань й результуюча оцінка визначається як така, відстань якої до оцінок експертів (за певним критерієм) мінімальна. Ідея *методів шкалювання* полягає у тому, що за експертною інформацією про степінь відмінності об'єктів установлюється мінімальний (або близький до мінімального) набір критеріїв та оцінок об'єктів за цими критеріями, що обумовлюють вказані експертами відмінності.

Статистичні методи.

Експертиза 1 (Е1): $\Omega=\tilde{\Omega}=E^1$, L – експерти ізольовані, Q – обернений зв'язок відсутній, $a=\varphi(a_1,...,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$.

Тобто результуюча числова оцінка a знаходиться за формулою середньозваженого значення (математичного сподівання випадкової величини). За степінь узгодженості думок експертів служить дисперсія: $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a-a_i)^2$.

Як модифікація (Е1) розглядається наступна експертиза 2: $\Omega=\tilde{\Omega}=E^3$,

$a=\varphi\left(a_1^1,a_1^2,a_1^3;...;a_n^1,a_n^2,a_n^3\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\gamma_1 a_i^1+\gamma_2 a_i^2+\gamma_3 a_i^3}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$, де a_i^1 – "оптимістична" оцінка i-го експерта, a_i^2 – "реалістична" і a_i^3 – "песимістична". Для експерта – "реаліста" (психологічний тип експерта можна визначити відповідним тестуванням) доцільно покладати $\gamma_1=1$, $\gamma_2=4$, $\gamma_3=1$; для експерта – "оптиміста" $\gamma_1=3$, $\gamma_2=0$, $\gamma_3=2$ (він "завищує" оптимістичну оцінку), для експерта – "песиміста" $\gamma_1=2$, $\gamma_2=0$, $\gamma_3=3$ (він "занижує" оптимістичну оцінку). Степінь узгодженості між оцінками визначається величиною

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a-a_i)^2,$$

де $\sigma_i^2=\left(a_3^i-a_1^i\right)/\gamma_4$, γ_4 – степінь невпевненості i-го експерта у своїй оцінці (для експерта реаліста $\gamma_4=36$, для інших – $\gamma_4=25$).

В експертизах $E1$, $E2$ можна визначити статистичну значимість отриманих результатів. Задаємо ймовірність похибки p, вважаючи, що величина a розподілена за нормальним законом з центром $\bar{a}$ і дисперсією σ^2. Тоді: $\bar{a}-\Delta\le a\le\bar{a}+\Delta$, де $\Delta=t\sigma\sqrt{n}$, величина t має розподіл Ст'юдента з $(n-1)$-м ступенем свободи (визначаємо за таблицею розподілу Ст'юдента, за величиною p).

Опишемо застосування метода Делфі для *Е1* у вигляді наступної експертизи 3: $\Omega = E^1$, $\tilde{\Omega} = \left\{ z \in E^k \middle| \sum_{i=1}^{k} z_i = 1,\ z_i \ge 0 \right\}$.

Відображення φ задається наступним чином. Весь інтервал допустимих значень величин, що оцінюються, розбивається на k інтервалів: $t_1,...,t_k$. Експерт оцінює ймовірність попадання величини, що оцінюється, у кожен з k інтервалів. Нехай p_{ij} – оцінка ймовірності попадання у j – й інтервал, що дається i – м експертом. Тоді ймовірність попадання величини в інтервал t_j на основі думок усіх експертів оцінюється величиною: $p_{t_j} = \sum_i \alpha_i p_{ij}$, $j = \overline{1,k}$.

За колективну оцінку приймається медіана q_2 побудованого розподілу, яка визначається з умови: $p(t \le q_2) = 0.5$.

Емпірично встановлено, що процедуру можна зупиняти, коли діапазон квантілів $\Delta q = q_3 - q_1$ (де $p(t \le q_3) = 0.75$, $p(t \le q_1) = 0.25$) зменшився в 1.6 рази у порівнянні з початковим.

Експертиза 4 полягає у співставленні індивідуальним ранжуванням експертів колективного ранжування: $\Omega = \tilde{\Omega} =$ {множина всіх перестановок m об'єктів}, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній.

Відображення φ визначається наступним чином. Кожен експерт задає місце (ранг) кожного об'єкта: r_{ij} – ранг j - го об'єкта, визначеного i - м експертом. Об'єкти впорядковуються у відповідності з величинами $r_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}$, $j = \overline{1,m}$ (сума рангів кожного об'єкта по всіх експертизах; вважаємо, що експерти мають рівну компетентність) – на перше місце ставиться об'єкт з мінімальним r_j і т.д. Колективне ранжування може бути нестрогим (ми розглядаємо випадок строгих індивідуальних ранжувань).

Степінь узгодженості думок експертів визначається за допомогою "коефіцієнта конкордації" W, що визначається нижче. Розглянемо два крайніх випадки:

- ранжування всіх експертів співпадають;
- усі ранжування відмінні (вважаємо, що $n < m$!).

Оскільки $\sum_{j=1}^{m} r_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} r_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij} = 0.5 \cdot nm(m+1)$ (експерти задають ранги від 1 до m), то "середній ранг" $r_c = 1/m \sum_{j=1}^{m} r_j = 0.5 \cdot n(m+1)$ і за узгодженість експертів приймають суму квадратів відхилень r_j від середнього значення r_c.

Коефіцієнтом конкордації W для випадку строгих індивідуальних ранжувань називається величина:

$$W = 12\sum_{j=1}^{m}\left(r_j - \frac{1}{2}n(m+1)\right)^2 \Big/ n^2\left(m^3 - m\right).$$

У випадку нестрогих індивідуальних ранжувань (Експертиза 5) об'єктам, які "ділять" місця, приписуються рівні ранги (так, якщо два об'єкти ділять місця 2–3, то кожен з них отримує ранг 2.5).

Коефіцієнт конкордації для нестрогого ранжування:

$$W = 12\sum_{j=1}^{m}\left(r_j - \frac{1}{2}n(m+1)\right)^2 \Big/ \left(n^2\left(m^3 - m\right) - n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\left(t_{ij}^3 - t_{ij}\right)\right),$$

де k_i – число груп рівних рангів, введених i - м експертом; t_{ij} – кількість об'єктів у j - й групі, введеної i - м експертом.

Статистичну значимість ранжування перевіряють наступним чином. Вибирається допустима ймовірність похибки p; вважається, що величина $n(m-1)W$ має χ^2 – розподіл з $(m-1)$ – м степенем свободи. За таблицею розподілу χ^2 знаходиться W_p і, якщо $W \ge W_p$, то отримане ранжування вважається статистично значимим (тобто значимим є узгодженість думок експертів). Якщо експерти не рівнокомпетентні, α_i – вага i-го експерта, то $r_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_{ij}$, інші формули залишаються без змін (оскільки $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$).

Експертиза 6 визначається для задачі знаходження колективного ранжування за нестрогими індивідуальними ранжуваннями за допомогою попарних порівнянь об'єктів.

Множина Ω така ж, як і в $E5$; експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній, $\tilde{\Omega}$ – множина всіх матриць $A=(a_{ij})$, де $a_{ij}\in\{0,1\}$, $a_{ij}+a_{ji}=1$ ($i\neq j$), $a_{ii}=0$, $i,j=\overline{1,m}$. Кожен експерт робить C_m^2 порівнянь, порівнюючи кожен об'єкт з кожним. Результат порівнянь i-го експерта представляється матрицею A^i розмірності $m\times m$, у якій $a_{jk}^i=1$ тоді й лише тоді, коли для i-го експерта об'єкт j переважає об'єкт k. Для будь-якої пари об'єктів або перший переважає другого, або навпаки; $a_{jj}=0$ за визначенням.

Матриця A^i, що задається i- м експертом ($i=\overline{1,m}$), є матрицею деякого бінарного відношення, котре називається відношенням переваги i- го експерта. Очевидно, що бінарне відношення, що задається матрицею A^i є повним, антирефлексивним, антисиметричним і, взагалі кажучи, не є ациклічним.

Визначення 2.1. Відношення переваги з матрицею A може бути *виражене рангами*, якщо всі об'єкти, упорядковані так, що $a_{jk}=1$ тоді й лише тоді, коли ранг j-го об'єкта менший за ранг k.

Теорема 2.1. Необхідною й достатньою умовою того, що перевага виражається рангами, є ациклічність цього відношення.

Теорема 2.2. Властивості відношень переваги A^i приводять до еквівалентності умов ациклічності та наявності циклів довжини 3.

Відображення φ в Е6 визначається наступним чином. Будується матриця $A=(a_{jk})=\sum_{i=1}^{n}A^i$, де $A^i=(a_{jk}^i)$ – матриця оцінок i-го експерта.

Знаходяться величини $a_j=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}$, $j=\overline{1,m}$. Об'єкт з максимальним a_j отримує ранг 1 (він переважає максимальну кількість інших об'єктів) і т.д.

Коефіцієнтом сумісності думок експертів називається величина:

$$\upsilon=\begin{cases}1-24d/(m^3-m), & \text{якщо } m \text{ непарне,}\\ 1-24d/(m^3-4m), & \text{якщо } m \text{ парне,}\end{cases}$$

де d – число циклів довжини 3 у матриці A. Величину υ для матриці

A^i можна використовувати у якості оцінки компетентності i -го експерта.

Алгебраїчний метод.

Для визначення колективної числової оцінки алгебраїчним методом використовується експертиза 7: $\Omega = \tilde{\Omega} = E^1$, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній. Відстань d між числовими оцінками a і b визначається як $d(a,b) = |a-b|$. У якості колективної оцінки a приймаються, наприклад, оцінки:

- $a \in \underset{a \in E^1}{Arg \min} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(a, a_i)$ (утилітарний критерій),
- $a \in \underset{a \in E^1}{Arg \min} \max_{i=\overline{1,n}} \alpha_i d(a, a_i)$ (егалітарний критерій).

Для визначення колективного ранжування алгебраїчним методом експерти задають матриці $A^i = \left(a^i_{jk}\right)$, у яких $a^i_{jk} = 1$ тоді й лише тоді, коли об'єкт i передує об'єкту k; якщо об'єкти j і k рівноцінні або $j = k$, $a_{jk} = 0$; якщо $a_{jk} = 1$ ($j \neq k$), то $a_{kj} = -1$.

Ранжування A і відповідну йому матрицю A будемо позначати одним символом.

Визначення 2.2. Ранжування C знаходиться між ранжуваннями A і B, якщо для $\forall i, j = \overline{1,m}$ $a_{ij} \le c_{ij} \le b_{ij}$ або $a_{ij} \ge c_{ij} \ge b_{ij}$.

Відстань між ранжуваннями вводиться аксіоматично:

А1. $d(A,B) \ge 0$, причому $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

А2. $d(A,B) = d(B,A)$ (симетричність);

А3. $d(A,B) + d(B,C) \ge d(A,C)$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли ранжування B знаходиться між ранжуваннями A і C (аксіома трикутника);

А4. При однакових перестановках об'єктів у ранжуваннях A і B відстань між отриманими ранжуваннями $d(A', B') = d(A, B)$ (інваріантність відносно позначень);

А5. Якщо двоє ранжувань відрізняються одне від одного лише на частині об'єктів, то відстань між початковими ранжуваннями дорівнює відстані між ранжуваннями лише цих об'єктів;

А6. Мінімальна додатня відстань між ранжуваннями дорівнює 1.

Теорема 2.3. Аксіоми А1–А6 однозначно визначають відстань

(*відстань Хемінга*) $d(A,B)$ при будь-якій довжині ранжувань $m \ge 2$, а формула: $d(A,B) = 0.5 \cdot \sum_{i,j=1}^{m} \left| a_{ij} - b_{ij} \right|$, визначає єдину відстань $d(A,B)$, що задовольняє аксіомам А1–А6.

Експертиза 8: $\Omega = \tilde{\Omega} =$ {матриці A_i, елементи яких визначені вище}, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній. У якості відстані береться відстань Хемінга, колективне ранжування визначається критеріями:

- $A^{KS} \in Arg \min\limits_{A \in \tilde{A}} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i d\left(A, A^i\right)$ (медіана Кемені–Снелла);
- $A^{VG} \in Arg \min\limits_{A \in \tilde{A}} \max\limits_{i=\overline{1,m}} \alpha_i d\left(A, A^i\right)$ (компроміс);
- $A^{SZ} \in Arg \min\limits_{A \in \tilde{A}} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i d^2\left(A, A^i\right)$ (середнє значення).

Вище $\tilde{A}$ – множина матриць $m \times m$ з елементами $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$, що відповідають ранжуванням (тобто матриці ациклічні). Як видно – критерій 1 відповідає принципу утилітаризма, критерій 2 – егалітаризма.

Приклад. Нехай $n = m = 3$, $A^1 = A^2 = < a,b,c >$, $A^3 = < b,a,c >$ (позначення $< a,b,c >$ означає: $a \succ b \succ c$). Випишемо відповідні матриці:

$$A^1 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти медіани 1, 2 на множині матриць, що відповідають ранжуванням: $A_1 = < a,b,c >$, $A_2 = < a,c,b >$, $A_3 = < b,a,c >$. $A_4 = < b,c,a >$, $A_5 = < c,a,b >$, $A_6 = < c,b,a >$. Виписуємо відповідні матриці: $A_1 = A = B$, $A_3 = C$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо:

$$d(A_1, A^1) = d(A_1, A^2) = 0, \ d(A_1, A^3) = 2;$$
$$d(A_2, A^1) = d(A_2, A^2) = 2, \ d(A_2, A^3) = 4;$$
$$d(A_3, A^1) = d(A_3, A^2) = 2, \ d(A_3, A^3) = 0;$$
$$d(A_4, A^1) = d(A_4, A^2) = 4, \ d(A_4, A^3) = 2;$$
$$d(A_5, A^1) = d(A_5, A^2) = 4, \ d(A_5, A^3) = 6;$$
$$d(A_6, A^1) = d(A_6, A^2) = 6, \ d(A_6, A^3) = 4.$$

Таким чином, $A^{KS} = A^{VG} = A^{SZ} = \{A_1, A_3\}$ (цього слід було очікувати, оскільки ранжування двох експертів співпали, ранжування третього відрізняються від їх ранжувань лише однією перестановкою). Нехай, $A^1 = A_1$, $A^2 = A_4$, $A^3 = A_6$. Тоді $A^{KS} = \{A_3, A_4\}$, $A^{VG} = \{A_3\}$, $A^{SZ} = \{A_3\}$.

Методи шкалювання.

У методах шкалювання експерти оцінюють попарні відмінності між об'єктами, вказують відповідні числа. Задача полягає у співставленні кожному об'єкту точки простору E^r, $r \ge 1$, а всій системі, що складається з m об'єктів, m точок у E^r так, щоб відстані у E^r між точками були достатньо близькими до вказаних експертами чисел. Таким чином, розв'язок задачі оцінювання у цьому випадку є вектором довжини $m \cdot r$.

Експертиза 9 (одновимірне шкалювання): $\Omega = E^m$, $\tilde{\Omega} = \{$нестрогі ранжування$\}$, експерти ізольовані, оберненого зв'язку немає. Для побудови φ необхідно зробити такі операції:

- ♦ Обчислюється матриця $P = \sum_{i=1}^{n} A^i / n$, де A^i – матриця, що відповідає ранжуванню, даному i - м експертом. Елементи p_{jk} матриці P – ймовірності переваги j-го об'єкта над k-м.
- ♦ За заданими z_{ij} обчислюються величини p_{jk} за формулами: $p_{jk} = \int_{-\infty}^{z_{jk}} \left(1/\sqrt{2\pi}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ за таблицями нормального розподілу.
- ♦ Формується матиця $Z = (z_{jk})$, знаходяться величини

$z_j = \sum_{k=1}^{m} z_{jk}$. Оцінкою об'єкта A_j є середнє $\bar{z}_j = z_j / m$, $j = \overline{1,m}$.

♦ Визначаються величини $\bar{p}_j$ за формулою:

$$\bar{p}_j = G(\bar{z}_j) = \int_{-\infty}^{\bar{z}_j} \left(1 \big/ \sqrt{2\pi}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (2.1)$$

Нормалізовані величини $p_j^* = \bar{p}_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j$ називаються показниками відносної важливості об'єктів.

♦ Здійснюється перевірка на несуперечність. Для цього за формулою (2.1) знаходяться $\bar{p}_{jk} = G(\bar{z}_j - \bar{z}_k)$ і обчислюються величини $\Delta_{jk} = \bar{p}_{jk} - p_{jk}$. Визначається середнє відхилення $\overline{\Delta}_{jk} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{m} \left|\Delta_{jk}\right| / m(m-1)$, достатня малість якого свідчить про несуперечність ранжувань експертів.

Задача багатовимірного метричного шкалювання полягає у наступному. Задається симетрична матриця відмінностей $D = \left(D_{jk}\right)$ між m об'єктами $A_1,...,A_m$ на основі агрегування думок n експертів (наприклад, так, як у попередній експертизі). Необхідно знайти координати m точок $a^j \in E^r$, що відповідають об'єктам, так, щоб матриця $X = \left(x_{jk}\right)$ відстаней між цими точками була близькою до матриці початкових відмінностей D за певним критерієм. Якщо значення критерію обертається у нуль, то говорять, що задача має точний розв'язок.

В основі Експертизи 10 лежить метод простої ординації, який полягає у наступному.

Розглянемо спосіб побудови точок $a^1,...,a^m \in E^m$, що відповідають об'єктам $A_1,...,A_m$. У якості A_1 і A_2 виберемо об'єкти, відстань D_{jk} між якими в агрегованій матриці D максимальна. Тоді $a_1^1 = 0$, $a_1^2 = D_{jk}$; $a_j^1 = a_j^2 = 0$, $j = \overline{2,m}$. Побудовані точки належать півпростору E^1, утвореного першою віссю E^m.

Нехай E^r – r - вимірний півпростір, що утворюється осями з номерами $1,...,r$, у якому вже знайдено точки $a^1,...,a^{r+1}$. У цих точок в E^m усі координати, починаючи з $(r+1)$- ї, дорівнюють нулю. Проекції інших точок $a_{r+2},...,a_m$ в E^r знаходяться із заданих відстаней D_{jk} між об'єктами j і k, $j,k=\overline{1,m}$. Нехай координати проекції точки a^l, $l>r+1$, в E^r - це $a_1^l,...,a_r^l$, h_l – відстань між точкою a^l й підпростором E^r. Маємо: $D_{jl}^2 = h_l^2 + \sum_{s=1}^{r}\left(a_s^j - a_s^l\right)^2$,

$$j=\overline{1,r+1} \Rightarrow h_l^2 = D_{jl}^2 - \sum_{s=1}^{r}\left(a_s^j - a_s^l\right)^2,\ j=\overline{1,r+1}. \qquad (2.2)$$

Ліва частина останньої рівності не залежить від a^j. Прирівнюючи праві частини при j і $j+1$, отримаємо систему r рівнянь відносно r невідомих $a_1^l,...,a_r^l$:

$$D_{jl}^2 - \sum_{s=1}^{r}\left(a_s^j - a_s^l\right)^2 = D_{j+1,l}^2 - \sum_{s=1}^{r}\left(a_s^{j+1} - a_s^l\right)^2,\ \ j=\overline{1,r}.$$

Розв'язавши цю систему при $l=\overline{r+2,m}$, отримаємо проекцію точки a^l в E^r. З рівності (2.2) знайдемо h_l для $l=\overline{r+2,m}$ й покладемо $a_{r+1}^l = h_l$.

Виберемо об'єкт A_j, для якого $h_j = \max\limits_{l=\overline{r+2,m}} h_l$. Зіставимо йому у просторі E^m точку $a^j = \left(a_1^j,...,a_r^j,h_j,0,...,0\right)$. Перенумеруємо об'єкти $A_{r+2},...,A_m$ так, щоб вибраний об'єкт мав номер $r+2$. Таким чином, отримали координати точки a^{r+2} й проекції точок $a^{r+3},...,a^m$ у простір E^{r+1}. Критерій завершення процесу вибирається наступним чином: $\alpha = 1-\tilde{s}/s$, де $\tilde{s} = \sum\limits_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m}\sum\limits_{s=1}^{r+1}\left(a_s^j - a_s^k\right)^2$, $s = \sum\limits_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{m} D_{jk}^2$. Якщо α менше вибраного $\varepsilon>0$, обчислення координат точок припиняємо і образами об'єктів $A_1,...,A_m$ вважаються проекції точок $a^1,...,a^m$ в E^r.

В основі Експертизи 11 (метод "трійок") лежать наступні теоретичні побудови. Розглянемо трикутник зі сторонами D_{ij}, D_{ik}, D_{jk} (Рис 2.1). За теоремою косинусів:

$$D_{ij} D_{ik} \cos\Theta = \left(D_{ij}^2 + D_{ik}^2 - D_{jk}^2\right)/\,2 .$$

Побудуємо матриці B^i, $i = \overline{1,m}$, з елементами: $b_{jk}^i = \left(D_{ij}^2 + D_{ik}^2 - D_{jk}^2\right)/\,2$. Наступні властивості матриць B^i визначають існування точного розв'язку задачі метричного шкалювання і мінімальну розмірність простору E^r, при якому точний розв'язок існує.

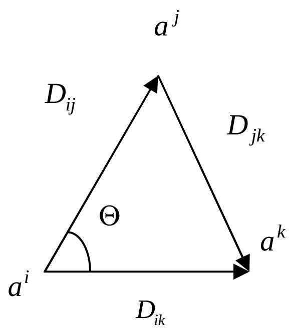


Рис. 2.1

Теорема 2.4. У випадку додатної напіввизначеності матриць B^i, $i = \overline{1,m}$ (тобто $(B^i x, x) \ge 0$ для $\forall x$) задача метричного шкалювання має точний розв'язок. Мінімальна розмірність простору E^r, $r = \min\limits_i \rho_i$, де ρ_i – ранг матриці B^i, $i = \overline{1,m}$. За образи об'єктів A_s, $s = \overline{1,m}$, $s \ne i$, у просторі E^r можна взяти точки $a^s = \left(a_1^s, \dots, a_r^s\right)$, $s = \overline{1,m}$, такі, що $B^i = XX^T$, $X = \left(x_{pq}\right)$, де $x_{pq} = a_q^p$, $p = \overline{1,m}$, $p \ne i$, $q = \overline{1,r}$, $a_i^l = 0$, $l = \overline{1,r}$.

В розглянутих випадках відображення φ є лінійним. У загальному випадку неможлива побудова точок a^j, $j = \overline{1,m}$, у просторі достатньо малої розмірності E^r із збереженням бажаної точності. Тому використовуються нелінійні методи, що базуються на інтерполяційних процедурах.

В основі Експертизи 12 ("нелінійне багатовимірне шкалювання") лежить наступна процедура. Упорядкувавши за зростанням m^2 елементів матриці відмінностей D, отримаємо лінійний порядок $r(A)$. Відобразимо об'єкти A_j у простір E^r, лінійний порядок по зростанню елементів матриці X відстаней між точками a^j, $j = \overline{1,m}$, позначимо через $r(a)$.

Виконуємо операції:

1. Будуємо ранжування $r(A)$ і нормалізуємо елементи матриці D

так, щоб мінімальний дорівнював нулю, максимальний – одиниці. Отриману матрицю позначимо через $\tilde{D}$.

2. Точки a^j, $j=\overline{1,m}$, знаходимо як вершини правильного $(m-1)$ - вимірного симплекса, центр котрого знаходиться у початку координат, ребра мають довжину 1. Координати вершин симплекса обчислюються за формулами: $a^j_{2q-1}=\cos\left[2q(j-1)\pi/m\right]/\sqrt{m}$, $a^j_{2q}=\sin\left[2q(j-1)\pi/n\right]/\sqrt{m}$, де $q=\overline{1,[(m-1)/2]}$ ($[x]$ – ціла частина x).

Для парного m проекція на $(m-1)$ - у вісь: $a^j_{m-1}=(-1)^{j-1}/\sqrt{2m}$.

3. Будуємо ранжування $r(a)$. Якщо $r(a)=r(A)$, то обчислення закінчується. Інакше нормуємо матрицю X відстаней між точками a^j, $j=\overline{1,m}$ (аналогічно матриці D, крок 1), отримуючи $\tilde{X}$.

4. Знаходимо нові значення координат точок a^j, $j=\overline{1,m}$, за формулами: $\bar{a}^j_k=a^j_k+\Delta a^j_k$, $j=\overline{1,m-1}$, де $\Delta a^j_k=\sum\limits_{i\neq j}P^k_{ji}+R^k_{ji}$,

$$P^k_{ji}=\frac{\alpha\left(\tilde{D}_{ji}-\tilde{x}_{ji}\right)\left(a^i_k-a^j_k\right)}{x_{ji}},\quad R^k_{ji}=\frac{\beta\left(\tilde{D}_{ji}-\bar{D}\right)\left(a^k_i-a^k_j\right)}{D_{ji}},\quad \bar{D}=\sum_{j,i=1}^{m}\tilde{D}_{ji}\Big/m^2;\quad \alpha=0.2,$$

$\beta=0.05$.

5. Покладемо $a^j=\bar{a}^j$, $j=\overline{1,m}$, будуємо ранжування $r(a)$ і переходимо на крок 1.

Методи побудови кардинальних оцінок.

В практичних задачах дуже часто важливо не лише вказати факт переваги одного об'єкта над іншим (або побудувати ранжування), але й оцінити степінь цієї переваги.

Нехай ранжуванню об'єктів $o_1\succ o_2\succ\ldots\succ o_m$ відповідає вектор числових оцінок $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$.

Розглянемо основні методи визначення оцінок.

Метод фон Неймана-Моргенштерна (еспертиза 13). Нехай $m=2$. Маємо ранжування $o_1\succ o_2$ і об'єкту o_2 приписується оцінка $\beta_2=1$. Експерт вибирає таке значення величини $\gamma, 0<\gamma\leq 1$, при якому, на його думку, $\gamma\beta_1=\beta_2$. З останнього співвідношення маємо

$\beta_1 = 1/\gamma$.

Якщо $m=3$, то $\beta_3 = 1$ і експерт визначає значення γ_1, γ_2 з умов $\gamma_1\beta_1 = \beta_3, \gamma_2\beta_2 = \beta_3$, звідки $\beta_1 = 1/\gamma_1, \beta_2 = 1/\gamma_2$. Після цього експерт повинен визначити γ_3 з умови $\gamma_3\beta_1 = \beta_2$. Оцінки об'єктів вважаються узгодженими, якщо $\gamma_3 = \gamma_1/\gamma_2$, інакше експерт переглядає початкові значення γ_1, γ_2.

В загальному випадку при m об'єктах число перевірок дорівнює $1+2+...+m-2 = (m-1)(m-2)/2$. Загальне число оцінок, які повинен встановити експерт, складається з $m-1$ початкових оцінок і $(m-1)(m-2)/2$ вторинних оцінок, всього $m(m-1)/2 = C_m^2$.

Отримані в результаті оцінки $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ є абсолютними. Для отримання відносних оцінок потрібно обчислити значення $g_i = \beta_i \Big/ \sum_{j=1}^{m} \beta_j$. Для підвищення «об'єктивності» процедури її можна легко узагальнити на випадок n експертів (використавши, наприклад, алгоритм, описаний в п.п.1,2).

В експертизі 14 (метод Гергомена-Акофа) експерт будує ранжування (нехай це буде : $o_1 \succ o_2 \succ ... \succ o_m$).

Об'єкту o_m приписується оцінка $\beta_m = 1$, останнім об'єктам експерт виставляє оцінки, порівнюючи їх з об'єктом o_m. Значення усіх оцінок повинно монотонно спадати з ростом порядкових номерів об'єктів.

Далі об'єкт o_1 послідовно порівнюється з «сумою» об'єктів $o_2 + ... + o_n, o_2 + ... + o_{n-1}, ..., o_2 + o_3$ до тих пір, поки o_1 не стане еквівалентним або кращим за відповідну «суму», тобто експерт вважає, що $\beta_1 \geq \sum_{i=2}^{s} \beta_i, s \geq 3$. Після цього експерт порівнює o_2 з «сумами» $\sum_{i=3}^{l} o_i, l \leq m,$ і т.д. В знайдені нерівності підставляються оцінки об’єктів і якщо нерівності справедливі, то призначені експертом оцінки і є шуканими. Інакше оцінки коректуються.

В цьому методі кількість початкових оцінок дорівнює C_m^2, але самі порівняння для експертів є більш складними, оскільки кожен раз один об’єкт порівнюється з декількома.

Контрольні завдання до §2

1. На основі коефіцієнтів компетентності з п.7 контрольних завдань до §1 спрогнозувати результат вибраного футбольного матчу (прогноз погоди на певну дату) на основі колективної оцінки. Порівняти прогнози для різної кількості експертів: n=2, 3, 5, 10.
2. Для вибраних експертів визначити (іншими експертами) колективні оцінки їх «оптимістичності», «реалістичності», «песимістичності». Врахувати отримані оцінки в прогнозуванні з п. 1. Порівняти степінь достовірності прогнозів.
3. Провести експертизу серед студентів групи на визначення колективного ранжуввання “смертних гріхів”: гнів, гординя, черевозапопадливість, зневіра (“уныние”), заздрість, сріблолюбство, блуд. Порівняйте індивідуальні ранжування з “канонічним православним” (його знають автори посібника). Побудувати колективне ранжування за допомогою методів, описаних вище в §2. Результати порівняти.
4. В кінці XX ст. в Сієтлі (США) зібрались представники різних релігійних концесій і визначили ранжування (спосіб визначення авторам невідомий) на “множині якостей homo sapiens”, що будуть визначальними для XXI ст., - законослухняність, чесність, громадянськість, релігійність, порядність, цивілізованість. Проведіть експертизу, побудуйте колективне ранжуванння, порівняйте з “канонічним” (його знають автори посібника).
5. У Франції було проведено опитування серед представниць “кращої половини людства” та визначено колективне ранжування якостей представників “гіршої половини людства”. Якості такі – зовнішні дані, доброта, матеріальне забезпечення, інтелект, чоловічі якості (надійність, сміливість і т.п.), іронічність. Проведіть експертизу серед студенток групи та визначте колективне ранжування, порівняйте його з “канонічним” (його знають автори). Цікаво відмітити, що результати експертизи, що її проводив один з авторів на протязі ряду років серед різних вікових груп українок ні разу не співпав

(навіть у індивідуальних пріоритетах) з колективним ранжуванням француженок.

6. Кожен будує індивідуальне ранжування на множині міст (Москва, Париж, Нью-Йорк, Рим, Лондон, Токіо, Сідней) та методами фон Неймана-Моргенштерна і Гермогена-Акофа оцінює степінь переваги в бажанні відвідати ці міста.

7. Одним з методів шкалювання провести експертизу для проблеми, описаної в п.6.

§3. Методи голосування

Більшість суспільних рішень приймається на основі голосування. Голосуванням вибираються президенти, народні депутати, голосуванням приймаються рішення у Верховній Раді, на засіданнях Вчених рад університету і факультетів, на засіданнях кафедр, при прийнятті рішень Державною екзаменаційною комісією, у студентських колективах, у сім'ї (яку телевізійну програму дивитись) і т.п. Хоча практика голосування нараховує тисячі років, фактичне його вивчення почалося близько двохсот років тому у працях французів Борда (Жан Шарль де Борд [1733–1799], фізик, математик, політик, член Французької Академії наук) та Кондорсе (Жан Антуан Ніколя де Кондорсе, [1745–1794], філософ, математик член Французької АН, у 1776–1792 рр. був член-кореспондентом Петербурзької Академії наук, у 1792 р. виключений за велінням Катерини II за жирондистські погляди, закінчив життя на гільйотині).

Таблиця 3.1.

Кількість голосів	5	3	5	4
Впорядкування кандидатів	a	a	b	c
	d	d	c	d
	c	b	d	b
	b	c	a	a

Розглянемо найбільш уживані на практиці методи голосування. Нехай $N = \{\overline{1,n}\}$ – множина "виборців", $A = \{a,b,c,...\} = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – множина "кандидатів". Кожен виборець задає "індивідуальну перевагу" на множині кандидатів у вигляді строгого ранжування, тобто задає лінійний порядок $L(A)$ (повне, транзитивне, асиметричне бінарне відношення). Система всіх індивідуальних переваг називається *профілем*. Розглянемо профіль, що задається Табл. 3.1 (далі будемо писати "профіль Табл. 3.1"). Цей профіль містить інформацію про те, що 5 перших виборців на перше місце поставили кандидата a, на друге – d, на третє – c, на четверте (останнє) $-b$. Аналогічно, наступні 3 виборці розташували кандидатів у послідовності – a, d, b, c і т.д. Отже, маємо $n = 17$ і $m = 4$.

Правило (метод) відносної більшості. На перше місце 8 виборців поставили кандидата a ($n_a = 8$), 5 виборців – b ($n_b = 5$) і 4 виборці – c ($n_c = 4$), $n_d = 0$. Перемагає той кандидат, за якого проголосувала більшість виборців (у даному випадку – a, випадок рівності голосів поки що не розглядаємо). Цей метод поважає волю більшості у тому сенсі, що якщо за певного кандидата проголосувала абсолютна більшість (тобто більше половини виборців (часто говорять – "50%+1"), то він і перемагає).

Правило відносної більшості з вибуванням ("відносна більшість у два тури", "абсолютна більшість"). За подібним правилом відбуваються вибори президента України. Якщо деякий кандидат набрав більше половини голосів, то він – переможець. Інакше у другий тур проходять два кандидати, що набрали відносну більшість голосів (тому – "відносна у два тури"). Для нашого профілю у другий тур проходять кандидати a і b. Після "відсіювання" інших кандидатів (тому – "відносна більшість з вибуванням"), маємо таблицю 3.2 (переваги виборців після першого туру не змінюються).

Табл. 3.2.

5	3	5	4
a	a	b	b
b	b	a	a

У другому турі $n_a = 8$, $n_b = 9$, тобто перемагає кандидат b (перемагає "абсолютно", набираючи більше половини голосів, тому метод і називається методом "абсолютної більшості"). Зауважимо, що випадок рівності голосів ми поки що виключаємо. Не розглядається і випадок "голосування" проти обох, як при виборах президента України.

Правило Борда ("підрахунку очок"). У цьому правилі за останнє місце кандидата йому нараховується 0 балів (очок), за передостаннє – 1, ..., за перше – (m-1).

Табл. 3.3.

5	3	5	4	S
a	a	b	c	3
d	d	c	d	2
c	b	d	b	1
b	c	a	a	0

Розглянемо профіль (Табл. 3.3). Маємо: $n_a = 24$, $n_b = 22$, $n_c = 27$, $n_d = 29$. Перемагає кандидат, що набрав найбільшу кількість балів, у нашому випадку – це кандидат d.

Зауважимо, що за подібним методом

часто визначаються переможці у спортивних змаганнях (наприклад, у багатоборстві враховують кількість перших, других місць і т.д.).

Правило Кондорсе. За Кондорсе переможцем оголошується той кандидат, що "перемагає" всіх інших у попарних порівняннях. Так, у попередньому профілі: 8 виборців поставило кандидата a вище за b, 9 виборців поставило a нижче за b (позначимо це $a:b=8:9$). Маємо $b:c=8:9$, $c:d=9:8$, $a:c=8:9$, $b:d=5:12$, $a:d=8:9$. Єдиний кандидат, який "перемагає" всіх інших – це кандидат c.

Зауважимо, що правило Кондорсе видається вельми логічним – переможець перемагає всіх інших у єдиноборствах. Шахіст, що переміг усіх інших претендентів у мікроматчах (скажімо, з двох партій) – безумовно найкращий. Та й при формуванні індивідуальної переваги виборець попарно порівнює (свідомо чи підсвідомо) кандидатів. Але у читача вже, мабуть, виникло запитання. А як бути, якщо кожен з кандидатів когось перемагає, а комусь програє? У цьому випадку за визначенням переможця за Кондорсе (переможця Кондорсе) не існує. Це один з так званих "парадоксів голосування". Найпростіший випадок маємо при n = m = 3: для першого виборця a кращий за b і c, b кращий за c (позначимо це $a \succ b \succ c$); для другого $b \succ c \succ a$; для третього $c \succ a \succ b$. Цей профіль називається "Циклом Кондорсе". Маємо – $a:b=2:1$, $a:c=1:2$, $b:c=2:1$ (у кожного по одному виграшу і по одному програшу).

Повернемось до правил голосування. Наведені вище правила (чи подібні до них) застосовуються у житті, всі є досить логічними, кожне з них має свої "переваги". Але їх застосування до одного і того ж профілю (Табл. 3.1) дає абсолютно різні результати! Це другий "парадокс голосування".

Який висновок можна зробити? Не все так просто, як може здатись на перший погляд, правила голосування потрібно вивчати. Причому, можна робити це двома шляхами. Перший – придумувати "хороші" ("логічні", "розумні" і т.д.) правила голосування (і сприймати результат як даність), другий – задавати "розумні" ("логічні", "хороші") умови на результат і підбирати" правила, які приводять до цього результату (наприклад, "результат виборів повинен бути таким, щоб не було ображених").

Спочатку розглянемо знаменитий "парадокс Ерроу" (Р. Ерроу, американський математик, економіст, лауреат Нобелівської премії), з якого власне і почалась сучасна теорія голосування.

Розглянемо більш загальну задачу. Нехай на основі індивідуальних преваг необхідно знайти не лише "колективного" ("спільного") переможця, а й "колективний порядок". Причому, нехай, як і раніше індивідуальні переваги будуть строгими (кандидати в індивідуальних перевагах не повинні "ділити" місця), колективний же порядок може бути і нестрогим (єдиним розумним компромісом при рівноправності виборців і кандидатів у випадку переваг $a > b$ (одного виборця) і $b > a$ (в іншого), звичайно, буде $a = b$ (a і b "ділять" місце)). Найпростіший метод побудови колективного порядку за даним правилом голосування є наступний – переможець виключається з профілю, для отриманого профілю знову знаходиться переможець, який займає друге місце у колективній перевазі, і т.д.

Табл. 3.4.

5	3	5	4
d	d	b	c
c	b	c	d
b	c	d	b

Так, для профілю Табл. 3.1, після виключення переможця a для правила відносної більшості маємо профіль Табл. 3.4. Для цього профілю переможцем буде кандидат d, після його виключення маємо профіль Табл. 3.5, для якого переможцем буде c. Отже, правило відносної більшості дає колективну перевагу $a \succ d \succ c \succ b$.

Табл. 3.5.

5	3	5	4
c	b	b	c
b	c	c	b

Аналогічно, правило абсолютної більшості дає колективну перевагу $b \succ c \succ d \succ a$ (зверніть увагу, ця перевага "повністю протилежна" попередній).

Правило Борда дає: $d \succ c \succ a \succ b$, Кондорсе: $c \succ d \succ b \succ a$.

Отже, "достатньо розумні" правила побудови колективного порядку приводять до різних результатів (аж до протилежних).

Підемо іншим шляхом. Задамо "розумні апріорні" вимоги до колективного ранжування у вигляді аксіом.

Аксіома А1 (повнота). Для будь-яких кандидатів a і b колективний порядок встановлює, що або $a \succ b$, або $a = b$, або $a \prec b$ (скорочено – $\forall\ a,b \in A$: $(a \succ b) \vee (a = b) \vee (a \prec b)$).

Аксіома А2 (транзитивність): $(a \geq b) \wedge (b \geq c) \Rightarrow a \geq c$.

Аксіома А3 (одностайність): якщо для всіх виборців $\underset{i}{a \geq b}$, то й у колективному порядку також $a \geq b$ ($\forall i \in N:\ a \overset{i}{\geq} b \Rightarrow a \overset{k}{\geq} b$).

Цю аксіому можна назвати і "паретовість" і "ефективність".

Аксіома А4 (незалежність). Розташування будь-яких двох кандидатів a і b у колективному порядку залежить лише від їх взаємного розташування в індивідуальних порядках і не залежить від розташування інших кандидатів.

Відмова від першої аксіоми може привести до ситуації – "вибори не відбулися", відмова від транзитивності теж виглядає досить дивною, порушення аксіоми одностайності однозначно свідчить про "фальсифікацію" виборів, відмова від аксіоми незалежності приводить до можливості маніпулювання шляхом зняття чи введення кандидатів (положення кандидатів a і b у колективному порядку, наприклад, $a \overset{k}{\succ} b$, не повинно залежати від індивідуальної переваги у вигляді $a \succ c \succ b$, чи $a \succ b \succ c$, чи $c \succ a \succ b$, чи взагалі у відсутності кандидата c).

Теорема 3.1 ("Парадокс Ерроу", 1951 р.). Єдиним колективним порядком, що задовольняє аксіомам А1–А4, є "диктаторський", тобто існує виборець $k \in N$ такий, що колективний порядок співпадає з його індивідуальним порядком.

Парадокс Ерроу у свій час вразив науковий світ, згадаймо, якою була геополітична карта світу у 1951 р. Можливо він дає пояснення, чому наша цивілізація пройшла через диктаторські режими (а у деяких країнах ще й зараз існують диктатури). Хоча не все так сумно. Якщо $a = b$, то $b = a$, тобто теорема Ерроу стверджує не лише те, що колективний порядок "задається" індивідуальним порядком "диктатора", але й те, що індивідуальний порядок деякого виборця ("провидця") співпадає з колективним порядком. А у цьому не має нічого поганого! З іншого боку, якщо до аксіом **А1 – А4** приєднати аксіому **ВД** "відсутності диктатора", то цим аксіомам за теоремою Ерроу відповідає "порожній" вибір. Для "непорожності" вибору можна спробувати послабити аксіому **ВД**. Саме це і реалізує система аксіом Ерроу-Гурвиця [18], в якій аксіома **ВД** заміняється аксіомою **ДД** "допустимості диктатора" . Переходимо до доведення теореми.

Визначення 3.1. Будь-яка підмножина M множини виборців N називається коаліцією. Коаліція M називається K- вирішальною для кандидата a проти кандидата b тоді і лише тоді, коли з того, що всі члени коаліції M ставлять a вище за b, а всі виборці, що не входять у M, ставлять b вище за a, випливає $a \overset{K}{>} b$. Цей факт записується як $M{=}K(a,b) \Leftrightarrow (\forall i \in M \subseteq N :\ a \overset{i}{>} b\,,\ \forall j \in N \setminus M :\ a \overset{j}{<} b \Rightarrow a \overset{K}{>} b\,)$.

Визначення 3.2. Якщо для будь-яких двох кандидатів a і b коаліція M є K- вирішальною для a проти b, вона називається просто K- вирішальною. Тобто $M{=}K(a,b), \forall a,b \in A$. Зауважимо, що вся множина N є

K – вирішальною (у силу А3). Порожня множина не може бути K- вирішальною для a проти b, ні для яких a і b. Якщо ніхто не ставить a вище за b, тобто у всіх $b>a$, то знову у силу А3 : $b \overset{K}{>} a$, і не може бути $a \overset{K}{>} b$.

Лема 3.1. Існує пара кандидатів (a,b), для якої знайдеться коаліція L, що складається з одного виборця $\{l\}$ така, що L=K(a,b).

Доведення. Позначимо через T множину таких коаліцій M, для кожної з яких існує пара (a,b) така, що M=K(a,b). Множина T не порожня, оскільки $N \subseteq T$. Візьмемо у T коаліцію L, що містить найменшу кількість виборців. Оскільки $T \neq \varnothing$, то L має не менше за одного виборця ($|L| \geq 1$). Нехай $|L| \geq 2$. Розіб'ємо L на 2 не порожні підмножини, що не перетинаються: одна $L' = \{l\}$ з одного елемента, інша L'' – з усіх останніх. Розглянемо профіль, заданий таблицею 3.6.

Табл. 3.6.

L'	L''	$N \backslash L$
a	c	b
b	a	a
c	b	c

Оскільки коаліція L – K- вирішальна, то $a \overset{K}{>} b$. Якщо $c \overset{K}{>} b$, то L'' є K- вирішальною c проти b. Але в L'' менше виборців, ніж у множині L, яка за визначенням мінімальна. Отже c не може бути гіршим за b, звідси (у силу аксіоми повноти А1) $b \overset{K}{>} c$. Отже, $a \overset{K}{>} b$, $b \overset{K}{>} c$ і за аксіомою транзитивності А2 $a \overset{K}{>} c$. Але це означає, що L' є K- вирішальною для a проти c, що суперечить мінімальності L. Лему доведено.

Лема 3.2. Коаліція $L = \{l\}$, існування якої доведено у лемі 3.1, є K- вирішальною.

Доведення. Нехай c – довільний кандидат. Розглянемо профіль 1. Оскільки $\{l\}$=K(a,b), то $a \overset{K}{>} b$. З аксіоми одностайності А3 випливає $b \overset{K}{>} c$, у свою чергу (з аксіоми А2), $a \overset{K}{>} c$. З аксіоми незалежності А4 маємо, що $a \overset{K}{>} c$ незалежно від b, звідки $\{l\}$=K(a,c). Лему доведено.

Повернемось до вивчення методів голосування, що широко застосовуються на практиці.

По-перше, узагальнимо правило Борда й Кондорсе. Задамо неспадаючу послідовність дійсних чисел $s_0 \le s_1 \le ... \le s_{m-1}$, $s_0 < s_{m-1}$. Виборці ранжують кандидатів, причому s_0 балів дається за останнє місце, s_1 – за передостаннє і т.д. Вибирається кандидат з максимальною сумою балів.

Профіль 1	
$\{l\}$	$N \backslash \{l\}$
$\vdots$	$\vdots$
a	b
$\vdots$	$\vdots$
b	c
$\vdots$	$\vdots$
c	a
$\vdots$	$\vdots$

Тим самим отримуємо "узагальнене правило Борда" або "метод голосування з підрахуванням балів".Правило відносної більшості, таким чином, є частинним випадком методу голосування з підрахунком очок (у ньому $s_0 = s_1 = ... = s_{m-2} = 0$, $s_{m-1} = 1$). І, звичайно, саме правило Борда є частинним випадком цього методу ($s_0 = 0, s_1 = 1, ..., s_{m-1} = m-1$).

Профіль 2	
$\{l\}$	$N \backslash \{l\}$
$\vdots$	$\vdots$
d	c
$\vdots$	$\vdots$
a	d
$\vdots$	$\vdots$
c	a
$\vdots$	$\vdots$

Цікаво порівняти правила Кондорсе й Борда (узагальнене правило Борда). У певному сенсі вони є "несумісними" – існують профілі, при яких переможець Кондорсе не може бути переможцем Борда ні при якій системі балів.

Табл 3.7.

3	2	1	1	S
c	a	a	b	s_2
a	b	c	c	s_1
b	c	b	a	s_0

Розглянемо профіль (Табл. 3.7, Фішберн, 1973 р.). Нехай спочатку $s_0 < s_1 < s_2$ (нерівності строгі). Для цього профілю c – переможець Кондорсе (переконайтесь у цьому). З іншого боку, сума балів кандидата a більша за суму c: $n_a = 3s_2 + 3s_1 + s_0 > n_c = 3s_2 + 2s_1 + 2s_0$.♦

Табл. 3.8.

4	2	2	3	S
a	c	b	b	s_2
b	a	a	c	s_1
c	b	c	a	s_0

Твердження залишається справедливою і для випадку неспадаючої послідовності балів. Нехай, $s_0 \le s_1 \le s_2$, $s_2 > s_0$. В профілі, що задається Табл. 3.8, a – переможець Кондорсе ($a:b = 6:5, a:c = 6:5$), але $n_a = 4s_2 + 4s_1 + 3s_0$, $n_b = 5s_2 + 4s_1 + 2s_0$, і

$n_b - n_a = s_2 - s_0 > 0$.

Профіль 3.8 запропоновано студентом факультету кібернетики КНУ ім. Т.Шевченка Акулініним С.В. у 2006 р., в [6] "найменший" відомий приклад для цього випадку містить 17 виборців і 3 кандидата.

Множину кандидатів, котрі можуть бути вибраними при деякому методі підрахунку балів, можна легко описати. Для даного профілю і даного кандидата a будуємо вектор $\Gamma(a) \in E^{m-1}$ наступним чином: $\Gamma_1(a)$ – це число виборців, у яких a має перше місце; $\Gamma_2(a)$ – число виборців, у яких a має перші два місця і т.д.

Тоді кандидат a не може бути переможцем ні при якому узагальненому методі Борда, якщо вектор $\Gamma(a)$ домінується за Парето вектором $\Gamma(b)$ для деякого іншого кандидата b. Більше того, можна показати, що a є переможцем за правилом підрахунку очок тоді і лише тоді, коли вектор $\Gamma(a)$ є слабо оптимальним за Парето (не існує кандидата b, для якого $\Gamma_i(b) > \Gamma_i(a)$ для $i = \overline{1, m-1}$). Якщо система балів утворює строгу послідовність ($s_0 < s_1 < ... < s_{m-1}$), то переможець a узгоджується з "просто" оптимальністю за Парето. Цікаво також відмітити, що переможець (найгірший) за Кондорсе не може бути найгіршим (переможцем) за правилом Борда, як не може мати місця для правила відносної більшості (див. профіль на Табл. 3.1). Ці твердження випливають з того, що переможець за правилом Борда має у середньому найбільше число виборців, що його підтримують у "бінарних дуелях" з іншими кандидатами.

Найчастіше використовують два наступні правила, що узагальнюють метод Кондорсе.

Правило Копленда. Позначимо через $K(a,x)$ число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Порівняємо кандидата a з будь-яким іншим кандидатом x. Припишемо $K(a, x)$ = +1, якщо для більшості виборців a кращий за x, інакше $K(a, x)$ = -1; 0 при рівності. Оцінка Копленда кандидата a є $K(a) = \sum_{x \neq a} K(a, x)$. Переможцем Копленда (переможцем за Коплендом) називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Копленда.

Правило Сімпсона. Аналогічно $S(a,x)$ – число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Оцінкою Сімпсона кандидата a називається число $S(a) = \min_{x \neq a} S(a, x)$. Переможцем Сімпсона називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Сімпсона.

Отже, для того, щоб перемогти за правилом Копленда, вам необхідно виграти у найбільшої кількості інших кандидатів. Для виграшу за правилом Сімпсона, необхідно, щоб проти вас ніякий інший кандидат не зібрав значної більшості. Відмітимо також, що правило Копленда відповідає утилітарному критерію вибору, Сімпсона – егалітарному. Очевидно, що переможець Кондорсе (якщо він існує) буде також переможцем й Копленда, й Сімпсона. Очевидно, також, що правила Копленда й Сімпсона, на відміну від правила Кондорсе, завжди визначають переможця (переможців).

Розглянемо основні властивості, яким повинні задовольняти правила голосування. Найперше, звичайно, необхідно вимагати забезпечення рівноправства виборців і кандидатів, що формально гарантуються наступними аксіомами.

Аксіома А5 (анонімність). Імена виборців не мають значення: якщо два виборці поміняються голосами, то результат не зміниться.

Аксіома А6 (нейтральність). Імена кандидатів не мають значення: якщо поміняти місцями кандидатів a і b у перевазі кожного виборця, то результат голосування зміниться відповідно (якщо раніше вибирався кандидат a, то тепер буде вибиратись кандидат b і навпаки; якщо раніше вибирався деякий кандидат c, відмінний від a і b, то тепер він же і буде вибраний).

Не можна, звичайно, відмовитись і від аксіоми А3 одностайності (оптимальності за Парето). Тому узагальнимо її наступним чином:

Аксіома А3' (ефективність). Якщо кандидат a для всіх виборців кращий за кандидата b, то b не може бути вибраним.

Розглянуті вище правила Борда, Копленда й Сімпсона анонімні, нейтральні й оптимальні за Парето. Те ж саме справедливо і для будь-якого правила голосування з підрахунком балів, якщо останні різні ($s_k < s_{k+1}$), при рівності балів оптимальність за Парето може порушуватись. Якщо ж нам необхідно виділити єдиного кандидата (при застосуванні правил підрахунку очок, Копленда, Сімпсона), то у загальному випадку це неможливо зробити без порушення або анонімності або нейтральності. Це стає очевидним, якщо розглянути профіль Кондорсе: $a \overset{1}{\succ} b \overset{1}{\succ} c$, $b \overset{2}{\succ} c \overset{2}{\succ} a$, $c \overset{3}{\succ} a \overset{3}{\succ} b$. Якщо при анонімному, нейтральному і однозначному правилі голосування вибирається, наприклад *a*, то при перестановці *a* і *b*, *b* і *c*, *c* і *a* (у результаті отримаємо профіль: $b\overset{1}{\succ}c\overset{1}{\succ}a$, $c\overset{2}{\succ}a\overset{2}{\succ}b$, $a\overset{3}{\succ}b\overset{3}{\succ}c$), з одного боку (за анонімністю), переможцем повинен залишитись *a*, з іншого (за нейтральністю) – переможцем повинен стати *c* (оскільки ми поміняли "імена" *a* і *c*).

На практиці нас цілком влаштовують відображення голосування (такі, як множина переможців за Борда або за Коплендом), для котрих виконуються три вище приведених принципи і котрі "не дуже часто" приводять до рівності очок. Якщо необхідний однозначний вибір, то ми використовуємо або анонімне правило (вибираємо, скажімо, серед переможців того, за якого голосує "голова журі") або нейтральне правило (переможця вибираємо за алфавітом).

Наступний "критерій" – властивість монотонності. Він говорить про те, що більша підтримка кандидата не може зменшити його шанси бути вибраним. Ця властивість називається позитивним оберненим зв'язком.

Аксіома А7 (монотонність). Нехай *a* вибирається при даному профілі й профіль змінюється так, що положення *a* покращується, а відносне порівняння пари будь-яких кандидатів для будь-якого виборця залишається незмінним. Тоді *a* для нового профілю також буде вибраним.

Легко зрозуміти, що узагальнене правило Борда, правила Копленда й Сімпсона є монотонними. Правило ж відносної більшості з вибуванням, що широко застосовується на практиці, є немонотонним!

Табл. 3.9.

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Табл.3.10.

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

Розглянемо два профілі (Табл. 3.9, 3.10). Другий профіль відрізняється від першого лише останнім стовпчиком, в якому положення *a* у порівнянні з *b* покращується. Перевірте, що для першого профілю переможцем за правилом відносної більшості з вибуванням є *a*, а для другого профілю *c*. Покращення позиції *a* приводить до його поразки! Можна уявити гіпотетичну ситуацію, в якій перший профіль – "істинний" (відповідає індивідуальним перевагам виборців), у другому профілі "підкуплені" два виборці міняють свою перевагу між *a* і *b*. Резюме – голосуйте чесно!

Не є монотонним і наступне правило.

Метод альтернативних голосів. Виключаємо тих кандидатів, хто отримав найменшу кількість голосів. Потім знову підраховуємо голоси виборців для кандидатів, що залишились і знову виключаємо "найгірших" до тих пір, поки не залишиться один кандидат (або декілька з рівною кількістю голосів).

Наступна властивість вперше була введена Смітом (1973р.) і Янгом (1974р.) і відома, як аксіома Янга про поповнення.

Аксіома А8 (поповнення (однозначні правила голосування)). Дві групи виборців N_1 і N_2, що не перетинаються, вибирають одного і того ж кандидата *a* з множини *A*. Тоді виборці з множини $N = N_1 \bigcup N_2$ також вибирають *a*.

За цією властивістю виборці розбиваються на "територіальні" дільниці або законопроект розглядається у підкомісіях.

Аксіома А'8 (поповнення (відображення голосування)). Нехай виборці з N_1 вибирають кандидатів A_1, з N_2 – кандидатів A_2, $N_1 \bigcap N_2 = \varnothing$, $A_1 \bigcap A_2 \neq 0$. Тоді виборці з $N = N_1 \bigcup N_2$ виберуть кандидатів з $A_1 \bigcap A_2$.

Теорема 3.3 (Янг, 1975р.). Усі правила голосування, що базуються на підрахунку балів, задовольняють аксіомі поповнення. Якщо при рівності очок вибір відбувається на основі фіксованого порядку на *A*, то відповідні правила також задовольняють аксіомі поповнення. Правило Кондорсе (або його узагальнення таке, що вибирається переможець Кондорсе, якщо останній існує) не задовольняє аксіомі поповнення.

Табл. 3.11.

3	3	5	4
a	a	d	b
d	d	b	c
c	b	c	a
b	c	a	d

Аксіома А9 (участь). Нехай кандидат $a \in A$ вибирається виборцями з *N*. Нехай до множини виборців добавляється новий виборець *i* ($i \notin N$). Тоді виборці з $N \bigcup \{i\}$ повинні вибрати або *a*, або кандидата, який для агента *i* є строго кращим *a*.

Переможця за Кондорсе для наведеного профілю (Табл. 3.11) не існує, переможцем за Сімпсоном є кандидат *a*: *S*(*a*)=6, *S*(*b*)=4, *S*(*c*)=3, *S*(*d*)=5. Нехай до розглянутого профілю добавляються ще 4 виборця з перевагами: $c \succ a \succ b \succ d$. Для нового профілю переможцем буде *b* (*S*(*a*)=6, *S*(*b*)=8, *S*(*c*)=7, *S*(*d*)=5). Отже, чотирьом новим виборцям краще залишитись дома, щоб переміг *a*!

Теорема 3.4 (Мулен, 1986р.). Для всіх правил голосування з підрахунком очок, коли при рівності очок вибір відбувається з допомогою заданого порядку на A, аксіома участі виконується. Якщо A має хоча б 4-х кандидатів, то для правил типу Кондорсе не задовольняється аксіома участі.

Для формування одного з найбільш відомих результатів теорії голосування знадобиться ще одна аксіома.

Аксіома 10 (неперервність). Нехай виборці з N_1 вибирають $a \in A$, з N_2 – $b \in A$, $a \neq b$, $N_1 \cap N_2 = \varnothing$. Тоді існує (досить велике) натуральне число m таке, що $(mN_1) \cup N_2$ вибере a.

Ця вимога є досить "м'якою": якщо група виборців N_2 є досить малою, то вона не повинна впливати на результат виборів, що визначається m "дуелями" групи виборців N_1. Ця аксіома, зокрема, гарантує відсутність диктатора.

Теорема 3.5 (Янг, 1975р.). Відображення голосування базується на правилі підрахунку балів тоді й лише тоді, коли задовольняє наступним чотирьом аксіомам: анонімності, нейтральності, поповнення й неперервності.

Доведення цієї теореми (що є характеризацією правила підрахунку очок) є вельми складним.

Не дивлячись на складнощі, що виявлені вище для методів типу Кондорсе, вони широко застосовуються на практиці.

Голосування з послідовним виключенням. Задається послідовність кандидатів, наприклад, *abcd*. Перші два кандидати порівнюються і за правилом більшості виключається один з них. Той кандидат, що залишився, порівнюється з наступним і т.д. При рівності голосів залишається, наприклад, "лівий" кандидат.

За таким методом у конгресі США організовується "процес поправок" (a – поправка до закону, b – поправка до поправки, c – початкова редакція, d – status quo). Цей метод, очевидно, є методом типу Кондорсе: якщо a – переможець Кондорсе, то він і виграє. Очевидно, також, що метод не є нейтральним – порядок виключення ("порядок денний") впливає на результат. Нехай маємо наступний профіль Табл. 3.12. Для послідовності (*abcd*) переможець буде d, для (*abdc*) – c, (*adbc*) – b, (*bdac*) – a. Отже, "голова" (той, хто визначає порядок денний) може впливати на

Табл. 3.12.

1	2	1	1
d	a	d	b
b	b	c	c
a	c	a	d
c	d	b	a

Табл. 3.13.

1	1	1
b	a	c
a	d	b
d	c	a
c	b	d

результат (хоча, звичайно, не для всякого профілю). Цікаво відмітити також, що цей метод може порушувати й оптимальність за Парето. Розглянемо далі профіль Табл. 3.13. Для послідовності (*abcd*) переможцем буде кандидат *d*, хоча кандидат *a* для всіх виборців кращий за *d*. Розглянемо ще одне правило, що широко використовується (особливо у спорті).

Правило паралельного виключення. Для заданої послідовності кандидатів, наприклад, *abcd*, за правилом більшості порівнюється *a* з *b* і *c* з *d* ("півфінал"), потім переможці у парах порівнюються між собою ("фінал"). Цей метод є методом типу Кондорсе, у випадку відсутності рівності при попарних порівняннях він зберігає оптимальність за Парето. Якщо рівності можливі, то оптимальність за Парето може порушуватись. При голосуванні за правилом відносної більшості з вибуванням іноді буває доцільним віддати свій голос не найкращому для себе кандидату, а деякому іншому: якщо я знаю, що найкращий для мене кандидат *a* все рівно не пройде, оскільки кандидати *b* і *c* гарантовано наберуть більше голосів, то я краще допоможу тому кандидату з *b*, *c*, котрий для мене переважніший (згадайте свої міркування під час виборів у Верховну Раду України 26 березня 2006 р., коли у бюлетенях було 45 партій і блоків). Тому природньо виникає питання – чи існує "захищене від маніпулювання" правило голосування, тобто таке правило, що кожен виборець, знаходячись у кабіні для голосування, завжди захоче вказати свій пріоритет правдиво? У випадку бінарного вибору (при двох кандидатах – другий і третій тури виборів президента України 2004 р.) голосування за правилом більшості є, очевидно, неманіпульованим. Якщо ж кандидатів не менше трьох, то єдиним неманіпульованим правилом голосування є диктаторське правило. Цей результат, аналогічний теоремі Ерроу, був доведений Гіббартом (1973р.) і Саттертвайтом (1975р.). Зрозуміло, що диктаторське правило не може бути прийнято, як найбільш несправедливе (для абсолютної більшості людей). Однак для будь-якого недиктаторського правила голосування існує профіль переваг, при якому деякому агенту вигідно не повідомляти правдиво свої переваги. Таким чином, голосування не є механізмом збору інформації про переваги виборців, що заслуговує на довіру. Але що ж робити? Як подолати негативний результат Гіббарта–Саттертвайта? Головною особливістю цієї теореми є те, що будь-який профіль переваги є допустимим "входом" для правил голосування. Якщо можна із змістовних міркувань обмежити область переваг, то загроза маніпуляцій, можливо, зникне. Наприклад, нехай профіль переваг змінюється в області, у котрій переможець Кондорсе завжди існує. Тоді голосування за правилом більшості (що вибирає у точності переможця Кондорсе) є захищеним від маніпулювання.

На завершення даного параграфа сформулюємо теорему Гіббарта–Саттертвайта строго. Нехай $L(A)$ – множина лінійних порядків на скінченій множині кандидатів A (повних, транзитивних, асиметричних відношень на A). Нехай N – скінчена множина виборців. Думка виборця $i \in N$ записується з допомогою функції корисності $u_i : A \to E^1$, що відображає порядок на A (байдужості виключаються). Наприклад, $u_i(a) > u_i(b) > u_i(c)$ – для i – го виборця кандидат a на першому місці, b – на другому і т.д.

Правило голосування є однозначне відображення $S : L(A)^N \to A$, що ставить кожному профілю $u = (u_i, i \in N)$ результат виборів $S(u)$. Нехай S є відображенням "на": для кожного a існує такий профіль u, що $S(u)=a$ (ніякий кандидат не може бути апріорі відкинутим).

Визначення 3.3. Правило голосування є захищеним від маніпулювання, якщо для будь-якого профілю $u \in L(A)^N$ і будь-якого виборця $i \in N$ виконується: $u_i(S(u)) \geq u_i(S(v_i, u_{N \setminus i}))$ для $\forall v_i \in L(A)$.

Теорема 3.6 (Гіббарт, 1973р.; Саттертвайт, 1975р.). Якщо A має більше двох кандидатів, то правило S є захищеним від маніпулювання тоді і лише тоді, коли воно є диктаторським: $S = S^{i^*}$ для деякого агента i^* – диктатора, де $S^{i^*}(u) = \max u_{i^*}$ для всіх $u \in L(A)^N$.

Як бачить читач, за останні п'ятдесят років стало багато що зрозумілим у теорії голосування, отримано багато цікавих результатів, зокрема, виявлено багато "екзотичних" властивостей правил голосування, що широко використовуються на практиці. Чому ці правила все ще широко використовуються дає нам уявлення про те (за Е. Муленом, [6]), "з якою швидкістю теорії прокладають собі шлях у реальний світ".

Контрольні завдання до §3

1. Побудувати колективне ранжування для наведених профілів за методами: а) Борда, б) відносної більшості, в) абсолютної більшості в два тури, г) Кондорсе, д) Сімпсона, є) Копленда, ж) альтернативних голосів, з) послідовного виключення, і) паралельне виключення:

1.1.

5	4	2
a	c	b
b	a	a
c	b	c
d	d	d

1.2

5	4	2
c	a	b
a	b	a
b	c	d
d	d	c

1.3.

5	4	2
c	b	a
d	a	b
a	d	c
b	c	d

1.4

5	4	2
d	a	b
a	b	c
c	c	d
b	d	a

2. Підібрати профіль голосування для ілюстрації аксіом участі та монотонності.

3. Для заданого профілю підібрати профіль,для якого переможці за Сімпсоном і Коплендом не збігаться.

РОЗДІЛ 4
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

В цьому розділі будуть вивчатися ЗПР в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків, тобто коли зв'язок між альтернативами та наслідками детермінований (кожній альтернативі відповідає тільки один наслідок) і ціль ототожнюється з максимізацією чи мінімізацією деякої дійснозначної функції, що визначена на множині всіх наслідків.

§1. Основні поняття та визначення

Оскільки кожній альтернативі відповідає тільки один наслідок і "корисність" (по відношенню до цілі задачі) цього наслідку оцінюється деякою єдиною числовою оцінкою, а нас цікавить у кінцевому підсумку найкраща оцінка і відповідна їй альтернатива, то можна встановити прямий зв'язок "альтернатива – числова оцінка відповідного наслідку", минаючи саме наслідок. В результаті такого підходу отримаємо дійснозначну функцію f, яка визначена на множині альтернатив, і будемо називати її цільовою функцією. Оскільки ціль в ЗПР при числовій оцінці наслідків полягає у знаходженні такого наслідку, що максимізує чи мінімізує числову оцінку, то під оптимальним розв'язком задачі в умовах визначеності природньо розуміти ту альтернативу, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення. Таким чином, можна зробити висновок: *математичною моделлю ЗПР* в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків є задача оптимізації (максимізації чи мінімізації) дійснозначної функції, що задана на множині альтернатив.

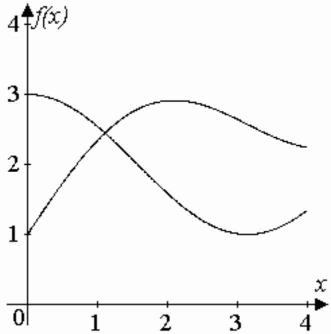


Рис.1.1.

Якщо функція f є скалярною (тобто наслідки оцінюються тільки за одним показником – критерієм), то приходимо до "звичайної" задачі оптимізації, для якої існує єдина концепція оптимальності – оптимальною буде та альтернатива, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення. Припустимо, що маємо таку ЗПР, наслідки якої оцінюються не за одним, а за двома показниками f_1, f_2, а ціль полягає в максимізації цієї пари показників (критеріїв) одночасно, тобто за вектором $f = (f_1, f_2)$. Зрозуміло, що тільки у виключних випадках точки максимумів цих функцій можуть співпасти. Наприклад, це можна побачити на Рис.1.1. Такі задачі не мають розв'язку у звичайному сенсі (є некоректними). Тому спочатку потрібно визначити принцип оптимальності.

Загальні відомості про задачі багатокритеріальної оптимізації. Концепція прийняття рішення в багатокритеріальних ЗПР полягає у свідомому виборі з множини альтернатив однієї. Цей вибір робить *особа, що приймає рішення* (ОПР), яка прагне до досягнення своєї певної цілі. У ролі такої особи виступають чи окрема людина (прийняття індивідуальних рішень), чи група людей (прийняття колективних рішень), що володіють правами вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Застосування математичних методів при прийнятті рішень допускає побудову математичної моделі, що формально представляє проблемну ситуацію, тобто ситуацію вибору рішення. Для задач прийняття рішень в умовах визначеності, коли випадкові і невизначені фактори відсутні, компонентами такої моделі є: множина X альтернатив (рішень), з якої і слід зробити вибір однієї найкращої альтернативи (оптимального розв'язку), і опис переваг особи, що приймає рішення. Для того, щоб була забезпечена можливість (воля) вибору, множина альтернатив X повинна містити не менш двох елементів.

При наявності числових оцінок наслідків порівняння альтернатив за перевагою ОПР здійснюється не безпосередньо, а за допомогою заданих на X числових функцій $f_1, f_2, ..., f_m$, які називаються критеріями (показниками корисності чи ефективності, критеріальними функціями, цільовими функціями і т.п.). Передбачається, що $m \geq 2$ (при $m = 1$ задача оптимізації називається однокритеріальною).

Шкала критерію. Для кожного критерію f_i на числовій прямій E^1 вказується підмножина Y_i, на якій він приймає свої значення. На практиці множину Y_i (яку часто називають *шкалою критерію* f_i) визначають відповідно до предметного змісту цього критерію. Наприклад, якщо відомо, що значення критерію f_i є додатнім чи невід'ємним (критерій характеризує масу, вартість тощо), то можна прийняти $Y_i = (0,+\infty)$ чи відповідно $Y_i = [0,+\infty)$. Якщо значення f_i обмежені знизу й зверху деякими природними границями a і b, то $Y_i = [a,b]$ (наприклад, якщо f_i – деяка частка запасу ресурсів, то $Y_i = [0,1]$). Якщо значеннями f_i можуть слугувати лише нуль і натуральні числа (скажімо, коли f_i визначається в результаті підрахунку кількості деяких об'єктів), то $Y_i = \{0,1,...\}$. Якщо на значення f_i немає жодних змістовних обмежень, то $Y_i = E^1$ і т.п.

Кількісні і якісні критерії. У задачах прийняття індивідуальних рішень критерії слугують для вираження «інтенсивності» істотних властивостей (ознак) рішень. Наприклад, при порівнянні деяких виробів можуть використовуватися такі критерії, як маса, вартість, дата випуску, зовнішній (товарний) вид і т.п. У задачах прийняття групових рішень критерій f_i характеризує "якість" (чи перевагу) рішень із погляду індивіда i, що входить у скінченну множину $M=\{1,2,...,m\}$. Наприклад, якщо множина альтернатив є скінченною та індивід i їх проранжував (упорядкував за перевагою), то можна прийняти $f_i(x') = 1$ для найбільш переважної альтернативи x', $f_i(x'') = 2$ для наступної за перевагою x'' і т.д.

За своїм характером критерії поділяються на кількісні і якісні. Грубо говорячи, критерій є *кількісним*, коли його значення має сенс порівнювати, вказуючи, на скільки чи в скільки разів його значення є більшим за інший, і *якісним*, коли ці порівняння безглузді. Прикладом кількісного критерію f_i є маса. Якщо фіксована одиниця виміру маси, то можна говорити про те, у скільки разів (чи на скільки) один виріб важче за інший. Відношення ваги виробів не змінюється після переходу до іншої одиниці виміру, тобто після перетворень f_i у kf_i, де $k > 0$. Зрозуміло, що будь-яке інше перетворення (яке не є множенням на додатне число) може привести до зміни вихідного співвідношення значень f_i.

У розглянутому прикладі допустимими перетвореннями критерію f_i є всі додатні лінійні перетворення і тільки вони. У загальному випадку функцію φ називають допустимим перетворенням критерію f_i, якщо функція $\varphi(f_i)$ знову являється критерієм, що вимірює (характеризує) ту ж саму властивість. При заміні f_i на $\varphi(f_i)$ множина Y_i змінюється на $\varphi(Y_i)$.

Таким чином, із кожним критерієм зв'язують множину допустимих перетворень *Ф* і кажуть, що цей критерій має шкалу типу *Ф* чи що вимірювання виконуються за шкалою типу *Ф*. Як правило, множина *Ф* вводиться разом із завданням критерію, але іноді визначення типу шкали виявляється самостійною і досить складною задачею.

У вищенаведеному прикладі $\Phi = \Phi_0 = \{\varphi | \varphi(z) = kz, k > 0\}$. Шкала такого типу називається *шкалою відношень* тому, що зберігаються відношення величин $kz'/kz'' = z'/z'' = C, C$ = const. Розповсюдженим є випадок виміру в шкалі типу $\Phi_u = \{\varphi | \varphi(z) = kz + l, k > 0\}$. Тут допустимими перетвореннями є множення на додатне число k і додавання довільного числа l. Така шкала називається шкалою інтервалів. Ця назва пояснюється властивістю збереження відношень інтервалів:
$$\frac{z^1 - z^2}{z^3 - z^4} = \frac{(kz^1 + l) - (kz^2 + l)}{(kz^3 + l) - (kz^4 + l)} = C,\ C = \text{const}.$$

Прикладом критерію, що має шкалу інтервалів, слугує "дата випуску виробу", оскільки для виміру часу необхідно фіксувати масштаб і початок відліку.

Шкала є тим більш досконалою, чим вужча множина *Ф* допустимих перетворень. Критерії, що мають шкалу не менш досконалу, ніж інтервальна, називаються кількісними. У більшості випадків кількісні критерії відповідають вимірам об'єктивних (фізичних) властивостей. Однак дуже поширені й критерії з менш досконалими шкалами, ніж шкала інтервалів. Найменш досконалою шкалою критеріїв, що зустрічається у задачах оптимізації, є *порядкова шкала*. Для неї множина допустимих перетворень складається з усіх монотонно зростаючих функцій: $\Phi_n = \{\varphi | z' > z'' \rightarrow \varphi(z') > \varphi(z'')\}$.

Критерії, що мають порядкову шкалу, називаються *якісними*. Значення якісного критерію має сенс порівнювати тільки за відношенням "більше", "менше" і "дорівнює" – вони зберігаються при монотонних перетвореннях. Але з'ясовувати, у скільки разів чи на скільки одне значення є більшим за інше, безглуздо. Критерій з порядковою шкалою природним чином виникає в тих випадках, коли розв'язки ранжуються, тобто розташовуються за зростанням чи за зменшенням інтенсивності деякої властивості. Потім їм приписуються числа таким чином, щоб більшій інтенсивності відповідало більше чи, навпаки, менше число. Звичайно, такі ранжування отримують при суб'єктивних "вимірах", наприклад, коли вони відображають думку індивіда про перевагу альтернатив.

Дуже часто суб'єктивні виміри виконуються в бальних шкалах. Наприклад, експерти можуть оцінювати у балах зовнішній вигляд виробу. Критерії з бальними шкалами займають "проміжне" положення між кількісними і якісними критеріями.

Твердження про значення критеріїв із заданими типами шкал називається осмисленим, чи адекватним, якщо його істинність не змінюється після застосування до критеріїв будь-яких допустимих перетворень, обумовлених типами шкал. Тому для аналізу й розв'язання практичних багатокритеріальних задач оптимізації варто застосовувати тільки ті визначення та поняття, методи і процедури, що приводять до одержання адекватних висновків і рекомендацій.

Наприклад, широко відомим є метод розв'язку багатокритеріальних задач, заснований на "згортанні" векторного критерію в одну функцію – узагальнений (чи агрегований) критерій $F(f_1, f_2,..., f_m)$. Неважко переконатися в тім, що цей метод не придатний для розв'язку задач із якісними критеріями. Візьмемо найбільш розповсюджений узагальнений критерій – лінійну "згортку" $F_\Sigma = \sum_{i\in M} \mu_i f_i$, де μ_i - деякі додатні числа, що характеризують відносну важливість критеріїв (коефіцієнти важливості). Нехай, наприклад, $m=2,\ \mu_1=\mu_2=1,\ f(x')=(2,8)$, $f(x'')=(1,27)$. Тоді F_Σ вказує, що x' краще за x'' тому, що 2 + 8 < 1 + 27. Однак, якщо до першого критерію застосувати допустиме перетворення $\varphi_1(z')=z^5$, а до другого $\varphi_2(z'')=z^{1/3}$ (тобто f_1 замінити на f_1^5, а f_2 на $f_2^{1/3}$), то висновок буде протилежним тому, що 82 + 2 > 1 +3.

Множина досяжності. Окремі (локальні) критерії f_i, утворюють *векторний критерій* $f=(f_1, f_2,..., f_m)=(f_i)_{i\in M}$, де $M=\{1,2,...,m\}$ називають множиною індексів критеріїв. Вважається, що кожна альтернатива x цілком характеризується відповідною (векторною) *оцінкою*, тобто вектором $f(x)$. Тому вибір оптимальної альтернативи з множини всіх альтернатив X зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини досяжних оцінок $Y=f(X)=\left\{y\in E^m \middle| y=f(x), x\in X\right\}$, де E^m - m - вимірний числовий простір, який називається *простором оцінок* (критеріїв). При необхідності цей простір буде вважатися евклідовим, тобто з метрикою $\rho_2(y',y'')=\langle y'-y'',y'-y''\rangle^{1/2}=$ $=\left[\sum\limits_{i\in M}(y'-y'')^2\right]^{1/2}$, інколи використовуються інші простори, наприклад, із метриками $\rho_1(y',y'')=\sum\limits_{i\in M}|y'-y''|$ чи $\rho_\infty(y',y'')=\max\limits_{i\in M}|y'-y''|$. Часто буває, що у реальних задачах множину Y будувати дуже складно, а то й неможливо. Тому розглядається деяка більш широка множина $\hat{Y}\subseteq E^m$, елементам, якої можна надати певного змісту. Найчастіше – ця множина є гіперпаралелепіпедом $Y^m=\prod\limits_{i\in M}Y_i$. Іноді $\hat{Y}$ отримують із Y^m за допомогою тих чи інших обмежень, спрямованих на виключення позбавлених чи змісту, чи заздалегідь недосяжних векторів. Введення в розгляд множини $\hat{Y}$ дає ряд переваг. Наприклад, виникає можливість дослідження не однієї, а відразу цілої родини задач, для кожної з яких множина досяжних оцінок входить в $\hat{Y}$. Зокрема, стає можливим вивчати характерні залежності оптимального розв'язку від тих чи інших параметрів задачі.

Далі альтернативи завжди будуть позначатися літерою x із різними індексами, а відповідні їм оцінки – літерою y із тими ж індексами, наприклад: $y=f(x), y^*=f(x^*)$ і т.п. Якщо деяка векторна оцінка y^0 є досяжною і їй відповідає кілька альтернатив, то під x^0 буде розумітися (якщо немає спеціальних застережень) довільна з цих альтернатив (тобто будь-яка альтернатива, що задовольняє рівності $f(x^0)=y^0$).

Незалежність критеріїв за перевагою. У багатокритеріальній задачі кожний розв'язок $x\in X$ цілком характеризується своєю оцінкою *y=f(x)* і тому вибір оптимального розв'язку зводиться до вибору оптимальної оцінки з множини *Y* всіх досяжних оцінок.

Природно, що найбільш просто порівнювати за перевагою ті векторні оцінки, що відрізняються одна від одної лише однією компонентою. У загальному випадку, значення критерію f_i можуть порізному співвідноситися за перевагою ОПР у залежності від того, які значення всіх інших критеріїв. Інакше кажучи, для чисел s і t з Y може виявитися, наприклад, що оцінка $(y_1,...,y_{i-1},s,y_{i+1},...y_m)$ є переважнішою за $(y_1,...,y_{i-1},t,y_{i+1},...y_m)$, однак $(y'_1,...,y'_{i-1},s,y'_{i+1},...y'_m)$ менш краща у порівнянні з $(y'_1,...,y'_{i-1},t,y'_{i+1},...y'_m)$. І тоді сказати, яке із значень критерію s чи t – переважніше, не вказуючи значень інших критеріїв, неможливо.

Критерій f_i, для якого має місце зазначене твердження, називається *залежним за перевагою* від інших. Наприклад, якщо f_1, f_2 відповідно – довжина й ширина кімнати, а f_3 висота стелі, то з погляду мешканця f_3 залежить за перевагою від (f_1, f_2). Ще приклад: кожний з критеріїв f_1 (температура повітря) і f_2 (його вологість) залежать за перевагою один від одного (мається на увазі комфортність для людини).

Однак, набагато частіше зустрічаються критерії, для яких можна впорядкувати за перевагою всі їх значення без розгляду значень інших критеріїв. Прикладами є вже згадувані критерії доходу, витрат і т.п. Такі критерії називаються незалежними за перевагою від інших [10]. Більш точно, критерій f_i є *незалежним за перевагою* від інших m-1 критеріїв, якщо для будь-яких чотирьох оцінок виду:

$$(y_1,...,y_{i-1},s,y_{i+1},...y_m),\ (y_1,...,y_{i-1},t,y_{i+1},...y_m),$$
$$(y'_1,...,y'_{i-1},s,y'_{i+1},...y'_m),\ (y'_1,...,y'_{i-1},t,y'_{i+1},...y'_m)$$

із співвідношення $(y_1,...,y_{i-1},s,y_{i+1},...y_m)R(y_1,...,y_{i-1},t,y_{i+1},...y_m)$ завжди випливає $(y'_1,...,y'_{i-1},s,y'_{i+1},...y'_m)R(y'_1,...,y'_{i-1},t,y'_{i+1},...y'_m)$.

Якщо критерій f_i є незалежним за перевагою від сукупності інших, то на множині досяжності Y можна ввести відношення нестрогої переваги R і вважати, що sRt має місце, коли $(y_1,...,y_{i-1},s,y_{i+1},..y_m)R(y_1,...,y_{i-1},t,y_{i+1},...y_m)$ для деяких двох (а виходить і будь-яких двох) оцінок такого виду.

Задачі, в яких усі критерії незалежні за перевагою, тобто кожен критерій незалежний за перевагою від сукупності всіх інших, а відношення нестрогої переваги на множині значень кожного критерію є відношення "$\geq$" ("не менше"), називаються *багатокритеріальними задачами максимізації*. В таких задачах кожному критерію бажано мати можливо більше значення, чи, як говорять, кожен критерій бажано максимізувати. Якщо ж у задачі кожен критерій бажано мінімізувати, то вона називається *багатокритеріальною задачею мінімізації*. Надалі, за винятком випадків, що особливо обмовляються, будуть розглядатися багатокритеріальні задачі максимізації.

Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації. Будемо розглядати скінченновимірні задачі багатокритеріальної максимізації:

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

де X – множина альтернатив, яка є множиною з простору E^n; $f(x) = (f_i(x))_{i \in M}$ – вектор критеріїв, який задається відображенням $f : X \to E^m$; $M = \{1,2,...,m\}$ - множина індексів критеріїв, m – кількість критеріїв. У таких задачах множина альтернатив X, як правило, виділяється з якоїсь більш широкої множини $D \subseteq E^n$ за допомогою обмежень, що найчастіше представляються у виді нерівностей:

$$X = \left\{x \in D \middle| g_1(x) \geq 0, g_2(x) \geq 0, ..., g_k(x) \geq 0\right\},$$

де $g_i(x), j = 1,2,...,k,$ – числові функції, які визначені на D. При цьому вважається, що і вектор критеріїв $f(x) = (f_1(x), f_2(x),..., f_m(x))$ також визначений на D.

У ролі множини D, як правило, виступає або весь простір E^n, або деяка його специфічна підмножина, наприклад, невід'ємний ортант $E^n_{\geq 0}$, утворений усіма векторами з невід'ємними компонентами: $E^n_{\geq 0} = \left\{x \in E^n \middle| x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,..., x_n \geq 0 \right\}$.

Практично, множина D виділяється з E^n за допомогою найпростіших і очевидних обмежень на змінні.

Класи задач багатокритеріальної оптимізації. В залежності від структури множини X (чи D) і властивостей функцій f_i (а також g_i) для зручності досліджень виділяють різні класи багатокритеріальних задач. Так, якщо множина X (чи D) містить скінченну кількість елементів, то задача називається *скінченною*, а якщо X (чи D) є зліченною множиною, то – *дискретною*.

Зокрема, якщо в кожного вектора з X (чи D) компоненти – цілі числа, то задача називається *цілочисельною*. А якщо вектори, які утворюють X (чи D) є бульовими (тобто складаються з нулів та одиниць), то і сама задача називається *бульовою*.

Якщо X (чи D) опукла множина, а усі f_i - угнуті функції, то задача називається *угнутою*. Зокрема, якщо X – поліедральна множина (тобто "вирізана" з E^n кінцевою системою лінійних нерівностей і рівностей), а усі f_i - лінійні, то багатокритеріальна задача називається *лінійною*.

Ефективні й слабко-ефективні оцінки й альтернативи. В багатокритеріальній задачі максимізації із двох векторних оцінок, що відрізняються лише однією компонентою, безперечно переважнішою буде та, у якої ця компонента більша. А що можна сказати про векторні оцінки y і y', для яких виконуються нерівності:

$$y_i \geq y'_i, i = 1,2,...,m ? \tag{1.1}$$

Для відповіді на це запитання згадаємо, як описуються переваги.

Досить загальним і добре розробленим є спосіб опису переваг на "мові" бінарних відношень. Для опису переваг широко використовуються бінарні відношення (див. Розділ 1), що вводяться на множині об'єктів, які порівнюються. У багатокритеріальних задачах такими множинами є множина альтернатив X і множина оцінок Y.

Відношення строгої переваги P: aPb означає, що об'єкт a є строго переважнішим за b.

Відношення байдужності I: aIb означає, що об'єкти a і b однакові за перевагою (якщо вибір обмежити двома цими об'єктами, то байдуже, який з них узяти).

Відношення нестрогої переваги R: aRb означає, що об'єкт a не менш кращий, ніж b, тобто має місце aPb чи aIb; формально R є об'єднанням P та I.

Відношення переваги R та його підмножин P та I повинні задовольняти наступним властивостям: P асиметричне і антирефлексивне; I – симетричне і рефлексивне, R – рефлексивне; P та I – не перетинаються (не може бути одночасно aPb і aIb). Корисно мати на увазі, що P і I відновлюються за R: aIb, коли одночасно aRb і bRa, тобто $I = R \cap R^{-1}$; aPb, коли aRb вірно, але bRa невірно: $P = R \setminus R^{-1}$. Таким чином, I є "симетрична ", а P – "асиметрична частина" R.

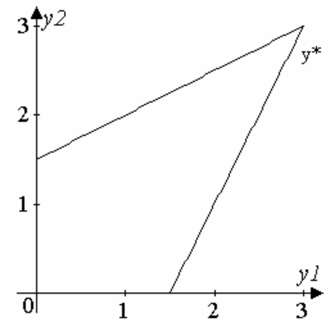


Рис. 1.2.

У загальному випадку відношення R, P та I не є транзитивними. Якщо ж R виявляється транзитивним, то транзитивними будуть P і I; у цьому випадку R є квазіпорядком, P – строгим порядком, I – еквівалентністю.

Абсолютно-оптимальні оцінки й альтернативи. Припустимо, що переваги ОПР описуються відношенням нестрогої переваги R на $\hat{Y}$, причому відомо, що воно не тільки рефлексивне, але і транзитивне (тобто є квазіпорядком). Вважаючи, що $\hat{Y} = Y_1 \times ... \times Y_m$, можна записати наступні співвідношення для оцінок, послідовно використовуючи відношення "$\geq$" для їх компонент

$$(y_1, y_2,...y_m)\ R\ (y'_1, y_2,...y_m),$$
$$(y'_1, y_2,...y_m)\ R\ (y'_1, y'_2,...y_m),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(y'_1,..., y'_{m-1}, y_m)\ R\ (y'_1, y'_2,...y'_m).$$

На підставі цих співвідношень і транзитивності R приходимо до висновку, що справедливо yRy', тобто векторна оцінка y не менш переважна, ніж y'. Це означає введення на множині оцінок $\hat{Y}$ відношення нестрогої переваги, яке співпадає з квазіпорядком "$\geq$" для векторів з E^m. Відповідно до загального визначення максимального елемента за відношенням R оцінка y^* називається найкращою за відношенням "$\geq$", якщо для будь-якої оцінки $y \in Y$ має місце $y^* \geq y$. Оскільки відношення "$\geq$" є квазіпорядком, то може існувати тільки одна така точка y^*. Наприклад, це ілюструє наступний рисунок 1.2. Якщо в багатокритеріальній задачі існує найкраща за відношенням "$\geq$"оцінка y^*, то саме її і варто вважати оптимальною. В методах багатокритеріальної оптимізації таку оцінку, якщо вона існує, називають *абсолютно-оптимальною*.

Відношення "$\geq$", визначене на множині оцінок, породжує аналогічне за змістом відношення "$\geq$" на множині альтернатив, яке також є частковим квазіпорядком.

Альтернативі, максимальній за відношенням "$\geq$", відповідає максимальна за відношенням "$\geq$" оцінка з *Y*. Називається ця альтернатива також абсолютно-оптимальною. Отже, абсолютно-оптимальна альтернатива перетворює в максимум на X кожен із критеріїв $f_1, f_2, ..., f_m$. Умови існування абсолютно-оптимальних альтернатив встановлює наступна теорема.

Теорема 1.1 (про необхідні й достатні умови абсолютної – оптимальності). Нехай множини оптимальних за кожним критерієм альтернатив є непорожніми, $X^i = Arg\max\limits_{x\in X} f_i(x) \neq \varnothing,\ i = 1,2,...,m$. Тоді множина абсолютно-оптимальних альтернатив $Q(X) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i$.

Доведення. Спочатку доведемо включення $Q(X) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i$, що є очевидним, коли $Q(X) = \varnothing$. Нехай $Q(x) \neq \varnothing$ і виберемо $\overline{x} \in Q(X)$. Тоді за визначенням абсолютно-оптимальної альтернативи отримаємо наступний ланцюг імплікацій:

$$\forall x \in X,\ \overline{x} \geq x \Rightarrow \overline{y} = f(\overline{x}) \geq f(x) = y \Rightarrow f_i(\overline{x}) \geq f_i(x),\ i = 1,2,...,m \Rightarrow$$

$$f_i(\overline{x}) = \max_{x\in X} f_i(x),\ i = 1,2,...,m \Rightarrow \overline{x} \in X^i,\ i = 1,2,...,m \Rightarrow \overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i.$$

Тепер доведемо включення $Q(X) \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i$, що є очевидним, коли $\bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i = \varnothing$. Нехай $\bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i \neq \varnothing$ і виберемо $\overline{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i$. Тоді отримаємо наступний ланцюг відношень:

$$\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i \Rightarrow \overline{x} \in X^i,\ i = 1,2,...,m \Rightarrow f_i(\overline{x}) = \max_{x\in X} f_i(x),\ i = 1,2,...,m \Rightarrow$$

$$f_i(\overline{x}) \geq f_i(x),\ i = 1,2,...,m \Rightarrow \overline{y} = f(\overline{x}) \geq f(x) = y \Rightarrow \forall x \in X,\ \overline{x} \geq x \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in Q(x)$. Теорему доведено.♦

Абсолютно-оптимальні альтернативи і відповідно абсолютно-оптимальні оцінки, як уже відзначалося, безумовно, можуть вважатися оптимальними, однак практично вони майже ніколи не існують. Це пов'язано з тим, що порядок "$\geq$" не є повним, наприклад, якщо

$y_i > y_i'$, але $y_j < y_j', i \neq j$, то y й y' за відношенням "$\geq$" є незрівнянними. Тому, в залежності від суті задачі, доводиться використовувати оцінки й альтернативи, "максимальні" за відношеннями ">"чи ">>". Для таких оцінок використовують спеціальні назви.

Ефективні оцінки і альтернативи. Якщо R не є транзитивним чи $\hat{Y} \neq Y_1 \times ... \times Y_m$, то формальним шляхом прийти до сформульованого твердження yRy', взагалі кажучи, неможливо. Однак, у будь-якому випадку, воно є настільки природнім, що у всіх моделях прийняття індивідуальних рішень вводиться як аксіома. Прийняття цієї аксіоми, що часто називається (сильною) *аксіомою Парето*, означає введення в множині оцінок $\hat{Y}$ відношення строгої переваги, яке співпадає з відношенням ">" для векторів з E^m. Нагадаємо, що вектори $y = (y_1, y_2, ..., y_m), y' = (y_1', y_2', ..., y_m')$ знаходяться у відношенні строгої переваги, якщо $y_i \geq y_i', i = 1,2,...,m$, і хоча б одна нерівність є строгою, тобто $y \neq y'$. Для цього відношення можна визначити поняття "максимального" елементу.

Визначення 1.1. Будемо називати оцінку $y^0 \in Y$ *оптимальною за Парето (ефективною, максимальною за* ">"), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y > y^0$. Множину всіх таких оцінок із Y будемо позначати через $P(Y)$ і називати множиною Парето чи множиною ефективних оцінок.

Відношення ">", визначене на множині оцінок, породжує аналогічне за змістом відношення ">" на множині альтернатив, яке є строгим частковим порядком. Отже, альтернатива $x^0 \in X$ *називається оптимальною за Парето (ефективною)*, якщо не існує альтернативи $x \in X$ такої, що $x > x^0$, тобто для якої $f(x) > f(x^0)$. Множина оптимальних за Парето (ефективних) альтернатив буде позначатися через $P(X)$.

Слабко-ефективні оцінки. Розглянемо, наприклад, випадок багатокритеріальної задачі прийняття групового рішення, коли f_i є критерієм i-го ОПР, що входить у групу ОПР (множину $M = \{1,2,...,m\}$). У цьому випадку $f_i(x) \geq f_i(x')$ означає, що альтернатива x не гірша за x' з погляду i-го ОПР. У такій задачі відношення переваги на множині оцінок Y повинно відбивати "групову думку", яка агрегує індивідуальні.

Якщо $y = y'$, тобто $f(x) = f(x')$, то висновок про рівність x і x' за перевагою може бути зроблений і для групи в цілому. Залишається розглянути наступне питання: якщо в (1.1) хоча б одна нерівність строга, то чи варто вважати, що альтернатива x є переважнішою за x'. На жаль, позитивну відповідь на останнє питання можна дати не у всіх реальних ситуаціях. Дійсно, якщо в (1.1) строга нерівність лише одна, то це означає, що x переважніше за x' лише для одного члена групи, а для всіх інших обидві альтернативи рівноцінні. Але в деяких ситуаціях може виявитися, що "одного голосу" занадто мало, і тоді група в цілому не обов'язково повинна вважати x переважнішим за x'.

Очевидно, у різних ситуаціях підсумок порівняння оцінок y та y' може залежати від того, скільки строгих нерівностей у (1.1) виконується при порівнянні їх компонент. Однак, самим слабким є припущення, яке полягає в тім, що в для всієї групи y переважніше y', якщо в (1.1) усі нерівності строгі. Це припущення є прийнятим майже у всіх відомих моделях групових рішень і називається *слабкою аксіомою Парето*. Воно вводить на $\hat{Y}$ відношення сильної переваги, що співпадає з відношенням ">>" для векторів з E^m. Кажуть, що y>>y' вірне тоді і тільки тоді, коли $y_i > y_i', i = 1,2,...,m$. Для цього відношення також визначається поняття максимального елементу.

Визначення 1.2. Оцінку $y^* \in Y$ будемо називати *оптимальною за Слейтером (слабко-ефективною або максимальною* за ">>"), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y >> y^0$. Множину всіх таких оцінок із Y будемо позначається далі через $S(Y)$ і називати множиною Слейтера чи множиною слабко-ефективних оцінок.

Відношення ">>", визначене на множині оцінок, породжує аналогічне за змістом відношення ">>" на множині альтернатив, яке є строгим частковим порядком. Отже, альтернатива $x^0 \in X$ називається *оптимальною за Слейтером (слабко-ефективною),* якщо не існує альтернативи $x \in X$ такої, що $x >> x^0$, тобто для якої $f(x) >> f(x^0)$. Множина оптимальних за Слейтером (слабко-ефективних альтернатив) буде позначатися через $S(X)$.

Порівняння ефективних та слабко-ефективних оцінок. Оскільки з $y >> y'$ випливає $y > y'$, то будь-яка ефективна векторна оцінка є слабко-ефективною, так $P(Y) \subseteq S(Y)$. Дійсно, якщо y^0 не є слабко-ефективною, то для деякої $y \in Y$ буде виконуватися $y >> y^0$, а тому й $y > y^0$ так, що y^0 не може бути ефективною.

Геометрично, при $m = 2$, $P(Y)$ є "північно-східною" границею множини *Y* (без горизонтальних та вертикальних ділянок, чи ділянок, що знаходяться у досить "крутих і глибоких проваллях"), а $S(Y)$ може додатково містити в собі вертикальні й горизонтальні ділянки границі, що прилягають до *P(У).* Так, на рисунку 1.3 множина $P(Y)$ (ефективна границя Y) утворена кривими *bc*, *ef*, а $S(Y)$ складається з двох частин – *abcd* (включаючи *d*) і *efg*. У цьому легко переконатися, якщо помітити, що точки, які є кращими, ніж *y*, у сенсі відношення ">", заповнюють прямий кут, сторони якого паралельні вісям координат із вершиною у точці *y* (сама точка *y* виключається); а точки, що є кращими за *y*, у сенсі відношення ">>", складають внутрішність цього ж кута.

Економічна інтерпретація оптимальності за Парето. Визначення (слабко) ефективної альтернативи є "статичним" у тім сенсі, що ґрунтується на попарному порівнянні альтернатив і не зв'язується з питанням про те, чи можливо "повільно" перейти від однієї альтернативи до іншої, більш кращої, збільшуючи кожен критерій. Можливість здійснення такого переходу в деяких, особливо економічних моделях, становить великий інтерес. Прикладом є модель чистого обміну, в якій кожен споживач бере участь в обміні, прагнучи скласти собі набір товарів найбільшої корисності, тобто формально максимізувати свою функцію цінності. Такого роду моделі розглядали ще в XIX сторіччі Ф. Еджворт і В. Парето. Ефективним для моделі обміну є стан (розподіл товарів між споживачами), який не може бути

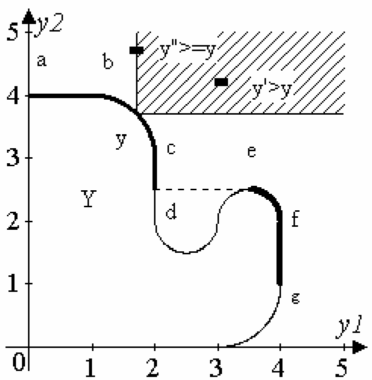


Рис. 1.3.

поліпшеним шляхом перерозподілу товарів для жодного з учасників без обмеження інтересів деяких інших учасників. Отже, оптимальність за Парето відбиває ідею економічної рівноваги: якщо стан не є ефективним, то буде відбуватися торгівля, що приведе до ефективного стану. Якщо процес обміну розглядати як послідовність угод, вигідних усім учасникам, то формалізовано його можна описати гладкою кривою, при русі уздовж якої, усі критерії збільшуються. Тоді можна виділити стани, із яких не виходить жодна гладка крива такого типу. Такі стани були названі С. Смейлом критичними точками Парето. Зрозуміло, що множина таких точок (критична множина Парето) включає всю множину слабко-ефективних точок, але в загальному випадку ширше останньої (через "локальний характер" визначення критичної точки Парето).

Власно-ефективні альтернативи. Дослідження показують, що серед ефективних можуть зустрітися оцінки (альтернативи), що виявляються у певному сенсі аномальними.

Приклад 1. Розглянемо наступну множину оцінок:

$$Y = \left\{ y \in E^2 \middle| y_1 \le -(y_2)^2 \right\}.$$

Ефективні оцінки утворюють частину параболи $y_1 = -(y_2)^2$, що лежить у другому квадранті (Рис.1.4). До ефективних відноситься й оцінка $y^* = (0{,}0)$. Різниці значень координат ефективних оцінок y і y^* виявляються рівними величинам:

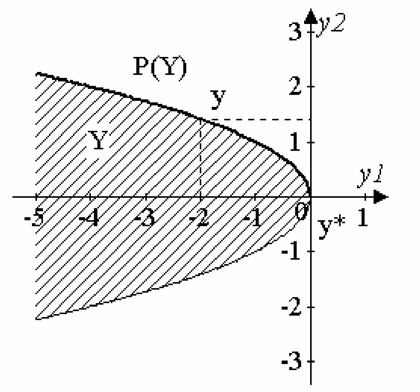


Рис. 1.4.

$$\Delta y_2 = y_2 - y_2^* = y_2 > 0 \text{ і}$$

$$\Delta y_1 = y_1 - y_1^* = -(\Delta y_2)^2 < 0\,.$$

Отже, якщо перейти з точки y^* в досить близьку до неї ефективну точку y, то буде отримано виграш першого порядку малості за другим критерієм за рахунок програшу другого порядку малості за першим критерієм. Якщо критерій f_1 не вважати набагато важливішим за f_2, то, очевидно, природньо погодитися на деяке збільшення f_2, допустивши на порядок менші втрати по f_1. Таким чином, оцінка y^* є аномальною: вона є нестійкою в зазначеному сенсі і тому відповідна їй альтернатива не може, взагалі кажучи, претендувати на оптимальність.

Розглянутий приклад показує, що іноді має сенс спеціально виділяти ефективні оцінки (і альтернативи), які позбавлені подібних небажаних властивостей. Перше визначення такого роду ефективних рішень, названих власне ефективними {proper efficient), було дано X. Куном і А. Таккером. Однак воно було сформульоване для диференційованого випадку і зв'язане зі спеціальними умовами регулярності, що дозволили одержати необхідні умови оптимальності. Для загального випадку визначення власної ефективності було запропоновано А. Джеофріоном.

Визначення 1.3. Ефективна оцінка $y^0 \in P(Y)$ називається *власно-ефективною чи оптимальною за Джеофріоном,* якщо існує таке додатне число θ, що для $\forall i \in M$, $\forall y \in Y$ (для яких виконується нерівність $y_i > y_i^0$), існує індекс $j \in M$ такий, що $y_j < y_j^0$ і виконується нерівність:

$$(y_i - y_i^0) \big/ (y_j^0 - y_j) \le \theta . \qquad (1.2)$$

Відмітимо, що оскільки y^0 ефективна, то у випадку існування ефективної оцінки y, для якої при деякому i виконується нерівність $y_i > y_i^0$, завжди $\exists$ номер *j*, для якого буде справедливою нерівність $y_j < y_j^0$ (оскільки ефективні оцінки y та y^0 є між собою незрівнянними). Тому зміст приведеного визначення полягає у вимозі існування числа θ, для якого при зазначених умовах виконується (1.2).

Альтернативи, яким відповідають власно-ефективні оцінки, також називаються власно-ефективними чи оптимальними за Джеофріоном. Множину усіх таких альтернатив (оцінок) будемо позначати через *G*(*X*) (*G*(*Y*)). Так, у наведеному прикладі 1 множина *G*(*Y*) – це верхня гілка параболи (без вершини y^0).

Приклад 2. Найкраща за відношенням "$\ge$" (абсолютно-оптимальна) оцінка y^0є власно-ефективною. Так як $y^0 \ge y$ для $\forall\ y \in Y$, то нерівність $y_i > y_i^0$ не виконується при жодному $i \in M$ та для жодного $y \in Y$. Тому для власної ефективності y^0необхідність в умові (1.2) відсутня.

Звідси випливає, що альтернатива, яка обертає в максимум одночасно кожний із критеріїв f_i, є власно-ефективною. Зокрема, в однокритеріальних задачах будь-яка оптимальна альтернатива є власно-ефективною.

П р и к л а д 3. Якщо множина Y є скінченною, то будь-яка ефективна оцінка є власно-ефективною. Якщо ефективна оцінка єдина, то є абсолютно-оптимальною, тому є власно-ефективною (попередній приклад). Якщо ж $P(Y)$ містить більше однієї оцінки, то шукане додатне число θ можна задати рівністю:

$$\theta = \max\left\{ {y_i - y_i^0} \Big/ {y_j^0 - y_j} \,\Big|\, y \in Y; i, j \in M; i \neq j; y_i > y_i^0; y_j^0 > y_j \right\}.$$

Отже, якщо Y є скінченним (а для цього достатньо скінченності множини альтернатив X), то поняття ефективності і власної ефективності рівносильні.

Ефективна оцінка, що не є власно-ефективною, називається *невласно-ефективною*. Аналогічна термінологія вводиться і для альтернатив. Це означає, що переходом від невласно-ефективної альтернативи до деякої іншої можна забезпечити збільшення принаймні по одному певному критерію за рахунок втрат більш високого порядку малості за всіма тими критеріями, значення яких зменшаться. Іншими словами, невласно-ефективна альтернатива в зазначеному сенсі є аномальною (нестійкою).

П р и м і т к а. Як уже вказувалося, поняття власно-ефективних оцінок і альтернатив не має сенсу вводити в тих випадках, коли один критерій незрівнянно важливіший за інші. Задачі, у яких критерії впорядковані за важливістю (і перенумеровані) так, що кожен попередній незрівнянно важливіший за усі наступні, називаються лексикографічними задачами оптимізації тому, що в таких задачах відношення нестрогої переваги є лексикографічним порядком "$\overset{lex}{\geq}$". Цей порядок задається наступним чином: $y \overset{lex}{\geq} y'$, коли виконана одна з умов:

$$1)\; y_1 > y_1';$$

$$2)\; y_1 = y_1',\; y_2 > y_2';$$

…………………

$$\text{m)}\;\; y_i = y_i',\; i - 1,2,...,m-1,\; y_m > y_m';$$

$$\text{m+1)}\ \ y = y'.$$

Відношення " $\overset{lex}{\geq}$ ", що є повним, впорядковує оцінки подібно тому, як розташовуються слова в словнику, і цим пояснюється походження прикметника "лексикографічний". З визначення видно, що в лексикографічній задачі варто домагатися як завгодно малого збільшення більш важливого критерію за рахунок як завгодно великих втрат за всіма іншими, менш важливими критеріями. Саме тому лексикографічно-оптимальна (найкраща за $\overset{lex}{\geq}$) оцінка не обов'язково буде власно-ефективною, хоча, як легко переконатися, вона обов'язково є невласно-ефективною.

Вище були введені поняття ефективності декількох типів і установлений взаємозв'язок між ними. Цьому зв'язку відповідають наступні включення для множини оцінок і альтернатив, ефективних у різному сенсі: $G(Y) \subseteq P(Y) \subseteq S(Y)$, $G(X) \subseteq P(X) \subseteq S(X)$.

Приклади, приведені в цьому розділі, показують, що кожне з цих включень може бути строгим.

Контрольні завдання до §1

1. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$2x_1 + x_2 \to \max, x_1 + 3x_2 \to \max, x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 6, x_{1,2} \geq 0.$ 2. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$2x_1 + x_2 \to \max, \text{-}\, x_1 + x_2 \to \max, x_1 + x_2 \leq 4, x_2 \leq 2, x_{1,2} \geq 0.$

3. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 - x_2 \to \max, \text{-}\, x_1 + 3x_2 \to \max, \text{-}\, x_1 + 2x_2 \geq 2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4.$

4. Знайти за визначенням множину ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 \to \max, x_2 \to \max, x_1 + x_2 \leq 5, \text{-}\, 4x_1 + x_2 \leq 0, x_1 - 4x_2 \leq 0, x_{1,2} \geq 0.$

5. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 + x_2 \to \max, x_1 + 4x_2 \to \max, 3x_1 + x_2 \leq 9, x_1 + 3x_2 \leq 9, x_1 + x_2 \leq 4, x_{1,2} \geq 0.$

6. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтерна-

тив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 + x_2 \to \max, x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 5, -2x_1 + x_2 \le -1, x_1 - x_2 \le 3, x_{1,2} \ge 0.$

7. Знайти за визначенням множину слабко ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 \to \max, -x_1 + 2x_2 \to \max, -x_1 + 2x_2 \le 2, 3x_1 - 2x_2 \le 6, x_{1,2} \ge 0.$

8. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 \to \max, x_2 \to \max, 2x_1^2 + x_2^2 \le 4, x_{1,2} \ge 0$.

9. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 \to \max, x_1 + x_2 \to \max, x_1^2 + 2x_2^2 \le 4, x_{1,2} \ge 0$.

10. Знайти за визначенням множину власне ефективних альтернатив у наступній двох-критеріальній задачі:

$x_1 + x_2 \to \max, x_2 \to \max, x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_{1,2} \ge 0$.

§2. Умови оптимальності

В цьому розділі встановлюються умови оптимальності [10] без будь-яких істотних припущень щодо структури множини альтернатив X і властивостей заданої на ній вектор-функції критеріїв $f = (f_1,...f_m)$. Для простоти та наочності викладення будемо розглядати умови оптимальності стосовно до оцінок альтернатив, маючи на увазі, що отримані результати легко переносяться і на самі альтернативи.

Теорема 2.1 (умови слабкої ефективності оцінок (Гермейер)). Припустимо, що $y^0 > 0$. Оцінка y^0 є слабко-ефективною тоді й тільки тоді, коли існує вектор $\mu \in M^+ = \left\{ \mu = (\mu_i)_{i \in M} \middle| \sum_{i \in M} \mu_i = 1;\ \mu_i > 0,\ i \in M \right\}$ такий, що:

$$\min_{i \in M} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \min_{i \in M} \mu_i y_i . \tag{2.1}$$

Для слабко-ефективної оцінки $y^0 \in Y$ можна прийняти $\mu = \mu^0 \in M^+$, де $\mu^0 = (\mu_i^0)_{i \in M}$ – вектор з компонентами

$$\mu_i^0 = \lambda^0 \big/ y_i^0 \,,\ i \in M;\ \lambda^0 = 1 \Big/ \sum_{k\in M} \frac{1}{y_k^0}\,, \qquad (2.2)$$

і тоді $\max\limits_{y\in Y} \min\limits_{i\in M} \mu_i^0 y_i = \lambda^0$.

Доведення. Достатність. З рівності (2.1) випливає, що для кожного $y \in Y$ існує номер $i \in M$ такий, що $y_i^0 \ge y_i$. Тому $\neg\exists y \in Y : y >> y^0$. Звідси y^0 є слабко-ефективною оцінкою.

Доведемо необхідність. Для цього візьмемо вектор з компонентами, які визначені формулами (2.2). Відмітимо, що $\mu^0 \in M^+$. З $y^0 \in S(Y)$ випливає, що для кожного $y \in Y$ існує $j \in M$, при якому виконується нерівність $y_j^0 \ge y_j$, а, отже, і нерівність $\mu_j^0 y_j^0 \ge \mu_j^0 y_j$. Оскільки $\mu_j^0 y_j^0 = \lambda^0 = 1 \Big/ \sum\limits_{i\in M} \frac{1}{y_i^0} = const$, то $\forall y \in Y$ $\min\limits_{i\in M} \mu_i^0 y_i^0 \ge \min\limits_{i\in M} \mu_i^0 y_i$. Звідси випливає (2.1).♦

З Рис. 2.1 видно, що $y^0 \in S(Y)$ тоді і тільки тоді, коли у внутрішність ортанта $E_{\ge 0}^m$, зсунутого у точку y^0 , не попадає жодна точка з *Y*. Оскільки гіперповерхня $\min\limits_{i\in M} \mu_i y_i = \lambda$ при $\lambda = 0$ і додатніх μ_i представляє собою границю цього ортанта, зсув якого в y^0 можна здійснити присвоєнням відповідних значень параметрам μ_i і λ, то з'являється можливість сформульований геометричний факт виразити в термінах функції $\min\limits_{i\in M} \mu_i y_i$. Ця можливість і реалізована в теоремі.

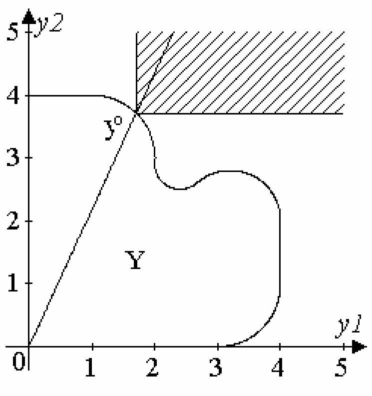


Рис. 2.1.

Приклад 4. Побудувати слабко-ефективні альтернативи за теоремою Гермейєра для наступної двохкритеріальної задачі:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

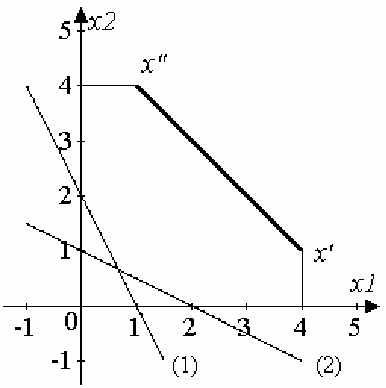


Рис. 2.2.

На Рис. 2.2 зображена множина альтернатив *X*; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); x', x'' – найкращі відповідно за першим та другим критерієм альтернативи. За визначенням можна встановити, що множиною слабко-ефективних альтернатив буде відрізок $[x', x'']$. Спробуємо побудувати якісь слабко-ефективні альтернативи. За теоремою Гермейєра для того, щоб альтернатива x^* була слабко-ефективною альтернативою, необхідно і достатньо:

$\exists \mu \in \mathrm{M}^+ = \left\{ \mu = (\mu_1, ..., \mu_n) : \mu_i > 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}$ і тоді альтернатива x^* буде розв'язком наступної параметричної задачі: $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_i f_i(x)$.

Для нашого прикладу ця задача буде мати наступний вигляд:

$$F(x, \mu) = \min\{\mu_1(2x_1 + x_2), \mu_2(x_1 + 2x_2)\} \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,\ 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Зафіксуємо вектор параметрів $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in M^+$, наприклад, нехай $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$, і розв'яжемо графічно параметричну задачу. Для цього побудуємо лінію рівня її цільової функції. Наприклад, сталому значенню функції 2 буде відповідати множина векторів $x = (x_1, x_2)$, задана рівнянням:

$$F(x,(0.5,0.5)) = \min\{0.5(2x_1 + x_2), 0.5(x_1 + 2x_2)\} = 2 .$$

Для побудови цієї множини розглянемо такі випадки: якщо $x_1 + \frac{1}{2}x_2 < \frac{1}{2}x_1 + x_2 \;\Rightarrow\; x_1 < x_2$ (півплощина, що знаходиться над бісектрисою прямого кута), то рівняння прийме вигляд: $2x_1 + x_2 = 4$; якщо $x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq \frac{1}{2}x_1 + x_2 \;\Rightarrow\; x_1 \geq x_2$ (півплощина, що знаходиться під бісектрисою прямого кута), то рівняння прийме вигляд: $x_1 + 2x_2 = 4$. На рисунку 2.3 можна побачити лінію рівня цільової функції параметричної задачі, яка має вигляд кута, вершина якого знаходиться в точці x на прямій $x_1 = x_2$, що задається умовою рівності аргументів функції $F(x,(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$, а бокові сторони цього кута паралельні лініям рівня відповідних критеріїв (1) і (2). Для того, щоб побачити, куди є спрямованим субградієнт функції (використовуємо поняття субградієнта, оскільки $F(x,\mu)$ є недиференційованою функцією), візьмемо більший її рівень, наприклад, 3.75, і побудуємо лінію цього рівня. В цьому випадку отримаємо: якщо $x_1 < x_2$, то $2x_1 + x_2 = 7.5$; а якщо $x_1 \geq x_2$, то $x_1 + 2x_2 = 7.5$.

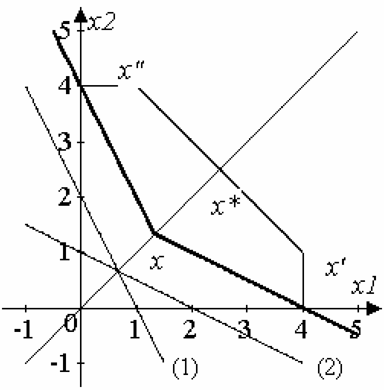


Рис. 2.3.

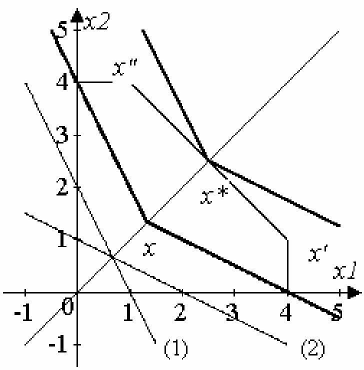


Рис. 2.4.

З рисунка 2.4 бачимо, що лінія рівня 3.75 цільової функції параметричної задачі буде також мати вигляд кута, вершина якого знаходиться вже в точці x^* і також на прямій $x_1 = x_2$, що задається умовою рівності аргументів функції $F(x,(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$, а бокові сторони цього кута також паралельні лініям рівня відповідних критеріїв (1) і (2). Цей рівень 3.75 і буде максимальним значенням $F(x,(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$, а точка $x^*=(2.5,2.5)$ буде оптимальним розв'язком параметричної задачі і за теоремою Гермейєра слабко-ефективною альтернативою початкової двохкритеріальної задачі.

Спробуємо тепер поміняти вектор параметрів $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in M^+$ на інший, наприклад, $\mu_1 = \frac{3}{7}$, $\mu_2 = \frac{4}{7}$, і подивимось, яку слабко-ефективну альтернативу отримаємо в цьому випадку.

Цільова функція параметричної задачі тепер буде мати вигляд: $F(x,(\frac{3}{7},\frac{4}{7})) = \min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2), \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\}$. На рисунку 2.5 бачимо лінії рівнів $\frac{90}{49}$ і $\frac{180}{49}$ цієї функції, які утворюють кути, вершини яких x і x^* знаходяться на прямій $2x_1 = 5x_2$, яка визначається умовою рівності аргументів функції $F(x,(\frac{3}{7},\frac{4}{7}))$, а бокові сторони паралельні лініям рівня відповідних критеріїв початкової двохкритеріальної задачі. Рівень $\frac{180}{49}$ буде максимальним значенням функції, а точка $x^*=(\frac{25}{7},\frac{10}{7})$ буде оптимальним розв'язком параметричної задачі і за теоремою Гермейєра слабко-ефективною альтернативою початкової двохкритеріальної задачі. Якщо

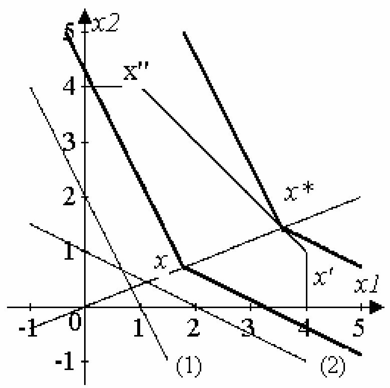


Рис. 2.5.

порівняти випадки задання різних параметрів $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in M^+$, то можна підтвердити висновок теореми Гермейєра, що таким чином можна отримати будь-яку слабко-ефективну альтернативу цієї задачі.

Теорема 2.2 (умова ефективності оцінок (Подіновський)). Оцінка y^0 ефективна тоді і тільки тоді, коли для кожного $i \in M$

$$y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i, \tag{2.3}$$

де

$$Y^i = \left\{ y \in Y \middle| y_j \geq y_j^0,\ j \in M;\ j \neq i \right\}. \tag{2.4}$$

Якщо $y^0 \in Y$ ефективна, то вона є єдиною в *Y* точкою, що задовольняє (2.3) при кожному $i \in M$.

Доведення. Доведемо достатність. Нехай $y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i$. Припустимо супротивне, що $y^0 \notin P(Y)$. Тоді знайдеться така оцінка $y \in Y$, що $y_i \geq y_i^0$, $\forall i \in M$; $\exists j \in M : y_j > y_j^0$. Таким чином, $y \in Y^i$, $y_i > y_i^0$. Звідси випливає, що $y_i^0 < \max_{y \in Y^i} y_i$. Одержали суперечність.

Доведемо необхідність. Нехай $y^0 \in P(Y)$. Побудуємо множини $Y^i, \forall i \in M$, за умовами (2.4). Помітимо, що $Y^i \neq \varnothing, \forall i \in M$. Припустимо супротивне, що $\exists i \in M : y_i^0 < \max_{y \in Y^i} y_i$. Тоді для оцінки $y^* \in Y^i$, $y_i^* = \max_{y \in Y^i} y_i$ маємо $y_j^* \geq y_j^0$, $\forall j \in M$; $y_i^* > y_i^0$. Звідси, за означенням ефективної оцінки, одержимо $y^0 \notin P(Y)$.♦

Слід зауважити, що досить неконструктивну умову (2.3) теореми Подіновського можна значно послабити, якщо множина оцінок задачі буде строго опуклою. Цей факт у термінах альтернатив формалізує наступна теорема.

Теорема 2.3. Нехай множина альтернатив *X* є опуклою, а *f*(*x*) є строго угнутою вектор-функцією. Для ефективності альтернативи *x** необхідно й достатньо, щоб існував вектор $\mu \geq 0$, при якому

$$\langle \mu, f(x^*) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle .$$

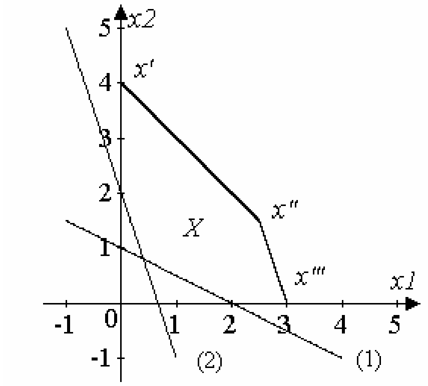


Рис. 2.6.

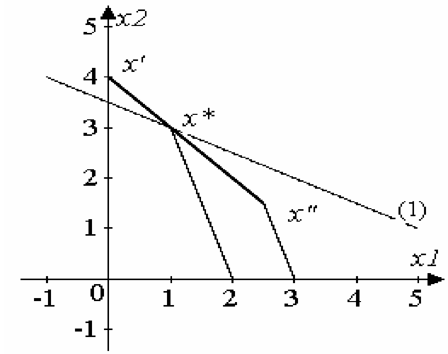


Рис. 2.7.

Приклад 5. Побудувати ефективні альтернативи за теоремою Подіновського для наступної двохкритеріальної задачі:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 4,\ 3x_1 + x_2 \le 9,$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

На рисунку 2.6 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1) і (2); x', $[x'', x''']$ – найкращі відповідно за першим й другим критерієм задачі альтернативи (через $[x'', x''']$ позначений відрізок прямої $3x_1 + x_2 = 6$ між точками x'', x'''). За визначенням можна встановити, що множиною ефективних альтернатив буде відрізок $[x', x'']$ прямої $x_1 + x_2 = 5$. Побудуємо ефективні альтернативи за теоремою Подіновського. Запишемо параметричну задачу в для деякого $i = \overline{1,m}$:

$$f_i(x) \to \max$$
$$f_j(x) \ge \xi_j,\ j = \overline{1,m},\ j \ne i,$$
$$x \in X,$$

де $\xi_j \in [d_j, h_j]$, $d_j = \min\limits_{x \in X} f_j(x)$, $h_j = \max\limits_{x \in X} f_j(x)$, $j = \overline{1,m}$.

При $i = 1$ ця задача прийме наступний вигляд:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 3x_2 \ge \xi_2,\ \xi_2 \in [0, 9],$$
$$x \in X.$$

Зафіксуємо значення параметра $\xi_2 = 6$. З рис. 2.7 видно, що ξ_2 буде відповідати оптимальному розв'язку параметричної задачі $x^* = (1,3)$, який буде ефективною альтернативою початкової двохкритеріальної задачі. Вибираючи інші значення параметра $\xi_2 \in [0, 9]$, можемо отримати будь-яку ефективну альтернативу. Нехай тепер $i = 2$, тоді параметрична задача прийме наступний вигляд:

$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq \xi_1,\ \xi_1 \in [0, 8],$$
$$x \in X.$$

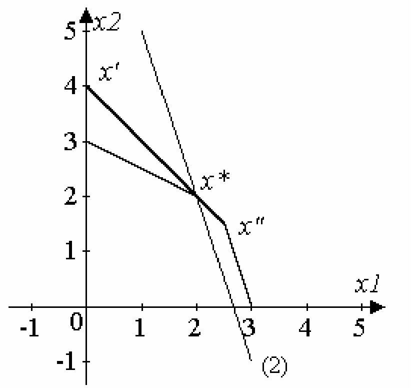


Рис. 2.8.

Зафіксуємо значення параметра $\xi_1 = 6$. З рис. 2.8 бачимо, що цьому значенню параметра буде відповідати оптимальний розв'язок параметричної задачі $x^* = (2, 2)$, який буде ефективною альтернативою початкової двохкритеріальної задачі. Вибираючи інші значення параметра $\xi_1 \in [5.5, 8]$, можемо отримати будь-яку ефективну альтернативу. Але при значеннях параметра $\xi_1 \in [0, 5.5)$, розв'язок параметричної задачі не буде єдиним і серед них, окрім ефективної альтернативи x'', будуть і слабко-ефективні. З цієї причини теорема Подіновського і вимагає, щоб ефективна альтернатива була одночасно розв'язком відповідних параметричних задач для всіх $i \in \{\overline{1, m}\}$. Наприклад, нехай $i = 2,\ \xi_1 = 4$. З рисунка 2.9 бачимо, що цьому значенню параметра буде відповідати мак-

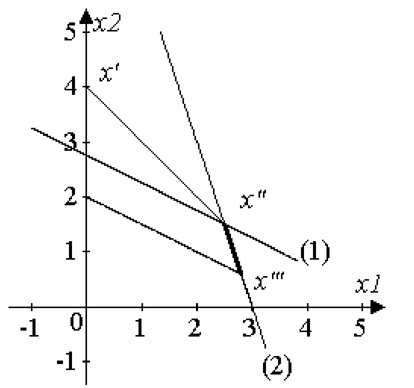


Рис. 2.9.

симальне значення 9 цільової функції параметричної задачі і вже не одна точка, а множина оптимальних розв'язків. Це будуть точки відрізку $[x'', x''']$, з яких тільки $x''=(2.5, 1.5)$ буде ефективною альтернативою початкової двохкритеріальної задачі, а інші будуть слабко ефективними альтернативами.

Тому розглянемо параметричну задачу при $i=1$ й при $\xi_2=9$ (нагадаємо, що 9 – це значення другого критерію, що відповідає максимальному значенню цільової функції параметричної задачі при $i=2$). З рисунка 2.9 бачимо, що ця параметрична задача вже буде мати єдиний розв'язок $x''=(2.5, 1.5)$, який буде ефективною альтернативою початкової двохкритеріальної задачі.

Теорема 2.4 (умова власної ефективності оцінок (Ногін)). Оцінка $y^0 \in Y$ є власно-ефективною тоді і тільки тоді, коли існує набір векторів $\mu^1,...,\mu^p \in M^+$, $p \le m$ такий, що для кожної оцінки $y \in Y$ знайдеться номер $i \in \{1,..., p\}$, при якому виконується нерівність для скалярних добутків:

$$\left\langle \mu^i, y^0 \right\rangle \ge \left\langle \mu^i, y \right\rangle. \tag{2.5}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, покладемо $y^0=0$. Відзначимо наступний факт, що безпосередньо випливає з визначення власно-ефективної оцінки. Включення $y^0 \in G(Y)$ має місце в тому і тільки в тому випадку, коли існує число $N>0$ таке, що для кожного $i \in M$ система нерівностей:

$$\begin{aligned} &y^i > 0, \\ &y_i + Ny_j > 0,\ \ j \in M;\ \ j \ne i, \end{aligned} \tag{2.6}$$

не має розв'язку на множині *Y*.

Достатність. Не важко перевірити, що оцінка $y^0=0$ є ефективною. Доведемо включення $0 \in G(Y)$. Нехай

$$N = \max\left\{ \frac{m\mu_j^i}{\mu_k^i} \middle| j,k \in M;\ i=1,2,..., p \right\} > 0. \tag{2.7}$$

Якщо $0 \notin G(Y)$, то для цього числа *N* існує індекс $k \in M$ і точка $y' \in Y$ такі, що:

$$y'_k > 0,\ y'_k + Ny'_j > 0,\ \ j \in M;\ \ j \neq k. \tag{2.8}$$

Позначимо $M_0 = \left\{ j \in M \middle| y'_j < 0 \right\}$. Оскільки $0 \in P(Y)$, виконується $M_0 \neq \varnothing$. З (2.8) випливає :

$$my'_k + N \sum_{j \in M_0} y'_j > 0\,. \tag{2.9}$$

З іншого боку, за умовою теореми, для точки y' існує вектор $\mu^i \in M$ такий, що $\left\langle \mu^i, y' \right\rangle \leq 0$. Звідси $\mu^i_k y'_k + \sum_{j \in M_0} \mu^i_j y'_j \leq 0$. З огляду на (2.7), отримаємо нерівність $my'_k + N \sum_{j \in M_0} y'_j \leq 0$, яка суперечить (2.9).

Необхідність. Нехай $y^0 \in G(Y)$, тобто існує таке $N > 0$, що для будь-якого $i \in M$, система нерівностей (2.6) є несумісною на *Y*. Візьмемо довільну оцінку $y \in Y$. Для кожного $i \in M$ виконується або $y_i \leq 0$, або $y_i + Ny_j \leq 0$ при деякому $j \in M \setminus \{i\}$. Взявши суму по $i \in M$ усіх таких нерівностей, одержимо $\sum_{i \in M} N_i y_i \leq 0$, де $N_i > 0$ для будь-якого $i \in M$. Звідси випливає нерівність (2.5) при $y^0 = 0$ і $\mu_i = \overline{\mu}_i = \left(N_1 \Big/ \sum_{i \in M} N_i, \ldots, N_m \Big/ \sum_{i \in M} N_i \right)$.

Очевидно, що $\overline{\mu}_i \in M^+$. Таким чином, для кожного $y \in Y$ існує вектор $\mu_i = \overline{\mu}_i$, при якому має місце нерівність (2.5). Причому, завдяки скінченності множини індексів *M*, число таких векторів, що мають необхідні властивості, є скінченним. Тобто, існує кінцевий набір векторів $\left\{ \overline{\mu}^1, \ldots, \overline{\mu}^p \right\} \subset M^+$ з такою властивістю, що для кожного $y \in Y$ знайдеться $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, при якому має місце (2.5). Вкажемо набір не більш, ніж з *m* векторів, що мають необхідні властивості. Нехай $\varepsilon = \min \left\{ \overline{\mu}^i_j \middle| j \in M,\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}$. Розглянемо для $i \in M$ вектори наступного вигляду:

$$\mu^i_j = \begin{cases} \varepsilon,\ \ j \in M;\ \ j \neq i; \\ 1 - (m-1)\varepsilon,\ \ j = i; \end{cases} \tag{2.10}$$

Очевидно, для кожного $\mu^i \in M^+$ для будь-якого $i \in M$. Доведемо включення $\left\{\overline{\mu}^1,...,\overline{\mu}^p\right\} \subseteq \operatorname{conv}\left\{\mu^1,...,\mu^m\right\}$. Для цього візьмемо довільний вектор $\overline{\mu}^l$ "старого" набору. Якщо $\varepsilon = 1/m$, то, очевидно, $\overline{\mu}^l = 1/m,\ i \in M$. У цьому випадку для $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 1/m$ маємо:

$$\sum_{i\in M} \lambda_i \mu_j^i = \overline{\mu}_j^i,\ \ j \in M\ , \tag{2.11}$$

тобто $\overline{\mu}^i \in \operatorname{conv}\left\{\mu^1,...,\mu^m\right\}$. Якщо $\varepsilon < 1/m$, то беремо $\lambda_i = \dfrac{\overline{\mu}_i^l - \varepsilon}{1 - m\varepsilon},\ i \in M,$ де $\sum_{i\in M} \lambda_i = 1$. Для цих λ_i рівності (2.11) також мають місце. Включення доведене. Припустимо, що "новий" набір векторів (2.10) не має необхідних властивостей, тобто знайдеться оцінка $y \in Y$ така, що

$$\left\langle \mu^i, y \right\rangle > 0,\ i \in M. \tag{2.12}$$

Для довільного $l \in \{1,2,...,p\}$ при деяких $\lambda_j \ge 0,\ j \in M,\ \sum_{j\in M} \lambda_j = 1,$ має місце представлення (2.11). Тому з (2.12) одержуємо нерівності $\sum_{j\in M} \lambda_j \left\langle \mu^j, y \right\rangle = \left\langle \overline{\mu}^l, y \right\rangle > 0,\ l = 1,2,...,p,$ які означають, що і "старий" набір векторів також не має необхідних властивостей. Це суперечить отриманому раніше припущенню. ♦

Примітка. Якщо множина Y складається із скінченного числа елементів, то умова доведеної теореми є необхідною і достатньою для того, щоб $y^0 \in P(Y)$, оскільки має місце рівність $G(Y) = P(Y)$.

З цієї теореми (частина "достатність") при $p = 1$ випливає

Наслідок. Якщо всі $\mu_i > 0$, то будь-яка точка максимуму функції $\sum_{i\in M} \mu_i y_i$ на множині Y є власно-ефективною оцінкою.

У випадку опуклості множини оцінок цей наслідок є необхідною і достатньою умовою власно-ефективності. Це твердження, сформульоване в термінах альтернатив, складає відому теорему.

Теорема 2.5 (Джеофріон). Нехай X є опуклою множиною, а $f(x)$ є угнутою вектор-функцією. Для власної ефективності альтернативи

x^* необхідно й достатньо, щоб $\exists \mu > 0: \ \langle \mu, f(x^*) \rangle = \max\limits_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle$.

Приклад 6. Побудувати власно-ефективні альтернативи за теоремою Джеофріона для наступної двохкритеріальної задачі:

$$2x_1 + x_2 \to \max, \quad x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4, \ x_{1,2} \ge 0.$$

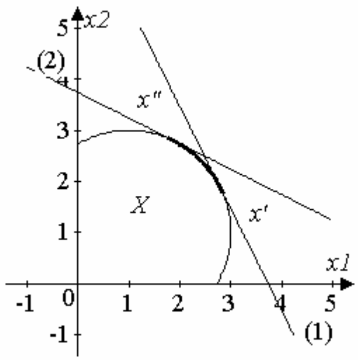


Рис. 2.10.

На рисунку 2.10 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1) і (2); x', x'' – найкращі, відповідно за першим й другим критерієм задачі, альтернативи. За визначенням можна встановити, що множиною ефективних альтернатив буде дуга $[x', x'']$ кола $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4$, а множиною власно-ефективних альтернатив буде дуга (x', x'') (точки x', x'' є ефективними, але не власно-ефективними альтернативами). Параметрична задача в загальній постановці: $\max\limits_{x \in X} F_\mu(x) = \max\limits_{x \in X} \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$, де $\mu = (\mu_1, .. \mu_m) \in \mathrm{M}^+$, щодо нашого прикладу буде мати наступний вигляд:

$$F_\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \to \max,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4,$$

$$x_{1,2} \ge 0, \ \mu_1 + \mu_2 = 1, \ \mu_{1,2} > 0.$$

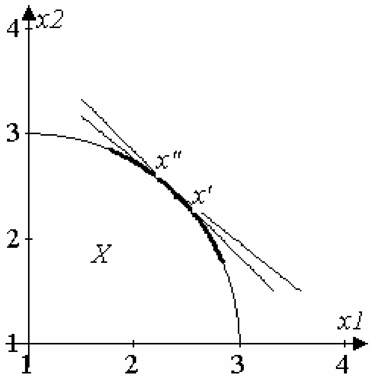


Рис. 2.11.

Нехай $\mu_1 = \mu_2 = \dfrac{1}{2}$. З рисунка 2.11 бачимо, що розв'язком параметричної задачі буде точка $x^* = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, яка є власно-ефективною альтернативою; при значеннях

$\mu_1 = \dfrac{1}{3}, \mu_2 = \dfrac{2}{3}$ отримаємо іншу власно-ефективну альтернативу x^{**}. Вибираючи інші значення параметрів $\mu_1,\ \mu_2 :\ \mu_1 + \mu_2 = 1,\ \mu_{1,2} > 0$, можемо отримати будь-яку власно-ефективну альтернативу.

Контрольні завдання до §2

1. Проілюструвати побудову множини слабко ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$x_1 + x_2 \to \max, -x_1 + x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 4, x_1 - x_2 \le 3, x_2 \le 2,\ x_{1,2} \ge 0.$

2. Проілюструвати побудову множини слабко ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$2x_1 + x_2 \to \max, x_1 + 3x_2 \to \max, -2x_1 + x_2 \le 0, 2x_1 + x_2 \le 8, x_{1,2} \ge 0.$$

Проілюструвати побудову множини слабко ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$x_1 + x_2 \to \max, 2x_1 + x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 5, -4x_1 + x_2 \le 0, x_1 - 4x_2 \le 0, x_{1,2} \ge 0.$

4. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$2x_1 + x_2 \to \max, -x_1 + x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 4, x_1 - x_2 \le 3, x_2 \le 2, x_{1,2} \ge 0.$

5. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$3x_1 + x_2 \to \max, x_1 + 3x_2 \to \max, -2x_1 + x_2 \le 0, 2x_1 + x_2 \le 8, x_{1,2} \ge 0.$$

6. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$x_1 + 2x_2 \to \max, 2x_1 + x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 5, -4x_1 + x_2 \le 0, x_1 - 4x_2 \le 0, x_{1,2} \ge 0.$

7. Проілюструвати побудову множини ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$2x_1 + x_2 \to \max, x_1 + 3x_2 \to \max, x_1 - x_2 \le 3, -5x_1 - 3x_2 \le -15, x_1 + 2x_2 \le 9.$$

8. Проілюструвати побудову множини власне ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 \to \max, x_2 \to \max, 2x_1^2 + x_2^2 \le 4, x_{1,2} \ge 0 .$$

9. Проілюструвати побудову множини власне ефективних альтернатив за необхідньою і достатньою умовою оптимальності для багатокритеріальної задачі прийняття рішень:

$$x_1 \to \max, x_1 + x_2 \to \max, x_1^2 + 2x_2^2 \le 4, x_{1,2} \ge 0 .$$

§3. Методи багатокритеріальної оптимізації

Висновок, який можна зробити з попереднього розділу, полягає в тому, що вибір альтернативи, яка буде розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації, потрібно робити з множини ефективних альтернатив (чи слабко-ефективних альтернатив, чи власно-ефективних альтернатив) – в залежності від вимог ОПР і предметної області, в якій приймається рішення (далі, для спрощення викладання припустимо, що вибирається ефективна альтернатива).

Але яку, однак, ефективну альтернативу вибирати? Звичайно, якщо множина абсолютно-оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з них (слід нагадати, що всі абсолютно-оптимальні альтернативи рівноцінні між собою) може вважатися розв'язком багатокритеріальної задачі. Як було з'ясовано вище, на практиці такі задачі зустрічаються досить рідко. Таким чином, потрібно вирішити, що робити у випадку, коли множина абсолютно-оптимальних альтернатив є порожньою. Оскільки ефективні альтернативи є непорівнянними між собою за перевагою, яка задається критеріями задачі, а якимось чином їх необхідно порівняти, то для цього потрібна додаткова інформація окрім тієї, яка є при порівнянні альтернатив за кожним критерієм окремо. Точніше, для порівняння ефективних альтернатив, потрібна додаткова інформація про перевагу не на множині альтернатив, а на множині критеріїв, тобто інформація такого типу: скількома одиницями виграшу за одними критеріями можна компенсувати програшем за іншими критеріями. Джерелом такої інформації може бути як ОПР, так і специфіка предметної області, в якій розв'язується задача прийняття рішення.

Правила вибору ефективних альтернатив. Те, що у рамках постановки багатокритеріальної задачі проблема вибору єдиної ефективної альтернативи не може бути розв'язаною, потребує уведення деякого правила (позначимо його через *R*) вибору єдиної альтернативи з множини ефективних альтернатив.

Нехай $R(X, f)$ – множина альтернатив багатокритеріальної задачі:

$$\max_{x \in X}\{f(x) = (f_1(x),..., f_m(x))\},$$

яка задовольняє правилу вибору *R*. Сформулюємо умови, яким це правило повинно задовольняти у загальному випадку (так звані умови раціональності, сформульовані Вільгельмом [1]).

1. Вибір повинен бути зробленим завжди, тобто $R(X, f) \neq \varnothing$.

2. Вибирається ефективна альтернатива, тобто $R(X, f) \subseteq P(X)$.

3. Єдиність вибору потрібно розуміти не буквально, що обов'язково вибрати тільки одну альтернативу. Будемо вважати, що правило вибору *R* однозначно визначає розв'язок багатокритеріальної задачі, якщо всі альтернативи, що задовольняють цьому правилу є рівноцінними, тобто якщо x', $x'' \in R(X, f)$, то $x' \sim x''$.

4. Більше того, якщо ми вибираємо якусь альтернативу, для якої у множині альтернатив є рівноцінна, то і вона повинна вибиратися цим же правилом вибору, тобто якщо $x' \in R(X, f)$, $x'' \in X$, $x'' \sim x'$, то $x'' \in R(X, f)$.

5. Якщо розглядати дві ситуації прийняття рішення за одним і тим же вектором критеріїв *f*, але на множинах альтернатив таких, що одна з множин *X'* є підмножиною іншої *X*, то вибір $R(X, f)$ з "більш широкої" множини альтернатив *X*, якщо він належить "більш вузькій" множині альтернатив $R(X, f) \subseteq X'$, повинен бути вибором з цієї множини. Тобто якщо $R(X, f) \cap X' \neq \varnothing$, то $R(X, f) \cap X' = R(X', f)$.

Звичайно, правил вибору, які задовольняють цим умовам, можна побудувати необмежену кількість, але в цьому немає нічого поганого, оскільки це дає можливість пристосуватися до будь-якої ОПР і специфіки предметної області. Незважаючи на такий широкий спектр різних можливих правил вибору, серед них можна виділити певні класи.

1. Правила вибору, які безпосередньо визначені на множині ефективних альтернатив, тобто $R(X, f) = R(P(X), f)$. Перевагою таких правил є їх простота, а суттєвим недоліком – необхідність побудови

усієї множини ефективних альтернатив.

2. Правила вибору, які є суперпозицією двох правил вибору: правила вибору $R'(X, f)$, що є визначеним на множині альтернатив і вибирає деяку підмножину альтернатив, яка містить як ефективні, так і неефективні альтернативи, і правила вибору $R(R'(X, f), f)$, що є визначеним на множині вже попередньо вибраних альтернатив і вибирає тільки ефективну альтернативу. Такий розподіл правила вибору на два правила в деяких практичних ситуаціях дозволяє реалізувати досить ефективний вибір.

3. Діалогові процедури вибору. Цей клас правил вибору враховує той факт, що формалізація правила вибору в багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень ускладнюється наявністю "людського" фактору. Справа в тому, що навіть припускаючи наявність у ОПР якоїсь системи переваг, може статися так, що ОПР не завжди її усвідомлює і ця система переваг може усвідомлюватися (формуватися) ОПР тільки у процесі прийняття рішення, з часом змінюватися. Тому, якщо вибрано якусь альтернативу, її вже після вибору потрібно перевірити на відповідність перевагам ОПР (які вже можуть змінитися) і при необхідності підкоректувати правило вибору.

Ці міркування приводять до необхідності створення правил вибору у вигляді діалогової процедури, яка являє собою ітеративний процес взаємодії між ОПР і комп'ютером. Кожна ітерація i, i=1,2,…, складається з двох етапів:

1. Обчислювальний етап. На цьому етапі комп'ютер використовує отриману від ОПР інформацію для побудови (корекції) правила вибору, визначає ефективну альтернативу $x^i = R^i(X, f)$ і формує допоміжну інформацію для визначення переваг ОПР.

2. Етап прийняття рішення. ОПР аналізує отриману від комп'ютера ефективну альтернативу та допоміжну інформацію. Якщо ця інформація задовольняє ОПР, то ОПР приймає рішення про вибір x^i, у протилежному випадку дає нову інформацію для комп'ютера, завдяки якій буде робитися інший вибір і т.д.

Методи багатокритеріальної оптимізації являють собою чисельну реалізацію певного правила вибору ефективної (слабко-ефективної, власно-ефективної) альтернативи, тому цілком природньо класифікувати їх за типами інформації, яку дає ОПР для формування правила вибору. Розглянемо наступну класифікацію методів багатокритеріальної оптимізації.

♦ Методи, які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв.

♦ Методи, які використовують один тип інформації про перевагу на множині критеріїв.

♦ Методи, які використовують різні типи інформації про перевагу на множині критеріїв.

♦ Спеціальні методи.

Згідно цій класифікації наведемо короткий огляд відомих методів багатокритеріальної оптимізації.

Метод ідеальної точки. Цей метод не використовує допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Це може відбуватися, коли у ОПР ця інформація відсутня або, при наявності, її не можна застосувати з деяких причин. В цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого, "оптимального" розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдено шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Ідеальною називається точка $a=(a_1,\dots,a_m)\in R_s^m$, $a_i=\max\limits_{x\in X} f_i(x),\ i\in M$, R_s^m - m - вимірний метричний простір з показником метрики $s\geq 1$. Правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки.

Визначимо відстань $\rho_s(f(x),a)=(\sum\limits_{i=1}^{m}\left|f_i(x)-a_i\right|^s)^{\frac{1}{s}}$ між точками $f(x)$ і a у метричному просторі R_s^m з показником метрики $s\geq 1$. Тоді, згідно з цим методом, знайдемо компроміс як розв'язок, так званої, скаляризованої задачі $x^*\in \operatorname{Arg}\min\limits_{x\in X}(\sum\limits_{i=1}^{m}\left|f_i(x)-a_i\right|^s)^{1/s}$. Значення показника метрики s вибирається в залежності від предметної області. На практиці в основному використовують значення $s=1,2,\infty$.

Вибирають $s=2$ (Евклідів простір) у випадках, коли критерії мають зміст відстані чи інших фізичних величин, для яких Евклідова метрика є змістовною. В цьому випадку компромісна альтернатива x^* знаходиться як розв'язок скаляризованої задачі:

$$\min_{x\in X}\sum_{i\in M}(f_i(x)-a_i)^2 \ . \qquad (3.1)$$

При $s=1,\infty$ критерії можуть мати будь-який інший зміст (наприклад, вартість, надійність, тривалість і т.д.) і скаляризовані задачі приймуть відповідно вигляд:

$$\min_{x\in X}\sum_{i\in M}\left|f_i(x)-a_i\right| = \max_{x\in X}\sum_{i\in M} f_i(x), \qquad (3.2)$$

$$\min_{x\in X}\max_{i\in M}\left|f_i(x)-a_i\right| = \max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(f_i(x)-a_i\right). \qquad (3.3)$$

Задача (3.2) вибирається, коли ОПР оцінює "відстань" до ідеалу як сумарну нев'язку за всіма критеріями і така оцінка має певний зміст у предметній області, в якій розв'язується задача. Наприклад, такий випадок буде мати місце, якщо розглядати вихідну двохкритеріальну задачу, в якій максимізуються: прибуток фірми і заробітна платня її співробітників. Тоді цільова функція скаляризованої задачі (3.2) буде мати зміст частини доходів фірми.

Задача (3.3) вибирається, коли ОПР оцінює "відстань" до ідеалу як максимальну нев'язку за всіма критеріями (тобто за "найгіршим" по значенню показнику).

Якщо критерії багатокритеріальної задачі мають різні шкали (одиниці вимірювання, масштаб), то, як правило, їх спочатку зводять до безрозмірної шкали $[0,1]$. Тоді задачі (3.2), (3.3) приймають відповідно вигляд:

$$\max_{x\in X}\sum_{i\in M}(\overline{f}_i(x)-1) \Rightarrow \max_{x\in X}\sum_{i\in M}\frac{f_i(x)-f_i^{\min}}{a_i-f_i^{\min}} \Rightarrow \max_{x\in X}\sum_{i\in M}\frac{f_i(x)}{a_i-f_i^{\min}}$$

$$\max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(\overline{f}_i(x)-1\right) = \max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(\frac{f_i(x)-f_i^{\min}}{a_i-f_i^{\min}}-1\right) = \max_{x\in X}\min_{i\in M}\left(\frac{f_i(x)-a_i}{a_i-f_i^{\min}}\right).$$

Слід врахувати, що для будь-якого $s\in[1,\infty)$ $R(Y)\subseteq P(Y)$ і для $s=\infty$ $R(Y)\subseteq S(Y)$. Якщо множина Y строго опукла, то $\left|R(Y)\right|=1$.

Приклад 3.1. Методом ідеальної точки розв'язати наступну задачу:

$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Визначимо ідеальну точку: $a=(a_1,a_2): a_i=\max_{y\in Y} y_i = =\max_{x\in X} f_i(x),\ i=1,2.$ На рисунку 3.1 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); $x'=(4,1)$, $x''=(1,4)$ – найкращі відповідно за першим й другим критерієм задачі альтернативи, $a_1=13$, $a_2=9$ (максимуми 1-го та 2-го критеріїв). Таким чином, $a=(13,9)$. Розглянемо випадки що пов'язані з вибором різних метрик.

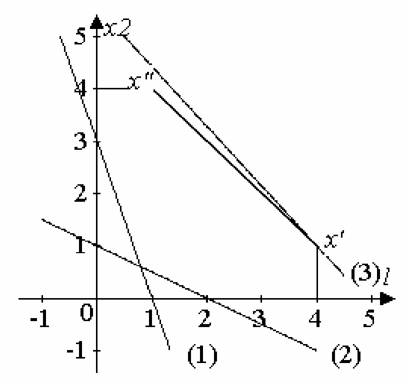


Рис. 3.1.

Випадок 1. При $s=1$ скаляризована задача має вигляд:

$$\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(x)}{a_i-f_i^{\min}}.$$

З врахуванням того, що мінімальні значення критеріїв задачі дорівнюють нулю, отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$8x_1+7x_2\to\max,$$
$$x_1+x_2\le 5,$$
$$0\le x_{1,2}\le 4.$$

З Рис. 3.1 неважко бачити, що оптимальним розв'язком скаляризованої задачі (на рис. 3.1 зображена лінія рівня (3) цільової функції скаляризованої задачі) буде точка $x'=(4,1)$, яка і вважається шуканою ефективною альтернативою вихідної задачі.

Випадок 2. При $s=2$ скаляризована задача має вигляд: $\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\left(f_i(x)-a_i\right)^2$. В нашому випадку отримаємо наступну задачу квадратичного опуклого програмування:

$$(3x_1+x_2-13)^2+(x_1+2x_2-9)^2\to\min,$$
$$x_1+x_2\le 5,$$
$$0\le x_{1,2}\le 4.$$

Розв'яжемо цю задачу аналітично. На рисунку 3.2 зображені лінії рівня цільової функції скаляризованої задачі, які мають вигляд концентричних еліпсів з центром в точці $O = (\frac{17}{5}, \frac{14.}{5})$, яка є точкою безумовного мінімуму цієї функції і знаходиться як розв'язок системи рівнянь: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 13, \\ x_1 + 2x_2 = 9. \end{cases}$

З рисунка 3.2 також видно, що умовний мінімум функції досягається в точці $x*$, яка знаходиться на границі множини альтернатив, що описується рівнянням $x_1 + x_2 = 5$. Це дає можливість знайти $x*$ як розв'язок такої задачі квадратичного нелінійного програмування:

$$(3x_1 + x_2 - 13)^2 + (x_1 + 2x_2 - 9)^2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 = 5.$$

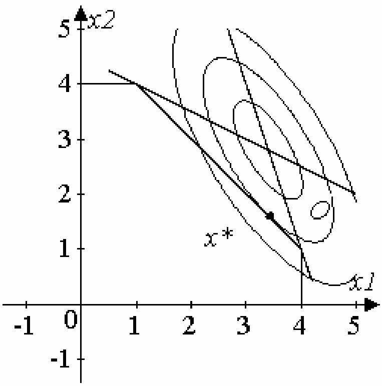


Рис. 3.2.

Скористаємося методом множників Лагранжа. Функція Лагранжа для цієї задачі буде мати наступний вигляд:

$$L(x, y) = (3x_1 + x_2 + 3)^2 + (x_1 + 2x_2 - 9)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 5).$$

За теоремою Куна -Таккера будемо шукати $x*$ як відповідну компоненту сідлової точки $(x^*, \lambda^*) = \operatorname{Arg} \min_{x \in R^2} \max_{\lambda \in R^1} L(x, \lambda)$ функції Лагранжа. Запишемо необхідні умови екстремуму функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6(3x_1 + x_2 - 13) + 2(x_1 + 2x_2 - 9) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(3x_1 + x_2 - 13) + 4(x_1 + 2x_2 - 9) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0,$$

які будуть і достатніми умовами існування сідлової точки, оскільки у нашому випадку $L(x,\lambda)$ є строго опуклою за змінними x. Отже, остаточно одержимо $x^* = \left(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Випадок 3. При $s = \infty$ скаляризована задача має вигляд:

$$\min_{x\in X} \max_{i=\overline{1,m}} \left|a_i - \overline{f_i}(x)\right| = \min_{x\in X} \max_{i=\overline{1,m}} \left(1 - \frac{f_i(x) - f_i^{\min}}{a_i - f_i^{\min}}\right) = -\max_{x\in X} \min_{i=\overline{1,m}} \frac{f_i(x) - a_i}{a_i - f_i^{\min}}.$$

З урахуванням того, що мінімальні значення критеріїв задачі дорівнюють нулю, отримаємо наступну задачу:

$$\min\left\{\frac{3x_1 + x_2 - 13}{13}, \frac{x_1 + 2x_2 - 9}{9}\right\} \to \max,$$

$$x_1 + x_2 \le 5,$$

$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

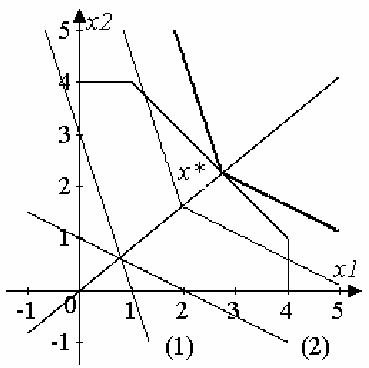


Рис. 3.3.

На рисунку 3.3 бачимо, що лінії рівня цільової функції скаляризованої задачі мають вигляд кутів, вершини яких знаходяться на прямій $14x_1 - 17x_2 = 0$. Ця пряма задається умовою рівності аргументів функції $\min\{...\}$, а бокові сторони паралельні лініям рівня (1), (2) відповідних критеріїв початкової задачі.Максимум досягається в точці $x^* = (2\frac{23}{31}, 2\frac{8}{31})$.

Метод вибору за кількістю домінуючих критеріїв. Цей метод також не використовує допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Правило вибору *R* за цим методом враховує взаємні співвідношення (типу "більше" й "менше") між оцінками альтернатив й не враховує величини різниць оцінок. Метод призначений для розв'язку багатокритеріальних задач з дискретною множиною альтернатив, яка має невелику потужність (може бути перебрана за реальний час).

Нехай *q(x,x')* – кількість критеріїв, за якими альтернатива *x'* строго переважає альтернативу x. Покладемо $Q(x)=\max_{x'\in X} q(x,x')$ й визначимо $Q=\min_{x\in X} Q(x)$. Тоді за правилом вибору R, яке розглядається, вибираються альтернативи, які відповідають величині Q (домінуючому показнику множини X).

Основні властивості методу полягають у наступному:

$R(X)=R(P(X))$, тобто вибір за цим методом з усієї множини альтернатив і вибір з множини ефективних альтернатив – співпадають;

$R(X)\subseteq P(X)$ – метод вибирає ефективні альтернативи.

Слід зауважити, якщо $q(x,x')$ – кількість критеріїв, за якими альтернатива x' сильно переважає альтернативу x, то цей метод вибирає слабко-ефективні альтернативи.

Табл.3.1

X	Y
x_1	(5,3,4)
x_2	(4,5,5)
x_3	(4,5,6)
x_4	(4,5,3)
x_5	(4,3,6)
x_6	(5,3,1)
x_7	(4,4,2)

Табл. 3.2.

$x \setminus x'$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$Q(x)$
x_1	0	2	2	1	2	0	1	2
x_2	1	0	3	0	2	1	0	3
x_3	1	0	0	0	0	1	0	1
x_4	2	3	3	0	2	0	0	3
x_5	2	3	3	2	0	2	2	3
x_6	3	2	2	2	2	0	2	3
x_7	2	3	3	3	2	1	0	3

Приклад 3.2. За кількістю домінуючих критеріїв вибрати ефективну альтернативу в наступній трьохкритеріальній задачі максимізації, яка описується таблицею 3.1. Розв'язок знаходиться з наступної таблиці 3.2. З останньої таблиці бачимо, що $Q=\min_{x\in X} Q(x)=1$ і цьому значенню домінуючого показника множини альтернатив відповідає ефективна альтернатива x_3. Варто звернути увагу на те, як вибиралися значення, наприклад, $q(x_2,x_3)=3$ і $q(x_2,x_4)=0$. Дійсно, альтернатива x_3 строго переважає альтернативу x_2 за трьома критеріями, оскільки між відповідними компонентами їх оцінок є дві рівності й одна строга нерівність, а альтернатива x_4 строго переважає альтернативу x_2 за нульовою кількістю критеріїв, не зважаючи на те, що

дві перші компоненти їх оцінок – рівні, оскільки жодної строгої нерівності оцінок на користь альтернативи x_4 – немає.

Метод послідовних поступок. Особливістю методу є те, що критерії багатокритеріальної задачі повинні бути попередньо впорядковані за зменшенням їх важливості, після чого вибір розв'язку задачі здійснюється шляхом виконання багатокрокової діалогової процедури. Діалогова процедура послідовних поступок складається з одного попереднього і m основних кроків (нагадаємо, що m – це кількість критеріїв).

0 – крок. Критерії впорядковуються за зменшенням їх важливості (будемо вважати, що $f_1 \succ f_2 \succ ... \succ f_m$) за думкою ОПР.

i – й крок ($i = \overline{1,m}$). Розв'язується однокритеріальна задача:

$$f_i(x) \to \max,$$
$$x \in G_i, \quad (G_1 \equiv X).$$

Позначимо через x^i її оптимальний розв'язок. Далі обчислюється оцінка $y^i = (f_1(x^i),...,f_m(x^i))$. ОПР аналізує отриману оцінку й у випадку, коли вона його не задовольняє, визначає величину поступки Δf_i за i – м критерієм, на яку він може погодитися з метою покращання показників за іншими, менш важливими критеріями. Якщо крок не є останнім ($i < m$), то визначається "уточнена" множина альтернатив $G_{i+1} = \left\{ x \in G_i \,\middle|\, f_i(x) \geq f_i(x^i) - \Delta f_i \right\}$ і здійснюється перехід на наступний крок. У протилежному випадку – альтернатива x^i вибирається як розв'язок багатокритеріальної задачі і процедура закінчується.

На *m –му кроці* ОПР повинна чи погодитися з отриманою альтернативою, чи повторно виконати процедуру. В цьому випадку ОПР збагачується знанням про взаємозв'язок поступок за критеріями та значеннями менш важливих критеріїв.

Слід зауважити, що метод не обмежує можливості ОПР у виборі ефективних альтернатив. Це обґрунтовується наступною теоремою.

Теорема 3.1 (О. Вентцель). Для будь-якого впорядкування критеріїв і будь-якої ефективної альтернативи $x*$ існує послідовність невід'ємних поступок $\{\Delta f_i\}_{i=\overline{1,m}}$ таких, що на останньому кроці процедури буде отримана множина ефективних альтернатив, всі елементи якої рівноцінні $x*$.

Слід відмітити, якщо на перших кроках ОПР давав великі значення поступок, то ефективна альтернатива, яка отримується в кінці процедури, може мати більш високі показники за менш важливими критеріями. І навпаки, якщо ОПР намагається отримати високі показники за більш важливим критерієм, він може отримати ефективну альтернативу з неприпустимо малими показниками за менш важливим критеріям. З цих міркувань можна зробити висновок, що дуже важливо вірно впорядкувати критерії, тоді ОПР може обмежитись аналізом попарного зв'язку критеріїв.

Серед недоліків методу слід відмітити, що тільки на першому кроці методу величина поступки відповідає її фактичній величині, оскільки вона визначена на всій множині альтернатив. На наступних кроках величина поступки може бути значно меншою за її фактичну величину, оскільки вона визначається на "уточненій" множині альтернатив. Недоліком методу є також зростання обчислювальної складності задач оптимізації з кількістю зроблених кроків, оскільки на кожному кроці додається нове обмеження. Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про впорядкування критеріїв і про діапазони значень критеріїв.

Приклад 3.3. Методом послідовних поступок розв'язати наступну трьохкритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$-x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

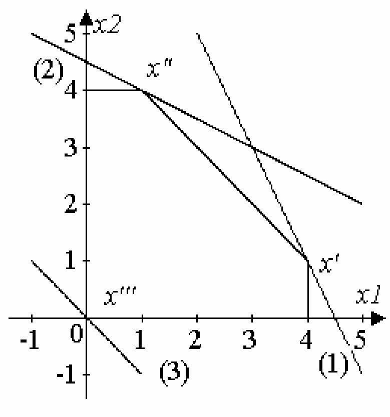


Рис. 3.4.

На рисунку 3.4 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2), (3); x', x'', x''' – найкращі, відповідно за першим, другим і третім критеріями задачі, альтернативи. Будемо вважати, що критерії вже впорядковані за зменшенням їх важливості і знайдемо максимум першого критерію на множині альтернатив:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Отримаємо ефективну альтернативу $x' = (4,1)$, яка має оцінку $y^1 = (9, 6, -5)$. Припустимо, що отриманий результат не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_1, на яку можна погодитися, щоб покращити значення інших критеріїв. Нехай $\Delta f_1 = 1$, "уточнена" множина альтернатив: $G_2 = \{x : x \in X,\ f_1(x) \ge y_1^1 - \Delta f_1 = 8\}$.

На другому кроці максимізуємо другий критерій на уточненій множині альтернатив:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 8.$$

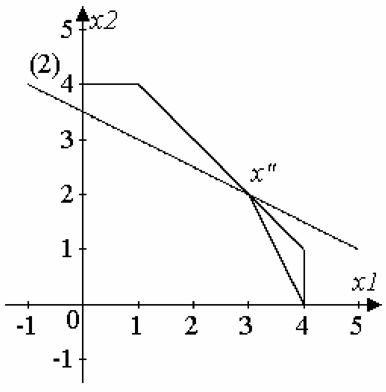


Рис. 3.5.

З рисунка 3.5 бачимо, що розв'язком задачі буде ефективна альтернатива $x'' = (3, 2)$, яка має оцінку $y^2 = (8, 7, -5)$. Припустимо, що отриманий результат також не задовольняє ОПР. Тоді визначимо величину поступки Δf_2, на яку можна погодитися, щоб покращити значення третього критерію. Нехай $\Delta f_2 = 1$ та "уточнена" множина альтернатив: $G_3 = \{x : x \in G_2,\ f_2(x) \ge y_2^2 - \Delta f_2 = 6\}$.

Тепер (крок 3) на цій множині максимізуємо третій критерій:

$$-x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 8,$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6.$$

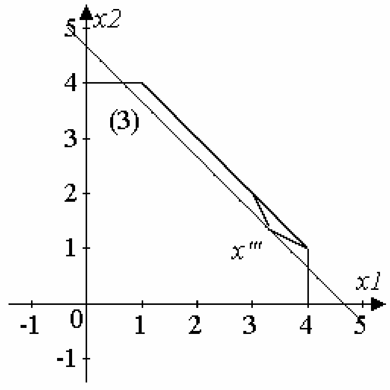


Рис. 3.6.

Звідси (це можна побачити на Рис. 3.6) знаходимо ефективну альтернативу $x^3 = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$, яка має оцінку $y^3 = \left(8, 6, -4\tfrac{2}{3}\right)$.

Якщо ОПР не влаштовують отримані результати, вона повертається на відповідний крок, де була зроблена (на думку ОПР) невірна поступка. В іншому випадку процедура закінчується.

Метод послідовного вводу обмежень. Характерною особливістю цієї діалогової процедури є послідовне (на кожному кроці) введення обмежень на альтернативи, які мають незадовільні, з точки зору ОПР, значення критеріїв.

k -й крок (k=1,2,…). Обчислюються оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив:

$$f_i^{*(k)} = \max_{x \in G_k} f_i(x),\ i = \overline{1,m};\ G_1 \equiv X;$$

і формується вектор "ідеальної" оцінки на уточненій множині альтернатив: $f^{*(k)} = (f_1^{*(k)},...,f_m^{*(k)})$. Далі визначається вагові коефіцієнти критеріїв $\alpha_1^{(k)},...,\alpha_m^{(k)}$ наступним способом. Складається матриця $\sigma^{(k)} = (\sigma_{ij}^{(k)})_{i,j=\overline{1,m}}$ переваг ОПР на множині критеріїв, кожна пара симетричних елементів якої $(\sigma_{ij}^{(k)}, \sigma_{ji}^{(k)})$ характеризує відносну важливість i -го критерію у порівнянні з j -м. Значення кожної пари елементів цієї матриці вибирається так: (8,1) – при подавляючій перевазі i -го критерію над j -м; (4,1) – при значній перевазі; (2,1) – при "звичайній" перевазі; (1,1) – при рівноцінності критеріїв. Тепер розраховуються вагові коефіцієнти критеріїв за такою формулою: $\alpha_i^{(k)} = (\sum_{s=1}^{m} \sigma_{is}) / (\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \sigma_{rs}),\ i = \overline{1,m}$. У результаті розв'язку задачі:

$\max\limits_{x\in G_k}\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{(k)} f_i(x),$ визначається альтернатива x^k та її оцінка $y^k = (f_1(x^k),...,f_m(x^k))$.

ОПР аналізує отриману альтернативу та оцінку y^k шляхом її співставлення з "ідеальною" оцінкою $f^{*(k)}$. Якщо оцінка y^k задовольняє ОПР, то процедура закінчується, а альтернатива x^k приймається за розв'язок вихідної задачі. Інакше, вказується номер $s \in \{1,...,m\}$ критерію, значення якого найменш, на думку ОПР, його задовольняє; визначається, до якого рівня ξ_s потрібно покращити значення цього критерію, формується нова "уточнена" множина альтернатив $G_{k+1} = \left\{x \in G_k \,\middle|\, f_s(x) \ge \xi_s\right\}$ і здійснюється перехід на наступний крок.

Приклад 3.4. Методом послідовного вводу обмежень розв'язати наступну двохкритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,\ x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0.$$

На рисунку 3.7 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1) і (2);

$x' = (4\sqrt{5}/5 + 1,\ 2\sqrt{5}/5 + 1)$, $x'' = (2\sqrt{5}/5 + 1,\ 4\sqrt{5}/5 + 1)$ – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

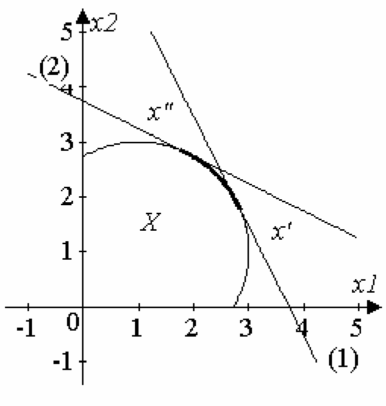


Рис. 3.7.

Крок 1. Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на всій множині альтернатив і отримуємо вектор "ідеальної" оцінки $f^{*(1)} \approx (7.5, 7.5)$. Нехай перший критерій значно переважає другий. Тоді матриця переваг критеріїв буде мати такий вигляд: $\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо вагові коефіцієнти критеріїв

$\alpha_1^{(1)} = \dfrac{4+1}{4+1+1+1} = \dfrac{5}{7},\ \alpha_2^{(1)} = \dfrac{1+1}{7} = \dfrac{2}{7}$. Із задачі:

$$\frac{5}{7}(2x_1 + x_2) + \frac{2}{7}(x_1 + 2x_2) = \frac{3}{7}(4x_1 + 3x_2) \to \max,$$

$$\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 \le 4,\ x_{1,2} \ge 0,$$

визначимо ефективну альтернативу $x^1 = (13/5, 11/5)$ та її оцінку $y^1 = (7.4,\ 7)$. Нехай ми вирішили, що в результаті порівняння отриманої оцінки і "ідеальної" оцінки $f^{*(1)} \approx (7.5, 7.5)$ другий критерій приймає неприпустимо мале значення. Встановимо мінімальний рівень цього критерію $\xi_2 = 7.2$, отримаємо "уточнену" множину альтернатив $G_2 = \left\{x \in G_1 \equiv X \middle| x_1 + 2x_2 \ge 7.2\right\}$.

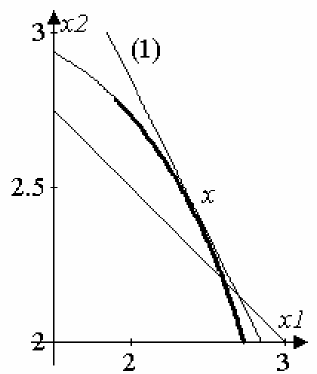


Рис. 3.8.

Крок 2. На рисунку 3.8 зображено множину G_2.

Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на "уточненій" множині альтернатив і отримаємо вектор "ідеальної" оцінки $f^{*(2)} \approx (7.28, 7.5)$. Нехай тепер критерії рівноцінні для ОПР. Тоді матриця переваг критеріїв буде мати такий вигляд: $\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{1}{2},\ \alpha_2^{(1)} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язавши задачу:

$$\frac{1}{2}(2x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) = \frac{3}{2}(x_1 + x_2) \to \max,$$

$$\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 \le 4,\ x_1 + 2x_2 \ge 7.2, x_{1,2} \ge 0,$$

визначимо ефективну альтернативу $x^2 = (\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1)$ та її оцінку $y^1 = (2\sqrt{2} + 2,\ 2\sqrt{2} + 2) \approx (4.82,\ 4.82)$ (на Рис. 3.8 зображені: (1) – лінія рівня цільової функції задачі, x – розв'язок задачі).

Якщо отримана ефективна альтернатива та її оцінка задовольняють ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку – перехід на наступний крок.

В цьому методі можуть використовуватися й інші способи виявлення переваг $\alpha_1^{(k)},...,\alpha_m^{(k)}$ на множині критеріїв, k - номер кроку. Наприклад, нехай x^{kl} – альтернатива, яка максимізує l – й критерій на множині G_k; $f_i^{*(k)}$, $f_i^{\min(k)}$ –відповідно найкраще та найгірше значення i – го критерію на цій множині. Далі, для $i=\overline{1,m}$, обчислюються величини:

$$\text{чи } \delta_i^{(k)} = \max_{l=\overline{1,m}} \frac{f_i^{*(k)} - f_i(x^{kl})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}} \;,$$

$$\text{чи } \delta_i^{(k)} = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} \frac{f_i^{*(k)} - f_i(x^{kl})}{f_i^{*(k)} - f_i^{\min(k)}},$$

відповідно чи максимальне, чи середнє відносне відхилення від найкращого значення i – го критерію на альтернативах, що максимізують інші критерії. Вагові коефіцієнти критеріїв визначаються за формулою:

$$\alpha_i^{(k)} = \delta_i^{(k)} / (\sum_{j=1}^{m} \delta_j^{(k)}), i=\overline{1,m}.$$

Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про відносну важливість критеріїв та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Метод бажаної точки. Особливістю цієї діалогової процедури є необхідність задання ОПР бажаних значень критеріїв для визначення переваги на множині критеріїв.

0 -крок. Розраховуються "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв: $f_i^* = \max_{x\in X} f_i(x), h_i^* = \min_{x\in X} f_i(x),\ i=\overline{1,m}$, здійснюється монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_i(x) = \frac{f_i^* - f_i(x)}{f_i^* - h_i^*},\ i=\overline{1,m}\,.$$

k -й крок (k=1,2,…). ОПР аналізує отриманий на попередньому кроці розв'язок та його оцінку у порівнянні з "найкращими" і "найгіршими" значеннями критеріїв і вказує бажані значення критеріїв

$\xi_i^k \in [h_i^*, f_i^*],\ i = \overline{1,m}.$

Здійснюється перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду $w_i^k = \dfrac{f_i^* - \xi_i^k}{f_i^* - h_i^*},\ i = \overline{1,m}$.

Обчислюються вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_i^k = (\prod_{j=1,\, j\neq i}^{m} w_j^k)/(\sum_{j=1}^{m}\prod_{l=1, l\neq j}^{m} w_l^k),\ i = \overline{1,m}.$$

Слабко ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі: $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{i=\overline{1,m}} \rho_i^k w_i(x)$. Обчислюється оцінка $y^k = (f_1(x^k),..., f_m(x^k))$. Якщо отримані значення цільових функцій задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – переходимо на наступний крок. Цей метод використовує тільки один тип інформації від ОПР про бажані значення критеріїв.

Приклад 3.5. Розв'язати методом бажаної точки таку задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max, x_1 + 2x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 5,\ 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рисунку 3.9 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); x'=(4,1), x''=(1,4) – найкращі, відповідно за першим і другим критерієм задачі, альтернативи.

0 – крок. Обчислюємо "найкращі" і "найгірші" значення критеріїв: $f_1^* = 9,\ h_1^* = 0,\ f_2^* = 9, h_2^* = 0$ і здійснимо монотонне перетворення критеріїв до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_1(x) = \frac{9 - 2x_1 - x_2}{9 - 0},$$

$$w_2(x) = \frac{9 - x_1 - 2x_2}{9 - 0}.$$

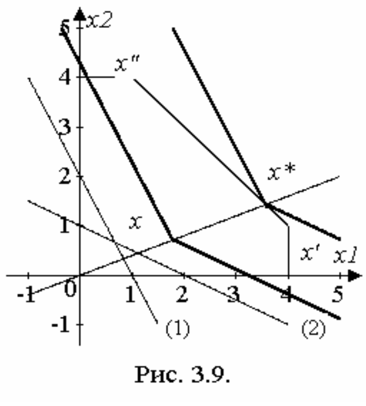


Рис. 3.9.

Крок 1. ОПР вказує бажані значення критеріїв $\xi_i^1 \in [0,9],\ i = \overline{1,2}.$ Нехай, наприклад, $\xi_1^1 = 3\,{}^6\!/\!_7$, $\xi_2^1 = 5\,{}^1\!/\!_7$. Здійснюємо перетворення бажаних значень цільових функцій до нормованого безрозмірного вигляду:

$$w_1^1 = \frac{9 - 3\,{}^6\!/_7}{9} = \frac{4}{7},\ w_2^1 = \frac{9 - 5\,{}^1\!/_7}{9} = \frac{3}{7}.$$

Обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв:

$$\rho_1^1 = \frac{{}^3\!/_7}{{}^3\!/_7 + {}^4\!/_7} = \frac{3}{7},\ \rho_2^1 = \frac{{}^4\!/_7}{{}^3\!/_7 + {}^4\!/_7} = \frac{4}{7}.$$

Ефективну альтернативу x^1 знаходимо як розв'язок задачі:

$$\min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2), \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\} \to \max,\ x_1 + x_2 \le 5,\ 0 \le x_{1,2} \le 4.$$

На рисунку 3.10 бачимо лінії рівнів $\frac{90}{49}$ і $\frac{180}{49}$ цієї функції, які утворюють кути вершини яких x і x^* знаходяться на прямій $2x_1 = 5x_2$, що визначається умовою рівності аргументів функції $\min\left\{\frac{3}{7}(2x_1 + x_2), \frac{4}{7}(x_1 + 2x_2)\right\}$, а бокові сторони паралельні лініям рівня відповідних критеріїв початкової двохкритеріальної задачі. Рівень $180/49$ буде максимальним значенням функції, а точка $x^{(1)} = x^* = (25/7, 10/7)$ буде оптимальним розв'язком цієї задачі. Обчислюємо оцінку $y^1 = (60/7, 45/7)$. Якщо отримані значення критеріїв задовольняють ОПР, то процедура закінчується, у протилежному випадку – наступний крок.

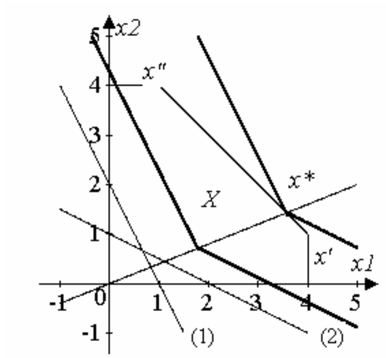


Рис. 3.10.

Метод задоволених вимог. Особливістю цієї діалогової процедури є визначення переваги на множині критеріїв шляхом виділення так званого "головного критерію".

k -й крок (k=1,2,…). ОПР виділяє "головний критерій" $f_i(x),\ i \in \{1,...,m\}$, який, на його думку, найбільш за всі інші повинен бути покращеним. Далі встановлює мінімально допустимі рівні значень інших критеріїв $\xi_j^k,\ j = \overline{1,m},\ j \ne i$. У результаті розв'язку однокритеріальної задачі: $\max\limits_{x \in G_k} f_i(x)$, де $G_k = \left\{ x \in X \middle| f_j(x) \geq \xi_j^k,\ j = \overline{1,m},\ j \neq i \right\}$, визначається ефективна альтернатива x^k та її оцінка $y^k = (f_1(x^k),...,f_m(x^k))$.

ОПР аналізує отримане значення головного критерію. Якщо воно не задовольняє його, то переходить на наступний крок, залишаючи номер головного критерію незмінним. Якщо значення головного критерію задовольняє ОПР, то він розмірковує – можливо чи ні деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. Якщо – "ні", то процедура закінчується. У протилежному випадку – переходить на наступний крок із метою призначити інший головний критерій.

Метод використовує два типи інформації від ОПР: інформацію про домінування одного критерію над іншими та інформацію про діапазони значень критеріїв.

Приклад 3.6. Методом задоволених вимог розв'язати наступну трьохкритеріальну задачу:

$$2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$-x_1 - x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$0 \leq x_{1,2} \leq 4.$$

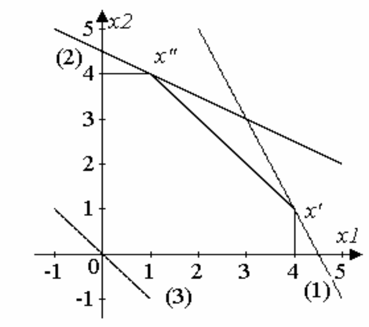


Рис. 3.11.

На рисунку 3.11 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого, другого й третього критеріїв, відповідно (1), (2), (3); x', x'', x''' – найкращі, відповідно за 1 - 3 критеріями задачі, альтернативи.

Крок 1. ОПР виділяє "головний критерій", наприклад $f_2(x)$, який, на його думку, найбільш за усі інші повинен бути покращеним. Далі встановлює мінімально допустимі рівні значень інших критеріїв, наприклад, $\xi_1^1 = 7$, $\xi_3^1 = -4$. В результаті розв'язку задачі:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \ge 7,\ -x_1 - x_2 \ge -4,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,\ 0 \le x_{1,2} \le 4,$$

визначаються: $x^1 = x' = (2,3)$; $y^1 = (7{,}8,-5)$ (див. рис. 3.12). Якщо отримані значення не задовольняють ОПР, то можна перейти на наступний крок і змінити мінімально допустимі рівні першого та третього критеріїв. В цьому випадку зміна мінімально допустимого рівня третього критерію нічого не дасть, а зміна мінімально допустимого рівня першого критерію приведе до зміни розв'язку задачі вздовж всієї "північно-східної" границі множини альтернатив. Якщо значення головного критерію задовольняє ОПР, то він розмірковує – можливо чи ні деяке погіршення значення головного критерію з метою покращення значень інших. Якщо – "ні", то процедура закінчується. У протилежному випадку – переходить на наступний крок з метою призначити інший головний критерій.

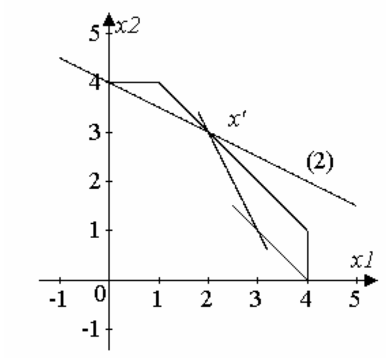


Рис. 3.12.

Метод векторної релаксації. Ця діалогова процедура, призначена для пошуку ефективних альтернатив в задачах багатокритеріальної безумовної оптимізації наступного вигляду: $\max\limits_{x \in R^n} f_i(x),\ i = \overline{1,m}$. Припускається, що критерії задачі є неперервно-диференційованими угнутими функціями.

k -й крок (k=1,2,…). Являє собою крок градієнтного методу для лінійної згортки критеріїв із ваговими коефіцієнтами $\alpha_1^k,...,\alpha_m^k,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1,\ \alpha_i^k > 0,\ i = \overline{1,m}$, що визначаються ОПР за допомогою будь-якої процедури експертного оцінювання важливості критеріїв. Тобто $x^k = x^{k-1} + \gamma^k \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^k \nabla f_i(x^{k-1})$, початкове наближення x^0 є будь-якою точкою простору R^n; γ^k, $\gamma^k > 0$, – величина кроку, яка знаходиться з умови збільшення лінійної згортки критеріїв

$\gamma^k = \arg\max\limits_{\gamma\in R^1} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^k f_i(x^{k-1} + \gamma \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^k \nabla f_i(x^{k-1}))$. Якщо оцінка $y^k = (f_1(x^k),...,f_m(x^k))$ знайденої альтернативи задовольняє ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку переходимо на наступний крок.

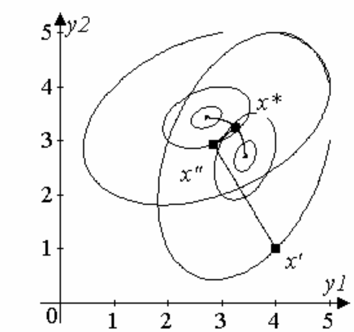


Рис. 3.13.

Слід зауважити, що альтернативи, які генеруються цією процедурою, тільки в граничному випадку будуть ефективними. Тому ОПР, коли аналізує отриману альтернативу, звертає увагу не тільки на те, щоб вона відповідала його перевагам на множині критеріїв, але і наскільки вона є оптимальною за Парето. Оптимальність альтернативи оцінюється величиною:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k \nabla f_i(x^k) \right\|.$$

Приклад 3.7. Розв'язати методом векторної релаксації наступну двохкритеріальну задачу:

$$-2(x_1-3)^2 - (x_2-1)^2 + x_1x_2 - x_1 \to \max,$$

$$-(x_1-1)^2 - 2(x_2-3)^2 + x_1x_2 - x_2 \to \max.$$

На Рис. 3.13 зображені лінії рівнів цих функцій, жирною лінією позначена множина ефективних альтернатив. Градієнти критеріальних функцій мають наступний вигляд:

$$\nabla f_1(x) = (-4x_1 + x_2 - 13, x_1 - 2x_2 + 2)^T,$$

$$\nabla f_2(x) = (-2x_1 + x_2 + 2, 2x_1 - 4x_2 + 11)^T.$$

Нехай $x^0 = (4,1)^T$ – початкове наближення (на Рис. 3.13 – це x').

Крок 1. ОПР вибирає перевагу на множині критеріїв. Нехай, наприклад, критерії рівноцінні, тобто $\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = 0.5$. Тоді: $x^1(\gamma) = x^0 + \gamma(\alpha_1^1 \nabla f_1(x^0) + \alpha_2^1 \nabla f_2(x^0)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}$. Величину кроку знаходимо з умови найшвидшого спуску, тобто:

$$\gamma^1 = \arg\min_{\gamma} (\alpha_1^1 \nabla f_1(x^1(\gamma)) + \alpha_2^1 \nabla f_2(x^1(\gamma)) \approx 0.25.$$

Таким чином, $x^1=(2.84;\ 2.93)^T$ (на Рис. 3.13 – це точка x''). Обчислюємо оцінку $y^1=(1.7,\ 2)^T$. Якщо оцінка знайденої альтернативи задовольняє ОПР, то процедура закінчується. Оскільки градієнти критеріальних функцій у знайденій альтернативі не дорівнюють нулю (це можна як обчислити, так і побачити з Рис. 3.13), то переходимо на наступний крок.

Крок 2. Нехай ОПР не змінює перевагу на множині критеріїв, тоді легко переконатися (зробивши аналогічні першому кроку обчислення), що $x^2=(3.25;\ 3.25)^T$ (на Рис. 3.13 – це точка x^*) з оцінкою $y^2=(2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{1}{8})^T$ буде шуканою альтернативою.

Метод використовує тільки один тип інформації від ОПР – інформацію про відносну важливість критеріїв.

Контрольні завдання до §3

1. Розв’язати методом ідеальної точки (S=1) наступну багатокритеріальну задачу:
$2x_1+x_2\to\max,\ x_1+3x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 4,\ x_1+2x_2\le 6,\ x_{1,2}\ge 0.$

2. Розв’язати методом ідеальної точки (S=2) наступну багатокритеріальну задачу:
$2x_1+x_2\to\max, -x_1+x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 4,\ x_2\le 2,\ x_{1,2}\ge 0.$

3. Розв’язати методом ідеальної точки (S=∞) наступну багатокритеріальну задачу:
$x_1-x_2\to\max, -x_1+3x_2\to\max, -x_1+2x_2\ge 2, 0\le x_1\le 2, 0\le x_2\le 4.$

4. Розв’язати методом послідовних поступок наступну багатокритеріальну задачу:
$x_1\to\max,\ x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 5, -4x_1+x_2\le 0,\ x_1-.4x_2\le 0,\ x_{1,2}\ge 0.$

5. Розв’язати методом послідовного вводу обмежень (варіант 1) наступну багатокритеріальну задачу:
$x_1\to\max,\ x_1+4x_2\to\max, 3x_1+x_2\le 9,\ x_1+3x_2\le 9,\ x_1+x_2\le 4,\ x_{1,2}\ge 0.$

6. Розв’язати методом послідовного вводу обмежень (варіант 2) наступну багатокритеріальну задачу:
$x_1\to\max,\ x_2\to\max,\ x_1+x_2\le 5, -2x_1+x_2\le -1,\ x_1-x_2\le 3,\ x_{1,2}\ge 0.$

7. Розв’язати методом послідовного вводу обмежень (варіант 3)

наступну багатокритеріальну задачу:

$x_1 \to \max, - x_1 + x_2 \to \max, - x_1 + 2x_2 \le 2, 3x_1 - 2x_2 \le 6, x_{1,2} \ge 0.$

8. Розв’язати методом бажаної точки наступну багатокритеріальну задачу:

$-x_1 + 2x_2 \to \max, 2x_1 - x_2 \to \max, x_1 + x_2 \le 5, 0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 3.$

9. Розв’язати методом задоволених вимог наступну багатокритеріальну задачу:

$x_1 + 2x_2 \to \max, -x_2 \to \max, 2 \le x_1 + x_2 \le 5, \ -2 \le -x_1 + x_2 \le 2.$

10. Зробити вибір з урахуванням кількості домінуючих критеріїв у наступнії багатокритеріальній задачі:

$-x_1 + x_2 \to \max, \ x_1 \to \max, \ x_1 + 3x_2 \le 6, \ \ x_1 - 3x_2 \le 0, \ x_{1,2} \ge 0, \ x_{1,2}$ - ціле.

Питання для самоперевірки до розділу 4

1. Дайте визначення слабко ефективної оцінки.
2. Дайте визначення ефективної альтернативи.
3. Дайте визначення власне ефективної альтернативи.
4. Сформулюйте необхідну й достатню умови слабкої ефективності альтернативи.
5. Сформулюйте необхідну й достатню умови ефективності альтернативи.
6. Сформулюйте необхідну й достатню умови власної ефективності альтернативи.
7. Які ви знаєте основні типи правил вибору.
8. Яка основна ідея методу ідеальної точки.
9. Яка основна ідея вибору з урахунком кількості домінуючих критеріїв.
10. Яка основна ідея методу послідовних поступок.

РОЗДІЛ 5.
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

Конфлікти притаманні життю людини на всіх рівнях її буття – міждержавному (ідеологічні, економічні, воєнні конфлікти), всередині суспільства між окремими групами (між поколіннями чи політичними партіями), між окремими людьми (у трудовому колективі, у сім'ї). Основа конфліктів – незбігання інтересів двох або більше сторін. При цьому незбігання інтересів може бути як абсолютним, антагоністичним (виграш однієї сторони досягається за рахунок програшу протилежної), так і не антагоністичним, при якому інтереси сторін не є ні строго протилежними, ні такими, що повністю збігаються (виробник–споживач, викладач–студент тощо). Задача політиків, економістів, кожної людини, зокрема, – уміти "розумно" розв'язувати конфлікти, по можливості не вибираючи крайніх форм (війна, бійка, відрахування студента з вузу і т.д. і т.п.). Для розв'язання конфлікту (та ще й "розумного") потрібно перш за все вміти його описувати ("формалізувати") та проводити аналіз. Цим займаються соціологи, психологи, економісти і т.д., формалізуючи, аналізуючи та рекомендуючи ті або інші дії для розв'язання конфлікту. Займаються цим і математики, будуючи математичні моделі та створюючи засоби їх аналізу. Особливо інтенсивно розвивається цей напрям у математиці і, у першу чергу, у прикладній математиці, в другій половині XX сторіччя.

Сітка Томаса-Кілмана. Перед тим як розглянути основні математичні результати, отримані у цій галузі, розглянемо так звану сітку Томаса-Кілмана (Рис. 1.1), запропоновану у 1972 р.

В сітці Томаса-Кілмана на описовому рівні стверджується, що всі види розв'язання конфліктів між людьми зводяться до п'яти способів, які визначаються чотирма видами дій сторін. Томас та Кілман наводять типові ситуації, в яких потрібно застосовувати певний стиль дій.

Конкуренція:

- ♦ результат конфлікту дуже для вас важливий;
- ♦ ви маєте достатню владу;

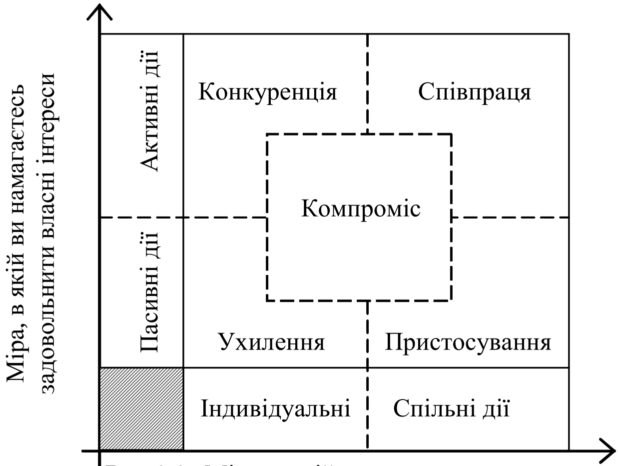


Рис.1.1. Міра, в якій ви намагаєтесь задовольнити інтереси другої сторони

- ♦ ви маєте авторитет;
- ♦ у вас немає іншого вибору;
- ♦ ви знаходитесь у критичній ситуації.

Ухилення:

- ♦ результат для вас не дуже важливий;
- ♦ ви відчуваєте, що не можете вирішити конфлікт на свою користь;
- ♦ ви хочете виграти час;
- ♦ ситуація дуже складна;
- ♦ у вас недостатньо влади.

Пристосування:

- ♦ вас не дуже хвилює конфлікт;
- ♦ ви хочете зберегти мир;
- ♦ ви розумієте, що не праві;
- ♦ у вас мало шансів перемогти;
- ♦ ви розумієте, що вирішити конфлікт на свою користь набагато важливіше для іншої сторони.

Співпраця:

- ♦ у вас взаємозалежні стосунки;
- ♦ усі сторони мають рівну владу;
- ♦ усі можуть викласти свої інтереси і вислухати іншу сторону.

Компроміс:

♦ ви хочете прийти до розв'язку конфлікту швидко;

♦ ви хочете отримати хоча б щось (максимально можливе у даній ситуації);

♦ інші підходи виявились неефективними.

Не дивлячись на нечіткість в описанні сітки Томаса-Кілмана, вона цікава у декількох відношеннях. По-перше, вона дає певну класифікацію конфліктних ситуацій, які постійно виникають у житті людини. По-друге, вона пов'язує дії (стратегії) людей із ситуаціями. По-третє, вона у якійсь степені пов'язує міру (інтенсивність) досягнення результатів із вибраними стратегіями, які, у свою чергу, приводять до тієї чи іншої ситуації. При побудові математичних моделей ігрових ситуацій кожен з відмічених моментів буде чітко описано і формалізовано.

Постановка задачі. Нехай $N=\{1,2,...,n\}$ – множина гравців (агентів), n – їх кількість. Грою G у *нормальній формі* назвемо сукупність $(X_i, u_i; i\in N)$, котра містить для кожного гравця $i\in N$:

♦ множину *стратегій* X_i, елементи якої позначають через x_i;

♦ *"виграш"* гравця $u_i(x)$ – функція, яка визначена на множині *ситуацій* гри $X_N=\prod_{i\in N} X_i$ (якщо $u_i(x)$- програш гравця, то він мінімізується).

§1. Некооперативна поведінка ізольованих гравців

Розглянемо спочатку випадок, коли гравці діють *ізольовано*, тобто кожен з них вибирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, на вибір гравців не впливає минуле (початкова позиція або передісторія партії гри). Будемо також вважати, що кожен гравець знає лише свою цільову функцію виграшу, значення якої він може обчислити після вибору своїх стратегій іншими учасниками.

Недоміновані та домінуючі стратегії. Позначимо через $x_{N\setminus i}$ вектор x без i – ї компоненти, тобто $x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}=\prod_{j\in N\setminus\{i\}} X_j$ (сукупність стратегій усіх гравців за виключенням фіксованого i – го).

Визначення 1.1. Стратегія $x_i\in X_i$ гравця *i домінує* його стратегію $y_i\in X_i$, якщо:

$$u_i(x_i, x_{N\setminus i})\ge u_i(y_i, x_{N\setminus i}),\ \forall x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i};$$

$$\exists \tilde{x}_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i} : u_i(x_i, \tilde{x}_{N\setminus i}) > u_i(y_i, \tilde{x}_{N\setminus i}).$$

Таким чином, стратегія i – го гравця x_i домінує його стратегію y_i (позначатимемо це як $x_i \succ y_i$), якщо при виборі стратегії x_i значення його цільової функції є не гіршим за значення цільової функції при виборі стратегії y_i при довільних виборах своїх стратегій усіма іншими гравцями, при чому хоча б для одного набору стратегій інших гравців значення цільової функції для стратегії x_i є кращим, ніж для стратегії y_i. Іншими словами, вибираючи стратегію x_i, гравець не погіршує свій виграш у порівнянні з вибором стратегії y_i, причому хоча б в одному випадку значення цільової функції покращується.

Визначення 1.2. Стратегія $x_i \in X_i$ гравця i називається *домінуючою* стратегією, якщо: $u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{N\setminus i})$, $\forall\ y_i \in X_i$, $\forall\ x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Множину домінуючих стратегій i-го гравця позначатимемо через D_i.

Розглянемо приклад 1.1:

$X_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ – стратегії 1-го гравця, $X_2 = \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$ – другого. У клітинах таблиці перше число є виграшем першого гравця, друге – другого (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2	d_2
a_1	3,2	5,1	2,1	3,1
b_1	3,1	4,2	2,1	3,1
c_1	2,1	3,1	2,1	2,1

У фіксованій ситуації (x_1, x_2) виграш гравців знаходиться у клітині, яка визначається стратегією x_1 першого гравця й стратегією x_2 – другого. Так, виграш у ситуації (b_1, b_2) рівний $(4,2)$ – 4 одиниці має перший, 2 – другий ($u_1(b_1, b_2) = 4$, $u_2(b_1, b_2) = 2$). Порівняємо стратегії a_1 і b_1 1-го гравця. Маємо:

$$u_1(a_1, a_2) = u_1(b_1, a_2) \text{ (3=3)}, \; u_1(a_1, b_2) > u_1(b_1, b_2) \text{ (5>4)},$$
$$u_1(a_1, c_2) = u_1(b_1, c_2) \text{ (2=2)}, \; u_1(a_1, d_2) = u_1(b_1, d_2) \text{ (3=3)}.$$

Отже, $a_1 \succ b_1$. Аналогічно, $a_1 \succ c_1$, $b_1 \succ c_1$. Звідси випливає, що стратегія a_1 першого гравця є домінуючою: $D_1 = \{a_1\}$.

Розглядаючи стратегії другого гравця, маємо: $a_2 \succ c_2$, $a_2 \succ d_2$, $b_2 \succ c_2$. Але стратегії a_2 і b_2 "є непорівняними": $u_2(a_1,a_2) > u_2(a_1,b_2)$, але $u_2(b_1,a_2) < u_2(b_1,b_2)$. Значення виграшів другого гравця на стратегіях c_2 і d_2 при всіх виборах першого гравця одне і теж (рівне 1). Такі стратегії називають еквівалентними ($c_2 \sim d_2$). Отже, $D_2 = \varnothing$.

Визначення 1.3. Стратегії x_i та y_i гравця $i \in N$ називаються *еквівалентними*, якщо: $u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = u_i(y_i, x_{N\setminus i})$, $\forall\ x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Множину еквівалентних стратегій гравця $i \in N$ позначимо E_i.

Визначення 1.4. Стратегія $x_i \in X_i$ гравця $i \in N$ називається *недомінованою*, якщо не існує стратегії $y_i \in X_i$, яка б її домінувала: $\overline{\exists}\ y_i \in X_i:\ y_i \succ x_i$. Множину недомінованих стратегій i-го гравця позначатимемо через HD_i.

Повертаючись до прикладу 1.1, маємо: $HD_2 = \{a_2, b_2\}$. Зауважимо, що, очевидно, $D_i \subseteq HD_i$ (домінуючі стратегії є частинним випадком недомінованих). Тому для прикладу 1.1: $D_1 = HD_1 = \{a_1\}$.

Визначення 1.5. Ситуація $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ називається *рівновагою у домінуючих стратегіях*, якщо для кожного гравця $i \in N$ стратегія x_i^* є домінуючою ($x_i^* \in D_i$, $\forall i \in N$). Множина $D = \prod_{i \in N} D_i$ називається множиною рівноваг у домінуючих стратегіях.

Приклад 1.2 (див. табл. 1.2). Маємо: $a_1 \sim b_1$ і $D_1 = HD_1 = \{a_1, b_1\}$. Для другого гравця: $b_2 \succ a_2$, $b_2 \succ c_2$, звідки $D_2 = HD_2 = \{b_2\}$. Отже, ситуації (a_1, b_2) та (b_1, b_2) є рівновагами у домінуючих стратегіях.

Таблиця 1.2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,1	3,2	4,2
b_1	2,2	3,3	4,1

Підведемо підсумок. По-перше, для знаходження домінуючих та недомінованих стратегій кожному гравцю досить знати лише свою функцію виграшу та спостерігати за вибором стратегій усіма іншими гравцями для формування ситуації, від якої залежить його виграш. По-друге, "розумний" гравець (точніше "раціонально мислячий") ніколи не буде вибирати домінованих стратегій – адже при їх виборі, він може лише втратити! По-третє, рівновага у домінуючих стратегіях є "розумним" розв'язком задачі колективного прийняття рішень (якщо кількість елементів множини D більша за одиницю, то можна вибирати будь-який – адже всі вони еквівалентні для кожного гравця).

На жаль, в абсолютній більшості практично цікавих задач $D = \varnothing$. Тому, все, що залишається "розумним" гравцям, це відкидати свої доміновані стратегії, будуючи множини HD_i, $i \in N$. У випадку скінченності множини стратегій X_i існування непорожніх множин недомінованих стратегій HD_i очевидне. У більш загальному випадку при досить слабких припущеннях можна також довести непорожність HD_i, $i \in N$.

Лема 1.1. Нехай множини стратегій X_i, $i \in N$, - компактні та у кожній з них існує зліченна, скрізь щільна підмножина. Нехай також функції виграшів u_i, $i \in N$, - неперервні. Тоді множини недомінованих стратегій $HD_i \neq \varnothing$, $i \in N$.

Доведення. Для кожного $j \in N$ виберемо ймовірнісний розподіл p_j на X_j таким чином, щоб непорожня відкрита підмножина X_j мала додатню міру (можливість цього випливає з другої умови, накладеної на множини стратегій). Зафіксуємо $i \in N$ й розглянемо функцію ψ_i, визначену на X_i:

$$\psi_i(x_i) = \int\limits_{X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}), \text{ де } p_{N\setminus i} \text{ – добуток } p_j,\ j \neq i.$$

Оскільки функція u_i неперервна, то неперервна і функція ψ_i, тому можна вибрати стратегію x_i^*, що максимізує функцію ψ_i на X_i.

Покажемо, що стратегія x_i^* недомінована. Дійсно, якщо існує стратегія x_i, що домінує x_i^*, то в силу неперервності функції u_i знайдеться відкрита підмножина $X'_{N\setminus i}$ множини $X_{N\setminus i}$, що для $\forall x_{N\setminus i} \in X'_{N\setminus i}$ $u_i(x_i^*, x_{N\setminus i}) < u_i(x_i, x_{N\setminus i})$. У силу вибору p_j, $j \neq i$, маємо:

$$\int\limits_{X'_{N\setminus i}} u_i(x_i^*, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}) < \int\limits_{X'_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}). \tag{1.1}$$

Оскільки $u_i(x_i^*, x_{N\setminus i}) \leq u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ справедливо для $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$, то

$$\int\limits_{X_{N\setminus i}\setminus X'_{N\setminus i}} u_i\left(x_i^*, x_{N\setminus i}\right) dp_{N\setminus i}\left(x_{N\setminus i}\right) \le \int\limits_{X_{N\setminus i}\setminus X'_{N\setminus i}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) dp_{N\setminus i}\left(x_{N\setminus i}\right). \quad (1.2)$$

Складаючи (1.1), (1.2), приходимо до протиріччя: $\psi_i\left(x_i^*\right) < \psi_i\left(x_i\right)$.♦

Лема 1.2. Нехай множина недомінованих стратегій $HD_i \ne \varnothing$. Тоді еквівалентні твердження: а) $D_i \ne \varnothing$; б) $D_i = HD_i$; в) $x_i, y_i \in HD_i \Rightarrow x_i \sim y_i$. Тобто, всі стратегії у множині недомінованих стратегій еквівалентні.

Доведення. Доведемо еквівалентність а) і б). Оскільки $D_i \ne \varnothing$, то недомінованою стратегією може бути лише домінуюча стратегія i, отже, $HD_i \subseteq D_i$. Оскільки включення $D_i \subseteq HD_i$ очевидне (див. вище), то з а) випливає б). Імплікація б) $\Rightarrow$ а) випливає з умови леми. Із визначення еквівалентності стратегій x_i, y_i випливає, що, якщо $x_i \in D_i \ne \varnothing$, то і $y_i \in D_i$. Якщо $x_i, y_i \in ND_i$, $x_i \ne y_i$, то оскільки $ND_i = D_i$, то $x_i, y_i \in D_i$, $x_i \ne y_i$, що неможливо.♦

В лемі 1.2 говориться про те, що якщо у гравця є хоча б одна домінуюча стратегія, то всі домінуючі стратегії еквівалентні і збігаються з його недомінованими стратегіями (див. приклад 1.2). Будемо вважати, що при "некооперативній" поведінці гравець використовує будь-яку з них. Так, у прикладі 1.2 першому гравцю байдуже яку стратегію a_1 або b_1 використовувати – як у першому, так й у другому випадку перший гравець буде мати виграш у 3 одиниці. Але звернемо увагу на те, що при виборі першим гравцем стратегії b_1, другий гравець буде мати виграш у 3 одиниці, проти 2 одиниць при виборі a_1. Кооперуючи свої дії, гравці можуть зупинитись на ситуації $\left(a_1, b_1\right)$, наприклад, другий гравець може пообіцяти першому половину "додаткової" одиниці свого виграшу. Якщо ж у i – го гравця немає домінуючої стратегії, то його недоміновані стратегії апріорі нееквівалентні, тому його некооперативна поведінка не може бути визначеною однозначно. Потрібна додаткова інформація, зокрема, про функції виграшу суперників, щоб визначити свою стратегію.

Сподіваємось, що читач погодився з тим, що вибір рівноваги у домінуючих стратегіях (якщо вона існує) є раціональною поведінкою ізольованих гравців. Але виявляється, що ця раціональна поведінка може бути дуже й дуже "нерозумною". Приведемо приклад

(Льюіс, Райфа, 1957р.), який став класичним (див. Розд. 1, §1 – §1.1).

Приклад 1.3 ("дилема бандита"). Спіймали двох злочинців, яких підозрюють у скоєнні групового злочину (бандитизм, за нього "дають" більше, ніж за "індивідуальний"). Їх розсадили по різних камерах, так, що домовлятись про вибір стратегій вони не можуть (обмін інформацією відсутній – гравці ізольовані). У кожного з бандитів є дві стратегії – зізнатись у злочині (З) чи не зізнаватись (Н). Таблиця виграшів (у даному випадку програшів – кожен намагається мінімізувати кількість років тюрми) у таблиці 1.3. Отже, якщо обидва не зізнаються у злочині, то їм дадуть по 1 року ("припишуть" незначну провину), якщо ж зізнаються, то – по 10 років. Якщо ж один зізнається ("продасть" спільника), то його відпускають, другому же дають "максимум" – 25 років. Погодьтесь – ситуація реальна. Дослідимо стратегії кожного на домінованість: $З_1 \succ Н_1$, $З_2 \succ Н_2$ (не забуваймо, що програш потрібно мінімізувати). Отже, раціональна поведінка кожного гравця приведе до відкидання його домінованої стратегії і залишиться єдина ситуація $(З_1, З_2)$, значення функцій програшу кожного у котрій рівне 10. "Раціональна" поведінка привела до ситуації з функцією програшу $u = (u_1, u_2) = (10{,}10)$ у той час, як існувала можливість (потенційна) вибору ситуації з $u = (1{,}1)$! Зверніть увагу, що вибір ситуації $(З_1, З_2)$ не зміниться, якщо ми поміняємо приведену таблицю, наприклад, на таку (табл. 1.4): де "∞" – означає смертну кару (приклад 1.4). "Раціональна" поведінка знову приведе до ситуації $(З_1, З_2)$! З життєвої точки зору цей парадокс можна пояснити тим, що краще отримати 100 років тюрми з надією на помилування, ніж ризикувати отриманням ∞ (переходячи на стратегію $З_i$). Таким чином, в описаній ситуації єдиним раціональним (який цілком можна назвати і розумним) буде вибір гіршої (для обох!) ситуації $(З_1, З_2)$ у порівнянні з $(Н_1, Н_2)$. Можна навести безліч життєвих прикладів, у яких саме так і відбувається "розумний" вибір – досить згадати хоча б

Таблиця 1.3.

$X_1 \backslash X_2$	$Н_2$	$З_2$
$Н_1$	1,1	25,0
$З_1$	0,25	10,10

Таблиця 1.4.

$X_1 \backslash X_2$	$Н_2$	$З_2$
$Н_1$	1,1	∞,0
$З_1$	0,∞	100,100

безліч воєн, якими людство "розв'язує" конфліктні ситуації. Що ж робити, щоб виправдати назву нашого виду ("людина розумна") без лапок? Спробуємо розібратися у цьому, але спочатку визначимо поняття "вигідності" ситуації для всіх гравців у цілому.

Визначення 1.6. Ситуація $x \in X$ *домінує за Парето* ситуацію $y \in X$, якщо:

$$u_i(x) \geq u_i(y), \ \ \forall i \in N; \tag{1.3}$$

$$\exists j \in N : u_j(x) > u_j(y). \tag{1.4}$$

Ситуація x^* називається *Парето-оптимальною* (оптимальною за Парето, ефективною), якщо вона не домінується за Парето.

Коротко умови (1.3), (1.4) будемо описувати, як *xPy*, тоді умова ефективності x^* запишеться як: $\overline{\exists} x$, xPx^*, $x, x^* \in X$.

Отже, ситуація x^* є ефективною, якщо не існує іншої ситуації, у якій усі гравці мають значення виграшу, не гірші, ніж у x^*, і хоча б один гравець має краще значення функції виграшу. Множину Парето-оптимальних ситуацій позначатимемо PO.

Наведемо приклади. Нехай *u*=(2,2,2), *v*=(2,2,3), *w*=(1,1,1). Очевидно, що *vPu*, *vPw*, *uPw* і *v* є оптимумом Парето на множині з цих векторів. Якщо перевага *u* над *w* не викликає питань (кожен з гравців має виграш при *u* строго більший, ніж при *w*), то *vPu* вимагає пояснення. Чому з точки зору "усіх разом" гравців *v* кращий за *u*? Адже, перший і другий гравець мають такі самі виграші і лише третій має кращий виграш. Чому "розумні" гравці виберуть *v*, а не *u*? Тому що, по-перше, вибравши *v*, можна сподіватись, що третій гравець поділиться своїм додатковим виграшем з партнерами, по-друге, кожен з них може опинитись у ситуації третього гравця. В окремих випадках розглядається сильне домінування за Парето ($xSPy \Leftrightarrow u_i(x) > u_i(y), \ \forall i \in N$) і визначається "слабкий оптимум за Парето" (або оптимум за Слейтером (див. Розд. 4)). Відмітимо, що у задачах багатокритеріальної оптимізації подібних питань не виникає: безумовно, вибір (2,2,3) є кращим за (2,2,2).

Повертаючись до попередньої таблиці, маємо $(H_1, H_2)P(З_1, З_2)$ (задача на мінімум), усі три ситуації (H_1, H_2), $(H_1, З_2)$, $(З_1, H_2)$ є Парето-оптимальними, але "розумна" поведінка ізольованих гравців приводить до єдиного неефективного рішення. Так що ж робити? Правильно, кооперуватись! Але для кооперації повинні мати місце певні умови й, у першу чергу, можливість обміну інформацією.

Розглянемо приклад 1.5 (Льюіс, Райфа, 1957). Він має назву "Дилема в'язня". В'язні знаходяться у одній камері, кожен з них має дві стратегії поведінки – відноситись до сусіда миролюбно (*M*) чи агресивно (*A*). Таблиця виграшів – 1.5. Знову маємо: $A_1 \succ M_1$, $A_2 \succ M_2$ і отже, раціональна поведінка приводить до неефективної ситуації (A_1, A_2) з вектором виграшів *u* = (1,1). Але на відміну від "Дилеми бандитів" у "Дилемі в'язнів" вони можуть вести переговори про вибір ситуації (M_1, M_2). Звичайно, можливість відхилення від цієї ситуації у кожного в'язня зберігається (перший в'язень, змінюючи стратегію M_1 на A_1, отримає додатковий виграш), зате у партнера є можливість "покарати" порушника: у разі відхилення першого, другий також змінює свою стратегію, у результаті чого вони переходять до ситуації (A_1, A_2), невигідної їм обом. Таким чином, у результаті наявності можливості обміну інформацією кожен з в'язнів може "стабілізувати" ситуацію (M_1, M_2) з допомогою, наприклад, "стратегії погрози" – "я буду миролюбним до тих пір, поки і ти будеш миролюбним". Узагальнюючи дану ситуацію, можна стверджувати, що додаткова інформація може привести до виграшу усіх партнерів. Людська спільнота це розуміє, про що свідчить хоча б наявність у кожній державі розвідки.

Таблиця 1.5.

X_2 / X_1	M_2	A_2
M_1	2,2	0,3
A_1	3,0	1,1

Ще один приклад 1.6, який показує, що ізольована поведінка гравців не дозволяє їм вибрати ефективну ситуацію. Приклад носить назву "Послуга за послугу", у ньому кожен гравець має дві стратегії – відноситись до іншого доброзичливо (*Д*) чи ні (*Н*) (див. табл. 1.6). Маємо: $Д_1 \succ Н_1$, $Д_2 \succ Н_2$ і, отже, з точки зору кожного з гравців байдуже, яку стратегію вибирати (така ситуація виникає, коли домінуюча стратегія не єдина – з леми 1.2 випливає, що усі вони еквівалентні). Але ж лише ситуація $(Д_1, Д_2)$ є ефективною. Знову без переговорів не обійтися!

Таблиця 1.6.

X_2 / X_1	$Д_2$	$Н_2$
$Д_1$	1,1	0,1
$Н_1$	1,0	0,0

Обережні стратегії. Коли кожен гравець знає лише свою цільову функцію, єдиною раціональною поведінкою кожного гравця є використання домінуючих стратегій, якщо вони існують. А що залишається, якщо рівновага у домінуючих стратегіях відсутня (найбільш поширений випадок). Тоді залишається вибирати не "абсолютно краще", а "відносно краще" – "краще з гіршого".

Розглянемо приклад 1.7. Як легко переконатись, стратегії кожного гравця незрівняні між собою (недоміновані) і задача залишається "невизначеною" (див. табл 1.7). Спробуємо скористатись принципом вибору "кращого з гіршого". При виборі першим гравцем стратегії a_1 у найгіршому випадку (коли другий гравець вибере стратегію a_2) він одержить 1 виграшу, при виборі b_1 – 2, c_1 – 1. Таким чином, вибираючи стратегію b_1, перший гравець гарантує собі виграш 2 одиниці (хоча при виборі a_1 він може виграти і 5, а при виборі c_1 – 4). Аналогічно, другий гравець при виборі стратегії b_2 гарантує собі 2 одиниці виграшу (вибираючи a_2, він може виграти як 4, так і 1, вибираючи c_2 – 1 і 5). Оскільки кожен з гравців нічого не знає про наміри іншого, то вибір "обережних" стратегій b_1 і b_2 гравцями можна визнати "розумним", незважаючи на те, що існують ситуації (наприклад (c_1, c_2)), у яких кожен з гравців має більший виграш. Таким чином, для "обережних" ізольованих гравців вибір у прикладі 1.7 є однозначним! Хоча і не "повністю розумним" з точки зору спостерігача, який володіє повною інформацією (знає цільові функції обох гравців).

Таблиця 1.7.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1,3	3,5	5,1
b_1	2,4	2,2	3,5
c_1	3,1	1,2	4,4

Визначення 1.7. Стратегія x_i називається *обережною* (песимістичною) стратегією i-го гравця, якщо

$$\inf_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = \sup_{y_i\in X_i} \inf_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) = \alpha_i . \qquad (1.5)$$

Множину обережних стратегій i – го гравця позначимо O_i. Величина α_i називається максимальним *гарантованим результатом* (виграшем) i – го гравця. У прикладі 1.7: $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$.

Отже, i - й гравець вважає, що його супротивники діють найгіршим для нього чином і його "розумність" у такій ситуації полягає у виборі на множині своїх стратегій такої, яка максимізує його гарантований виграш.

Множина $IR = \left\{ x \in X \,\middle|\, u_i(x) \geq \alpha_i ,\ \forall i \in N \right\}$ називається множиною *індивідуально-раціональних ситуацій*. Множині *IR* належать ситуації, у яких кожен гравець має виграш не менший за гарантований. У прикл. 1.7 $IR = \{(a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2), (b_1, c_2), (c_1, c_2)\}$.

Очевидно, що вести переговори про вибір ситуації, у якій хоча б один гравець має виграш, менший за гарантований α_i, не має сенсу. Адже і без переговорів кожен гравець, діючи ізольовано, може отримати α_i. Очевидно також, що вести переговори про вибір домінованої за Парето ситуації не логічно (з урахуванням міркувань про ефективні рішення).

Визначення 1.8. Множина $\Pi = IR \cap PO$ називається *переговорною*.

Для приклада 1.7 $\Pi = \{(a_1, b_2), (b_1, c_2), (c_1, c_2)\}$. Відмітимо, що у множину П не ввійшли індивідуально-раціональні ситуації (b_1, a_2), (b_1, b_2), які не є ефективними, і ефективна ситуація (a_1, c_2), яка не є індивідуально-раціональною.

Визначення 1.9. Обережні стратегії гравців x_i, $i \in N$, називаються оптимальними, якщо набір гарантованих результатів $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$, що відповідає цим стратегіям, є Парето-оптимальним. Оптимальні стратегії *i*-го гравця позначимо через OP_i. Для приклада 1.7: $OP_1 = OP_2 = \varnothing$. Розглянемо приклад 1.8 (табл.1.8): $O_1 = \{b_1\}$, $O_2 = \{a_2, c_2\}$, $OP_1 = \{b_1\}$, $OP_2 = \{c_2\}$,($(b_1, c_2) \in PO$, $(b_1, a_2) \notin PO$).

Для скінченної гри існування непорожніх множин O_i очевидне. У більш загальному випадку маємо таке твердження.

Таблиця 1.8.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,2	2,1	3,3
b_1	2,3	3,1	4,2

Лема 1.3. Нехай X_i – компактні, u_i – неперервні, $i \in N$. Тоді множини обережних стратегій O_i кожного гравця не порожні і компактні.

Доведення. Оскільки $\forall i \in N$ функції u_i - неперервна, то функція $\Theta(y_i) = \inf\limits_{x_{N \backslash i} \in X_{N \backslash i}} u_i(y_i, x_{N \backslash i})$ - напівнеперервна зверху на X_i і для будь-якого λ множина

$\{y_i \in X_i \mid \Theta(y_i) \geq \lambda\} = \bigcap\limits_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} \{y_i \in X_i \mid u_i(y_i, x_{N \setminus i}) \geq \lambda\}$ є замкненою. Звідси випливає, що множина O_i точок максимуму функцій $\Theta(y_i)$ є непорожньою і компактною.♦

Уже у скінченному випадку існування оптимальних стратегій не гарантується. Що можна забезпечити в умовах леми 1.3 – це існування множини недомінованих стратегій кожного гравця (лема 1.1). Виявляється, що розумний обережний гравець (що діє обережно і відкидає свої доміновані стратегії) у багатьох випадках може гарантувати собі не порожній вибір.

Лема 1.4. Нехай X_i – компакти, u_i – неперервні, $i \in N$. Тоді $O_i \cap HD_i \neq \varnothing$, $i \in N$.

Доведення. Зафіксуємо i та розглянемо гру $\tilde{G} = (Y_j, u_j, j \in N)$, у якій $Y_j = X_j$, $j \neq i$, $Y_i = O_i$ (за лемою 1.3 множина $Y_i \neq \varnothing$ і компактна). За лемою 1.1 у грі $\tilde{G}$ i – й гравець має хоча б одну недоміновану стратегію x_i. Покладемо, що x_i домінується стратегією y_i у початковій грі, тобто $u_i(x_i, x_{N \setminus i}) \leq u_i(y_i, x_{N \setminus i})$ для $\forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$. Тоді

$$\Theta(x_i) = \inf_{y_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(x_i, y_{N \setminus i}) \leq \Theta(y_i) = \inf_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(y_i, x_{N \setminus i}),$$

звідки $\Theta(y_i) = \sup\limits_{z_i \in X_i} \Theta(z_i)$ і $y_i \in O_i$, що суперечить припущенню про недомінованість x_i у грі $\tilde{G}$. Отже, $x_i \in O_i \cap HD_i$.♦

Ігри двох осіб з нульовою сумою. Окремо й коротко розглянемо *ігри двох осіб з нульовою сумою* (оскільки вони вивчаються у курсі «Методи оптимізації»), у яких $u_2(x_1, x_2) = -u_1(x_1, x_2)$ для $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Обережні стратегії x_1, x_2 кожного гравця визначаються співвідношеннями:

$$\inf_{y_2 \in X_2} u_1(x_1, y_2) = \sup_{y_1 \in X_1} \inf_{y_2 \in X_2} u_1(y_1, y_2) = \alpha_1,$$

$$\sup_{y_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) = \inf_{y_2 \in X_2} \sup_{y_1 \in X_1} u_1(y_1, y_2) = \alpha_2.$$

Легко показати, що $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Фіксуючи довільні $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, маємо: $\varphi_1(x_1)=\inf\limits_{y_2} u_1(x_1,y_2)\le u_1(x_1,x_2)\le \sup\limits_{y_1} u_1(y_1,x_2)=\varphi_2(x_2)$.

Звідси випливає: $\alpha_1=\sup\limits_{y_1}\varphi_1(y_1)\le \inf\limits_{y_2}\varphi_2(y_2)=\alpha_2$.

Якщо $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, то величина α називається *ціною гри*. Якщо $\alpha_1<\alpha_2$, то відповідна гра не має ціни.

Якщо для $\forall(y_1,y_2)\in X_1\times X_2$, $u_1(y_1,x_2)\le u_1(x_1,x_2)\le u_1(x_1,y_2)$, то ситуація (x_1,x_2) називається *сідловою точкою*. Зв'язки між сідловими точками і оптимальними стратегіями встановлює

Лема 1.5 [2]. Якщо гра двох осіб з нульовою сумою має ціну, то ситуація (x_1,x_2) є парою оптимальних стратегій тоді і лише тоді, коли вона є сідлвою точкою. Якщо гра не має ціни, то у ній відсутня і сідлова точка.

Приклад 1.9. Гра двох осіб з нульовою сумою задається матрицею виграшів першого гравця (і відповідно програшів другого) (див. табл. 1.9). Маємо, $O_1=OP_1=\{b_1\}, O_2=OP_2=\{b_2\}$, $\alpha_1=\alpha_2=2$. Ситуація (b_1,b_2) є сідловою точкою: $u_1(y_1,b_2)\le u_1(b_1,b_2)\le u_1(b_1,y_2)$, $\forall y_1\in X_1$, $\forall y_2\in X_2$ ($\{1,2,1\}\le 2\le\{3,2,3\}$).

Приклад 1.10 (Гра "Раз–два–три"). Кожен гравець вибирає одну з трьох стратегій: $a=$"раз", $b=$"два", $c=$"три". Виграш першого гравця додатній, якщо він правильно вгадав виграш другого гравця і нуль – у протилежному випадку . Виграш першого гравця задається матрицею (див. табл. 1.10). В цій грі $\alpha_1=0<1=\alpha_2$ і гра не має ціни. $O_1=\{a,b,c\}$, $O_2=\{a\}$. Отже, навіть для скінченної гри двох осіб з нульовою сумою не гарантується існування сідлової точки, а, отже, і оптимальних стратегій. Відома теорема фон Неймана-Моргенштерна говорить, що гарантувати існування сідлової точки для гри двох осіб з нульовою сумою можна при "змішаному розширенні" гри (див. §5.4) при використанні "змішаних" стратегій, які задаються ймовірносним розподілом на множині початкових ("чистих") стратегій.

Таблиця 1.9.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	4	1	4
b_1	3	2	3
c_1	4	1	4

Таблиця 1.10.

X_1 \ X_2	a	b	c
a	1	0	0
b	0	2	0
c	0	0	3

Контрольні завдання до §1

Знайти множини недомінованих стратегій (ND_i), рівноваг у домінуючих стратегіях (D), Парето-оптимальних ситуацій (PO), обережних стратегій (O_i), індивідуально-раціональних ситуацій (IR), переговорних ситуацій (П):

1.1.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1,0	1,1	2,1
b_1	1,5	0,5	1,4
c_1	5,1	1,2	2,2

1.2.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	3,2	3,3
b_1	2,2	3,3	1,3
c_1	3,1	2,4	4,2

1.3.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	2,4	1,3	3,4
b_1	2,5	3,3	4,3
c_1	1,1	4,2	4,2

1.4.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1	1,3	3,2
b_1	1,3	2,2	3,1
c_1	3,2	2,3	3,3

1.5.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1,0	1,1	2,1
b_1	1,5	0,5	1,4
c_1	5,1	1,2	2,2

1.6.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	3,2	3,3
b_1	2,2	3,3	1,3
c_1	3,1	2,4	4,2

1.7.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,4	1,3	3,4
b_1	2,5	3,3	4,3
c_1	1,1	4,2	4,2

1.8.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1	1,3	3,2
b_1	1,3	2,2	3,1
c_1	3,2	2,3	3,3

§2. Повна та часткова інформованість гравців

Розглянемо випадок "*повної інформованості*" гравців, коли кожен з них знає всі цільові функції – свою і суперників.

Складна поведінка гравців. При некооперативній поведінці в умовах повної інформованості породжуються взаємні "стратегічні очікування", які полягають у тому, що i – й гравець очікує, що всі інші гравці також будуть виключати свої доміновані стратегії. У результаті цього у деяких гравців можуть виникнути нові доміновані стратегії і т.д.

Таблиця 2.1.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	1,2	2,1
b_1	1,1	2,1	2,2
c_1	3,3	1,2	1,2

Розглянемо приклад 2.1 (табл.2.1). Маємо: $a_1 \succ c_1$, a_1 і b_1 незрівнянні. Усі стратегії другого гравця незрівнянні між собою. Отже, рівноваги у домінуючих стратегіях не існує. Але, якщо другий гравець знає цільову функцію першого, то він може "стратегічно сподіватись" на те, що перший відкине свою доміновану стратегію c_1 (простіше кажучи, другий може сподіватись на "розумність" першого) і розглядати вже не початкову задачу, а "скорочену", у якій $X_1^1=\{a_1,b_1\}$. У новій задачі стратегія a_2 буде домінованою (і b_2, і c_2). Отже, $X_2^1=\{b_2,c_2\}$. У свою чергу, на множинах стратегій X_1^1, X_2^1 стратегія a_1 домінується стратегією b_1, а на множинах $X_1^2=\{b_1\}$, X_2^1 домінованою буде стратегія b_2! Отже, раціональна поведінка кожного гравця разом з раціональною оцінкою поведінки супротивника приводить до однозначного результату: перший вибирає стратегію b_1, другий – c_2.

Таблиця 2.2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	1,2	2,1
b_1	1,1	2,1	1,2
c_1	3,3	1,3	1,4

Ця ситуація (b_1,c_2), отримана у результаті відкидання кожним гравцем своїх домінованих стратегій, називається складною рівновагою. Звернемо увагу на два аспекти. По-перше, складна рівновага була отримана не в результаті послідовної "тактичної" гри (перший гравець відкидає свої доміновані стратегії, потім – другий і т.д.), а в результаті "стратегічного" планування (якщо я відкину свої доміновані стратегії, а другий гравець це врахує й відкине свої і т.д., то прийдемо до (b_1,c_2)). По-друге, отримана ситуація не є ефективною (ситуація (c_1,a_2) краща для обох гравців!)

Визначення 2.1. Для гри $G=(X_i,u_i,i\in N)$ послідовне виключення домінованих стратегій означає побудову послідовностей $X_i=X_i^0\supset X_i^1\supset\ldots\supset X_i^t\supset X_i^{t+1}\supset\ldots,i\in N$, $X_i^{t+1}=ND_i(X_j^t,u_i;j\in N)$.

Розглянемо, до чого може привести послідовне виключення домінованих стратегій.

Приклад 2.2 (табл. 2.2). Виключаючи доміновані стратегії c_1 і a_2 (у будь-якій послідовності), отримаємо $X_1^1=\{a_1,b_1\}$, $X_2^1=\{b_2,c_2\}$. Подальше виключення стратегій неможливе, оскільки a_1 і b_1, b_2 і c_2 незрівнянні. Що робити далі? Можна задовольнитись фактом скорочення кількості стратегій у кожного гравця і розглядати нову гру з множинами стратегій X_1^1, X_2^1 (а в реальних ситуаціях скорочення може бути значним – наприклад, від гри 100×100 до 2×2), а можна повернутись до початкової гри. У конкретних ситуаціях можливі обидва шляхи, але звернемо увагу, що при "скороченні" початкової гри була втрачена ситуація (c_1, a_2), що домінує за Парето усі ситуації, що залишились.

Таблиця 2.3.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	2,3	2,3
b_1	3,3	1,5	2,4
c_1	3,4	2,4	1,5

Приклад 2.3 (табл.2.3). Маємо: $a_1 \succ b_1$, $a_1 \succ c_1$, $b_2 \succ a_2$ і виключення домінованих стратегій у довільній послідовності приводить до двох ситуацій – (a_1, b_2), (a_1, c_2), рівноцінних з точки зору кожного гравця. У цьому випадку логічно назвати складною рівновагою обидві ситуації. І знову відмітимо, що раціональна (але ізольована!) поведінка кожного гравця приводить до втрати ситуації (c_1, a_2), кращої для обох.

Визначення 2.2. Гра *G* називається *розв'язною за домінуванням*, якщо існує натуральне *t* таке, що для всіх *i* функція виграшу u_i не залежить від x_i на X_N^t: $\forall x_i, y_i \in X_i^t$, $\forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}^t$ $u_i(x_i, x_{N\backslash i}) = u_i(y_i, x_{N\backslash i})$. Множина X_N^t при цьому називається множиною складних рівноваг і буде позначатись *SE*.

Розв'язність гри за домінуванням означає, що після скінченого числа раундів виключення усі стратегії кожного гравця стануть для нього еквівалентними (для нього, але, взагалі кажучи, не для інших – див. приклад 1.6, у якому всі ситуації є складними рівновагами, але, якщо для першого гравця байдуже, яку стратегію вибрати – $Д_1$ або H_1, то для другого це – яку стратегію вибере перший – далеко не байдуже!). Якщо функції виграшу для всіх гравців однозначні на X_N, то множина складних рівноваг (якщо вона існує) складається з одного елемента. Отже, у таких розв'язних за домінуванням іграх, складна поведінка ізольованих гравців є детермінованою. Складна рівновага узагальнює рівновагу у домінуючих стратегіях у наступному сенсі.

Лема 2.1. Якщо у грі *G* множина *D* рівноваг у домінуючих стратегіях непорожня, то гра є розв'язною за домінуванням і *D* є множиною складних рівноваг.

Доведення випливає з леми 1.3. Якщо тільки у одного гравця *i* є домінуюча стратегія, то, очевидно, множина $D_i(u_i)$ містить у собі *i* –

ті компоненти складних рівноваг, якщо останні існують.

Для гри у нормальній формі невідомі у загальному вигляді достатні умови розв'язності за домінуванням. Такі умови можна отримати, якщо розглянути інші представлення гри – так звану розгорнуту форму [2].

Можна стверджувати, що ми, свідомо чи підсвідомо, нерідко застосовуємо "складну" поведінку (діємо раціонально в припущенні, що і партнери також поводяться раціонально). При всій привабливості складної поведінки, потрібно пам'ятати, що така раціональність нерідко є нерозумною (з точки зору досягнення бажаного результату). На цю тему ще один класичний приклад (Форкуарсон, 1969).

Журі з трьох членів повинно вибрати одного з трьох кандидатів a, b, c. Переможець вибирається за правилом більшості, якщо думки членів журі розходяться, то вибирається кандидат, за якого проголосував "голова журі" (нехай – це виборець під номером 1). Отже, якщо гравці висунули кандидатури (x_1, x_2, x_3), $x_i \in X_i = \{a, b, c\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, то вибори переможця відбуваються за правилом:

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_2, \text{ якщо } x_2 = x_3, \\ x_1, \text{ якщо } x_2 \neq x_3. \end{cases}$$

Покладемо, що функції виграшу гравців мають таку структуру: $u_1(a) > u_1(b) > u_1(c)$, $u_2(b) > u_2(c) > u_2(a)$, $u_3(c) > u_3(a) > u_3(b)$ ("цикл Кондорсе"). Розглянемо стратегії a і b першого гравця на предмет домінування. Для цього потрібно розглянути ситуації і для всіх можливих (але однакових) виборів другого й третього гравця. Усього потрібно розглянути $3 \times 3 = 9$ ситуацій. Маємо:

$$\begin{gathered}
u_1(\pi(a,a,a)) = u_1(a) = u_1(\pi(b,a,a)) = u_1(a), \\
u_1(\pi(a,a,b)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,a,b)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,a,c)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,a,c)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,b,a)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,b,a)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,b,b)) = u_1(b) = u_1(\pi(b,b,b)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,b,c)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,b,c)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,c,a)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,c,a)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,c,b)) = u_1(a) > u_1(\pi(b,c,b)) = u_1(b), \\
u_1(\pi(a,c,c)) = u_1(c) = u_1(\pi(b,c,c)) = u_1(c).
\end{gathered}$$

Отже, за визначенням домінування $a \succ b$ для першого гравця. Аналогічно $a \succ c$ і $X_1^1 = \{a\}$. Для другого й третього гравця маємо (перевірте!): $X_2^1 = \{b,c\}$, $X_3^1 = \{c,a\}$. Порівняємо стратегії b і c для другого гравця на множинах стратегій X_i^1, *i=1,2,3*. Маємо:

$$u_2(a,b,c) = u_2(a) < u_2(a,c,c) = u_2(c),$$
$$u_2(a,b,a) = u_2(a) = u_2(a,c,a) = u_2(a)$$

(стратегія першого фіксована, третій може вибрати або c або a). Отже, $X_2^2 = \{c\}$. Аналогічно, $X_3^2 = \{c\}$ і, таким чином, на множині $X_1^2 = X_1^1 = \{a\}$, $X_2^2 = X_3^2 = \{c\}$ за правилом більшості буде вибрано c – найгірший вибір для першого гравця – голови журі! Сила "начальника" у розв'язуванні спірних ситуацій виявляється його слабкістю у грі з розумними (навіть, ізольованими!) підлеглими. Згадайте цей досить життєвий приклад, перед тим, як висуватись в начальники!

Розглянемо випадок *n=2*.

Лема 2.2. Нехай $G = (X_1, X_2, u_1)$ – гра двох осіб з нульовою сумою і скінченними множинами стратегій. Тоді складна рівновага є сідловою точкою функції u_1. Отже, розв'язаная за домінуванням гра двох осіб з нульовою сумою має ціну. Доведення у [2].

У випадку, коли множини стратегій гравців $X_i, i \in N$, - нескінченні (хоча і компактні), досить важко формально визначити складну поведінку. Однією з причин є те, що у процесі виключення домінованих стратегій компактність множини стратегій може порушуватись. Далі, збіжність послідовностей X_i^t, $i \in N$, до підмножини еквівалентних стратегій може відбуватися лише при нескінченній кількості гравців. Ці складнощі демонструються прикладом ("Поділ долара при інфляції" – Дутт, Дживерс, 1981р.).

Гравці ($i \in N = \{\overline{1,n}\}$) ділять долар за наступним правилом:

Крок 1. Гравець 1 пропонує поділ $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, де $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 = 1$, $x_i^1 \ge 0$, $i \in N$. Гравці *2,…,n* можуть прийняти цей поділ або відхилити його. Якщо усі гравці погоджуються на x^1, то він приймається, інакше (хоча б один гравець *2,…,n* не погоджується) відбувається перехід на крок 2.

Крок 2. Гравець 1 переставляється у кінець черги, а свій поділ x^2 пропонує гравець 2. Якщо інші гравці (*3,…,n,1*) не приймають поділ x^2, то процедура повторюється (уже з гравцем 3).

Нехай долар обезцінюється за кожен крок переговорів з коефіцієнтом τ, $0<\tau<1$. Так, у другому періоді ділиться вже $\delta=1-\tau$ (тобто, другий гравець пропонує свій поділ величини δ, $0<\delta<1$), у третьому δ^2 і т.д. Зрозуміло, що якщо процедура буде продовжуватись до нескінченності, то прийдеться ділити нуль. Отже, з одного боку, кожному гравцю вигідно поділити гроші як можна швидше (поки вони не обезцінились), з іншого – не можна погоджуватись на "несправедливий" поділ. Нехай такий "справедливий" поділ x^* існує (його вигідно прийняти кожному гравцю). Приведемо міркування, що базується на стратегічних очікуваннях кожного гравця, аналогічних міркуваннях при знаходженні складної рівноваги у скінченому випадку.

Нехай на першому кроці гравець 1 пропонує $x^1=\left(x_1^1,...,x_n^1\right)$. Він знає, що гравець i ($i\neq 1$), розраховує на наступному кроці (якщо він відбудеться) отримати поділ $x^\delta=\left(\delta x_1^*,\delta x_2^*,...,\delta x_n^*\right)$ (другий гравець перемістився на перше місце, перший на останнє). Отже, для того, щоб поділ x^1 був прийнятий гравцями *2,…,n* необхідно, щоб

$$x_2^1\geq\delta x_1^*,\ x_3^1\geq\delta x_2^*,\ldots,x_n^*\geq\delta x_{n-1}^*.$$

Покладаючи, що пропозиція x^* буде прийнятою ($x^1=x^*$), маємо:

$$x_2^*\geq\delta x_1^*,\ x_3^*\geq\delta x_2^*,\ldots,x_n^1\geq\delta x_{n-1}^*. \qquad (2.1)$$

Яка доля при цьому залишається першому гравцю? Очевидно, $x_1^1=1-\left(x_2^*+...+x_n^*\right)\leq 1-\left(\delta x_1^*+...+\delta x_{n-1}^*\right)$. Отже, він не запропонує поділ $x_1^1<1-\left(\delta x_1^*+...+\delta x_{n-1}^*\right)$. Тобто, $x_1^*\geq 1-\left(\delta x_1^*+...+\delta x_{n-1}^*\right)=1-$

$$-\left(\delta x_1^*+...+\delta x_{n-1}^*+\delta x_n^*-\delta x_n^*\right)=1-\delta\sum_{i=1}^n x_i^*+\delta x_n^*=\left(1-\delta\right)+\delta x_n^*. \qquad (2.2)$$

З (2.1), (2.2) $x_i^*\geq\delta^{i-1}x_1^*\geq(1-\delta)\delta^{i-1}+\delta^i x_n^*\geq(1-\delta)\delta^{i-1}+\delta^n x_n^*$,

звідки випливає

$$x_i^*\geq(1-\delta)\delta^{i-1}\big/(1-\delta^n)=\delta^{i-1}\big/(1+\delta+...+\delta^{n-1}),\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.3)$$

Оскільки величини у правій частині нерівностей у сумі дають 1, то усі нерівності (2.3) – є рівностями. Отже, компоненти складної рівноваги $x_i^* = \delta^{i-1} / (1+\delta+...+\delta^{n-1})$, $i=\overline{1,n}$. Відмітимо, що коли δ прямує до 1 ($\tau \to 0$, інфляція незначна), граничний поділ стає справедливим ($x_i^* = 1/n, i=\overline{1,n}$), хоча вже "стратегічна" аргументація при $\delta = 1$ стає некоректною. Якщо гравці рівноправні (початковий порядок на їх множині задається, наприклад, випадковим чином), то пропонування у поділі на i – му кроці i – м гравцем своєї долі $x_i^i > 1/n$ приведе або до "зациклення" або прийняття "несправедливого" поділу (краще мати щось у даний момент, ніж померти від голоду в очікуванні справедливості). Тому потрібні процедури, які "автоматично" забезпечують "справедливий" поділ. У цьому випадку задача зводиться вже не до розумного вибору стратегій, а до розумного вибору процедур розумного вибору стратегій. Згадаймо, як відбуваються дипломатичні переговори. Основні зусилля тут зводяться до вибору процедури ведення переговорів, а вибір стратегій є другорядним і приймається сторонами автоматично (звичайно, сторони можуть не погодитись з результатом і все починається з початку. У цьому випадку передбачається наявність "апеляційного суду", "конституційного суду" тощо, рішення якого є остаточним).

Приведемо характерний приклад, який називається "Діли–вибирай". Два гравці ділять одиницю нескінченно подільного продукту (золотий пісок, яблуко і т.п.). Гравці рівноправні, кожен претендує на $x_i = 0.5$, i=1,2. Процедура поділу, у якій гравці по черзі пропонують свої варіанти, може продовжуватись до нескінченності. Процедура "Діли – вибирай" закінчується за один крок! Усе дуже просто (автори впевнені, що читачі не раз цією процедурою користувались у житті) – один ділить, другий вибирає (того хто ділить, можна визначити жеребом). Зрозуміло, що той, хто ділить, зацікавлений у тому, щоб одиницю поділити пополам як можна точніше (інакше партнер забере собі більшу частину!). Як приклад, ще одна повчальна життєва історія. Коли відомого персонажа Вовочку спитали, чому він перейшов з "Снікерса" на "Баунті", той відповів: "Снікерс" точно пополам дуже важко поділити, і більшу частину мені, як джентльмену, приходилось віддавати дамі" ("Баунті" містить дві ідентичні цукерки).

Узагальнення процедуру "Діли – вибирай" на випадок $n \geq 3$ здійснено відомим математиком Штейнгаузом. Якимось чином установлюється черга гравців і перший указує свою долю x_1, $0 \le x_1 \le 1$. Якщо другий гравець з нею не погоджується, він повинен показати свою долю x_2, $0 \le x_2 < x_1$, третьому гравцю і т.д. Якщо другий гравець згоден з x_1, то її розглядає третій гравець і т.д. Оскільки, кожен з гравців буде пропускати долю інших не більшу за $1/n$ і затримувати більшу за $1/n$, то оптимальна поведінка кожного є відрізати собі рівно $1/n$.

Ще один приклад (пірати ділять злитки золота), який показує, що відносно демократична процедура, може привести до не дуже справедливого результату.

Нехай маємо 100 одиниць продукту (одна одиниця – уже неподільна). Гравці (пірати) вишикувані у чергу (капітан, помічник капітана, …, юнга) і послідовно пропонують свій варіант поділу. Якщо поділ підтримується не менш ніж половиною команди (включаючи того, хто пропонує), він приймається. Інакше (більшість – проти), того, хто пропонує, вилучають з поділу (викидають за борт) і наступний по старшинству пропонує свій варіант поділу. Приймемо досить реалістичне припущення, що кожен з піратів знає функції виграшу інших. А саме, кожен пірат з двох даних поділів вибирає той, у котрому його доля більша. Загальна недовіра, що, як відомо, царювала серед піратів, дозволяє стверджувати, що вони будуть діяти ізольовано (некооперативно). А отже, задача зводиться до пошуку складної рівноваги. Коли $n=2$, то усі злитки забирає собі старший пірат (він становить половину команди). При $n=3$ поділ (як не дивно!) такий: 100=99+0+1 (старший отримує 99 одиниць, молодший – 1, середній – 0). Чому молодший пірат погодиться з 1 і підтримає тим самим старшого? Тому, що інакше (молодший не погоджується, старшого усувають, залишається два пірати й усі 100 одиниць забирає собі середній) він отримує 0. А одиниця краща за 0. Парадоксальний результат! Але, якщо добре подумати, то саме такі результати на кожному кроці ми зустрічаємо у житті. "Краще щось, ніж нічого!", "Покладатися лише на себе!", – оптимальна (раціональна, розумна і т.д.) ідеологія? Так, але не забуваймо – ізольованих гравців. Не змінюючи процедури поділу (нагадаймо: приймається варіант більшості, що цілком демократично), другий і третій гравець (помічники капітана) можуть домовитись відкинути стратегічно очікуваний варіант капітана 100=99+0+1 заради, наприклад, поділу 100=0+50+50. У залежності від ситуації на переговорах можуть розглядатись варіанти від 100=0+1+99 (третій має тиск на другого – "інакше нічого не одержиш") до 100=0+98+2 (тиск другого: "два краще за одиницю і яка тобі різниця, хто є твоїм начальником"). Погодьтесь, типові життєві ситуації. Настільки ж типові, як і можливість відмови третього від кооперації – "де гарантія, що після усунення першого, другий буде дотримуватись домовленості". ("Домовленість – домовленістю, але закон (правило більшості у даному випадку) є законом!").

Повернемось до нашої задачі. Сподіваємось, що вже всім вам зрозуміло (мається на увазі $n > 3$): 100 = 99+0+1+0, 100 = 98+0+1+0+1 і т.д. У загальному випадку, якщо $n = 2p+1$ або $n = 2p+2$, то у поділі доля капітана дорівнює $(100 - p)$ злитків ($100 - p \geq 1$). По одному злитку отримають p піратів, котрі мають номери тієї парності, що і капітан.

Рівновага за Нешем. Домінуюча стратегія, обережна й складна поведінка можуть бути визначеними гравцями незалежно один від одного. На противагу цьому рівновага за Нешем може бути обумовленою тільки динамічним сценарієм, у якому стратегічні рішення, що приймаються у даний момент, залежать від попередніх сценаріїв гри або хоча б від початкової позиції. Таким чином, спілкування гравців стає неминучим. Вони повинні хоча б сумісно спостерігати ситуації гри.

Розглянемо приклад "особисті інтереси та суспільні потреби" [2]. Кожен з n учасників може працювати на "суспільство" ($x_i = 0$) або на себе ($x_i = 1$). Розглядається задача:

$$\begin{cases} u_i(x) = \lambda x_i + \sum_{j=1}^{n} (1 - x_j) \to \max, \\ x_i \in X_i = \{0,1\},\ 1 < \lambda < n. \end{cases}$$

Параметр λ можна розглядати як продуктивність праці (у грошових одиницях) при роботі на себе ($x^1 = (1,...,1)$, $u_i(x^1) = \lambda$), при роботі на суспільство продуктивність праці кожного одинична. Будемо вважати, що членів суспільства досить багато – з якою б продуктивністю λ гравці не працювали їхня кількість $n > \lambda$ (на себе можна працювати і "за десятьох", але ж). Якщо усі працюють на суспільство ($x_i^0 = 0$, $i = \overline{1,n}$), то виграш кожного $u_i(x^0) = n > \lambda$. Отже, коли усі працюють на суспільство, то це вигідно всім (і кожному). Але! Нехай на суспільство працюють всі, крім одного ($x_i = 0$, $x_k = 1$, $k \neq i \in N$). Маємо: $u_i = n - 1 < n$, $u_k = \lambda + n - 1 = n + (\lambda - 1) > n$.

Отже, ухилення одного від "суспільних" робіт вигідно йому (він має добавку $\Delta u_k = \lambda - 1$), останні ж від цього втрачають (кожен з них 1). Розглянемо протилежний випадок – усі крім одного працюють на себе ($x_i = 1$, $x_k = 0$, $k \neq i \in N$). Маємо: $u_i = \lambda + 1 > \lambda$, $u_k = 1 < \lambda$. Тобто, відхилення k – го гравця ("альтруїста") від праці "на себе" на працю "на суспільство" виявилось невигідним йому (він утрачає $\Delta u_k = \lambda - 1 > 0$). Відмітимо, що поява альтруїста привела до збільшення прибутку "індивідуалістів" (на 1). Але ж кожен намагається максимізувати свою цільову функцію – отже, відхилення будь-якого гравця від ситуації x^1 йому невигідне. Повернемось до моделі "Дилема в'язня" (приклад 1.4).

Таблиця 2.4.

$X_1 \backslash X_2$	M_2	A_2
M_1	2,2	0,3
A_1	3,0	1,1

Від ситуації (M_1, M_2), однаково вигідної для обох (у порівнянні із ситуацією (A_1, A_2)), кожному гравцю вигідно відхилятись (замість 2 мати 3), при умові, що інший не змінює свою стратегію (див. табл. 2.4). Аналогічно від ситуацій (A_1, M_2), (M_1, A_2) вигідно відхилятись одному з них. І лише від ситуації (A_1, A_2) невигідно відхилятись кожному. Підкреслимо, саме кожному з них, а не обом (відхилення ж від (A_1, A_2) обох приводить у ситуацію (M_1, M_2)). Дамо трохи іншу (соціальну) інтерпретацію цієї моделі Нехай кожен з двох гравців має дві стратегії – підтримувати зміни у суспільстві ("перебудова" – *П*) або не підтримувати ("консерватизм" – *К*) (табл 2.5).

Знову лише від ситуації (K_1, K_2) невигідно відхилятись будь-якому одному гравцю, хоча в ситуації (Π_1, Π_2) їхні виграші більші. Цю модель можна назвати дилемою між стабільністю ("нічого не міняти") і ефективністю (ситуація (Π_1, Π_2) є Паретівською або ефективною). Розглянутій моделі можна дати й економічний зміст. Дві конкуруючі фірми можуть при-

Таблиця 2.5.

$X_1 \backslash X_2$	Π_2	K_2
Π_1	2,2	0,3
K_1	3,0	1,1

значати "середню" ціну (*С*) або використовувати політику демпінгу (*Д*). Тоді за табл. 2.5 можна описати також і модель ринку.

Розглянемо узагальнення попередніх моделей на випадок 3-х гравців, у кожного з яких є дві стратегії – *С* і *Д* (інтерпретація за бажанням – "кримінальна", "соціально-політична", або "економічна"). Вектори виграшів мають вигляд: $u(C,C,C)=(2,2,2)$, $u(Д,C,C)=(3,1,1)$, $u(Д,Д,C)=(2,2,0)$, $u(Д,Д,Д)=(1,1,1)$.

В останніх 4-х ситуаціях вектори виграшів обчислюються за симетрією (якщо два гравці вибирають середні ціни, то вони мають по 1 прибутку, третій гравець з демпінговою ціною – 3; якщо ж 2 гравці вибирають демпінгові ціни – їх виграш 2, третього з середньою ціною – 0).

Дослідимо вигідність відхилення від конкретної ситуації будь-якого (але одного!) гравця. Розглянемо ситуацію (*С,С,С*). Відхилення одного гравця приведе до ситуації, у якій два гравці вибирають *С*, а третій (який відхилився) – *Д*. У цьому випадку гравець, що відхилився, має додатковий виграш (3 замість 2), тобто йому вигідно відхилятись. Якщо у ситуації було 2*С* і 1*Д*, то відхилення гравця з *С* приведе до ситуації з 1*С* і 2*Д* і збільшення його виграшу з 1 до 2. Аналогічно, з ситуації з 2*Д* і 1*С* вигідно відхилитися хоча б одному гравцю (а саме тому, хто *С* поміняв на *Д*). Від ситуації ж (*Д,Д,Д*) невигідно відхилятися будь-якому одному гравцю (у цьому випадку він замість 1 отримає 0). Отже, ситуація (*Д,Д,Д*) – "рівноважна", хоча і неефективна (її сильно домінує ситуація (*С,С,С*) і строго домінують ситуації 2*С* і 1*Д*). Перейдемо до формалізації.

Визначення 2.3. Для гри $G=(X_i,u_i,i\in N)$ ситуація x^* називається *рівновагою за Нешем*, якщо:

$$u_i\left(x^*\right)\ge u_i\left(x_i,x^*_{N\setminus i}\right),\ \forall\ i\in N\ ,\ \forall\ x_i\in X_i\ . \tag{2.4}$$

Будемо позначати через *NE* (Nesh Equalibrity) множину рівноваг Неша. Як синоніми будемо використовувати терміни "рівновага Неша", "нешівська рівновага", "нешівська ситуація", "*NE* – ситуація". Для зручності будемо використовувати також позначення x^{NE} для рівноваг Неша. Стратегії, з яких утворюється x^{NE}, будемо аналогічно називати "нешівські стратегії", "*NE* – стратегії".

Отже, у рівновазі Неша x^* гравець *i* розглядає стратегії інших гравців $x^*_{N\setminus i}$ як екзогенно задані ("зовнішньо" задані) і максимізує свою функцію виграшу u_i на множині своїх стратегій $x_i\in X_i$. Властивість (2.4) рівноваг Неша полягає у тому, що x_i^* – одна з кращих відповідей на стратегії $x_{N\setminus i}^*$ (потрібно підкреслити – x_i^* є точкою *глобального* максимуму функції однієї змінної $u_i(x_i) \equiv u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}^*\right)$ при фіксованих значеннях змінних $x_{N\setminus i} = x_{N\setminus i}^*$). З визначення 2.3 випливає, що дана ситуація є рівновагою Неша, якщо від неї невигідно відхилятись будь-якому одному гравцю (усі інші свої стратегії не змінюють), оскільки значення його цільової функції не покращується (залишається таким, як у даній ситуації, або погіршується). Навпаки, дана ситуація не є рівновагою Неша, якщо хоча б одному гравцю вигідно відхилятись від неї (значення його цільової функції хоча б на одній стратегії покращується).

На відміну від складної або обережної поведінки концепція рівноваги Неша у загальному випадку не дає конкретних рекомендацій по вибору стратегії. Для ігор двох осіб з нульовою сумою NE – ситуації є, очевидно, просто сідловими точками, тому нешівські стратегії співпадають з оптимальними стратегіями.

Розглянемо приклад 2.4 (див. табл. 2.6). Розглянемо всі 9 ситуацій на предмет аналізу їх на рівноважність за Нешем. Аналізуємо ситуацію (a_1, a_2). Фіксуємо стратегію другого гравця a_2 (перший стовпчик) і розглядаємо відхилення першого з a_1 на b_1. Значення цільової функції першого гравця при цьому не погіршиться. Тому розглянемо відхилення першого на c_1. Це приведе до покращення значення цільової функції першого гравця (з 2 на 5). Отже, $(a_1, a_2) \notin NE$. Фіксуємо b_2 й розглядаємо відхилення першого гравця від a_1 на b_1. Знову відбудеться покращення значення цільової функції першого гравця, отже, $(a_1, b_2) \notin NE$. Аналогічно, $(a_1, c_2) \notin NE$.

Таблиця 2.6.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2	2,1	1,5
b_1	2,3	3,3	2,2
c_1	5,1	2,2	3,2

Ми аналізували ситуації (a_1, x_2) (перший рядок таблиці), фіксуючи стратегії другого гравця і змінюючи стратегії першого. Можна було поступити і навпаки – фіксувати стратегію першого ($x_1 = a_1$) і змінювати стратегії другого. Тоді, наприклад, від ситуації (a_1, a_2) другому вигідно відхилятись, вибираючи стратегію c_2. Зміна ситуації (a_1, c_2) переходом другого гравця на інші стратегії (a_2 і b_2) до погіршення значення його цільової функції не приводить, отже, у цьому випадку необхідно розглядати відхилення першого гравця (що ми зробили раніше).

Аналізуючи таблицю далі, знаходимо дві нешівські точки (b_1, b_2) і (c_1, c_2). Звернемо увагу, що перша з них ефективна, друга – домінується першою. Отже, можливі різні ситуації – нешівські ситуації не є ефективними ("Дилема в'язня"), деякі з них ефективні, деякі ні. Легко побудувати приклад, коли усі нешівські точки є ефективними.

Ми розв'язували приклад прямим перебором. Насправді перебір можна скоротити. Зафіксуємо, як і вище, стратегію $x_2 = a_2$. Очевидно, що "підозрілою на нешевість" можуть бути лише стратегії першого гравця, на яких досягається максимум $u_1(x_1, a_2)$. У даному випадку – це стратегія c_1 і, отже, ситуація (c_1, a_2). Аналізуючи її на рівновагу (зміною стратегій другого гравця) маємо, що $(c_1, a_2) \notin NE$. Усі ситуації з першого стовпчика (у даному випадку це (b_1, a_2)) розглядати вже не потрібно. Якщо максимум $u_1(x_1, a_2)$ досягався б для декількох стратегій x_1, то розглядати потрібно було б усі відповідні ситуації.

Таким чином, ми побудували алгоритм. Для кожного фіксованого стовпчика $\bar{x}_2$ знаходимо рядки, у яких досягається максимум $u_1(x_1, \bar{x}_2)$, для кожного фіксованого рядка $\bar{x}_1$ знаходимо стовпчики, у яких досягається максимум $u_2(\bar{x}_1, x_2)$, перетин знайдених рядків і стовпчиків і дасть нешівські ситуації. У нашому випадку, для стратегії $\bar{x}_2 = a_2$ максимізуюча стратегія $x_1 = c_1$ (позначимо $a_2 \to c_1$). $b_2 \to b_1$, $c_2 \to c_1$, $a_1 \to c_2$, $b_1 \to a_2$, b_2, $c_1 \to b_2$, c_2. Ситуації з максимізуючих стратегій ($(b_1, b_2), (c_1, c_2)$) і є нешівськими рівновагами. Якщо розглядається задача, в якій цільові функції u_i (одна або декілька) мінімізуються, то можна або перейти до максимізації ($-u_i$) або при розгляді відхилення використовувати термінологію вигідно–невигідно (замість більше–меньше).

Таблиця 2.7.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1,3	1,2,1	2,2,3
b_1	2,1,4	2,1,1	1,3,2

При $n > 2$ пошук рівноваг Неша ускладнюється, хоча принципово не змінюється. Розглянемо життєво важливий випадок, коли $n = 3$ (якщо наші предки довгий час обмежувались поняттями "один", "два", "багато", то у багатьох практичних задачах досить обмежуватись $n = 3$).

Розглядаємо таблицю 2.7 (у ній x_3 фіксоване на a_3). Фіксуємо a_2 (перший стовпчик) і знаходимо максимізуючі стратегії по x_1. Маємо $(a_2, a_3) \to b_1$. Аналогічно $(b_2, a_3) \to b_1$, $(c_2, a_3) \to a_1$.

Таблиця 2.8

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2,1	1,5,1	2,2,2
b_1	1,3,2	2,1,2	1,1,1

Для таблиці 2.8: ($x_3 = b_3$) маємо: $(a_2, b_3) \to a_1$, $(b_2, b_3) \to b_1$, $(c_2, b_3) \to a_1$. Отже, лише ситуації (b_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, a_3), (a_1, c_2, a_3), (a_1, a_2, b_3), (b_1, b_2, b_3), (a_1, c_2, b_3) необхідно перевірити на рівноважність. З них максимум по другій компоненті досягається на (a_1, c_2, a_3), (a_1, c_2, b_3). У свою чергу, в останніх векторах максимум по третій компоненті досягається на (a_1, c_2, a_3). Отже, ця ситуація і є єдиною непівською рівновагою.

Вивчимо властивості NE – рівноваг.

Лема 2.3. Нешівські рівноваги індивідуально раціональні ($NE \subseteq IR$).

Доведення. Нехай $x^* \in NE$, тоді $u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x^*_{N \backslash i})$ для $\forall\, i \in N$, $\forall\, x_i \in X_i$. Оскільки $x^*_{N \backslash i}$ – фіксоване, то $u_i(x_i, x^*_{N \backslash i}) \geq \inf\limits_{x_{N \backslash i}} u_i(x_i, x_{N \backslash i})$ для $\forall\, x_i \in X_i$. Узявши супремум по x_i в цій нерівності, отримаємо необхідне.♦

Отже, NE – ситуація дає кожному гравцю хоча б його гарантований виграш, хоча NE – стратегії можуть і не бути обережними (див. наступний приклад) і тим більш оптимальними (тобто NE – ситуація може бути не паретівською – див. "Дилему в'язня"). Більше того, якщо кожна NE – ситуація є паретівською, то співіснування декількох різних паретівських ситуацій породжує боротьбу за лідерство, що унеможливлює знаходження "оптимальних" стратегій. Це ілюструється наступним прикладом.

Приклад 2.5 ("Перехрестя"). Два автомобілі рухаються по двох перпендикулярних дорогах і одночасно зустрічаються на перехресті. Кожен з них може або зупинитись (стратегія *З*) або продовжувати рухатись (*Р*). Наведена таблиця 2.9 формалізує дану ситуацію у припущенні, що кожному гравцю краще зупинитись, ніж постраждати в аварії, і рухатись, якщо інший зупинився. Додатне число ε відповідає мірі незадоволення того, хто зупинився, від спостерігання колеги, який їде (величина ε визначається етичними нормами суспільства).

Таблиця 2.9.

X_1 \ X_2	*З*	*Р*
З	1, 1	1-ε , 2
Р	2, 1-ε	0, 0

Обидві *NE* – ситуації (*З*,*Р*) та (*Р*,*З*) є паретівськими, хоча вони і не взаємозамінні. Для кожного гравця оптимальною стратегією є зупинка, якщо інший вирішив переїхати перехрестя, і навпаки. Отже, задача кожного полягає у виборі першим стратегії "рухатись" і отримати виграш у 2 одиниці – маємо боротьбу за лідерство. Кожному гравцю вигідно демонструвати, що він може переключитись із стратегії *Р* на стратегію *З* (наприклад, прикинутись п'яним або крикнути, що у нього відмовили гальма), і у той же час уважно спостерігати за супротивником, щоб вияснити, а чи той і дійсно не може зупинитись. Дивно, що найбільш вигідним є нераціональна поведінка, яка у той же час виявляється цілком розумною. Хоча кожен з читачів може пригадати випадки із свого життя, коли аналогічні дії (наприклад, стратегія "прибіднятися" на іспиті) приводили до позитивних наслідків. Це ще один приклад того, що, взагалі кажучи, раціональність і розумність – це різні речі. Симетричність ролей обох гравців робить неможливим розв'язання конфліктної ситуації у вказаній постановці. Тому недарма придумуються правила дорожнього руху, чіпляються світлофори і т.д.

Для *n = 2* розглянуту ситуацію можна повністю формалізувати.

Нехай S_i – виграш *і* – го гравця у будь-якій *і – рівновазі Штакельберга* (див. нижче). Тобто, S_i – це виграш *і* – го гравця, коли він є лідером, діє оптимально у припущенні, що і підлеглий поводить себе розумно.

Визначення 2.4. У грі *G* маємо *боротьбу за лідерство*, якщо $\exists$ *x*:

$u_i(x) \geq S_i$, i=1,2.

Лема 2.4. Якщо у грі *G* мається хоча б дві паретівські *NE* – ситуації x^1, x^2 з різними векторами виграшів:

$$\left(\left(u_1\left(x^1\right), u_2\left(x^1\right)\right) \neq \left(u_1\left(x^2\right), u_2\left(x^2\right)\right)\right), \tag{2.5}$$

то має місце боротьба за лідерство.

Доведення. Оскільки $NE = R_1 \bigcap R_2$, то з визначення S_i $\{x \in NE\} \Rightarrow \{u_i(x) \leq S_i,\ i = 1,2\}$. Якщо у грі *G* відсутня боротьба за лідерство, то знайдеться ситуація *z*, для якої справедливі нерівності $u_i(z) \geq S_i$, *i*=1,2, звідки: $u_i\left(x^1\right) \leq u_i(z)$, $u_i\left(x^2\right) \leq u_i(z)$, *i*=1,2. Оскільки ситуації x^1 та x^2 Парето-оптимальні, то усі чотири нерівності суть рівності, що суперечить (2.5).♦

Наступна лема порівнює *NE* – ситуації з складними рівновагами.

Лема 2.5. Нехай у грі *G* множини стратегій X_i скінченні, $i \in N$. Якщо гра *G* розв'язна за домінуванням, то будь-яка складна рівновага є рівновагою Неша.

Отже, для розв'язаних за домінуванням ігор складна поведінка завжди приводить до *NE* – ситуації. Цікаво відмітити, що протилежне твердження не вірне. *NE* – стратегія може бути домінованою, як видно з наступного п р и к л а д а 2.6 (табл. 2.10). Ситуація (a_1, a_2) – єдина рівновага Неша. Однак a_1 домінується c_1, a_2 домінується c_2.

Таблиця 2.10.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1	0,1	0,1
b_1	0,0	1,0	0,1
c_1	1,0	0,1	1,0

Умови леми 2.3 є одними з достатніх умов існування рівноваги Неша. Однак, у свою чергу, зручних умов для X_i, u_i, які б гарантували розв'язність за домінуванням, не існує. Тому результат леми 2.3 відносно існування рівноваги Неша є неконструктивним. У багатьох прикладних задачах функції виграшу u_i задаються аналітично з допомогою елементарних операцій над елементарними функціями (поліноміальними, логарифмічними тощо). У цьому випадку корисним є теорема [14].

Теорема 2.1 (Неш,1951р.). Нехай множина стратегій X_i є опуклою та компактною підмножиною деякого топологічного векторного простору (узагалі кажучи, свого для кожного i). Нехай усі u_i – неперервні дійснозначні функції на X_N такі, що для кожного $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$ функції однієї змінної $u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ угнуті по x_i на X_i. Тоді множина рівноваг Неша є непорожньою та компактною множиною.

Доведення. Доведення спирається на теорему про нерухому точку та наступну лему.

Лема 2.6 (Кнастера-Куратовського-Мазуркевича). Нехай p – ціле число і $a_1,...,a_p$ – деякі точки топологічного векторного простору. Нехай також $A_1,...,A_p$ – деякі замкнуті підмножини множини $CO\{a_1,...,a_p\}$, котра є випуклою оболонкою множини $\{a_1,...,a_p\}$, причому для $\forall\, T \subseteq \{\overline{1,p}\}$, множина $\bigcup\limits_{k\in T} A_k$ містить $CO\{a_k \mid k \in T\}$. Тоді перетин $\bigcap\limits_{k=\overline{1,p}} A_k \neq \varnothing$. Визначимо дійснозначну функцію φ на $X_N \times X_N$: $\varphi(x,y) = \sum\limits_{i\in N} \left(u_i\left(x_i, y_{N\setminus i}\right) - u_i(y)\right)$, $x, y \in X_N$. Із неперервності u_i та угнутості u_i по x_i випливає неперервність функції φ по y та угнутість по x. Визначимо многозначне відображення Φ з X_N у себе:

$$\Phi(x) = \left\{y \in X_N \mid \varphi(x,y) \le 0\right\},\ \forall x \in X_N.$$

Оскільки φ неперервна по y, то $\Phi(x)$ – компакт для будь-якого x. Оскільки $x \in \Phi(x)$, то $\Phi(x) \neq \varnothing$. Фіксуємо ціле p і p елементів $x^1,...,x^p$ з X_N. Будь-яка опукла комбінація $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^k \in \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Phi\left(x^k\right)$ (інакше мали б для будь-якого $k = \overline{1,p}$: $\Phi\left(x^k, x\right) > 0$; в силу угнутості Φ відносно першого аргументу отримуємо протиріччя: $0 < \varphi\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^k, x\right) = \varphi(x,x) = 0$). Отже, $CO\{x_1,...,x_p\} \subseteq \bigcup\limits_{k=\overline{1,p}} \Phi\left(x^k\right)$.

Застосовуючи лему Кнастера-Куратовського-Мазуркевича маємо: $\bigcap\limits_{k=\overline{1,p}} \Phi\left(x^k\right) \neq \varnothing$. Оскільки не порожні компактні множини $\left(\Phi(x)\right)_{x\in X_N}$ такі, що будь-яке їх сімейство має не порожній перетин, то і перетин усіх множин $\bigcap_{x \in X_N} \Phi(x) \neq \varnothing$. Для будь-якого x^* із цього перетину маємо: $\varphi(x, x^*) \leq 0$, $\forall \ x \in X_N$, що може бути переписаним у вигляді $u_i(x_i, x^*_{N \setminus i}) - u_i(x^*) \leq 0$, $\forall \ i \in N$, $\forall \ x_i \in X_i$. Отже, $\bigcap_{x \in X_N} \Phi(x) = NE$ і теорему доведено.♦ (Відмітимо, що це доведення належить Ж. Хаддаду, воно набагато коротше за оригінальне доведення Неша).

Для того щоб знайти рівноваги за Нешем , необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$u_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x^*_{N \setminus i}), i \in N . \tag{2.6}$$

Теорема Неша стверджує, що за умовами теореми множина *NE* не порожня. Оскільки u_i угнута по x_i, то приведена вище задача глобальної оптимізації еквівалентна локальній задачі. Наприклад, якщо x_i – внутрішня точка множини X_i і функція u_i диференційована по x_i, то умови (2.6) еквівалентні умовам:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right|_{x^*} = 0, \ i \in N .$$

Наведемо п р и к л а д ("Олігополія з призначенням випуску").

Мається *n* виробників з нульовими витратами деякого насиченого за споживанням товару. Виробники постачають товар на ринок в об'ємах x_i, $i \in N$, за ціною $p(x_1 + ... + x_n)$, де *p(t)* – спадаюча угнута функція: $p(0) > 0$, $p'(t) < 0$, $p''(t) < 0$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0$. Маємо гру $\left\langle [0,+\infty), x_i\, p(\bar{x}); i = \overline{1,n} \right\rangle$.

Оскільки X_i не є компактними множинами, покладемо $Y_i = [0, s]$, де *s* є пропозицією, що породжує нульову ціну: *p(s)=0.* Для "звуженої" таким чином гри $\tilde{G} = (Y_i, u_i, i \in N)$ можна застосувати теорему Неша, котра гарантує існування *NE*– ситуації. В силу угнутості та диференційованості u_i маємо систему: $x_i^* p'(\bar{x}^*) + p(\bar{x}^*) = 0$, $i \in N$. Звідси маємо: $x_i^* = -\dfrac{p(\bar{x}^*)}{p'(\bar{x}^*)}$, $i \in N$, тобто: $x_1^* = x_2^* = ... = x_n^* = \tilde{x}$, де

$\tilde{x} = -p(n\tilde{x}) / p'(n\tilde{x})$.

Нехай $n=2$, $p(x_1 + x_2) = \left(\frac{1}{x_1 + x_2} - 1 \right)^{1/2}$, $X_i = [0, 1/2]$, $i=1,2$. Тоді $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1/8$. Цікаво відмітити, що обом гравцям вигідно ("у розумінні" Неша) випускати 25% товару від їх потенційних можливостей.

При $n=2$ отримуємо як наслідок з теореми Неша відомий результат з теорії ігор двох осіб з нульовою сумою.

Теорема 2.2 (фон Неймана) (наслідок з теореми Неша). Нехай X_1, X_2 – опуклі компактні підмножини деяких топологічних векторних просторів, u_1 – неперервна дійснозначна функція на $X_1 \times X_2$, причому:

1) $u_1(x_1, x_2)$ угнута по x_1 для $\forall$ x_2,

2) $u_1(x_1, x_2)$ опукла по x_2 для $\forall$ x_1.

Тоді гра двох осіб з нульовою сумою (X_1, X_2, u_1) має хоча б одну сідлову точку і, отже, ціну.

Вибір Нешівських рівноваг. У загальному випадку гра може мати декілька ситуацій рівноваги за Нешем, при цьому, в різних ситуаціях гравці можуть отримувати різні виграші. Тобто одні ситуації вигідні одним гравцям, інші – іншим. Після введення Нешем поняття рівноваги, численні спеціалісти намагались сформулювати додаткові умови вибору єдиної рівноваги. Одна з таких концепцій запропонована лауреатами Нобелевської премії з економіки за 1994 рік Дж. Харшаньї та Р. Зельтеном [11].Розглянемо приклад 2.7 (табл. 2.11) Р. Аумана (ще один лауреат Нобелевської премії з економіки за 2005 рік). У цій грі маємо дві ситуації рівноваги: (a_1, a_2) та (b_1, b_2). Яку з них виберуть гравці? Ситуація (a_1, a_2) начебто краща для обох гравців ((a_1, a_2) строго домінує (b_1, b_2)), але вибір (a_1, a_2) зовсім не очевидний. Отже, якщо перший гравець відхилиться від стратегії a_1 (при умові, що другий буде дотримуватися a_2), то він утратить лише одну одиницю виграшу (≈10%), зате інший втратить 8 одиниць (≈90%). Водночас, першому гравцю абсо-

Таблиця 2.11.

X_1 \ X_2	a_2	b_2
a_1	9,9	1,8
b_1	8,1	7,7

лютно не вигідно відхилятися від ситуації (b_1, b_2), оскільки він втрачає 6 одиниць (≈85%), а другий отримує навіть більше. Оскільки гра симетрична, то для другого гравця висновки аналогічні. Отже, ризик відхилення кожного гравця від ситуації рівноваги (a_1, a_2) більший, ніж від (b_1, b_2). Розглянемо концепцію Харшаньї – Зельтена у спрощеному вигляді.

Визначення 2.5. Нехай *r* та *s* шукані рівноваги в грі *G*. Ситуація *r* *домінує за виграшем s* , якщо $u_i(r) \geq u_i(s),\ i \in N;\ u_i(r) \neq u_i(s)$.

Визначення 2.5. Ситуація рівноваги *r* називається *ефективною за виграшем* у грі *G*, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за виграшем *r*.

Отже, ситуація рівноваги (a_1, a_2) у наведеному вище прикладі є ефективною за виграшем.

Оцінка ризику для першого гравця визначається відношенням: $u_2(a_1, b_2)/u_2(a_1, a_2) = 8/9 > \quad > u_2(b_1, a_2)/u_2(b_1, b_2) = 1/7$ (аналогічно для другого гравця). Отже, для обох гравців рівновага (a_1, a_2) є більш ризикованою (на предмет відхилення суперника від неї), рівновага (b_1, b_2) - менш ризикованою.

Таблиця 2.12.

X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	(v_{11}, v_{12})	(w_{11}, w_{12})
b_1	(v_{21}, v_{22})	(w_{21}, w_{22})

У загальному випадку "несиметричної" гри двох осіб із двома стратегіями, можна також провести дослідження на "ризикованість рівноважних ситуацій. Для цього перейдемо від гри з виграшами (табл. 2.12) до гри із "втратами" (при відхиленні від ситуацій рівноваги) (табл. 2.13). Так, таблиця з прикладом 2.7 зводиться до таблиці 2.14. Одержимо несиметричну гру з

Таблиця 2.13.

X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	$(v_{11} - v_{21},$ $v_{12} - v_{22})$	(0,0)
b_1	(0,0)	$(w_{21} - w_{11},$ $w_{22} - w_{12})$

$\equiv$

X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	(v_1, v_2)	(0,0)
b_1	(0,0)	(w_1, w_2)

Таблиця 2.14.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	(1,1)	(0,0)
b_1	(0,0)	7,7

втратами $v_1, v_2, w_1, w_2 > 0$; $v_1 > w_1, v_2 > w_2$. Оцінка ризику для першого гравця визначається відношенням v_1 / w_1, другого гравця – відношенням v_2 / w_2. Перший гравець має більш сильну мотивацію (з точки зору ризику) вибору (a_1, a_2), ніж другий для вибору (b_1, b_2), якщо $v_1/w_1 > w_2/v_2$, або $v_1 v_2 > w_1 w_2$ (добуток Неша).

Визначення 2.6. Ситуація *a домінує за ризиком* b, якщо $v_1 v_2 > w_1 w_2$.

Визначення 2.7. Ситуація рівноваги *a* ефективна за ризиком у грі *G*, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за ризиком *a*.

Так, у прикладі 2.7 ситуація рівноваги (b_1, b_2) домінує за ризиком ситуацію рівноваги (a_1, a_2) і є ефективною за ризиком.

Отже, за думкою Дж. Харшаньї та Р. Зельтена, гравці не повинні вибирати ситуації, що є домінованими чи за виграшем, чи за ризиком. А далі, вони повинні вирішити, що для них важливіше: виграш чи ризик, та вибирати одну з недомінованих рівноваг, відповідно чи за виграшем, чи за ризиком (зауважимо, що доцільно розглянути тут двохкритеріальну постановку цієї задачі, враховуючи, зокрема, “схильність до ризику” опонента).

Слід відмітити, що у випадку, коли гравців більше двох та гравці мають більше двох стратегій, пошук недомінованих за ризиком рівноваг значно ускладнюється, але ця проблема має вирішення [11].

Часткова інформованість гравців. У багатьох економічних, політичних і соціальних ситуаціях природним чином виникає несиметричний розподіл інформації. Розглянемо найпростішу модель такого виду – поведінка "лідер-підлеглий". Першим подібну модель розглянув економіст Г. Штакельберг на початку XX сторіччя при описанні стратегій фірм, що конкурують на одному ринку. У таких ситуаціях нерідко одна з фірм виявля-ється сильнішою за інші і нав'язує їм свою стратегію, наприклад, призначає ціну. Безліч подібних прикладів можна знайти в політиці, в армії, у сім'ї.

Нехай для даної гри двох осіб $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$, R_j – множина кращих відповідей *j* – го гравця на задані стратегії *i* – го ($j \neq i$):

$$R_j=\left\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2\;\middle|\; u_j(x_1,x_2)=\sup_{y_j\in X_j} u_j(x_i,y_J),\;\; j\neq i\right\}.$$

Визначення 2.8. Ситуація (x_1,x_2) називається *i – рівновагою Штакельберга,* якщо:

$$u_i(x_1,x_2)=\sup_{(y_1,y_2)\in R_j} u_i(y_1,y_2);\; i,j=1,2,\; i\neq j\,. \qquad (2.7)$$

Множину *i*-рівноваг Штакельберга позначимо через $ШЕ_i$.Можна інтерпретувати1-рівновагу Штакельберга на основі наступного сценарію: гравець 1 (*лідер*) знає обидві функції виграшу u_1 і u_2 та використовує цю інформацію для передбачення реакції гравця 2. Гравець 2 (*підлеглий*) сприймає стратегію гравця 1 як задану екзогенно (ззовні) і максимізує власний виграш (вибираючи свою максимізуючу стратегію). Таким чином, гравець 1, маючи перший хід і передбачаючи "розумність" реакцій на нього гравця 2, сам, поступаючи "розумно", буде розв'язувати задачу (2.7). Розглянемо приклад 2.10 (табл. 2.16). Знайдемо 1-рівновагу Штакельберга (1-лідер, 2-підлеглий, 1 – знає u_1 і u_2, 2 – лише u_2). На фіксовану стратегію першого a_1 другий вибере свою максимізуючу стратегію c_2; $b_1\to b_2$, c_2; $c_1\to b_2$. Таким чином, для вибору своєї найкращої стратегії 1 гравець повинен розглядати лише ситуації (a_1,c_2), (b_1,b_2), (b_1,c_2), (c_1,b_2) (це і є множина R_2).

Таблиця 2.16.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	1,3	5,1	1,5
b_1	4,1	2,2	3,2
c_1	1,1	2,4	3,3

Він, звичайно, вибере (b_1,c_2) (на R_2 максимум u_1 досягається у b_1). Отже, 1-рівновагою Штакельберга є (b_1,c_2) ($ШЕ_1=\{(b_1,c_2)\}$). Аналогічно, фіксуючи a_2, знаходимо максимізуючі стратегії першого гравця (це b_1), $b_2\to a_1$, $c_2\to b_1, c_1$. Шукаємо на множині $R_2=\{(b_1,a_2),(a_1,b_2),(b_1,c_2),(c_1,c_2)\}$ максимізуючі стратегії другого гравця, отримуємо множину 2 – рівноваг за Штакельбергом $ШЕ_2=\{(c_1,c_2)\}$. Отже, при несиметричному розподілі інформації вибір обох гравців буде детермінованим. У першому випадку (лідер – 1) – рівновага (b_1,c_2) і у другому (лідер – 2) – (c_1,c_2). Звернемо увагу, що лідер – 1 при розумному підлеглому може забезпечити собі лише 3 одиниці виграшу, хоча потенційно він міг отримати і 4 ((b_1, a_2)) і 5 ((a_1, b_2)). Аналогічно маємо для лідера – 2. Звичайно, множина 1- рівноваг Штакельберга може містити більше ніж один елемент. Тоді множина вибору хоча і скорочується, але неоднозначність залишається.

Принцип поведінки гравців, що описується визначенням 2.8, нагадує процес виключення домінованих стратегій. Наступний результат показує, що рівновага Штакельберга зводиться до складних рівноваг при відповідному перетворенні початкової гри.

Лема 2.7. Нехай $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$ – скінченна гра двох осіб, причому функції u_1 і u_2 взаємно однозначні на $X_1 \times X_2$. Тоді існує єдина 1 – рівновага Штакельберга, яку позначимо $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Розглянемо гру $\tilde{G} = \left(X_1, X_2^{X_1}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2\right)$: $X_2^{X_1}$ утворюється відображенням

$$\eta:\ X_1 \to X_2; \forall\ x_1 \in X_1,\ \forall\ \eta \in X_2^{X_1},\ \tilde{u}_i(x_1, \eta) = u_i(x_1, \eta(x_1)).$$

Тоді гра $\tilde{G}$ розв'язна за домінуванням, причому єдиною складною рівновагою є $(\tilde{x}_1, \tilde{\eta})$, де $\tilde{\eta}$ – стратегія найкращих відповідей гравця 2, і $\tilde{\eta}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Доведення. Існування та єдиність 1-рівноваги Штакельберга випливає із взаємної однозначності u_1 на $X_1 \times X_2$. У грі $\tilde{G}$ стратегія найкращих відповідей $\tilde{\eta}$ другого гравця є домінуючою стратегією:

$$\tilde{u}_2(x_1, \tilde{\eta}) = \sup_{x_2 \in X_2} u_2(x_1, x_2) \geq u_2(x_1, \eta(x_1)) = \tilde{u}_2(x_1, \eta),\ \forall\ x_1 \in X_1,$$

$$\forall\ \eta \in X_2^{X_1}.$$

Перед другим раундом виключення домінованих стратегій гравець 1 є учасником гри $\left(X_1^1, \{\overline{\eta}\}, u_1, u_2\right)$, в якій його єдина домінуюча стратегія визначається так:

$$\tilde{u}_1\left(x_1^*, \overline{\eta}\right) = u_1\left(x_1^*, \overline{\eta}\left(x_1^*\right)\right) \geq u_1(x_1, \overline{\eta}(x_1)) = \tilde{u}_2(x_1, \overline{\eta}) \text{ для } \forall\ \ x_1.$$

В силу взаємної однозначності u_2 графік відображення $\overline{\eta}$ співпадає з R_2. Отже, $\left(x_1^*, \overline{\eta}\left(x_1^*\right)\right)$ є 1 – рівновага Штакельберга і $x_1^* = \bar{x}_1$, $\overline{\eta}\left(x_1^*\right) = \bar{x}_2$. ♦

Відмітимо, що існування i – рівноваги Штакельберга можна гарантувати при звичайних передумовах (X_i – компактні, u_i – неперервні). Однак лема 2.7 безпосередньо не узагальнюється.

Контрольні завдання до §2

1 Знайти множини складних рівноваг (SE), рівноваг Неша (NE), сильних рівноваг Неша (SNE), i-рівноваг Штакельберга ($ШЕ_i$):

1.1.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,0	1,1	2,1
b_1	1,5	0,5	1,4
c_1	5,1	1,2	2,2

1.2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	3,2	3,3
b_1	2,2	3,3	1,3
c_1	3,1	2,4	4,2

1.3.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,4	1,3	3,4
b_1	2,5	3,3	4,3
c_1	1,1	4,2	4,2

1.4.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1	1,3	3,2
b_1	1,3	2,2	3,1
c_1	3,2	2,3	3,3

§3. Поведінка гравців в умовах мінімальної інформованості

Говорять, що гра відбувається в умовах *мінімальної інформованості*, якщо гравці знають лише свої функції виграшу, але на відміну від умов повної неінформованості, гра може відбуватися необмежену кількість разів і гравці можуть разом спостерігати її наслідки.

Проаналізуємо мотивацію концепції рівноваги Неша з "філософської" точки зору. Можливі два "крайніх" сценарії.

1. З "нормативної" точки зору покладемо, що гравці спільно обговорюють вибір сценарію до тих пір, поки не домовляться до "необов'язкової" домовленості. Далі вони розходяться й обмін інформацією припиняється. Після цього кожен гравець таємно вибирає свою "справжню" стратегію, не знаючи дійсних стратегічних виборів решти. Кожен гравець може бути вірним досягнутій домовленості, а може й відступити від неї. Тоді і лише тоді, коли узгоджена ситуація є рівновагою Неша, отримуємо стабільну домовленість.

2. З "описової" точки зору ми шукаємо "стійкі" ситуації "короткозорих" процедур "намацування", у яких кожен гравець притримується оптимальної стратегії при умові (котра постійно порушується), що решта гравцыв не змінює своїх стратегій. Коли ця "процедура намацування Курно" (див. нижче) збігається, отримуємо рівновагу Неша. .

Перший сценарій ("стратегічний") передбачає повну інформованість гравців (кожен знає усі цільові функції) і актуальну можливість знаходження нешівських рівноваг; другий сценарій ("тактичний") реалізується в умовах мінімальної інформованості гравців (кожен знає лише свою цільову функцію, контакти гравців зводяться до спільного спостереження стратегій) і, взагалі кажучи, не завжди приводить до нешівської рівноваги. Розглянемо другий сценарій більш детально.

Процедура Курно. Розглянемо класичний приклад.

Приклад 3.1("Дуаполія Курно з призначенням випусків"). Два гравці поставляють на ринок один і той же товар в об'ємах x_i, $i=1,2$, по ціні $p(x_1+x_2)=1-(x_1+x_2)$. Максимальні виробничі можливості кожного гравця дорівнюють $1/2$. Розглядаються 2 варіанти:

♦ постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x$ на виробництво x одиниць продукції);

- ♦ спадаючі витрати (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x^2$).

Для випадку а) маємо гру у нормальній формі:

$$\left\langle X_i=\left[0,\tfrac{1}{2}\right],\ u_i(x)=x_i\left(1-x_1-x_2\right)-\tfrac{1}{2}x_i;\ i=1,2\right\rangle.$$

Оскільки множини стратегій компактні, функції виграшу диференційовані та угнуті, отримуємо оптимальні відповіді i-го гравця на фіксовані стратегії j-го з розв'язку системи:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$, i=1,2. Маємо:

$$R_i=\left\{(x_i,x_j)\,\middle|\,x_i=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ 0\le x_j\le\tfrac{1}{2}\right\}.$$

Єдина NE– ситуація знаходиться як перетин множин R_i (прямих R_i на рис. 3.1), тобто: $NE=R_1\cap R_2=\{(1/6,1/6)\}$.

Процедура намацування Курно починається з довільної точки $\left(x_1^0,x_2^0\right)$, $0\le x_i^0\le\frac{1}{2}$, далі кожен гравець використовує свою оптимальну відповідь на поточну стратегію партнера:

$$\left(x_1^0,x_2^0\right)\to\left(x_1^1,x_2^0\right)=\left(\alpha\left(x_2^0\right),x_2^0\right)\in R_1\to\left(x_1^1,x_2^1\right)=\left(x_1^1,\alpha\left(x_1^1\right)\right)\in R_2\to\ldots\to$$
$$\to\left(x_1^t,x_2^{t-1}\right)\in R_1\to\left(x_1^t,x_2^1\right)\in R_2.$$

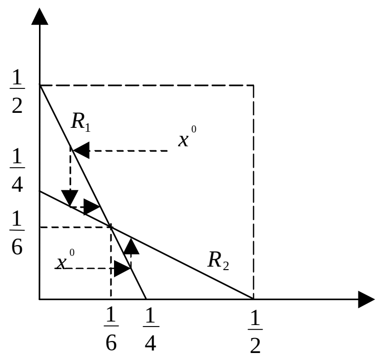


Рис. 3.1.

На рис. 3.1 вказано дві такі послідовності. Легко переконатись, що для будь-якої початкової позиції гри x^0 з квадрата $[0,1/2]\times[0,1/2]$ процедура намацування Курно збігається (із швидкістю геометричної прогресії) до NE– ситуації $(1/6,1/6)$. У цьому випадку NE – ситуація $(1/6,1/6)$ є стійкою.

Для випадку б) маємо наступну гру у нормальній формі:

$$\left\langle X_i=\left[0,\ \tfrac{1}{2}\right],\ u_i(x)=x_i(1-x_1-x_2)-(\tfrac{1}{2}x_i-\tfrac{3}{4}x_i^2)\right\rangle.$$

При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, врахувавши оптимальні значення на границях множини ситуацій гри, маємо (Рис. 3.2.):

$$R_i = \{(x_i, x_j) \mid x_i = \beta(x_j),\ 0 \le x_j \le 1/2\},\ \beta(x) = \begin{cases} 1/2,\ 0 \le x \le 1/4, \\ 1 - 2x,\ 1/4 \le x \le 1/2. \end{cases}$$

Одержимо три *NE* – ситуації: $NE = \{\,(1/3, 1/3), (0.5, 0), (0, 0.5)\,\}$.

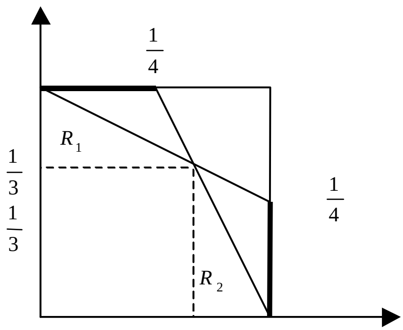


Рис. 3.2.

Починаючи з будь-якої початкової позиції $x^0 \ne (1/3, 1/3)$, процедура намацування Курно за скінченну кількість кроків збігається до $(0.5, 0)$ або до $(0, 0.5)$. Це залишається справедливим, навіть, якщо точка x^0 знаходиться як завгодно близько до точки $(1/3, 1/3)$, але не співпадає з нею. Отже, *NE*– ситуацію $(1/3, 1/3)$ логічно назвати нестійкою, а $(0.5, 0)$, $(0, 0.5)$ – стійкими (локально).

Можна дати різні визначення процедури намацування Курно для ігор n осіб: гравці можуть змінювати свої стратегії одночасно або послідовно (порядок має значення). Ці поняття співпадають для $n = 2$ і не співпадають для $n \ge 3$.

Нехай кожен гравець має єдину стратегію оптимальної відповіді $r_i(x_{N\backslash i}) \in R_i$ на стратегії інших гравців $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$. З будь-якою ситуацією $x^0 \in X_N$ зв'язана *процедура одночасного намацування Курно*, що будує послідовність $x^0, x^1, \ldots, x^t, \ldots$ з X_N таку, що $x_i^t = r_i(x_{N\backslash i}^{t-1})$, $i \in N$, $t = 1, 2, \ldots$.

Стійкі, локально стійкі та нестійкі рівноваги Неша.

Визначення 3.1. Рівновага Неша x^* *стійка*, якщо для $\forall\ x^0 \in X_N$, процедура намацування Курно, що починається з x^0, збігається до x^*.

Відмітимо, що стійка *NE*– ситуація обов'язково є єдиною рівновагою Неша у грі, оскільки, якщо x^0 є рівновагою Неша (у визначенні

x^0 може будь-якою, зокрема, *NE*– ситуацією), то процедура намацування Курно приводить до стаціонарної послідовності.

Для заданого порядку гравців $N=\{1,2,...,n\}$ процедурою $\{1,2,...,n\}$ – *послідовного намацування Курно*, що починається з x^0, називається послідовність $\{x^t\}$, де $x_i^t = r_i\left(x_1^t,...,x_{i-1}^t,x_{i+1}^{t-1},...,x_n^{t-1}\right)$, $i \in N$, t=1,2,….

Визначення 3.2. NE – ситуація x^* є $\{1,2,...,n\}$ – стійкою, якщо для $\forall\ x^0$ процедура $\{1,2,...,n\}$ – послідовного намацування Курно, що починається у x^0, збігається до x^*.

Таблиця 3.1.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	3,3	2,4	3,3
b_1	4,2	3,3	2,3
c_1	3,4	2,2	4,3

Приклад 3.2 (табл. 3.1). Почнемо з ситуації $x^0=(a_1,a_2)$. Перший гравець оптимізує свій виграш при фіксованій стратегії другого гравця, для чого замість a_1 вибирає b_1. Далі другий гравець оптимізує свій виграш, вибираючи b_2 або c_2 (у даній грі не гарантується єдиність оптимізуючої стратегії). Якщо буде вибрана стратегія b_2, то процедура зупиниться, оскільки з ситуації (b_1,b_2) перший гравець свій виграш покращити вже не може. Якщо ж буде вибрана стратегія c_2, то матимемо: $(b_1,c_2)\to(c_1,c_2)\to(c_1,a_2)\to(b_1,a_2)\to(b_1,b_2)$ або (b_1,c_2).

Таблиця 3.2.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2	3,1	0,0
b_1	1,3	2,2	1,1
c_1	0,0	4,1	2,2

Отже, у випадку неоднозначності вибору оптимізуючих стратегій хоча б одним гравцем процедура може зупинитись навіть при єдиній *NE*– ситуації (як у даному прикладі: (b_1,b_2) є єдиною нешівською рівновагою). В умовах визначень 3.1, 3.2 подібного зациклення бути не може (вибір оптимізуючих стратегій однозначний).

Приклад 3.3 (табл. 3.2). Почнемо з $x^0=(b_1,b_2)$. Процедура (*1,2*) – генерує: $(b_1,b_2)\to(c_1,b_2)\to(c_1,c_2)\in NE$. Процедура (*2,1*) – дає послідовність ситуацій: $(b_1,b_2)\to(b_1,a_2)\to(a_1,a_2)\in NE$. Як бачимо від порядку фіксації стратегій залежить побудова тієї чи іншої *NE*– ситуації.

Таблиця 3.3.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2	2,3	1,2
b_1	1,3	3,1	2,2
c_1	1,1	2,1	5,5

У прикладі 3.4 (табл. 3.3) нешівською рівновагою є єдина ситуація (c_1, c_2). Якщо x^0 належить декартовому квадрату множин стратегій $\{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2\}$, то процедура намацування Курно зациклюється незалежно від порядку фіксації стратегій. До (c_1, c_2) може привести лише (2,1) – послідовне намацування Курно з точок (c_1, a_2) та (c_1, b_2).

Резюме. Навіть у скінченній грі в умовах мінімальної інформованості раціональна поведінка гравців (вибір оптимальної стратегії у відповідь на оптимальну стратегію супротивника) може не привести до розв'язання конфліктної ситуації. Тепер стає зрозумілою природа "зациклювання" у багатьох життєвих ситуаціях (політичних, соціальних, економічних, сімейних і т.д. і т.п.) – адже у більшості випадків ми застосовуємо саме процедуру намацування Курно в умовах мінімальної інформації! В умовах незнання (або небажання знати!) цілі партнерів. І що залишається у цих умовах? На слово – слово, на дію – дію. Одним словом, "око – за око", "зуб – за зуб"! І у результаті в ситуацію (c_1, c_2) з виграшами (5,5) (чи (500,500) – не має значення) узагалі можна ніколи не потрапити.

Маленький ймовірнісний аналіз. З восьми ситуацій (крім (c_1, c_2)) можна піти 2 шляхами – по стовпчиках або по рядках. Маємо 16 можливостей, з яких лише відмічених 4 ведуть до цілі. Отже, у даному прикладі з ймовірністю $1/4$ (якщо випадково почали з (c_1, c_2), то з ймовірністю вже $1/9$) можна прийти до цілі.

Нескладно побудувати приклад з десятком стратегій у кожного гравця, в якому ймовірність розв'язати конфлікт з користю для кожного дуже і дуже мала. А якщо $n \approx 10$, то і взагалі мета практично (й теоретично) недосяжна. Якщо ж домовитись про вибір (необов'язковий!) ситуації (c_1, c_2), то навіть не "дуже розумним" супротивникам не захочеться від неї відхилятись.

Умови стійкості. Достатні умови стійкості *NE*– ситуацій складно отримати і вони виявляються вельми обмежувальними. Тим не менш, якщо послабити поняття стійкості з "глобальної" на "локальну", то з'являється можливість (для n = 2) майже повністю описати локально стійкі *NE*– ситуації.

Теорема 3.1. Нехай X_1, X_2 - множини з E^1, x^* – рівновага Неша у грі $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$, причому виконуються умови: x_i^* – внутрішня точка X_i, $i = 1,2$; функції u_i двічі неперервно-диференційовані в околі x^*; частинні похідні $\partial^2 u_i(x^*) / \partial x_i^2 < 0$. Тоді, якщо

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right| < \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right|, \tag{3.1}$$

то x^* – локально стійка,

$$\left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right| > \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right|, \tag{3.2}$$

то x^* – не є локально стійкою (усі похідні взято у точці x^*).

З умов теореми випливає, що множини оптимальних відповідей гравців R_i є двома гладкими кривими, що перетинаються у точці x^*. У нерівностях (3.1), (3.2) порівнюються модулі тангенсів кутів нахилу дотичних до кривих R_1 і R_2 у точці x^*. Покладемо $\alpha_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_1} \Big/ \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_2}$. Тоді умови (3.1), (3.2) можна переписати як:

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| \Rightarrow x^* \text{ – локально стійка,}$$

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| \Rightarrow x^* \text{ – не є локально стійкою.}$$

Коротко розглянемо "процедуру намацування Курно у неперервному часі". Нехай $G = (X_i, u_i; i \in N)$ – гра *n* осіб, у якій кожна множина стратегій одновимірна, функції виграшів u_i двічі неперервно-диференційовані. Нехай φ – дійснозначна функція, визначена на E^1, причому $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$, для $t \in E^1$. Тоді "процедуру намацування Курно у неперервному часі" задає наступна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \varphi\left(r_i\left(x_{N \setminus i}\right) - x_i\right), i \in N, \tag{3.3}$$

де $r_i\left(x_{N \setminus i}\right)$ – оптимальна відповідь i – го гравця на вектор стратегій $x_{N \setminus i}$ інших гравців. Якщо x_i^* є *NE*–стратегією для кожного гравця

$i \in N$, то $x_i^* = r_i\left(x_{N\setminus i}^*\right)$, $i \in N$, $\varphi(0) = 0$, і точка $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ є нерухомою (стаціонарною) точкою системи (3.3). Можна показати, що локальна стійкість ситуації x^* вже є і глобальною.

Контрольні завдання до §3

1. Проаналізувати рівноваги Неша на стійкість

1.1.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,0	1,1	2,1
b_1	1,5	0,5	1,4
c_1	5,1	1,2	2,2

1.2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	3,2	3,3
b_1	2,2	3,3	1,3
c_1	3,1	2,4	4,2

1.3.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,4	1,3	3,4
b_1	2,5	3,3	4,3
c_1	1,1	4,2	4,2

1.4.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1	1,3	3,2
b_1	1,3	2,2	3,1
c_1	3,2	2,3	3,3

Питання для самоперевірки до розділу 5

1. Визначте на основі сітки Томаса-Кілмана, який спосіб розв’язання конфліктних ситуацій ви використовуєте.

2. Ваш «сусід»? Порівняйте результати вашої самооцінки та оцінки вас «сусідом».

3. Дайте визначення множин: недомінованих стратегій, рівноваг у домінуючих стратегіях, Парето-оптимальних ситуацій, обережних стратегій, індивідуально-раціональних ситуацій, переговорних ситуацій, складних рівноваг, рівноваг Неша, сильних рівноваг Неша, і-рівноваг Штакельберга.

4. Що таке «складна рівновага»?

5. Дайте визначення рівноваги Неша.

6. Дайте визначення рівноваги Неша, ефективної за виграшем та ризиком.

7. Що таке і-рівновага Штакельберга?

8. Опишіть процедури «одночасного та послідовного намацування Курно».

9. Поясніть стійкість, локальну стійкість та нестійкість рівноваг Неша.

10. Дайте визначення змішаного розширення гри та змішаної рівноваги Неша.

РОЗДІЛ 6.
КООПЕРАТИВНЕ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

У попередньому розділі розглядався випадок задач прийняття рішень, у яких гравці діяли некооперативно, тобто явний обмін інформацією між ними був відсутній. Це, як правило, приводить до неефективності (домінованості) рівноважних ситуацій. У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію у процесі прийняття рішень (вибору стратегій). Умови кооперації визначаються гравцями у ході переговорів, у яких можуть взаємно з'ясовуватися функції виграшу, різноманітні психологічні аспекти поведінки супротивників (колег), проводить торги тощо. У результаті гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути обов'язковою (коли підписується контракт про використання певних стратегій й виконання цього контракту забезпечується деяким контролюючим органом, якому підкоряються всі гравці) або необов'язковим (коли такого органа не існує й тому домовленість нагадує міжнародні договори, які діють до тих пір, поки не вигідно їх порушувати).

§1. Кооперативна поведінка гравців

Будемо розглядати необов'язкові домовленості з точки зору їх стабільності, яка розуміється як невигідність відхилення від неї гравцями. Стабільність є не таким уже простим поняттям, як може здатись на перший погляд. Дійсно, відхилення деяких гравців від домовленості (необов'язкової) може заставити інших гравців (котрі спочатку не збирались порушувати домовленість) змінити свої стратегії. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації й приведе до некооперативної поведінки гравців. Тому будемо вважати, що необов'язкові домовленості будуть складатись з домовленостей про ситуацію, а також із сценарію реагування кожного гравця i на відхилення будь-якої коаліції, що не містить гравця i. Цей сценарій об'являється наперед і є "сценарієм погроз". Зокрема, реакція на порушення домовленості може полягати у відсутності будь-якої реакції ("сценарій ігнорування").

В принципі у якості домовленості може виступати будь-яка ситуація гри, але логічно використовувати "стабільні" ситуації, від яких невигідно відхилятись. Основним прикладом стабільної є домовленість, що базується на рівновазі Неша. Її стабільність забезпечується взаємним незнанням остаточних стратегічних виборів.

Сильна рівновага Неша. Розглянемо приклад 1.1 (табл.1.1). Перший гравець може запропонувати вибрати ситуацію (b_1, b_2), погрожуючи, у разі відмови другого, перейти на стратегію a_1 (і другий взагалі нічого не матиме). Нескладно придумати приклади, у яких другий гравець згодиться на ситуацію (b_1, b_2) – "краще мати хоча б щось". Але спокуса іншого відхилитись від b_2 буде залишатись.

Таблиця 1.1.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1,0	1,0
b_1	10,10	99,1

Ситуація (b_1, a_2) здається ідеальною для переговорів (від неї невигідно відхилятись обом), але у першого гравця також завжди буде спокуса запропонувати ситуацію (b_1, b_2) – у ній він має виграш у 10 разів більший!

На прикладі цієї гри маємо знов (як і у §2.4) проблему "рівність–ефективність". Ситуація (b_1, b_2) описує багате "рабовласницьке" суспільство ($u_1 + u_2 = 100$), (b_1, a_2) – відносно бідне "демократичне" суспільство ($u_1 + u_2 = 20$), точки (a_1, a_2), (a_1, b_2) відповідають "революційним" ситуаціям.

Спочатку узагальнимо концепцію рівноваги Неша, потім розглянемо стабільність на основі погроз. Узагальнення концепції рівноваги Неша можливе у двох напрямках. Якщо гравці – порушники можуть утворювати коаліції, то виконання домовленості підпадає під небезпеку зі сторони потенційних відхилень будь-якої коаліції. Це приводить до концепції "сильної" рівноваги. Якщо гравці можуть використовувати випадковий механізм, який реалізує корельовано рандомізовані стратегії і посилає гравцям ізольовано сигнал про те, якої стратегії йому притримуватись, то виникає поняття рівноваги у спільних змішаних стратегіях.

Розглянемо приклад 1.2 (табл. 1.2). Маємо дві нешівські рівноваги – (a_1, a_2) й (b_1, b_2). Але, якщо від ситуації (a_1, a_2) невигідно відхилятись будь-якому (але одному! – стратегія другого є

Таблиця 1.2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1,1	1,0
b_1	0,1	2,2

фіксованою), то від (b_1, b_2) невигідно відхилятись обом одночасно (якщо від ситуації (a_1, a_2) одночасно відхиляться обоє, то вони перейдуть у ситуацію (b_1, b_2), вигіднішу для обох).

Визначення 1.1. Для гри $G = (X_i, u_i, i \in N)$ ситуація x^* є *сильною рівновагою* Неша, якщо не існує коаліції гравців $T \subseteq N$, для яких було б вигідно відхилятись від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція $N \setminus T$ не реагує на відхилення: $\forall T \subseteq N$, $\forall x_T \in X_T$ несумісна система нерівностей:

$$u_i\left(x_T, x^*_{N\setminus T}\right) \geq u_i\left(x^*\right), \forall i \in T; \;\; \exists j \in T: \;\; u_j\left(x_T, x^*_{N\setminus T}\right) > u_j\left(x^*\right). \qquad (1.1)$$

Множину сильних рівноваг у грі *G* позначатимемо через *SNE(G)*. Ця множина може бути порожньою.

Покладаючи у формулах (1.1) $T = \{i\}$, $i \in N$, маємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша, тобто $SNE(G) \subseteq NE(G)$. Покладаючи *T=N*, отримуємо, що сильна рівновага є Парето–оптимальною (ефективною) ситуацією. Отже, для *n=2* сильні рівноваги Неша – це ефективні рівноваги Неша.

У прикладі 1.2 дві рівноваги Неша – (a_1, a_2), (b_1, b_2), але лише (b_1, b_2) є сильною рівновагою. При $n \geq 3$ потрібно аналізувати ефективні рівноваги Неша на предмет вигідності відхилення від них "проміжних" коаліцій T ($1 < |T| < N$). Розглянемо приклад 1.3. Єдина нешівська рівновага (a_1, c_2, a_3) (див. Табл. 1.3) не є сильною рівновагою, оскільки не є ефективною (вона домінується (a_1, c_2, b_3)).

Таблиця 1.3.

$\boxed{a_3}$ X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2		$\boxed{b_3}$ X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1,3	1,2,1	2,2,2		a_1	2,2,1	1,5,1	2,3,2
b_1	2,1,4	2,1,1	1,3,2		b_1	1,3,2	2,1,2	1,1,1

В прикладі 1.4 (табл. 1.4) дві нешівські точки, які є ефективними ((a_1, a_2, a_3) й (b_1, b_2, b_3)), але лише одна є сильною рівновагою – (b_1, b_2, b_3). Від ситуації (a_1, a_2, a_3) вигідно відхилятись, наприклад, коаліції $T = \{2,3\}$ у точку (a_1, b_2, a_3).

Таблиця 1.4

$\boxed{a_3}$ X_2 / X_1	a_2	b_2		$\boxed{b_3}$ X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	2,2,2	1,2,3		a_1	1,1,1	1,2,1
b_1	1,2,3	1,3,1		b_1	1,2,1	1,3,2

Інтерпретація властивості стабільності (1.1) базується на двохетапному процесі прийняття рішень. На першому етапі гравці приходять до домовленості про деяку конкретну ситуацію x^*. Далі обмін інформацією при-пиняється й кожен гравець самостій-но приймає рі-шення про свою остаточну страте-гію. Будь-який гра-вець $i \in N$ може відмовитись від використання стратегії x_i^*, але не може інформувати інших про своє відхилення. Може бути також сформованою будь-яка коаліція $T \subseteq N$, яка відхиляється від x_T^* й вибирає x_T, але гравці поза цією коаліцією не можуть бути проінформовані про цю зміну, тому очікується, що вони будуть притримуватись коаліційної стратегії x_T^* відповідно до домовленості .

На прикладі ігор 2-х осіб ми переконались, що не-порушність будь-якої *NE* – ситуації руйнується, якщо виникає боротьба за лідерство. Аналогічна ситу-ація можлива у грі *n* осіб.

Гра "Переговори". У цій грі *n* гравців повинні поділити 1 гривню. Гравці подають свої заявки арбітру, який задовольняє їх, якщо у сумі вони не перевищують 1 гривню. Інакше жоден гравець нічого не отримує: $X_i = [0,1]$, $i \in N$,

$$u_i(x) = \left\{ x_i, \text{ якщо } \sum_{j \in N} x_j \le 1; \ 0, \text{ якщо } \sum_{j \in N} x_j > 1 \right\}.$$

Розв'язок $x^0 = (0,...,0)$ не є сильною рівновагою, оскільки він домінується, наприклад, точкою $\bar{x} = (1/n)_{j=\overline{1,n}}$. Аналогічно, розв'язок $x' = (x'_j)_{j=\overline{1,n}}$, $\sum_{j \in N} x'_j < 1$, також є домінованим (наприклад, точкою $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)_{j=\overline{1,n}}$, $\tilde{x}_j = x'_j$, $j = \overline{1, n-1}$, $\tilde{x}_n = x'_n + \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^1\right)$). Відхилення будь-якої коаліції від точки $x^* = \left(x_j^*\right)_{j=\overline{1,n}}$, $\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1$, може лише погіршити результат хоча б одному члену коаліції. Отже, $SNE(G) = \left\{ x \in X_N \mid \sum_{i \in N} x_i = 1 \right\}$.

Відмітимо, що коли коаліція *T* діє у ролі лідера й вибирає набір стратегій x_T^* так, що $\sum_{i \in T} x_i^* = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, то коаліції *N**T* залишається вибрати $x_{N \setminus T}^*$ такий, що $\sum_{j \in N \setminus T} x_j^* = \varepsilon$. Отже, будь-який учасник або коаліція, привласнивши собі право лідера, може забрати собі майже всю гривню (наприклад, 99 коп.)!

Виберемо тепер конкретну *SNE* – ситуацію для переговорів, наприклад, $x_i^* = 1/n$, $i \in N$. Для того, щоб зробити таку домовленість стабільною, кожен гравець повинен вирішити не звертати уваги на заявки гравців, більші за $1/n$. Найкращим чином така політика "глухоти" може бути реалізованою шляхом обмежень в обміні інформацією між гравцями. Ці обмеження повинні бути або законом (як у системі таємного голосування) або фізичним обмеженням (супутники Одисея затикали вуха воском, щоб не бути звабленими сиренами). Отже, необов'язкові домовленості вимагають деяких обов'язкових обмежень в обміні інформацією.

Рівновага у спільних змішаних стратегіях. З кооперативної точки зору рівновага Неша у змішаних стратегіях є необов'язковою домовленістю, яка забезпечується тайною проведення лотерей, що організують гравці для випадкового вибору остаточного рішення.

Розглянемо приклад 1.5 ("Ввічливі водії", у літературі цей приклад відомий також під назвою "Сімейна суперечка"). Модифікуємо виграші у грі "Перехрестя": якщо один водій зупиняється, то для нього краще, щоб інший проїхав. Виграші приведені у табл. 1.5. У доповнення до двох *NE*– ситуацій у чистих стратегіях з векторами виграшів $(1+\varepsilon, 2)$, $(2, 1+\varepsilon)$ (як і раніше $0 < \varepsilon < 1$, величині ε відповідає степінь "ввічливості" водія) ця гра має цілком змішану рівновагу $\left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$: $\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}\delta_I + \frac{1}{2+\varepsilon}\delta_{II}$ з вектором виграшів

Таблиця 1.5.

X_2 \ X_1	*З*	*Р*
З	1, 1	$1+\varepsilon$, 2
Р	2, $1+\varepsilon$	0, 0

$\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}, 1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)$. Ця змішана *NE*– ситуація домінується обома чистими *NE*– ситуаціями, тому її можна рекомендувати у якості переговорної лише у зв'язку з її "справедливістю" (їй відповідають однакові виграші гравців). Однак у цій змішаній *NE*– ситуації кожен гравець отримує виграш $1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, рівний гарантованому виграшу у змішаних стратегіях. Разом з тим стратегії μ_i^*, що утворюють *NE*– ситуацію, не є обережними, а тому не гарантують гравцю цього виграшу. Дійсно, ціна гри у змішаних стратегіях дорівнює $1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$ і єдина рівноважна ситуація є $\left(\mu_1^0, \mu_2^*\right)$, де $\mu_1^0 = \dfrac{2}{2+\varepsilon}\delta_I + \dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\delta_{II}$. Більш того, $u_1(\mu_1^*, \delta_{II}) = \dfrac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} < 1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon} = u_1(\mu_1^*, \mu_2^*) = u_1(\mu_1^0, \delta_{II})$, звідки ясно, що змішана *NE*– ситуація, яка отримана застосуванням стратегії μ_1^* є більш ризикованою, ніж у випадку застосування обережної стратегії μ_i^0. Єдиним аргументом на користь рівноваги у змішаних стратегіях є стабільність. Якщо гравці можуть таємно проводити лотереї, то необов'язкова домовленість про реалізацію цілком змішаної *NE*– ситуації є стабільною. Отже, для кожного гравця дії інших цілком передбачувані. З цієї точки зору аргументація на користь обережних стратегій оманлива, оскільки застосування обережних стратегій приводить до послідовності найкращих відповідей, що робить результат непередбачуваним.

З одного боку, змішана *NE*– стратегія є розумною, якщо гравець вважає свого партнера таким само раціональним, як і він сам, хоча *NE* – ситуація є більш ризикованою, ніж у випаду застосування обережної стратегії, якщо партнер може зіграти нерозумно (тут потрібно згадати слова Л.М. Толстого, який говорив, що 90% вчинків росіянина пояснюються елементарним глупством). З іншого боку, обережна змішана стратегія вибирається із міркувань мінімуму ризику і, отже, є максимально безпечною. Тим не менш, у раціонального гравця виникає бажання одностороннього відхилення від ситуації, що складається з пари змішаних обережних стратегій, оскільки це збільшує виграш.

Повертаючись до гри "Перехрестя", побудуємо випадковий механізм, який не зводиться до незалежної рандомізації стратегій, тому дозволяє зробити рівноважну ситуацію Парето-оптимальною.

Приклад 1.6 ("Перехрестя із світлофором"). Гравці встановлюють світлофор, який показує "зелене – червоне" й "червоне – зелене" з рівною ймовірністю. Домовленість полягає у тому, щоб на зелене світло проїжджати без зупинки, на червоне – зупинятись. Ця домовленість є стабільною, оскільки при кожній реалізації лотереї маємо рівновагу Неша. Математичне сподівання виграшу дорівнює $3/2+\varepsilon/2$ для кожного гравця, чим забезпечується Парето – оптимальність й справедливість.

Визначення 1.1. Для гри $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$ із скінченною множиною стратегій *спільною лотереєю* назвемо ймовірносний розподіл $L=\left(L(x)\right)_{x\in X_N}$ на X_N. Для всіх $i\in N$ і для всіх $x_i\in X_i$ позначимо через L_{x_i} умовну ймовірність реалізації $x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}$:

$$L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sum\limits_{y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} L\left(x_i,y_{N\setminus i}\right)}\cdot L\left(x_i,x_{N\setminus i}\right), & \sum\limits_{y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} L\left(x_i,y_{N\setminus i}\right)\neq 0,\\ 0,\ \text{якщо } L\left(x_i,y_{N\setminus i}\right)=0 \text{ для всіх } y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}. \end{cases}$$

Скажемо, що L є *рівновагою у спільних змішаних* стратегіях у грі *G*, якщо виконані наступні нерівності: $\forall\ i\in N$, $\forall\ x_i,y_i\in X_i$,

$$\sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i,x_{N\setminus i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)\geq \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i,x_{N\setminus i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right). \qquad (1.2)$$

Позначимо через *CNE(G)* множину всіх рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі *G*.

Кооперативний сценарій, що слугує обґрунтуванням даного визначення, полягає у наступному. Гравці спільно будують випадковий датчик, котрий може реалізувати вибір ситуацій $x\in X_N$ з ймовірністю *L(x)*. Якщо реалізувалась ситуація *x*, то гравець *i* отримує інформацію лише про компоненту x_i. Далі кожен гравець вибирає вільно й незалежно, а також таємно, свою справжню стратегію. Сигнал x_i сприймається гравцем *і* як необов'язкова пропозиція зіграти x_i. Умови (1.2) означають, що виконання домовленості про вибір x_i гравцем *і* забезпечуються автоматично при тій же обмеженій інформації, котра доступна кожному гравцю. Дійсно, нехай гравцю *і* запропоновано використати стратегію x_i. Він робить висновок із загального розподілу *L*, що з ймовірністю $L_{x_i}(x_{N\setminus i})$ набір $x_{N\setminus i}$ буде вибрано. Отже, $M(y_i, L_{x_i}) = \sum_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) L_{x_i}(x_{N\setminus i})$ є математичним сподіванням його виграшу при використанні стратегії $y_i \in X_i$, якщо всі інші гравці згодні у виборі стратегій слідувати сигналу. Таким чином, умова (1.2) означає, що використання стратегії, що пропонується датчиком, є оптимальною відповіддю гравця *і* при заданому рівні інформації у припущенні, що всі інші гравці підкоряються сигналу.

Нехай стратегія x_i така, що $L(x_i, x_{N\setminus i}) = 0$ для всіх $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}$, тобто ймовірність того, що стратегія x_i буде запропонована датчиком, дорівнює нулю. Для такої стратегії x_i умова (1.2) виконується тривіально, отже, система (1.2) переписується у еквівалентному вигляді: $\forall\ i \in N$, $\forall\ x_i, y_i \in X_i$,

$$\sum_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) L(x_{N\setminus i}) \geq \sum_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) L(x_{N\setminus i}). \qquad (1.3)$$

Звідси випливає, що лотерея *L* є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли ці стратегії задовольняють системі лінійних нерівностей (1.3). Ця система завжди має розв'язок, як показує наступний результат.

Лема 1.1. Множина *CNE(G)* рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі *G* є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса у $E^{|X_N|}$. Якщо $\mu = (\mu_i)_{i \in N}$ є ситуацією змішаного розширення гри $\overline{G}$, то лотерея *L*, що визначається по цій ситуації, є рівновагою у спільних змішаних стратегіях у *G* тоді й лише тоді, коли μ – ситуація рівноваги у $\overline{G}$.

Отже, *NE* – ситуація як у початковій грі, так і у її змішаному розширенні, ототожнюється з рівновагою *L* у спільних змішаних стратегіях, де ймовірносний розподіл *L* є набором незалежних випадкових індивідуальних стратегій.

Таблиця 1.6.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	0,0	1,2	2,1
b_1	2,1	0,0	1,2
c_1	1,2	2,1	0,0

Приклад 1.7 ("Музичні стільці"). Маємо двох гравців й три стільці (a,b,c). Стратегія гравця полягає у виборі стільця. Обидва гравці несуть втрати при виборі одного й того ж стільця. Якщо ж їх вибори різні, то гравець, чий стілець безпосередньо слідує за стільцем супротивника (вважаємо, що b безпосередньо слідує за a, c за a, a за c) виграє вдвічі більше. Отже, виникає біматрична гра (табл. 1.6). У ній a_i – вибір гравцем i стільця a. У початковій грі рівноваги Неша відсутні. Єдиною цілком змішаною рівновагою Неша є $\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1}{3}\delta_a + \frac{1}{3}\delta_b + \frac{1}{3}\delta_c$. Ця ситуація рівноваги приносить кожному гравцю виграш рівний 1 і є домінованою. Причина цього полягає у тому, що у змішаній ситуації (μ_1^*, μ_2^*) "погані" для обох гравців діагональні ситуації реалізуються з ймовірністю $1/3$. Розглянемо наступну лотерею L на $X_1 \times X_2$:

$$L(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/6, \text{ якщо } x_1 \neq x_2, \\ 0, \text{ якщо } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Ця лотерея є рівновагою у змішаних стратегіях у даній грі. Нехай, наприклад, ситуація (b_1, c_2) реалізується (з ймовірністю $1/6$). При даному роподілі ймовірностей L гравець 1 може вивести, що гравцю 2 запропоновано використовувати одну із стратегій a_2 або c_2 з однаковою ймовірністю $1/2$, тобто використовувати змішану стратегію $\mu_2 = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c$.

Найкращою відповіддю на цю стратегію і є стратегія b_1, оскільки $\bar{u}_1(\delta_b, \mu_2) = \frac{3}{2} > \bar{u}_1(\delta_a, \mu_2) = 1 > \bar{u}_1(\delta_c, \mu_2) = \frac{1}{2}$. Аналогічно гравець 2, якому поступає сигнал використати стратегію c_2, виводить, що гравцю 1 пропонується вибрати змішану стратегію $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c$. У цьому випадку стратегія c_2 і є найкращою відповіддю гравця 2 (аналогічно вище приведеному).

Таблиця 1.7.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1,1	10,0
b_1	0,10	0,0

В силу симетричності гри отримуємо властивість стабільності лотереї L при будь-яких допустимих реалізаціях. Відмітимо, що лотерея L приводить до оптимальних за Парето й справедливих виграшів $(3/2, 3/2)$, що спонукає гравців вступати у кооперацію на основі використання спільних змішаних стратегій.

Розглянемо приклад 1.8 (табл. 1.7). Рівновагою Неша (також і рівновагою у домінуючих стратегіях) є ситуація (a_1, a_2), у якій кожен отримує виграш 1. Ситуація (a_1, a_2) є Парето – оптимальною так само, як і (a_1, b_2), і (b_1, a_2). Але ж в останніх ситуаціях один з гравців отримує виграш у 10 разів більший! Якщо гра повторюється неодноразово, то у гравців може виникнути ідея використовувати ситуації (a_1, b_2) та (b_1, a_2) по черзі. Але не виключений випадок, коли одному з гравців буде вигідно порушити цю домовленість (наприклад, він захоче вийти з гри). Єдиним способом запобігти таким порушенням є застосування випадкового механізму – вибирати з ймовірністю $1/2$ ситуації (a_1, b_2), (b_1, a_2), тобто за лотереєю $L = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Зрозуміло, як реалізувати подібну "справедливу" (яка дає кожному з гравців середній виграш) лотерею у загальному випадку. Але подібна справедливість відносна. Розглянемо приклад 1.9 (табл. 1.8). У ситуації (b_1, a_2) перший гравець отримує у 3 рази більший виграш, ніж у ситуації (a_1, b_2), у той час, як виграші другого гравця відрізняються у 2 рази. Тому перший гравець частіше хотів би отримувати першу ситуацію, інший – другу. На практиці гравці можуть домовитись про "середню" частоту – у даному прикладі перший гравець хотів би використовувати ситуацію (b_1, a_2) з частотою $3/4$, другий – $1/3$, тому "середня" частота використання стратегії (b_1, a_2) дорівнює: $3/4 + 1/3 = 7/12$ ((a_1, b_2) – $5/12$). Математичне сподівання

Таблиця 1.8.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	0,0	3,2
b_1	9,1	0,0

виграшів: $M_1 = 9\cdot\frac{7}{12} + 3\cdot\frac{5}{12} = 6.5$, $M_2 = 1\cdot\frac{7}{12} + 2\cdot\frac{5}{12} = 1\frac{5}{12} \approx 1.4$. Відмітимо, що про рівновагу у спільних змішаних стратегіях тут не йдеться.

В наступному прикладі перехід до змішаного розширення гри не дає нічого нового, крім єдиної рівноваги Неша (у чистих стратегіях). Але нижче буде приведено механізм кооперації, який є більш обов'язковою формою стабільної домовленості, що базується на спільних змішаних стратегіях і дозволить покращити за Парето *NE*– ситуацію.

Таблиця 1.9.

$X_1 \backslash X_2$	*H*	*C*	*B*
H	0,0	0,2	1,3
C	2,0	1,1	2,0
B	3,1	0,2	0,0

Приклад 1.10 ("Конкуренція зі спеціалізацією"). Два дуополісти постачають на ринок один товар, але різної якості – низької (*H*), середньої (*C*) й високої (*B*) (виграші у табл. 1.9). Для гравців, що притримуються некооперативної поведінки, ця гра, розв'язна за домінуванням і ситуація (*C*,*C*) є єдиною рівновагою як самої гри, так і її змішаного розширення.

Ця гра має також єдину рівновагу у спільних змішаних стратегіях, яка реалізується на лотереї, що вибирає (*C*,*C*) з ймовірністю 1. Тим не менш, оптимальний за Парето виграш (2,2) може бути рівноважним у результаті наступної домовленості.

Побудуємо лотерею з ймовірносним розподілом $L = \frac{1}{2}\delta_{(B,H)} + \frac{1}{2}\delta_{(H,B)}$. Кожен гравець незалежно й таємно вибирає й посилає нейтральному арбітру, що обирається обома гравцями, обов'язковий сигнал s_i, який приймає одне з чотирьох значень для кожного гравця: три чистих стратегії й сигнал *A* (згідно лотереї). Отримавши пару повідомлень (s_1, s_2), арбітр випадково у відповідності з лотереєю *L* визначає ситуацію (x_1, x_2). Фінальна ситуація гри визначається арбітром за наступним правилом:

$$\begin{cases} (x_1, x_2), \text{ якщо } s_1 = s_2 = A, \\ (x_1, s_2), \text{ якщо } s_1 = A,\ s_2 = H, C, B, \\ (s_1, x_2), \text{ якщо } s_1 = H, C, B,\ s_2 = A, \\ (s_1, s_2), \text{ якщо } s_i = H, C, B,\ i = 1,2. \end{cases}$$

Тоді для $\forall\ y_1, y_2 \in \{H, C, B\}$:

$$\bar{u}_1(A, A) = \frac{1}{2}u_1(B, H) + \frac{1}{2}u_1(H, B) = 2 >$$

$$> \bar{u}_1(y_1, A) = \frac{1}{2}u_1(y_1, H) + \frac{1}{2}u_1(y_1, B),$$

$$\bar{u}_2(A, A) = \frac{1}{2}u_2(H, y_2) + \frac{1}{2}u_2(B, H) >$$

$$> \frac{1}{2}\bar{u}_2(A, y_2) = \frac{1}{2}u_2(B, y_2) + \frac{1}{2}u_2(H, y_2).$$

Отже, з ймовірністю $1/2$ будуть реалізуватись ситуації (*H,B*) й (*B,H*) й математичне сподівання виграшу кожного гравця дорівнює 2. Зауважимо, що на відміну від рівноваги у змішаних стратегіях ця рівновага не може бути відміненою після реалізації конкретної ситуації. Це рішення повинно бути прийнятим раз й назавжди.

Визначення 1.2. Для всіх $i \in N$ позначимо через $L_{N\setminus i}$ звуження розподілу L на $X_{N\setminus\{i\}}$: $L_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}) = \sum_{x_i \in X_i} L_i(x_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall\ x_{N\setminus i}$. Лотерея L називаєься слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G, якщо виконані нерівності:

$$\forall i \in N,\ \forall y_i \in X_i,\ \sum_{x \in X_N} u_i(x) L(x) \geq \sum_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) L_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}).$$

Позначимо множину слабких рівноваг через *WCNE*(*G*).

Лема 1.2. Множина *WCNE*(*G*) є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса у $E^{|X_N|}$, причому *WCNE*(*G*) $\supseteq$ *CNE*(*G*). Якщо μ – ситуація розширеної гри $\overline{G}$, то відповідна лотерея L є слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G тоді й лише тоді, коли μ є рівновагою Неша у грі $\overline{G}$.

Доведення. За (1.2) лотерея L належить *WCNE*(*G*) тоді й лише тоді, коли

$$\sum_{x \in X_N} u_i(x) L(x) \geq \sum_{x \in X_N} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) L(x),\ \forall y_i \in X_i,\ \forall i \in N. \tag{1.4}$$

Лотерея L є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли вона задовольняє системі нерівностей для $\forall x_i y_i \in X_i$, $\forall i \in N$:

$$\sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right)L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) \geq \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right)L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right). \qquad (1.5)$$

Взявши у нерівностях (1.5) суми по $x_i \in X_i$ при фіксованих *i* та y_i, отримаємо (1.4). Отже, $CNE(G) \subseteq WCNE(G)$. Інші твердження леми очевидні.♦

Отже, $NE(G) \subseteq NE(\overline{G}) \subseteq CNE(G) \subseteq WCNE(G)$.

Проходячи по цьому ланцюжку зліва направо, ми повинні накладати все більше інформаційних обмежень для того, щоб рівноважна ситуація стала стабільною домовленістю. Для *NE* – ситуації і змішаної *NE* – ситуації вимагається лише дотримуватись секретності у виборі індивідуальних стратегій. Для *CNE*– ситуації у доповненні до цього потрібно вимагати, щоб окремі гравці могли спостерігати лише свої власні реалізації спільної лотереї. Для *WCNE(G)*– ситуації необхідно мати нейтрального арбітра, який реалізує випадкову ситуацію лотереї, нічого не повідомляючи окремим гравцям. Далі цей арбітр опитує незалежно й таємно кожного гравця, чи згоден той "всліпу" використовувати ту стратегію, яка зреалізувалась при проведенні лотереї. Потім він повинен повідомити тим гравцям, які добровільно погодились з проведенням лотереї, ситуацію, що випала, й примусити цих гравців дійсно використовувати ці стратегії.

Загальною рисою цих сценаріїв є неможливість з досягненням домовленості про вибір деякої спільної стратегії вести прямий обмін інформації між гравцями. У випадку багаторазового проведення лотереї кооперація стає неявною і важко розпізнати сам факт її існування. Така форма мовчазного зговору описана у літературі про поведінку фірм в умовах олігополії під назвою "Зговір по електричному обладнанню 1950-х років", у якому були замішані 29 компаній США. Уряд США організував аукціон, у якому кожна фірма повинна була таємно й незалежно одна від одної назвати свою ціну на деякий вид електротехнічного обладнання. Однак фірми провели попередні таємні переговори, у яких була визначена частка кожної фірми. Потім продавці узгодили свою політику призначення цін на аукціоні так, щоб кожен з них виявився таким, що призначив найменшу ціну (і, отже, отримав би замовлення від уряду) достатню кількість разів для захоплення визначеної частки ринку. Це було досягнуто за рахунок поділу ринку на чотири зони, причому до кожної зони були приписані різні продавці. Продавці, що були прикріплені до однієї зони, чергували свої ставки. При визначенні привілеїв призначення найменшої ціни орієнтувались на "фази місяця". У результаті утворився начебто випадковий процес, що імітував незалежну поведінку учасників.

Стабільність на основі погроз. Погроза (попередження) може слугувати сильним механізмом кооперації. Для досягнення стабільності домовленості гравці об'являють деяку схему реагування на можливі відхилення інших. Оскільки гравцю, що відхилиться, може стати погано, якщо об'явлена погроза здійсниться, то він остережеться відхилятись, й необов'язкова домовленість виявиться стабільною. Таким чином, попередження є "розумним використанням потенціальної сили". Успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується (Шеллінг, 1970).

Стабільні домовленості, що розглядались у попередньому розділі, вимагали повної секретності у прийнятті рішень. У протилежність цьому погроза є ефективною тільки тоді, коли відхилення неможливо приховати. Отже, для досягнення стабільності на основі застережень потрібно, щоб індивідуальні вибори стратегій відбувались відкрито.

Приклад 1.11 ("Дилема в'язня" (табл. 1.5. у розд. 5)). Нешівською рівновагою у цьому прикладі визначається агресивною поведінкою кожного гравця. Для забезпечення доброзичливості (стабілізації ситуації (M,M)) кожен гравець об'являє принцип своєї поведінки (що є погрозою по відношенню до партнера):

- ♦ Якщо ти будеш поводитись мирно, то і я буду доброзичливим.
- ♦ Якщо ти будеш агресивним, то і я буду поводитись агресивно.

Узявши до уваги таку погрозу від опонента, кожен гравець змушений бути миролюбним, щоб не втратити у виграші.

Звернемо увагу на те, що тут не все так може бути просто – якщо різниця у виграшах при зміні стратегії достатньо велика ("життя – смерть"), то погроза може не зупинити суперника. У СРСР перед Великою Вітчизняною війною була така пісня "Нас не трогай, мы не тронем, а затронеш спуску не дадим, и в воде мы не утонем, и в огне мы не сгорим", що однак, не зупинило агресію.

Для зняття цієї складності можна вважати, що гра повторюється і короткостроковий виграш від некооперативного відхилення перекривається довгостроковими втратами.

Визначення 1.3. Сценарієм попередження у грі $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$

називається набір $\left(x_i,\xi_{N\setminus i};i\in N\right)$, де відображення $\xi_{N\setminus i}:X_i\to X_{N\setminus i}$ - *погроза* гравцю *і*, де

$$\xi_{N\setminus i}\left(x_i\right)=x_{N\setminus i},\ \forall y_i\in X_i\setminus\left\{x_i\right\}:\ u_i\left(y_i,\xi_{N\setminus i}\left(y_i\right)\right)\le u_i\left(x\right). \tag{1.6}$$

Проілюструємо сценарій попередження, розглядаючи гру на нескінченному інтервалі часу. У кожен конкретний момент часу кожен гравець вибирає деяку стратегію, причому він може поміняти свою стратегію у будь-який час. Гра відбувається у відкриту, тобто стратегії усіх гравців усім відомі. Це є головним інформаційним припущенням, котре робить неможливим таємне порушення договору. Гравець, який виконує домовленість, спочатку вибирає узгоджену з іншими стратегію x_i і потім спостерігає за стратегіями $y_{N\setminus i}$ інших гравців. Поки $y_{N\setminus i}=x_{N\setminus i}$, гравець *і* зберігає стратегію x_i. Як тільки якийсь гравець, скажімо *j*, переключається на стратегію $y_j\ne x_j$, гравець *і* переключається раз і назавжди на *і* - ту компоненту $\xi_{N\setminus j}\left(y_j\right)$. Умова стабільності (1.6) означає, що якщо гравці виконують договір, що базується на сценарії попередження, то у жодного гравця не виникає приводу для одностороннього порушення домовленості. Справді, виграш на нескінченному інтервалі часу завжди перевищує виграш на будь-якому інтервалі скінченої довжини.

Звичайно, інколи важко виконати вимогу вести відкриту гру. Так, зокрема, у сучасному світі раптовий напад стає все більш небезпечним (згадаймо події 11 вересня 2001 р. у США). Прикладом механізму обміну інформацією типу попереджувальних погроз є домовленості про взаємну інспекцію ядерної зброї або створення демілітаризованих зон.

Лема 1.3. Нехай $\left(x_i,\xi_{N\setminus i};i\in N\right)$ – сценарій попередження. Тоді ситуація $x=(x_i)_{i\in N}$ є індивідуально раціональною:

$$\sup_{y_i}\inf_{y_{N\setminus i}} u_i\left(y_i,y_{N\setminus i}\right)\le u_i\left(x\right),\forall\ i\in N\ .$$

Доведення. З (1.6) маємо $\inf\limits_{y_{N\setminus i}} u_i\left(y_i,y_{N\setminus i}\right)\le u_i\left(y_i,\xi_{N\setminus i}\left(y_i\right)\right)\le u_i\left(x\right)$ для $\forall\ y_i\in X_i$, зокрема для y_i, на якому досягається супремум. ♦

Лема 1.4. Нехай X_i – компакт, u_i – неперервна функція, $i\in N$. Тоді у грі $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$ існує хоча б одна індивідуально-раціональна ситуація. Для кожної такої ситуації $x=(x_i)_{i\in N}$ для всіх $i\in N$ існує набір погроз $\xi_{N\setminus i}$ такий, що $\left(x_i,\xi_{N\setminus i},i\in N\right)$ є сценарієм попередження.

Доведення. З припущень леми очевидним образом випливає існування у кожного гравця хоча б однієї обережної стратегії x_i і те, що $x = (x_i)_{i \in N}$ є індивідуально-раціональною ситуацією. Для кожного $i \in N$ і для $\forall y_i \in X_i$, $y_i \neq x_i$, виберемо елемент $y_{N\backslash i} = \xi_{N\backslash i}(y_i) \in X_{N\backslash i}$, що $u_i(y_i, y_{N\backslash i}) = \inf_{z_{N\backslash i}} u_i(y_i, z_{N\backslash i}) \leq$ $\leq \sup_{z_i} \inf_{z_{N\backslash i}} u_i(z_i, z_{N\backslash i}) \leq u_i(x)$.♦

Визначення 1.4. Поділом у грі $G = (X_i, u_i, i \in N)$ називається оптимальна за Парето індивідуально-раціональна ситуація.

Позначимо через *I(G)* множину поділів у грі *G*.

Лема 1.5. Нехай для $\forall\, i \in N$ множина X_i компактна, функція u_i неперервна. Тоді у грі *G* є хоча б один поділ.

Таблиця 1.10.

I \ II	*ПТ*	*ВТ*
ВЦ	2,1	0,0
НЦ	1,2	0,0

Доведення. Позначимо через *IR(G)* непорожню компактну підмножину індивідуально-раціональних ситуацій у грі *G*. Виберемо елемент *x* із *IR(G)*, який максимізує $\sum_{i \in N} u_i$ на *IR(G)*. Тоді *x* є оптимальною за Парето ситуацією. Покладемо від супротивного, що ситуація *y* домінує за Парето ситуацію *x*. Тоді $y \in IR(G)$ й $\sum_{i \in N} u_i(x) < \sum_{i \in N} u_i(y)$. Отримане протиріччя доводить лему.♦

З леми 1.3 вливає, що поділ є необов'язковою домовленістю, стабільної відносно індивідуальних відхилень, а також відносно відхилень повної коаліції *N* всіх гравців (оптимальність за Парето). З іншого боку, індивідуальна раціональність і оптимальність за Парето як раз і є двома мінімальними вимогами для кооперативних домовленостей. Отже, множина *I(G)* є максимальною областю переговорів про кооперацію. Якщо множина *I(G)* одноелементна, то кооперативний результат гри не викликає сумнівів. Але у більшості ігор множина *I(G)* містить більше одного елемента, тому вибір серед них є гострою конфліктною ситуацією.

Приклад 1.12 ("Торг"). Гравець І продає неподільний товар гравцю ІІ. Гравець І повинен вирішити, яку призначити ціну: високу (*ВЦ*) чи низьку (*НЦ*). Гравець ІІ (покупець) може або придбати товар (*ПТ*) або відмовитись від нього (*ВТ*). Виграші приведені у таблиці 1.10. Ситуація (*ВЦ*, *ПТ*) є рівновагою у домінуючих стратегіях і оптимальною за Парето. Якщо гравці не обмінюються інформацією, то це беззаперечний результат гри. Але звернемо увагу, що поділів у грі 2 – (*ВЦ*, *ПТ*), (*НЦ*, *ПТ*). Тому при можливості обміну інформацією, другий гравець може виграти, погрожуючи першому: "Я буду купувати лише за низькою ціною та відмовлятись від товару при призначенні високої ціни". Аналогічно, перший гравець може об'явити, що буде продавати товар лише за високою ціною. Результатом здійснення погроз може стати домінована ситуація з виграшем (0,0), тобто програють обоє.

Ще раз повторимо, що "успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується". З іншого боку, успішне застосування погроз у якості механізму попередження вимагає, щоб погрожуючий гравець був зобов'язаний приводити її у дію або принаймні щоб усі в це вірили (погроза "Страшного суду"). Навіть найбільш переконливі та успішні погрози є ризикованими, якщо об'явлена реакція на відхилення не співпадає з найкращою відповіддю гравця, що погрожує. Тому доцільно розділити погрози на "агресивні" та "попереджувальні".

Розглянемо гру двох осіб $\left(X_1, X_2, u_1, u_2\right)$, де множини X_i компактні, а функції u_i неперервні, i=1,2. Найкращим поділом для гравця i є ситуація x^i така, що

$$u_i\left(x^i\right)=\sup_{x\in I(G)} u_i(x)=\sup_x\left\{u_i\left(x\right)\middle|\ u_k\left(x\right)\ge \sup_{y_k}\inf_{y_j} u_k\left(y_k, y_j\right), k\ne j\right\}.$$

Лема 1.6. Нехай x^i – найкращий поділ гравця i, ξ_i – погроза (агресивна) гравця i:

$$\begin{cases}\xi_i\left(x_j^i\right)=x_i^i,\\ \forall y_j\in X_j\setminus\left\{x_j^i\right\},\ u_j\left(y_i,\xi_i\left(y_j\right)\right)=\inf\limits_{y_i} u_j\left(y_j,y_i\right);\end{cases}$$

ξ_j – попередження гравця j:

$$\begin{cases}\xi_j\left(x_i^i\right)=x_j^i,\\ \forall y_j\in X_i\setminus\left\{x_i^i\right\},\ u_j\left(\xi_j\left(y_j\right),y_i\right)=\sup\limits_{y_j} u_j\left(y_j,y_j\right).\end{cases}$$

Тоді $\left(x^i,\xi_i,\xi_j\right)$ – сценарій попереджень.

Доведення. Із визначення погрози маємо:

$u_j(y_j,\xi_i(y_j)) \le \sup_{z_j}\inf_{z_i} u_j(z_j,z_i)$ для $\forall\ y_j \in X_j \setminus \{x_j^i\}$. Оскільки поділ x^i є індивідуально раціональним, то маємо: $u_j(y_j,\xi_i(y_j)) \le u_j(x^i)$ для $\forall\ y_j \in X_j \setminus \{x_j^i\}$. Із визначення попередження маємо: $u_j(\xi_j(y_i),y_i) \ge \inf_{z_i}\sup_{z_j} u_j(z_j,z_i), \forall\ y_i \in X_i \setminus \{x_i^i\}$.

Зафіксуємо стратегію y_i, $y_i \ne x_i^i$, і покладемо $u_i(\xi_j(y_i),y_i) > u_i(x^i)$. Останні дві нерівності разом з умовою $x^i \in IR(G)$ дозволяють стверджувати, що $u_j(\xi_j(y_i),y_i) \ge \inf_{z_i}\sup_{z_j} u_j(z_j,z_i)$. Із неперервності функцій виграшу на компактних множинах стратегій випливає, що існує Парето-оптимальна ситуація z така, що $u_i(y) \le u_i(z)$, $u_j(y) \le u_j(z)$. Отже, для поділу z справедлива нерівність $u_i(x^i) < u_i(z)$. Маємо суперечність. Таким чином, $u_i(\xi_j(y_i),y_i) \le u_i(x^i)$ для $\forall\ y_i \in X_i \setminus \{x_i^i\}$.♦

Таблиця 1.11.

$X_1 \backslash X_2$	x_2^1	x_2^2
x_1^1	1,4	4,1
x_1^2	2,3	3,2

Для даної гри двох осіб (X_1, X_2, u_1, u_2) із скінченою множиною стратегій позначимо через *S(1,G)* її розширення, у якому гравець 1 діє у якості підлеглого (сприймає стратегії другого як екзогенно задані): $S(1;G) = \left(X_1^{X_2}, X_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2\right)$. Нехай гра *G* задається таблицею 1.11. Тоді гра *S(1,G)* задається таблицею 1.12. Розглянемо гру *H=S(r,S(1,G))* ("метагру" Ховарда [2]), у якій гравець 2 є підлеглим.

Таблиця 1.12.

$\tilde{X}_1$	$X_1^{X_2} \backslash X_2$	x_2^1	x_2^2
$\tilde{x}_1^1$	(x_2^1, x_1^1)	1,4	4,1
$\tilde{x}_1^2$	(x_2^1, x_1^2)	2,3	3,2
$\tilde{x}_1^3$	(x_2^2, x_1^1)	4,1	1,4
$\tilde{x}_1^4$	(x_2^2, x_1^2)	3,2	2,3

Лема 1.7. Пара (a_1, a_2) є вектором виграшів для деякої *NE* – ситуації гри *H* тоді й лише тоді, коли виконуються наступні властивості:

а) (a_1, a_2) – допустимий вектор виграшів у грі *G*, тобто для деякого x^* має місце $(a_1, a_2) = (u_1(x^*), u_2(x^*))$;

б) виконуються умови:

$$\inf_{x_2}\sup_{x_1} u_1(x_1, x_2) \le u_1(x^*),\ \sup_{x_2}\inf_{x_1} u_2(x_1, x_2) \le u_2(x^*).$$

Знайдемо найкращий поділ у грі G для 1-го гравця – це буде (x_1^2, x_2^1). Відмітимо, що виграш у ньому 1-го гравця співпадає з 1– виграшем по Штакельбергу у грі *S(1,G)*. Виявляється, що цей збіг не випадковий.

Лема 1.8. У грі $S(i,G)$ i – виграш Штакельберга співпадає з виграшем в найкращому поділі i - го гравця у грі G.

Визначення 1.5. Для гри $G = (X_i, u_i; i \in N)$ α *– ядром* називається підмножина $C_\alpha(G)$ таких ситуацій x^*, що для будь-якої коаліції $T \subseteq N$ знайдеться така погроза коаліції $N \backslash T$ проти потенційних відхилень коаліції T, що $(x^*, \xi_T; T \subseteq N)$ – коаліційний сценарій попередження, тобто не знайдеться коаліції $T \subseteq N$ й спільної стратегії $x_T \in X_T$, для котрих було б виконано: $u_i(x_T, \xi_{N \backslash T}(x_T)) \ge u_i(x^*)$ для $\forall\ i \in T$, $\exists j \in T : u_j(x_T, \xi_{N \backslash T}(x_T)) > u_j(x^*)$.

Згідно визначення, ситуація x^* належить α – ядру, якщо будь-якому відхиленню x_T коаліції T може бути протиставлений хід $x_{N \backslash T}$ доповнювальної коаліції $N \backslash T$, який застерігає хоча б одного члена коаліції T від прийняття стратегії x_T, оскільки у цьому випадку цей гравець програє: $u_i(x_T, x_{N \backslash T}) < u_i(x^*)$ (або ж усі гравці коаліції отримують такий саме виграш, як раніше $u_i(x_T, x_{N \backslash T}) = u_i(x^*), \forall\ i \in T$). Застосовуючи цю властивість до коаліцій $T=N$ й $T = \{i\}$, $i \in N$, маємо, зокрема, що будь-яка ситуація у α – ядрі є також поділом: $C_\alpha(G) \subset I(G)$. Відмітимо також, що оптимальна за Парето *NE* – ситуація також є поділом (разом з пасивною погрозою, що полягає у відсутності реакції, він утворює сценарій попередження). Сильна рівновага також міститься у α – ядрі: $NE(G) \cap PO(G) \subset I(G)$, $SE(G) \subset C_\alpha(G)$. Можна довести, що поділ x з α – ядра не обов'язково є сильною рівновагою. Тим не менш, з $SE(G) = \varnothing$ випливає $C_\alpha(G) = \varnothing$ і навпаки.

У грі з порожнім α – ядром кооперативна стабільність не може бути досягнутою лише за рахунок попереджувальних погроз, оскільки можливе існування коаліції, для якої відхилення є вигідним, не дивлячись на відповідні дії інших гравців. У цьому випадку для забезпечення стабільності можна ввести сценарій поведінки, у якому деякі гравці з коаліції "відступників" підкуповуються таким чином, щоб інші члени коаліції "відступників" понесли суттєві втрати.

Розглянемо гру "Вибір більшістю голосів" (див. Розділ 3), у якій впорядкування гравців утворюють цикл Кондорсе: $u_1(a) > u_1(b) > u_1(c)$, $u_2(b) > u_2(c) > u_2(a)$, $u_3(c) > u_3(a) > u_3(b)$.

Розглянемо ситуацію $x = (b,b,c)$, у якій вибирається кандидат b. Стабільність ситуації x може бути порушеною коаліцією $\{1,3\}$: гравці 1 і 3, вибираючи кандидата a, покращують свій виграш. Тим не менш, гравець 2 може запропонувати гравцю 3 кращий варіант, підтримуючи кандидата c. При цьому гравець 1 отримає найменший виграш. Передбачаючи, що гравець 2 може підкупити гравця 3, гравець 1 не буде входити у коаліцію $\{1,3\}$, оскільки у результаті двохетапного порушення початкової домовленості (b,b,c), він може отримати найгірший результат.

Приклад 1.13 ("Дилема в'язня з трьома гравцями"). У кожного з гравців є агресивна стратегія (A) й кооперативна стратегія (K). Гра симетрична. Нижче перераховані 4 варіанта виграшів гравців : $(K,K,K) \to (2,2,2)$, $(A,K,K) \to (3,1,1)$, $(A,A,K) \to (2,2,0)$, $(A,A,A) \to (1,1,1)$ (інші 4 – симетричні).

Легко перевірити, що у цій грі рівновага у домінуючих стратегіях є домінованою за Парето і не існує сильної рівноваги, α – ядро містить чотири елементи і співпадає з множиною поділів.

Приклад 1.14 ("Голосування за одного з трьох кандидатів"). Кожен гравець пропонує одного з трьох кандидатів, зокрема, самого себе. Отже, $X_i = \{1,2,3\}$. Сім з 27 можливих (3^3) векторів виграшів приводяться нижче (останні відновлюються з міркувань симетрії): $(1,2,3) \to (0,0,0)$, $(1,2,1) \to (0,0,-1)$, $(1,3,1) \to (0,0,0)$, $(1,1,1) \to (3,1,1)$, $(1,3,2) \to (0,2,2)$, $(2,3,1) \to (2,2,2)$, $(2,3,2) \to (-1,3,3)$.

Легко перевірити, що у цій грі немає рівноваги Неша, існує 5 поділів, α – ядро складається з двох ситуацій (типу (2,3,1)).

Визначення 1.6. β *– ядром* гри $G = (X_i, u_i; i \in N)$ називається множина $C_\beta(G)$ ситуацій x^*, що задовольняють наступній властивості. Для будь-якої коаліції $T \subset N$, існує спільна стратегія доповнювальної коаліції $x_{N \setminus T} \in X_{N \setminus T}$ така, що для $\forall\ x_T \in X_T$ не може бути виконаною наступна система нерівностей:

$$\begin{cases} u_i(x_T, x_{N\setminus T}) \geq u_i(x^*) \text{ для } \forall i \in T, \\ u_j(x_T, x_{N\setminus T}) > u_j(x^*) \text{ для деякого } j \in T. \end{cases}$$

Стабільність ситуацій з β – ядра є більш сильною, ніж стабільність ситуацій з α – ядра. Коаліція *N\T* може попередити відхилення коаліції *T*, навіть якщо члени коаліції *T* вибирають свою спільну стратегію таємно. Порівнюючи визначення 1.4 – 1.6, маємо $SE(G) \subseteq C_\beta(G) \subseteq C_\alpha(G)$. Для того, щоб дати інтерпретацію визначенню 1.6, уявимо, що гра $G(\infty)$ повторюється у часі. У момент *t*, *t=1,2,…*, кожен гравець *i*, знаючи попередні ходи $x^1,...,x^{t-1}$, вибирає стратегію x_i^t. Виграш кожного гравця після зробленого ходу x^t:

$$u_i(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} u_i(x^s) \text{ ("середнє Чезаро").} \qquad (1.7)$$

Можна показати, що всі ситуації із змішаного β – ядра гри *G* можуть бути отриманими як сильні рівноваги у грі $G(\infty)$. Навпаки, виграші, що відповідають сильним рівновагам у грі $G(\infty)$, покривають опуклу оболонку виграшів, що відповідають змішаному β – ядру гри *G*. Таким чином, з допомогою гри, що повторюється, формалізується поняття кооперації із застосуванням погроз. Відхилення, тактично вигідні, стають невигідними стратегічно, якщо об'явлена погроза приводиться у виконання. Для цього необхідно, щоб довготривалі виграші завжди перевищували короткострокові (середнє Чезаро забезпечує виконання цієї умови).

Розглянемо більш простий варіант гри, що повторюється, у якій загальний виграш є "дисконтованою" сумою поточних виграшів.

Нехай у момент $t = 1$ розігрується гра *G* і реалізується ситуація x^1. Деякий випадковий механізм диктує або закінчити гру з ймовірністю $(1-\delta)$, $0 < \delta < 1$, або продовжити гру з ймовірністю δ і тоді гра *G* наново розігрується у момент $t = 2$. Нехай гра *G* розігрується нескінченну кількість разів, тоді загальний виграш гравця $i \in N$ дорівнює:

$$u_i(\infty)=(1-\delta)\left(u_i\left(x^1\right)+\delta u_i\left(x^2\right)+\ldots+\delta^{t-1}u_i\left(x^t\right)+\ldots\right). \qquad (1.8)$$

Відомо, що при $\delta\to 1$ сума ряда (1.8) прямує до *середнього Чезаро* (1.7), якщо границя в (1.7) існує. Покладемо $\beta_i=\inf\limits_{x_{N\setminus i}}\sup\limits_{x_i}u_i(x)$ – максимальний виграш гравця *i*, який він може собі забезпечити при умові, що на момент вибору своєї стратегії він знає стратегії всіх інших гравців. Виберемо поділ x^* так, щоб виконувалась умова $\beta_i<u_i\left(x^*\right)$ для $\forall i\in N$.

Знайдемо *NE*– ситуацію σ^* у грі $G(\infty)$, яка дає кожному гравцю виграш $u_i\left(x^*\right)$. Для цього для кожного $j\in N$ виберемо набір стратегій $\tilde{x}_{N\setminus j}$ доповню вальної коаліції гравців $N\setminus\{j\}$ таку, що $\sup\limits_{x_j}u_j\left(x_j,\tilde{x}_{N\setminus j}\right)=\beta_j$. Тоді для кожного $i\in N$ стратегія σ_i^* гравця *i* у грі $G(\infty)$ визначається наступним чином: $x_i^1=x_i^*$; якщо $x^1=x^2=\ldots=x^{t-1}=x^*$, то $x_i^t=x_i^*$; якщо $x^1=x^2=\ldots=x^{t-2}\neq x^{t-1}$, вибрати *j*, для якого $x_j^{t-1}\neq x_j^*$, й далі вибирати $\tilde{x}_i=x_i^t=x_i^{t+1}=\ldots$ для всіх $i\in N\setminus\{j\}$.

Нехай $u_i^*\left(x_{N\setminus i}^*\right)=\sup\limits_{x_i}u_i\left(x_i,x_{N\setminus i}^*\right)$, тоді "короткостроковий" дохід гравця *i* у момент *t* за рахунок відхилення від стратегії x_i^* дорівнює $\Delta_i=u_i^*\left(x_{N\setminus i}^*\right)-u_i\left(x^*\right)$. Порівнюючи його з "довгостроковими" втратами $\varepsilon_i=\sum\limits_{t=1}^{\infty}\delta^t\left(u_i\left(x^*\right)-\beta_i\right)$, отримуємо "умову стабільності": $\Delta_i\le\varepsilon_i$, яка еквівалентна умові: $1-\delta\le\left(u_i\left(x^*\right)-\beta_i\right)\Big/\left(u_i^*\left(x_{N\setminus i}^*\right)-\beta_i\right)$. (1.9)

Таким чином, якщо δ є досить близьким до 1, умови (1.9) виконуються для $\forall i\in N$, і, отже, σ^* є *NE* – ситуацією гри $G(\infty)$.

Лема 1.9. При виконанні умов (1.9) для $\forall i\in N$ гра $G(\infty)$ з виграшем (1.8) має рівновагу, якій відповідає послідовність $x^*=x^1=x^2=\ldots=x^t=\ldots$

Таким чином, *NE* – виграш гравця *i* дорівнює $u_i\left(x^*\right)$. Розглянемо випадок, у якому кожен гравець враховує тільки останній хід партнерів.

Приклад 1.15 (Нескінченна гра "Дилема в'язня"). Стратегією 1-го гравця буде трійка (*B*; *C*, *D*), де *B* – стратегія, яку він вибирає на кроці $t-1$; *C* – стратегія, яку він вибирає у відповідь на мирну стратегію 2-го гравця на кроці $t-1$; D – у відповідь на агресивну на кроці $t-1$. Тоді у будь-який момент $t \geq 2$ маємо біматричну гру 8×8 з множиною стратегій 1-го гравця:

$$a_1=\left(M_1;M_1,M_1\right),\ a_2=\left(A_1;A_1,A_1\right),$$

$$a_3=\left(M_1;M_1,A_1\right), a_4=\left(A_1;M_1,A_1\right),\ a_5=\left(M_1;A_1,M_1\right),\ a_6=\left(A_1;A_1,M_1\right),$$

$$a_7=\left(M_1;A_1,A_1\right),\ a_8=\left(A_1;M_1,M_1\right).$$

Аналогічно описуються стратегії b_i, $i=\overline{1{,}8}$, 2-го гравця. Дві стратегії кожного гравця у цій грі можна відкинути (оскільки стратегія $\left(M_1;A_1,A_1\right)$ еквівалентна стратегії $\left(A_1;A_1,A_1\right)$, $\left(A_1;M_1,M_1\right)\sim\left(M_1;M_1,M_1\right)$). Залишається гра 6×6 (див. Табл. 1.13). "Північно-західна" матриця 2х2 є власне матрицею початкової гри (для зручності значення виграшів змінені). В нескінченній грі гравці "блукають" клітинами цієї матриці. При "зацикленні" виграші визначаються середнім арифметичним відповідних елементів початкової матриці, інакше виграш є "чистим". В цій грі мається дві *NE*– ситуації – $\left(a_2,b_2\right)$ (некооперативна рівновага) й нова *NE* – рівновага $\left(a_3,b_3\right)$, у якій обидва гравці застосовують стратегію "як ти, так і я". Відмітимо, що у цій грі "мирні" стратегії a_1, b_1 не домінуються "агресивними" стратегіями a_2, b_2. Однак після послідовного відкидання домінованих стратегій мирні стратегії будуть відкинуті і складною рівновагою виявиться ситуація $\left(a_3,b_3\right)$ (яка до того ж буде і Парето- оптимальною).

Таблиця 1.13.

A \ *B*	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	3,3	0,4	3,3	3,3	0,4	0,4
a_2	4,0	1,1	1,1	1,1	4,0	4,0
a_3	3,3	1,1	3,3	2,2	2,2	2,2
a_4	3,3	1,1	2,2	1,1	2,2	2,2
a_5	4,0	0,4	2,2	2,2	2,2	0,4
a_6	4,0	0,4	2,2	2,2	4,0	2,2

Коротко розглянемо результати для ігор двох осіб із скінченними множинами стратегій (хоча більшість результатів залишаються справедливими і для компактних множин стратегій та неперервних функцій виграшів).

Лема 1.10. α – ядро гри двох осіб співпадає з множиною всіх поділів ($C_\alpha(G)=I(G)$), β – ядро задається умовами:

$$x^* \in C_\beta(G) \Leftrightarrow \left\{ x^* \in PO \,\middle|\, \inf_{y_i} \sup_{y_j} u_j(y_i, y_j) \le u_j(x^*), \quad j=1,2 \right\}.$$

Доведення випливає з визначень α, β – ядер для $|N|=2$.

Відмітимо, що β – ядро, зокрема, може бути порожнім.

Приклад 1.16. Гравці вибирають число з множини $A=\{1,2,...,10\}$. Нехай вибрано x_1, x_2 й $x_1+x_2=10$, тоді $u_i(x_i)=x_i$. В інших випадках вектор виграшів дорівнює (4,0), якщо (x_1+x_2) парне, й (0,4) інакше.

Гарантований виграш i - го гравця $\alpha_i = \sup_{x_i}\inf_{x_j} u_i(x_i,x_j)=0$, тому поділами є всі Парето-оптимальні ситуації у грі. Очевидно, що такими будуть такі, для яких $x_1+x_2=10$. Оскільки $\inf_{x_j}\sup_{x_i} u_i(x_i,x_j)=4$, $i=1,2$, то з леми 1.9 випливає, що β – ядро складається з трьох ситуацій (4,6), (5,5), (6,4).

Для того щоб стабілізувати з допомогою попереджувальних погроз, наприклад, поділ (3,7), необхідно, щоб обидва гравці погодились на вибір стратегій у відкриту. У протилежність до цього, реалізація поділу з β – ядра потребує більш слабкого інформаційного обмеження: потрібен лише сигнал, що інформує гравця про відхилення його партнера. З іншого боку, у багатьох іграх двох осіб α і β ядра співпадають. Зокрема, це справедливо для змішаного розширення, оскільки обидві гри з нульовою сумою $(M_1, M_2, \bar{u}_1)$ й $(M_1, M_2, -\bar{u}_2)$ мають ціну.

Розглянемо підмножину таких поділів, котрі можуть бути стабілізованими парою погроз (попереджень), що співпадають з найкращими відповідями гравців.

Визначення 1.7. γ *– ядро* гри двох осіб $C_\gamma(G)$ складається з таких поділів x^*, для котрих існує сценарій (x^*, ξ_1, ξ_2), у якому погрози ξ_i, $i=1,2$, є попередженнями. Тобто $\forall x_j \ne x_j^*$ має місце

$$\begin{cases} u_j\left(x_j,\xi_i\left(x_j\right)\right)\le u_j\left(x^*\right), \\ u_i\left(x_j,\xi_i\left(x_j\right)\right)=\sup\limits_{x_i} u_i\left(x_j,x_i\right). \end{cases}$$

Лема 1.11. Нехай функції u_i, i=1,2, взаємно однозначні, $S_i = \sup\left\{u_i\left(x_i,x_j\right) \middle| \left(x_i,x_j\right)\in O_j\right\}$ – i– виграш Штакельберга, де O_j – множина найкращих відповідей гравця $j \ne i$. Тоді γ – ядро складається з Паретівських ситуацій, для яких

$$S_i \le u_i\left(x\right); i=1,2 . \tag{1.10}$$

Доведення. Нехай x^* – оптимум Парето, що задовольняє (1.10). Для будь-якого $x_i \ne x_i^*$ позначимо через $x_j=\xi_j\left(x_i\right)$ найкращу відповідь гравця *j*. За визначенням : $u_i\left(x_i,\xi_j\left(x_i\right)\right)\le S_i \le u_i\left(x^*\right)$, i=1,2, $x_i \ne x_i^*$. Отже, $\left(x^*,\xi_1,\xi_2\right)$ є сценарієм попередження, а тому ситуація x^* індивідуально раціональна. Таким чином, x^* є поділом. Навпаки, нехай $x^*\in C_\gamma\left(G\right)$. Тоді існує сценарій попередження $\left(x^*,\xi_1,\xi_2\right)$, де $\xi_i\left(x_j\right)$ – єдина (за припущенням) стратегія найкращої відповіді гравця *i* на x_j. Покажемо, що x^* задовольняє (1.10). Виберемо $x_i \ne x_i^*$. За властивістю ξ_j маємо: $u_i\left(x_i,\xi_j\left(x_i\right)\right)\le u_i\left(x^*\right)$.

Від супротивного доведемо, що $x_j=\xi_j\left(x_i^*\right)\Rightarrow u_i\left(x_i^*,x_j\right)\le u_i\left(x^*\right)$. Нехай $u_i\left(x^*\right)< u_i\left(x_i^*,x_j\right)$. З оптимальності за Парето x^* отримуємо: $\sup\limits_{y_j} u_j\left(x_i^*,y_j\right)=u_j\left(x_i^*,x_j\right)<u_j\left(x^*\right)$, що суперечить припущенню.♦

Відмітимо, що припущення про взаємну однозначність у лемі може бути опущеним, якщо S_i замінити на величину $\gamma_i=\sup\limits_{x_i}\inf\limits_{x_j\in O_j\left(x_i\right)} u_i\left(x_i,x_j\right)$, що характеризує максимальний гарантований виграш лідера (гравця *i*) без припущення про доброзичливість підлеглого.

Лема встановлює зв'язок між здійсненням стабільності з допомогою попереджень й боротьбою за лідерство. Вона стверджує, що у грі *G* виникає боротьба за лідерство тоді й лише тоді, коли її γ – ядро порожнє. Таким чином, у грі з порожнім γ – ядром стабільності будь-якого поділу загрожує можливість захоплення лідерства одним з гравців. Разом з тим, другий гравець у цьому випадку може використовувати погрозу типу "Машина страшного суду". Правдоподібність успіху цих тактик з точки зору стороннього спостерігача конфлікту однакова.

Приклад 1.17. Дві фірми поставляють на ринок товар в об'ємах x_i, i=1,2. Ціна на товар визначається формулою $p = p_0 - (x_1 + x_2)$ (для $(x_1 + x_2) \le p_0$). Витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва однакові у обох фірм і є постійними. Розглядається наступна гра з парамерами p_0, c, $0 < \frac{1}{2} p_0 < c < p_0$:

$$\left(X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2} p_0 \right], u_i(x_1, x_2) = \left[p_0 - (x_1 + x_2) \right] \cdot x_i - c x_i;\ i = 1,2 \right).$$

Оскільки $u = u_1 + u_2 = -x^2 + (p_0 - c) \cdot x$, де $x = x_1 + x_2$, то максимальний загальний дохід $u^0 = \frac{1}{4}(p_0 - c)^2$ при $x^0 = \frac{1}{2}(p_0 - c)$ є Парето-оптимальним. Гарантований виграш $\alpha_i = \sup_{x_i} \inf_{x_j} u_i = \sup_{x_i} u_i\left(x_i, \frac{1}{2} p_0 \right) = 0$. Таким чином, поділи утворюють довільний розподіл максимального сумарного доходу. Найкраща відповідь першого гравця: $O_1(x_2) = \frac{1}{2}(p_0 - c) - \frac{1}{2} x_2$, тоді

$$\gamma_2 = S_2 = \sup_{0 \le x_2 \le \frac{1}{2} p_0} u_2(O_2(x_2), x_2) = \sup_{0 \le x_2 \le \frac{1}{2} p_0} \frac{1}{2}\left[(p_0 - c) x_2 - x_2^2 \right] = \frac{1}{8}(p_0 - c)^2 .$$

Оскільки гра є симетричною, то $S_1 = S_2$. Отже виграш (S_1, S_2) відповідає деякому поділу й за лемою 1.10, γ – ядро складається з єдиного поділу $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}(p_0 - c), \frac{1}{4}(p_0 - c) \right)$, що порівну розподіляє максимальний сумарний доход. У цій грі γ – ядро є справедливою кооперативною ситуацією, що реалізується за допомогою природних погроз O_1, O_2. Реалізація будь-якого несправедливого (нерівного) розподілу максимального доходу вимагає тактики залякування.

Можливо проаналізувати гру і у випадку непостійних (зростаючих або спадаючих) витрат на одиницю продукції при збільшенні масштабів виробництва.

Цікаву класифікацію ігор двох осіб дає наступна теорема.

Теорема 1.1. γ й β ядра не можуть бути порожніми одночасно. Якщо γ й β ядра непорожні, то вони перетинаються.

Наслідок. Ігри двох осіб розпадаються на три класи:

1. $C_\gamma = \varnothing$, $C_\beta \neq \varnothing$ (боротьба за право першого ходу (за лідерство));
2. $C_\beta = \varnothing$, $C_\gamma \neq \varnothing$ (боротьба за право другого ходу (за підлеглість));
3. $C_\beta \cap C_\gamma \neq \varnothing$ (у цьому випадку множина $C_\beta \cap C_\gamma$ є областю для кооперації з використанням погроз).

У свою чергу клас 3 розпадається на 4 підкласи:

3.1. $C_\beta \cap C_\gamma = C_\gamma$ (лідером бути краще, оскільки $\gamma \geq \beta$, але можливий компроміс, що усуває небезпеку захоплення лідерства підлеглим);

3.2. $C_\beta \cap C_\gamma = C_\beta$ (підлеглим бути краще ($\beta \geq \gamma$), але можливий компроміс, коли у лідера не має підстав відмовитись від лідерства);

3.3. $C_\beta \cap C_\gamma = \left\{x \middle| \; u_1(x) \geq \gamma_1, u_2(x) \geq \beta_2 \right\}$(лідером є гравець 1);

3.4. $C_\beta \cap C_\gamma = \left\{x \middle| \; u_2(x) \geq \gamma_2, \; u_1(x) \geq \beta_1 \right\}$(лідером є гравець2).

На закінчення приведемо ще одне визначення "ядра" (читачу пропонуємо спробувати самому запропонувати концепцію ядра, бажано конструктивну й розумну).

Визначення 1.8. Нехай $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$ – сценарій попередження гри *G*. Погроза називається гарантованою, якщо не принесе втрат гравцю, що погрожує:

$$u_1(x_1, \xi_2(x_1)) \leq u_1\left(x^*\right) \leq u_1(\xi_1(x_2), x_2),$$
$$u_2(\xi_1(x_2), x_2) \leq u_2(x^*) \leq u_2(x_1, \xi_2(x_1)), \forall x_1, x_2 .$$

Тоді g – *ядром* гри *G* називається множина $C_g(G)$ ситуацій x^*, для яких існує хоча б один гарантований сценарій попередження $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$.

Лема 1.12. $x \in C_g(G) \Leftrightarrow x \in PO$ і $u_i(x) \leq \beta_i$ для $\forall i \in N$.

Доведення виплиає з двох попередніх лем, звідки $C_g(G) \subseteq C_\gamma(G)$, зокрема, $C_g(G)$ може бути порожнім.♦

Контрольні завдання до §1

2. Знайти сильні рівноваги Неша

2.1.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	1,2	1,2	2,1
b_1	1,2	1,3	2,1
c_1	0,0	0,1	2,1

2.2.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	3,1	2,2	1,1
b_1	2,1	3,1	2,1
c_1	2,3	3,2	2,1

2.3.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	2,4	1,3	3,4
b_1	2,5	3,3	4,3
c_1	1,1	4,2	4,2

2.4.

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1	1,3	3,2
b_1	1,3	2,2	3,1
c_1	3,2	2,3	3,3

3. Знайти рівноваги Неша у спільних змішаних стратегіях:

3.1.

X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	2,2	5,1
b_1	1,5	1,1

2.2

X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	2,2	5,1
b_1	1,4	1,1

§2. Ігри у характеристичній формі

В кооперативних іграх доцільно розглядати виграші не лише для окремих гравців (індивідуальні корисності), і не лише для всієї спільноти N (колективна функція корисності, наприклад, утилітарна чи егалітарна), але й для кожної коаліції (підмножини гравців з N).

Нехай $N=\{1,...,n\}$ – множина потенційно можливих споживачів об'єкта колективного користування. Кожен споживач може або обслуговуватись або ні, наприклад, він або отримує телефон, або ні, підключається до центрального водопостачання або ні і т.д. Витрати на обслуговування коаліції гравців S, $S \subseteq N$, підсумовуються у загальну функцію витрат $c(S) \ge 0$, де $c(S)$ – мінімальні витрати на обслуговування коаліції гравців S найбільш ефективним способом. Необхідно обслужити всіх гравців й поділити відповідні витрати, тобто визначити вектор $x=(x_i)_{i\in N}$ такий, що $\sum_{i\in N} x_i = c(N)$. Зокрема, для деякого j може бути, що $x_j = 0$ (j- й гравець не несе жодних витрат), для деякого k $x_k < 0$ (k-му гравцю "доплачують").

Розглянемо типовий приклад такої проблеми з області планування капіталовкладень – побудова сусідніми трьома містечками спільної системи водопостачання. Опишемо витрати на будівництво. Місто A окремо – 120 одиниць витрат ($c(A)=120$), $c(B)=140$, $c(C)=120$. Якщо міста A й B об'єднають свої зусилля, то $c(A,B)=170$; $c(B,C)=190$; $c(A,C)=160$. Якщо проект буде реалізуватись спільно всіма, то $c(A,B,C)=255$. Відмітимо, що для зручності позначення $c(A,B,C)$ і т.п. означає $c(\{A,B,C\})$.

Нехай про співпрацю домовились A і B, тоді економія витрат $\Delta c(A,B)$ для них дорівнює $c(A)+c(B)-c(A,B)=90$. Якщо A й B домовились поділити $\Delta c(A,B)=90$ порівну (егалітарне рішення), то остаточні витрати будуть $c_A = 120-45=75$, $c_B=140-45=95$.

Оскільки загальні витрати будуть рівними $290=170+120$ (C будує самостійно), то при раціональній поведінці всіх гравців їм потрібно кооперуватись (щоб мати витрати 255 одиниць).

Нехай усі три гравці співпрацюють, економія $\Delta c(A,B,C)=c(A)+c(B)+c(C)-c(A,B,C)=125$ ділиться порівну. Тоді

$$c_A = 120 - \frac{1}{3}(125) = 78\frac{1}{3},\ c_B = 140 - \frac{1}{3}(125) = 98\frac{1}{3},$$

$$c_C = 120 - \frac{1}{3}(125) = 78\frac{1}{3}.$$

Хоча загальні витрати у даному випадку менші за попередній варіант, але "раціонально мислячі" A й B на нього не погодяться! Адже вони несуть витрати більші ($c_A + c_B = 176\,{}^1\!/_3$), ніж у попередньому випадку, коли "відділяться" ($c(A,B) = 170$). Отже, егалітарний поділ спільної економії у даному випадку нелогічний.

"*Принцип відокремлення*" говорить, що будь-яка коаліція не заплатить ціну, що є більшою за витрати, які вона понесе, якщо захоче обслуговуватись самостійно:

$$\forall S \subseteq N: \sum_{i \in S} x_i \le c(S). \tag{2.1}$$

Визначення 2.1. Будемо говорити, що задана кооперативна гра у *характеристичній формі* (N,c), якщо задано $N = \{1,\ldots,n\}$ – множину гравців й функцію витрат c, котра зв'язує з кожною коаліцією $S \subseteq N$ її витрати $c(S) \ge 0$.

Визначення 2.2. Ядром гри (N,c) називається розподіл витрат $x = (x_i)_{i \in N}$, $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$, що задовольняє умові (2.1).

Принцип відокремлення можна переписати у еквівалентній формі у вигляді "принципу відсутності субсидій": ніяка коаліція не повинна платити менше, ніж додаткові витрати на її обслуговування (різниця у витратах у коаліції й без неї):

$$\sum_{i \in S} x_i \ge c(N) - c(N \setminus S), \forall S \subseteq N. \tag{2.2}$$

Дійсно, оскільки $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$, то з (2.1) безпосередньо випливає $\sum_{i \in S} x_i \ge \sum_{i \in N} x_i - c(N \setminus S) \Leftrightarrow c(N \setminus S) \ge \sum_{i \in N \setminus S} x_i$.

Якщо розглядається кооперативна гра (N,v) по розподілу прибутку, то у формулах (2.1), (2.2) необхідно відповідно поміняти знаки.

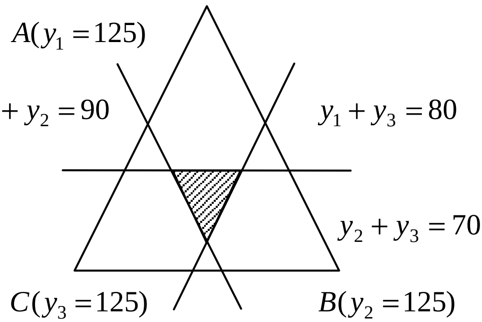
Повернемось до нашого прикладу. Знайдемо розподіл витрат з ядра гри (при такому розподілі, якщо він існує, будь-якій коаліції гравців не вигідно відділятись). Ядро визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 255, x_1 \le 120, x_2 \le 140, x_3 \le 120, \\ x_1 + x_2 \le 170, x_2 + x_3 \le 190, x_1 + x_3 \le 160. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для того, щоб представити розв'язок системи (2.3) більш наглядно, зробимо заміну змінних $y_i = c(i) - x_i$ (y_i – "економія" витрат гравця i). Отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 255, \;\; y_i \ge 0, \;\; i = 1,2,3, \\ y_1 + y_2 \ge 90, \;\; y_2 + y_3 \ge 70, \;\; y_1 + y_3 \ge 80. \end{cases} \quad (2.4)$$

Використаємо барицентричні координати – виділимо на площині три точки, яким відповідають розв'язки системи (2.4), одержимо $(y_1, y_2, y_3) = (125,0,0)$, $(0,125,0)$, $(0,0,125)$ (вершини



трикутника ABC (Рис. 2.1). Тоді рівнянню $y_1 + y_2 = 80$ буде відповідати пряма, паралельна стороні AC, $y_1 + y_3 = 90$ -паралельна AB, $y_2 + y_3 = 70$ – паралельна BC. Ядром гри будуть точки заштрихованого трикутника. Логічно вибрати за розв'язок центр цього трикутника (центр описаного кола) - егалітарний розв'язок $y^* = (51\tfrac{2}{3}, 41\tfrac{2}{3}, 31\tfrac{2}{3})$. Повертаючись до змінних x_i, матимемо $x^* = (68\tfrac{1}{3}, 98\tfrac{1}{3}, 88\tfrac{1}{3})$. Відмітимо, що ядро кооперативної гри може бути порожнім, тобто "повна кооперація" неможлива – існує хоча б одна коаліція, якій вигідно відділитись. Так, нехай витрати всіх власних коаліцій у нашому прикладі залишають без змін, витрати максимальної коаліції $c(A, B, C) > 260$. Тоді з $\{x_1 + x_2 \le 170, \; x_2 + x_3 \le 190, \; x_1 + x_3 \le 160\}$ випливає нерівність

$2(x_1 + x_2 + x_3) \leq 520$, що суперечить $x_1 + x_2 + x_3 > 260$.

Виникає питання: при яких умовах ядро кооперативної гри не порожнє? Необхідною умовою непорожності ядра є *субадитивність*: якщо коаліції $S_1,...,S_k$ утворюють розбиття максимальної коаліції ($S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = N$), то

$$\sum_{i=1}^{k} c(S_i) \geq c(N). \qquad (2.5)$$

Дійсно, нехай (2.5) не виконується, тобто $\sum_{i=1}^{k} c(S_i) < c(N)$. З принципу відокремлення $\sum_{i \in S_j} x_i \leq c(S_j)$ для $\forall j = \overline{1,k}$. Беручи суму по $j = \overline{1,k}$, маємо суперечність : $\sum_{j=1}^{k} \sum_{i \in S_j} x_i = \sum_{i \in N} x_i = c(N) \leq \sum_{j=1}^{k} c(S_j) < c(N)$.

Але субадитивність є лише необхідною умовою непорожності ядра. У розглянутому вище прикладі, наприклад, якщо $c(A,B,C) = 261$, то ядро буде порожнім, хоча властивість субадитивності виконується:

$$c(A,B,C) \leq c(A) + c(B) + c(C),\ c(A,B,C) \leq c(A) + c(B,C),$$
$$c(A,B,C) \leq c(B) + c(A,C),\ c(A,B,C) \leq c(C) + c(A,B).$$

Необхідною й достатньою умовою непорожності ядра гри (N,c) є суттєве підсилення властивості (2.5).

Визначення 2.3. Збалансованим покриттям множини гравців N є таке відображення δ з $2^N \setminus \{N\}$ (множина власних коаліцій) у $[0,1]$, що $\sum_{S: i \in S} \delta_S = 1, \forall i \in N$ (сума береться по всіх власних коаліціях, яким належить гравець i).

Теорема 2.1 (Бондарева,1961). *Ядро гри не порожнє тоді й лише тоді, коли для будь-якого збалансованого покриття* δ

$$\sum_{S \subset N} \delta_S \cdot c(S) \geq c(N). \qquad (2.6)$$

Доведення. Нехай x належить ядру гри (N,c) і δ – збалансоване покриття. Тоді для $\forall S \subset N$: $\sum_{i\in S} x_i \le c(S) \Rightarrow \delta_S \left(\sum_{i\in S} x_i \right) \le \delta_S \cdot c(S)$. Беручи суму у останній нерівності і враховуючи (2.6): $\sum_{S\subset N} \delta_S c(S) \ge \sum_{S\subset N} \delta(S) x(S) = \sum_{i\in N} \sum_{S:i\in S} \delta_S x_i = \sum_{i\in N} x_i = c(N)$.

Нехай тепер ядро гри (N,c) порожнє. Це означає, що гіперплощина $\sum_{i\in N} x_i = c(N)$ не перетинається з непорожньою опуклою підмножиною з E^N, що визначається нерівностями: $\sum_{i\in N} x_i \le c(S)$ для $\forall S \subset N$. За теоремою опуклого аналізу про відділяючу гіперплощину, маємо для кожної коаліції S існування такого невід'ємного числа δ_S, що для $\forall x \in E^N$, $\sum_{i\in N} x_i = \sum_{S\subset N} \delta_S \left(\sum_{i\in S} x_i \right)$ та $\sum_{S\subset N} \delta_S c(S) < c(N)$, що суперечить (2.6).♦

Для гри з розподілом прибутків (2.6) заміняється умовою:

$$\sum_{S\subset N} \delta_S v(S) \le v(N). \tag{2.7}$$

Умови (2.6), (2.7) називаються збалансованістю гри (N,c) та змістовно вони означають, що кооперативні витрати $c(S)$ власних коаліцій не повинні бути занадто малими у порівнянні з витратами $c(N)$ максимальної коаліції (відповідно прибутки $v(S)$ власних коаліцій – занадто великими у порівнянні з $v(N)$).

Відмітимо, що субадитивність є частинним випадком умови (2.6) ($\delta_{S_i} = 1$ для $i = \overline{1,k}$, $\delta_S = 0$ для всіх інших коаліцій).

Відмітимо також, що збалансовані покриття утворюють опуклий компактний многогранник у $E^{2^N \setminus \{N\}}$. Отже, властивість (2.6) досить перевірити для крайніх точок цього многогранника, що приводить до скінченної кількості лінійних нерівностей виду (2.6).

Розглянемо гру з трьома гравцями. Збалансовані покриття утворюють многогранник у E^6 розмірності 3 з п'ятьма крайніми точками. Чотири з них відповідають розбиттям: $(\{1\},\{2\},\{3\})$, $(\{1\},\{2,3\})$, $(\{2\},\{1,3\})$, $(\{3\},\{1,2\})$. Для п'ятого покриття $\delta_S = 1/2$ для $|S| = 2$ й $\delta_S = 0$ для $|S| = 1$.

Отже, гра (N,c) з трьома гравцями має непорожнє ядро тоді й лише тоді, коли

$$c(1)+c(2)+c(3)\ge c(N),\ c(1)+c(2,3)\ge c(N), \qquad (2.8)$$
$$c(2)+c(1,3)\ge c(N), c(3)+c(2,1)\ge$$
$$c(N), 0.5(c(1,2)+c(1,3)+c(2,3))\ge c(N).$$

В кооперативній грі з чотирма гравцями збалансовані покриття утворюють многогранник у E^{14} з 23 крайніми точками! Кількість нерівностей виду (2.6) можна суттєво скоротити, якщо гра "супераддитивна": для $\forall S,T$, $S\bigcap T=\varnothing \ \Rightarrow \ c(S)+c(T)\ge c(S\bigcup T)$ (відмітимо, що більшість "економічних" ігор є супераддитивними).

Для такої гри умови непорожності ядра зводяться до перевірки нерівностей:

$$\tfrac{1}{3}(c(1,2,3)+c(2,3,4)+c(1,3,4)+c(1,2,4))\ge c(N), \qquad (2.9)$$

$\tfrac{1}{2}(c(1,2,3)+c(2,3,4)+c(1,4))\ge c(N)$ та 5 аналогічних (2.9) нерівностей з врахуванням перестановки гравців.

Вище ми розглянули наступну концепцію визначення розподілу кооперативних ігор – розподіл "розумно" вибирати з ядра гри (якщо воно непорожнє), тобто фактично застосували принцип егалітаризму. Як ми бачили вище, принцип егалітаризму не є єдиною концепцією вибору й до того ж він не позбавлений негативних властивостей ("рівність у бідності"). Тому виникає закономірне питання – як можна застосувати принцип утилітаризму до знаходження розподілу гри і які основні властивості "егалітарних" й "утилітарних" розподілів?

Нехай коаліційні можливості суспільства збільшуються ($v(N)$ зростає або відповідно $c(N)$ зменшується), а можливості всіх інших коаліцій не змінюються. Чи будуть при цьому збільшуватись прибутки всіх членів суспільства (відповідно зменшуватись витрати)? Якщо так, то розподіл задовольняє властивості "коаліційної монотонності". Виявляється, що: або "принцип відокремлення" (вибір з ядра), або "коаліційна монотонність"!

Розглянемо вибір розподілу, що відповідає принципу утилітаризму. У ньому доля прибутку кожного гравця у розподілі $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ залежить від його "внеску" у прибуток кожної коаліції, тобто від величини ($v(S\bigcup i)-v(S)$), $i\notin S$ (різницю у прибутках коаліції S з гравцем i та без нього, так званий "маргінальний прибуток".

Визначення 2.4. Для гри (N,v) *вектором Шеплі* σ називається наступний розподіл прибутку максимальної коаліції $v(N)$:

$$\sigma_i = \sum_{0\le s\le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{S\subseteq N\setminus i, |S|=s} (v(S\cup i)-v(S)),\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.10)$$

Змістовно формула (2.10) пояснюється таким чином. Нехай гравці з N упорядковані $(i_1, i_2, ..., i_n)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i-го гравця у коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, i_2, ..., i_n)$ перед гравцем i стоять в точності елементи з множини S. Ця ймовірність, очевидно, дорівнює $s!(n-s-1)!/n!$, де $s=|S|$. Перевіримо рівність $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = v(N)$ безпосередньо з формули (2.10). Зафіксуємо довільну власну коаліцію S тоді її коефіцієнт: $s\left(\frac{(s-1)!(n-(s-1)-1)!}{n!}\right)-(n-s)\left(\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\right)=0$, коефіцієнт же при $v(N)$ дорівнює $n\left(\frac{(n-1)!0!}{n!}\right)=1$. Для гри (N,c) у формулах (2.10) замість v необхідно підставити c.

Розглянемо гру трьох осіб, тоді (2.10) для $i=1$ приймає вигляд:
$\sigma_1 = \frac{1}{3}v(1)+\frac{1}{6}((v(1,2)-v(2))+(v(1,3)-v(3)))+\frac{1}{3}(v(N)-v(2,3)) =$
$= \frac{1}{3}v(N)+\frac{1}{6}(v(1,2)+v(1,3)-2v(2,3))+\frac{1}{6}(2v(1)-v(2)-v(3))$. Аналогічно, заміною індексу $i=1$ на $i=2,3$ отримуємо σ_2 й σ_3.

Для прикладу, розглянутого на початку параграфу, $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\left(73\frac{1}{3}, 98\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}\right)$. Цей розподіл ядру не належить ($\sigma_1+\sigma_2 = 171\frac{2}{3} > 170$).

Розглянемо ще один приклад ("Внески користувачів"). Об'єднання з n авіакомпаній розподіляють витрати на будівництво злітної смуги. Витрати на будівництво пропорційні довжині смуги. Для i - ї авіакомпанії досить, щоб довжина смуги була рівною c_i. Без обмеження загальності нехай: $c_n \le c_{n-1} \le ... \le c_2 \le c_1$.

Маємо наступну гру розподілу витрат: $c(S) = \max_{i \in S}\{c_i\}$, $\forall S \subseteq \{1,...,n\}$. Формула (2.10) дає наступний результат: $\sigma_n = \frac{1}{n}c_n$,

$$\sigma_{n-1} = \frac{1}{n}c_n + \frac{1}{n-1}(c_{n-1} - c_n),\ ...,\ \sigma_i = \sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}(c_j - c_{j+1}),\ i = \overline{1,n},\ c_{n+1} = 0.$$

Тобто у будівництві найкоротшої смуги беруть участь всі компанії (і ділять витрати порівну), у будівництві відрізка смуги $(c_n - c_{n-1})$ бере участь $(n-1)$ - а компанія (крім компанії з номером n) і теж ділять витрати порівну і т.д.

Як ми відмітили вище, вектор Шеплі може не належати ядру гри. Важливим класом ігор, у яких ядро не порожнє і містить вектор Шеплі, є "опуклі ігри".

Визначення 2.5. Кооперативна гра (N,v) називається *опуклою,* якщо вона задовольняє одній з двох еквівалентних умов:

1) $\forall i \in N$, $\forall S,T \subseteq N \setminus \{i\}$: $(S \subseteq T)$ $\Rightarrow$ $(v(S \cup i) - v(S) \le$ $\le v(T \cup i) - v(T))$;

2) $\forall S,T \subseteq N$: $v(S) + v(T) \le v(S \cup T) + v(S \cap T)$.

Вважається, що $v(\varnothing) = 0$.

Лема 2.1. Нехай (N,v) – опукла гра, $N = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Тоді вектор маргінальних внесків $x_{i_k} = v(i_1,...,i_k) - v(i_1,...,i_{k-1})$ належить ядру гри. Отже, вектор Шеплі також належить ядру.

Справедливе й обернене твердження – якщо всі вектори маргінальних внесків належать ядру, то гра є опуклою.

В опуклих іграх вектор Шеплі займає "центральне положення" у ядрі, оскільки ядро опуклої гри є опуклою оболонкою векторів маргінальних внесків [6].

Визначення 2.6. Оператором значення гри (N,v) є відображення φ із E^{2^N} у E^N, що ставить у відповідність кожній грі (N,v) розподіл $\varphi(v)$ величини $v(N)$: $\sum_{i \in N}\varphi_i(v) = v(N)$.

Визначення 2.7. Оператор значення $\varphi(v)$ гри (N,v) задовольняє "*аксіомі анонімності*", якщо він комутує з перестановкою гравців, тобто для довільної бієкції τ множини N у себе і $\forall v \in E^{2^N}$ має місце рівність $\tau(\varphi(v)) = \varphi(\tau(v))$, де $\tau(v)(S) = v(\tau(S))$, при $S \subseteq N$; $\tau(x)_i = x_{\tau(i)}$ при $x \in E^N$.

Визначення 2.8. Оператор значення φ гри (N, v) задовольняє "*аксіомі адитивності*", якщо $\forall v, w \in E^{2^N}$: $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

Визначення 2.9. Оператор значення φ гри (N, v) задовольняє "*аксіомі бовдура*", якщо $\forall i \in N$, $\forall v \in E^{2^N}$:

$$\{v(S \bigcup i) = v(S), \forall S \subseteq N \setminus i\} \Rightarrow \varphi_i(v) = 0.$$

Теорема 2.2 (Шеплі,1953). Існує лише один оператор φ , що задовольняє аксіомам анонімності, адитивності й бовдура. Це – вектор Шеплі.

Визначення 2.10. Оператор значення φ гри (N, v) задовольняє аксіомі *маргінальності*, якщо $\varphi_i(v)$ залежить лише від вектора $(v(S \bigcup i) - v(S))_{S \subseteq N \setminus i}$, тобто $v(S \bigcup i) - v(S) = w(S \bigcup i) - w(S)$, $\forall S \subseteq N \setminus i$ $\Rightarrow$ $\varphi_i(v) = \varphi_i(w)$, $\forall v, w \in E^{2^N}$, $\forall i \in N$, де $v(\varnothing) = w(\varnothing) = 0$.

Теорема 2.3 (Янг, 1985). Існує лише один анонімний й маргінальний оператор значення. Це – вектор Шеплі.

Теореми Шеплі і Янга є "характеризаціями" вектора Шеплі. Маються й інші характеризації та узагальнення вектора Шеплі [6].

Повернемось до принципу егалітаризму у виборі розподілу кооперативної гри. Перший крок – це виділення ядра, другий – знаходження "егалітарного" розподілу з ядра.

Визначення 2.11. Лексимінний оптимум $\gamma = (\gamma_i)_{i \in N}$ на множині векторів $e(x) = \left(e(x, S) \equiv \sum_{i \in S} x_i - v(S) \right)_{S \subset N}$ таких, що $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, називається N -*ядром* гри (N, v).

Величина $e(x, S)$ називається *ексцесом*, це по суті "наддохід" коаліції S у порівнянні з її власними можливостями. Ексцеси різних коаліцій порівнюються егалітарно. У першу чергу, розглядається мінімальний прибуток, який максимізується. Вектор ексцесів $e(\gamma)$

максимізує на множині розподілів x, $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, егалітарну функцію колективної корисності при умові, що корисність кожної коаліції вимірюється її ексцесом:

$$\min_{S\subset N}\left(\sum_{i\in S}\gamma_i - v(S)\right) = \max_{x:\sum_{i\in N} x_i = v(N)}\left\{\min_{S\subset N}\left(\sum_{i\in S} x_i - v(S)\right)\right\}. \qquad (2.11)$$

Далі серед розв'язків (2.11) N - ядро вибирає такий розподіл, при якому максимального значення досягає другий за мінімальністю коаліційний прибуток. У кінцевому результаті такий процес приводить до єдиного розподілу, яке і є N - ядром.

Відмітимо, що коли ядро гри (N,v) непорожнє, то всі розв'язки задачі (2.11) йому належать. Дійсно, якщо розподіл x належить ядру, то $\min_{S\subset N} e(x,S) \geq 0$. Тоді будь-який розв'язок (2.11) задовольняє цій нерівності, що і свідчить про належність його ядру.

Навіть для гри трьох осіб не так легко привести загальну формулу для N-ядра. "Геометрично" N - ядро займає "центральну" позицію в середині ядра гри.

Розглянемо задачу "Внески користувачів". Нехай як і при обчисленні вектора Шеплі витрати користувачів впорядковані: $0 \leq c_n \leq c_{n-1} \leq \ldots \leq c_2 \leq c_1$. Нехай також $\delta_i = c_i - c_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$, $c_{n+1} = 0$. У загальному випадку обчислення N-ядра є вельми важкою задачею. Обсудимо лише частинний випадок $\delta_1 \geq \delta_2 \geq .. \geq \delta_n$, для якого існує явна формула: $\gamma_1 = \delta_1 + \delta_2/2 + \delta_3/4 + \ldots + \delta_n/2^{n-1}$, $\gamma_i = \sum_{j=i}^{n} \delta_j/2^{j-i+1}$, $2 \leq i \leq n$.

Як видно, N - ядро, як і вектор Шеплі, розподіляє δ_i між гравцями $1,2,\ldots,i$, при цьому доля гравця i є найбільшою. Долі спадають зі швидкістю геометричної прогресії за індексом гравця.

Порівняємо N - ядро з вектором Шеплі ($\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \delta_j/j$, $1 \leq i \leq n$).

Очевидно, що при $n \geq 4$: $\sigma_1 \geq \gamma_1$, $\sigma_2 \geq \gamma_2$, $\sigma_{n-1} \leq \gamma_{n-1}$, $\sigma_n \leq \gamma_n$. При $3 \leq i \leq n-2$ можливі знаки нерівностей як "≥", так і "≤".

Існує характеризація N - ядра [6], яка є значно складнішою у порівнянні з характеризацією вектора Шеплі.

Серйозним недоліком N - ядра є його немонотонність по відношенню до прибутку максимальної коаліції. Якщо деякі гравці “страждають" у результаті покращення загальної ситуації, то вони можуть відмовитись від участі у максимальній коаліції (якщо при зростанні бюджету прибуток деяких членів суспільства падає, то вони будуть не зацікавлені в його зростанні, тобто покращенні добробуту всього суспільства у цілому). Отже, використання принципу "справедливості" у розподілі благ приводить у результаті до "несправедливості" у їх отриманні. Точне формулювання властивості немонотонності дається наступною лемою.

Лема 2.2. Якщо N складається не менш, ніж з 9 гравців, то існують дві такі гри (N,v) й (N,w) з $v(N) < w(N)$, $v(S) = w(S)$ для $\forall S \subset N$, що для деякого гравця i можлива нерівність $\gamma_i > \mu_i$, де γ_i, μ_i – компоненти N - ядер відповідно ігор (N,v) й (N,w).

Контрольні завдання до §2

1. Обчислити вектор Шеплі для кооперативної гри: c(1)=2, c(2)=1, c(3)=3, c(12)=2, c(13)=4, c(23)=3.
2. Знайти вектор Шеплі для кооперативної гри «Внески користувачів»: c_1=10, c_2=7, c_3=5, c_4=4, c_5=3.
3. Знайти N-ядро для кооперативної гри з п.2.

§3. Механізми колективного прийняття рішень

В цьому параграфі застосуємо введені у Розділі 2, §4 поняття до мікроекономічних проблем поділу витрат й розподілу прибутку.

При поділі витрат на виробництво неподільного суспільного продукту (наприклад, мосту) маються лише дані про загальні витрати на його будівництво й доходи, які кожен гравець має від експлуатації цього об'єкта. Іншою інтерпретацією моделі поділу витрат є розрахунок при банкротстві фірми. Кожен гравець має виражену у грошах претензію на її власність, але вся власність фірми виявляється меншою за суму претензій. Проблема полягає у тому, щоб поділити власність між кредиторами.

Задача поділу прибутку полягає у тому, що необхідно поділити виручку від неподільного кооперативного заходу, наприклад, футбольного матчу, між його учасниками – футболістами, тренерами, лікарями. Правило поділу повинно базуватись на оцінці "ринкової вартості" кожного гравця, що враховує його повні витрати (наприклад, його зарплату). Нехай гонорар від матчу перевищує суму повних витрат. Як він повинен бути розподіленим між учасниками?

Модель поділу прибутку. Об'єднання з n гравців отримують від кооперації дохід $r > 0$. Повні витрати гравця i дорівнюють $c_i > 0$. Кооперація прибуткова, тобто $\sum_{i=1}^{n} c_i < r$. Як поділити дохід r ?

Перший принцип розподілу доходу r – індивідуальна раціональність. Кожен гравець повинен отримати не менше своїх повних витрат, інакше він не буде кооперуватись. Після цих виплат залишається прибуток $s = r - \sum_{i=1}^{n} c_i$, який потрібно поділити.

Оскільки прибуток отримується від кооперації гравців, то всі вони мають права на нього і чому б не вважати ці права рівними (ми не маємо інформації про внесок окремого гравця або коаліції гравців в отримання прибутку). Отже, при "егалітарному" розв'язку доля i -го гравця $y_i = c_i + s/n$.

Звичайно, гравець, у якого повні витрати перевищують середній рівень, може не погодитись з такою аргументацією. Необхідно розглядати, скаже він, повні витрати як фактори процесу виробництва, у якому дохід є результатом. На одиницю повних витрат дістається $r / \sum_{i=1}^{n} c_i$ одиниць доходу і справедливим буде розподілити дохід пропорційно участі кожного, яка оцінюється індивідуальними витратами c_i , $i = \overline{1,n}$.

Отже, маємо "пропорційний" розв'язок $y_i = c_i(r / \sum_{j=1}^{n} c_j)$, який також випливає з егалітарного принципу – віддача на одиницю індивідуальних витрат для всіх однакова. Але пропорційний поділ теж не позбавлений недоліків.

Нехай останні свої гроші перед стипендією 3 студента витратили на торт вартістю 20 грн. Один студент вклав 15 грн., другий – 4 грн., третій – 1 грн. Пропорційний поділ виділить першому 750 г торта, другому – 200 г, третьому – 50 г. Навряд чи третій студент погодиться отримати 50 г. Він відмовиться вносити свою гривню і в результаті і перший, і другий студенти залишаться з нічим.

А який принцип поділу запропонували б Ви?

Модель поділу витрат. Колективний об'єкт (міст) коштує $c > 0$ й приносить дохід $b_i \geq 0$ кожному з його користувачів $i = \overline{1, n}$. Будівництво об'єкта ефективне: $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Як розподілити витрати c між гравцями? Формально ця модель є симетричною попередній моделі поділу прибутку, якщо розглядати b_i як повні витрати гравця i, а $s = \sum_{i=1}^{n} b_i - c$ як спільний прибуток. Але змістовна інтерпретація моделі поділу прибутку дасть нам нові принципи прийняття рішень.

При пропорційному розв'язку кожен гравець платить $x_i = cb_i / \sum_{j=1}^{n} b_j$, $i = \overline{1, n}$. Відмітимо, що для $\forall i$: $0 \leq x_i \leq b_i$ (ніхто не отримує субсидій й не платить більше за свій дохід).

Егалітарний принцип може застосовуватись двома способами: вирівнюванням частки витрат й вирівнюванням чистої економії на витратах. Розв'язок з "рівномірним розподілом витрат" приписує кожному гравцю витрати $x_i = c/n$, розв'язок з "рівним прибутком" (тобто $b_i - x_i = b_j - x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c \right) / n$ для всіх i, j) приписує кожному гравцю витрати $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c \right) / n$. Очевидний недолік рівномірного розподілу витрат полягає у тому, що якісь гравці, можливо, заплатять більше за свій дохід (тобто $\exists k$: $x_k = c/n > b_k$). При вирівнюванні прибутку можлива ситуація, коли якийсь гравець отримує субсидію за споживання продукту (тобто $\exists k$:

$$x_k = b_k - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c \right) / n < 0 \text{).}$$

Оподаткування. Спробуємо модифікувати два останні принципи поділу, приймаючи $0 \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1,n}$, у якості обмежень.

Визначення 3.1. Рівневий податок – єдиний розподіл $(x_1,...,x_n)$ у моделі розподілу витрат при $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, що є розв'язком задачі:

$$(x_1,...,x_n) \in A = \left\{ (y_1,...,y_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i = c,\ 0 \le y_i \le b_i,\ \ \forall i \right\},$$

$$(b_1 - x_1,...,b_n - x_n) LM (b_1 - y_1,...,b_n - y_n),\ \forall y \in A,$$

де LM – лексимінний порядок на E^N.

Визначення 3.2. Подушний податок – це (єдиний) розподіл витрат $(x_1,...,x_n) \in A$, що задовольняє:

$$(x_1,...,x_n) LM (y_1,...,y_n),\ \ \forall y \in A.$$

Отже, рівневий податок вирівнює прибутки (чисті доходи) при обмеженнях $0 \le x_i \le b_i$, у той час, як подушний податок вирівнює витрати. Якщо частки витрат рівневого прибутку (рівномірний розподіл витрат) задовольняє цим обмеженням, то він співпадає з рівневим податком (подушним податком).

Єдиність обох розв'язків випливає з єдиності лексимінного оптимуму на опуклій множині $A \subset E^n$.

"Податкова" термінологія належить Янгу (1987 р.), котрий інтерпретував неподільний суспільний продукт як послуги, що надаються податківцем. Дохід гравця i до сплати податків дорівнює b_i, а його дохід після сплати податків дорівнює $b_i - x_i$. Таким чином, c – необхідна загальна сума податків (бюджет збирача податків).

Рівневий та подушний податки можна легко обчислити за допомогою наступного параметричного представлення.

Теорема 3.1. Для задачі розподілу витрат $(b_1,...,b_n;c)$, $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, подушний податок обчислюється із розв'язку наступного рівняння відносно параметра $\lambda \ge 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c \ \ \Rightarrow \ \ x_i = \min\{\lambda, b_i\}. \qquad (3.1)$$

Рівневий податок обчислюється із розв'язку наступного рівняння відносно $\lambda \ge 0 : \sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\{\lambda, b_i\}$.

Знайдемо явний вираз для подушного й рівневого податків при $n = 2$. Нехай $b_1 < b_2$, розглянемо три випадки: 1) $\lambda \le b_1$; 2) $b_1 < \lambda \le b_2$ й 3) $b_2 < \lambda$.

За формулою (3.1) для першого випадку маємо: $\lambda + \lambda = c \Rightarrow \lambda = c/2 \le b_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = c/2$ при $0 \le c \le 2b_1$; для другого: $b_1 + \lambda = c \Rightarrow b_1 < \lambda = c - b_1 \le b_2 \Rightarrow x_1 = b_1, x_2 = c - b_2$, при $2b_1 < c < b_1 + b_2$. Для третього: $b_1 + b_2 = c$, що суперечить умові задачі.

Аналогічно отримуємо для рівневого податку:

$$\lambda = b_2 - c, \ x_1 = 0, \ x_2 = c, \text{ при } 0 \le c \le b_2 - b_1;$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - c), b_1 - x_1 = b_2 - x_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - c), \ b_2 - b_1 \le c < b_1 + b_2.$$

Бачимо, що подушний податок співпадає з рівномірним розподілом витрат для малих значень c, а рівневий податок співпадає з рівним прибутком для великих значень c. Ця властивість зберігається для $\forall n$. Якщо усі b_i - додатні та $c / n \le \min\{b_j\}$, то подушний податок $x_i = c / n$, $i = \overline{1, n}$. В той же час, якщо $\sum_{j=1}^{n} b_j - n \cdot \min\{b_j\} \le$ $\le c \le \sum_{j=1}^{n} b_j$, то податок $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c \right) / n$, $i = \overline{1, n}$.

Таблиця 3.1.

Доходи	4	12	20	24	30	Витрати
Подушний податок	4	6.5	6.5	6.5	6.5	30
Пропорційний	$4/3$	4	$20/3$	8	10	30
Рівневий	0	0	$16/3$	$28/3$	$46/3$	30

Розглянемо п'ять гравців із доходами: $b_1 = 4$, $b_2 = 12$, $b_3 = 20$, $b_4 = 24$, $b_5 = 30$. Загальний дохід дорівнює $\sum_{j=1}^{5} b_j = 90$. Розглянемо спочатку досить низькі витрати $c = 30$ (таблиця 3.1). Однак, не настільки низькі, щоб подушний податок співпадав з рівномірним розподілом ($x_i = 6$, для всіх i). Гравець 1 може заплатити лише $x_1 = 4$, після чого останні гравці рівномірно розподіляють витрати, що залишились. Разом з тим, рівневий податок дуже приємний для гравців 1 й 2, у той час як інші гравці мають $14\frac{2}{3}$ одиниць прибутку. Тепер виберемо досить великі загальні витрати $c = 66$ (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2.

Доходи	4	12	20	24	30	Витрати
Подушний податок	4	12	$50/3$	$50/3$	$50/3$	66
Пропорційний	2.9	8.8	14.7	17.6	22	66
Рівневий	0	7	15	19	25	66

При рівневому податку всі гравці, крім першого, отримують по 5 одиниць прибутку. При подушному податку перші два гравці не отримують ніякого прибутку, останні три мають по $16\frac{2}{3}$ одиниць прибутку. Відмітимо, що у цих двох прикладах пропорційний податок, як правило, але не завжди, знаходиться між подушним й рівневим податками. Необхідність верхньої й нижньої границі на частки витрат ($0 \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1,n}$) відповідають поняттю ядра у кооперативній грі, що описує повні витрати коаліцій наступним чином:

$$v(S) = \max\left(\sum_{i \in S} b_i - c, 0\right), \tag{3.2}$$

тобто коаліція S може отримати прибуток за рахунок будівництва й покриття витрат на нього (зокрема $v(S) = 0$, якщо $\sum_{i \in S} b_i \le c$).

Нехай $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Витрати $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$ задовольняють принципу відокремлення для даної кооперативної гри тоді й лише тоді, коли вектор прибутків $y = (b_1 - x_1, \dots, b_n - x_n)$ належить ядру гри, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c, \forall S \subseteq N : \sum_{i\in S}(b_i - x_i) \geq v(S) \Leftrightarrow \sum_{i\in S}(b_i - x_i) \geq \max\left(\sum_{i\in S} b_i - c, 0\right) =$$

$$= \sum_{i\in S} b_i - c \Leftrightarrow \sum_{i\in S} x_i \leq c \Leftrightarrow \sum_{i\in S} x_i \leq \min\left(c, \sum_{i\in S} b_i\right),$$

оскільки $\sum_{i\in S} x_i \leq \sum_{i\in S} b_i$.

Якщо взяти $S = \{i\}$, то з останньої нерівності випливає, що $x_i \leq b_i$, для $\forall i$. Якщо взяти $S = N \setminus \{i\}$, то $\sum_{j\in S} x_j \leq c - x_i \leq \min\left(c, \sum_{j\in S} b_j\right)$. Якщо $c \leq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} b_j$, то $c - x_i \leq c \;\Rightarrow\; x_i \geq 0$, для $\forall i$. Якщо $c \geq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} b_j$, то $c - x_i \leq \sum_{j\in N\setminus\{i\}} b_j \;\Rightarrow\; x_i \geq c - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} b_j \geq 0$. Отже, умова $0 \leq x_i \leq b_i$ для $\forall i$, еквівалентна умові належності вектора витрат x, $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$, ядру кооперативної гри (N, c) з функцією витрат (3.2). Тому, пропорційний розподіл, що є подушним або рівневим податком, належить ядру гри .

Оскільки ми звели задачу розподілу витрат до кооперативної гри, логічно знайти це значення у вигляді N - ядра та вектора Шеплі.

Теорема 3.2 (Ауман, Машлер, 1985 р.). N - ядро гри (3.2) відповідає наступним долям витрат (λ – параметр):

1) $c \leq \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$: $\sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \dfrac{b_i}{2}\right\} = c \;\Rightarrow\; x_i = \min\left\{\lambda, \dfrac{b_i}{2}\right\}$, $i = \overline{1,n}$;

2) $c \geq \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$: $\sum_{i=1}^{n} \min\left\{\lambda, \dfrac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\left\{\lambda, \dfrac{b_i}{2}\right\}$, $i = \overline{1,n}$.

Ауман і Машлер звернули увагу на те, що N - ядро є розв'язком цікавої загадки з Талмуда (IV ст. до н.е.).

Помирає чоловік, у якого залишаються три дружини, претензії котрих на спадщину дорівнюють відповідно 100, 200 й 300 одиниць. Талмуд рекомендує частки для величини спадщини з табл. 3.3.

Який логічний метод (алгоритм, принцип) лежить в основі розв'язку? Якщо при поділі "малої" спадщини у 100 одиниць (сума заявок

$\sum_{j=1}^{3} b_j = 600$) долі відповідають методу рівного прибутку, то в інших випадках поділ прибутку відрізняється від рівневого, подушного й пропорційного податків (перевірте це). Виявляється, що долі прибутку, приведені у таблиці 3.3 відповідають N - ядру (перевірте за Теоремою 3.2 для величини витрат $c = b_1 + b_2 + b_3 - s$, де s – сума спадщини).

Таблиця 3.3.

Заявка	100	200	300	Сума спадщини
Долі	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	100
	50	75	75	200
	50	100	150	300

Вектор Шеплі гри (3.2) не має такої простої формули як N -ядро. Однак його "податкова" інтерпретація дозволяє його легко обчислити. Гравці намагаються втекти від збирача податків. Він ловить їх одного за одним у випадковому порядку (усі порядки рівноймовірні). Спіймані гравці платять повну суму своїх доходів, поки витрати не будуть покриті. Нехай порядок затримання співпадає з порядком $(1,2,...,n)$, витрати покриваються тільки після затримання гравця $k+1$: $\sum_{j=1}^{k} b_j < c \le \sum_{j=1}^{k+1} b_j$. Тоді перші k гравців платять b_i, гравець $k+1$ платить $c - \sum_{i=1}^{k} b_i$, інші гравці не платять нічого.

В інтерпретації з банкрутством маємо симетричну історію. Гравці біжать у банк і отримують спадщину повністю у відповідності із заявкою (за принципом "хто перший прийшов, той перший і обслуговується"), поки спадщина повністю не вичерпається. У прикладі з Талмуда вектор Шеплі співпадає з N - ядром, якщо спадщина дорівнює 100 або 300, але відрізняється від нього, якщо спадщина складає 200. У цьому випадку витрати дорівнюють $c = 600 - 200 = 400$. Тоді гравець 1 заплатить повністю свій дохід, якщо буде спійманим першим або другим, і нічого не заплатить, якщо буде спійманим останнім. Отже, його доля дорівнює $66\frac{2}{3}$. Далі, гравець 2 повинен заплатити 200, якщо буде спійманим першим, 100 або 200 з рівною ймовірністю, якщо спійманим другим, і нічого, якщо спійманим останнім. Отже, його доля дорівнює $116\,{}^{2}\!/_{3}$. Отже, спадщина за Шеплі ділиться як $\left(33\,{}^{1}\!/_{3}, 83\,{}^{1}\!/_{3}, 83\,{}^{1}\!/_{3}\right)$.

Розглянемо аксіоматичні моделі розподілу витрат й прибутку. Ці питання почали вивчатися в останні два десятиріччя.

Визначення 3.3. Для даної спільноти $N = \{1,2,...,n\}$ *механізмом розподілу витрат* називається відображення *x*, що ставить у відповідність кожній задачі $(b_1,...,b_n;c)$, $\sum_{i\in N} b_i \geq c$, вектор часток витрат $x(b,c) = (x_i(b_1,...,b_n;c))_{i\in N}$, для котрого $\sum_{i\in N} x_i(b,c) = c$.

Визначення 3.4. Кажуть, що механізм розподілу витрат *децентралізується*, якщо частка $x_i(b,c)$ гравця $i \in N$ залежить від величини витрат *c*, його особистого доходу b_i і спільного доходу:

$$\sum_{i\in N} b_i : \; x_i(b,c) = t_i\left(b_i;\; \sum_{i\in N} b_i;\; c\right).$$

Отже, якщо механізм розподілу витрат децентралізується, то кожен гравець не повинен знати деталі розподілу витрат між партнерами. Необхідно знати лише повний (або середній) дохід. Наслідком властивості децентралізованості є те, що для будь-якої коаліції *S* частка її витрат може бути обчислена за спільним доходом цієї коаліції та її доповнення: $\sum_{i\in S} x_i(b,c) = r_S\left(\sum_{i\in S} b_i;\; \sum_{j\in N\setminus S} b_j;\; c\right)$.

Теорема 3.3 (Мулен, 1985 р.). Нехай $n \geq 3$, тоді існує єдиний механізм розподілу витрат, який узгоджується з децентралізацією і належить до ядра ($0 \leq x_i(b,c) \leq b_i$, $\forall i, b, c$). Це пропорційний податок.

Визначення 3.5. Механізм розподілу витрат задовольняє *аксіомі сумісності*, якщо для $\forall i, j,\ b,\ b',\ c,\ c'$ з умови $\{b_i = b_i', b_j = b_j'\}$ випливає $\{(x_i(b,c) - x_i(b',c')) - (x_j(b,c) - x_j(b',c')) \geq 0\}$.

Тобто, якщо дохід двох гравців фіксований, а всі інші параметри задачі змінюються, то ці зміни повинні бути вигідними або невигідними одночасно для обох.

Усі розглянуті вище механізми розподілу витрат (пропорційний, подушний, рівневі податки та *N* – ядро) окрім вектора Шеплі, задовольняють аксіомі сумісності. Характеризацію цих методів (необхідні та достатні умови) одержимо приєднанням до аксіоми сумісності ще двох аксіом: анонімності (якщо поміняти індекс i на j, то частка x_i поміняється на x_j) та неперервності (частка витрат неперервно змінюється при зміні c).

Контрольні завдання до §3

1. Знайти рівневий податок для задач поділу витрат:
   1.1. b=(1,3,5,6,10), c=10, c=20;
   1.2. b=(1,5,8,12,14), c=10, c=20, c=30.
2. Знайти подушний податок для задачі поділу витрат з п.1.
3. Знайти рівневий податок для задач поділу прибутку:
   3.1. c=(1,3,5,6,10), r=30, r=40, r=50;
   3.2. c=(1,5,8,12,14), r=40, r=50, r=60.
4. Знайти подушний податок для задач поділу прибутку з п.3.
5. Знайти N-ядро для задач з п.1, п.3.
6. Знайти вектор Шеплі для задач з п.1, п.3.

Питання для самоперевірки до розділу 6

1. Дайте визначення сильної рівноваги Неша.
2. Що таке рівновага у спільних змішаних стратегіях?
3. В чому полягає стабілізація рівноваг Неша на основі погроз?
4. Дайте визначення α і β-ядер.
5. Як задається кооперативна гра в нормальній формі?
6. Сформулюйте "принцип відокремлення", дайте визначення ядра кооперативної гри.
7. Сформулюйте теорему Бондаревої.
8. Що таке вектор Шеплі? Сформулюйте теореми Шеплі та Янга.

10. Сформулюйте задачі поділу витрат та прибутку, доходу та прибутку.
11. Які основні принципи поділу витрат, їх переваги та недоліки?
12. Що таке рівневий та подушний податки?

14. Сформулюйте теорему Аумана-Машлера.
15. Дайте податкову та банкрутну інтерпретацію вектора Шеплі.

РОЗДІЛ 7
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ
В УМОВАХ НЕЧІТКОЇ ІНФОРМАЦІЇ

"Нечіткість", як правило, є проявом суб'єктивності осіб, що приймають рішення, експертів та аналітиків, які формулюють задачу прийняття рішень. Тому, як множина альтернатив, множина наслідків, так і зв'язок між ними можуть бути нечіткими. Такі задачі прийняття рішень називаються ЗПР в умовах нечіткої інформації.

§1. Основні поняття з теорії нечітких множин

Визначення нечіткої множини. У класичній математиці під множиною розуміється сукупність елементів (об'єктів), що мають деяку спільну властивість. Наприклад, множина чисел, не менших заданого числа; множина векторів, сума компонентів кожного з яких не перевершує одиниці і т.п. При цьому, для будь-якого елемента множини розглядаються лише дві можливості: або цей елемент належить даній множині (тобто має дану властивість), або не належить даній множині (тобто не має даної властивості). Таким чином, в описі множини у звичайному розумінні необхідно дотримуватися чіткого критерію, що дозволяє судити про належність або неналежність будь-якого елемента даній множині.

Поняття нечіткої множини – спроба математичної формалізації нечіткої інформації з метою її використання при побудові математичних моделей складних систем. В основі цього поняття лежить уявлення про те, що елементи, які складають дану множину і мають деяку спільну властивість, можуть мати цю властивість в різному ступені і, отже, належати даній множини з "різним ступенем". При такому підході висловлення типу "елемент x належить даній множині" втрачають зміст, оскільки ще необхідно вказати "наскільки сильно" або з яким ступенем даний елемент належить множині.

Один з найпростіших способів математичного опису нечіткої множини – характеризація ступеня належності елемента множині числами, наприклад, з інтервалу [0, 1]. Нехай X – деяка множина елементів (у звичайному розумінні). Надалі будемо називати її *універсальною множиною* і розглядати підмножини цієї множини.

Нечіткою множиною C на множині X називається сукупність пар

$(x, \mu_C(x))$, де $x \in X$, а μ_C - функція, $\mu_C : X \to [0,1]$, що називається *функцією належності* нечіткої множини *C*. Значення μ_C для конкретного x називається *ступенем належності* цього елемента нечіткій множині *C*.

Як видно з цього визначення, нечітка множина цілком описується своєю функцією належності, тому нижче будемо використовувати цю функцію як позначення нечіткої множини. Звичайні множини складають підклас класу нечітких множин. Дійсно, функцією належності звичайної множини $B \subset X$ є її *характеристична функція* :

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

і відповідно до визначення нечіткої множини звичайну множину *B* можна також визначити як сукупність пар виду $(x, \mu_B(x))$. Таким чином, нечітка множина являє собою більш широке поняття, ніж звичайна множина, у тому розумінні, що функція належності нечіткої множини може бути, взагалі кажучи, довільною функцією або навіть довільним відображенням.

Приклад 1.1. Для порівняння розглянемо звичайну множину чисел $B = \{x | 0 \le x \le 2\}$ і нечітку множину чисел $C = \{x|$ "значення x є близьким до 1" $\}$. Функції належності цих множин представлені відповідно на рис.1.1а. і рис.1.1б. Відмітимо, що вид функції належності нечіткої множини *C* залежить від змісту, вкладеного у поняття "близько" у контексті аналізованої ситуації.

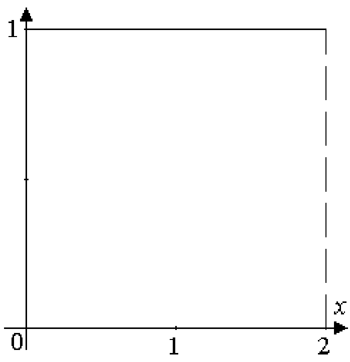


Рис. 1.1а.

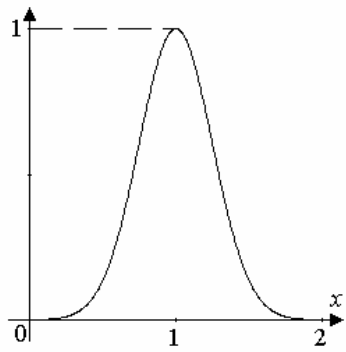


Рис. 1.1б.

Нечітка множина називається *порожньою*, якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині *X*, тобто $\mu_{\varnothing}(x)=0,\ \forall x\in X$.

Універсальну множину *X* також можна описати функцією належності виду $\mu_X(x)=1,\ \forall x\in X$.

Носієм нечіткої множини *A* (позначення supp*A*) з функцією належності $\mu_A(x)$ називається множина (у звичайному сенсі) виду $\mathrm{supp}A=\left\{x \middle| x\in X,\ \mu_A(x)>0\ \right\}$.

Нечітка множина *A* називається *нормальною,* якщо виконується рівність $\sup\limits_{x\in X}\mu_A(x)=1$. У протилежному випадку нечітка множина називається *субнормальною*. Наприклад, нечітка множина *C* у прикладі 1.1 є нормальною. Субнормальним часто виявляється перетин нечітких множин. Субнормальна множина може бути перетворена до нормальної (нормалізована), якщо розділити функцію належності $\mu(x)$ цієї множини на величину $\sup\limits_{x\in X}\mu(x)$. Однак варто врахувати що, застосовуючи таке перетворення у конкретній задачі, необхідно представляти собі його "фізичний зміст".

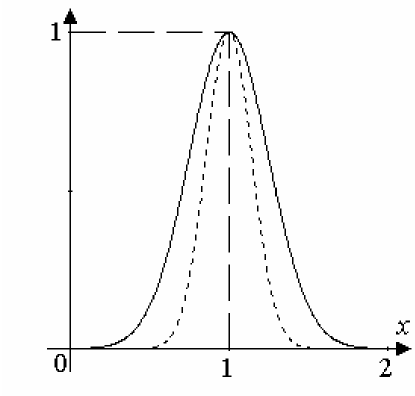


Рис. 1.2.

Нехай *A* і *B* – нечіткі множини у *X*, а $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ – їх функції належності відповідно. Кажуть, що *A* містить у собі *B* (тобто $B\subseteq A$), якщо для будь-якого $x\in X$ виконується нерівність $\mu_B(x)\le\mu_A(x)$. Слід зауважити, що якщо $B\subseteq A$, то і $\mathrm{supp}\,B\subseteq\mathrm{supp}\,A$. Множини *A* і *B* співпадають одна з одною (еквівалентні), якщо при будь-якому $x\in X$, $\mu_B(x)=\mu_A(x)$.

Приклад 1.2. Розглянемо нечіткі множини: $B=\left\{x \middle| x\ \text{близько до}\ 1\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\ \text{дуже близько до}\ 1\right\}$. Зрозуміло, що $B\subseteq A$, тобто функції належності цих множин $\mu_A(x)$ та $\mu_B(x)$ повинні задовольняти нерівності $\mu_B(x)\le\mu_A(x)$ при будь-якому $x\in X$. Графічно ці функції можуть виглядати, наприклад, як по-

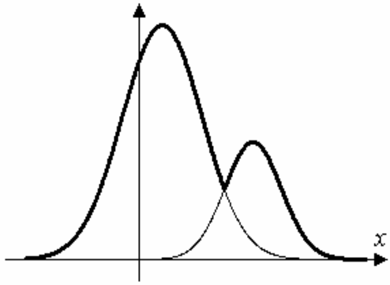


Рис. 1.3.

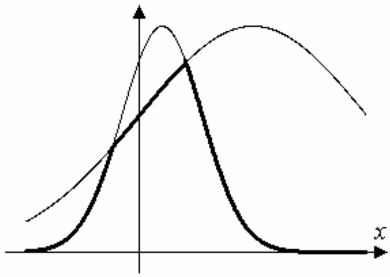


Рис. 1.4.

казано на рис. 1.2. Суцільною лінією показаний графік функції належності множини *A*, а пунктирною – множини *B*.

Операції над нечіткими множинами. Операції над нечіткими множинами, такі, наприклад, як об'єднання й перетин, можна визначити різними способами. Нижче буде дано кілька таких визначень. Вибір конкретного з них залежить від предметної області.

Об'єднанням нечітких множин *A* і *B* у *X* називається нечітка множина з функцією належності:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_A(x)\}, x\in X \ .$$

Приклад 1.3. Нехай нечіткі множини *A* і *B* на числовій осі описуються функціями належності, показаними на рис. 1.3. Жирною лінією на цьому малюнку позначена функція належності об'єднання цих множин.

Об'єднання нечітких множин *A* і *B* у *X* можна також визначити через алгебраїчну суму їх функцій належності:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases} 1, & \mu_A(x)+\mu_B(x)\ge 1, \\ \mu_A(x)+\mu_B(x), & \mu_A(x)+\mu_B(x)<1. \end{cases}$$

Перетином нечітких множин *A* і *B* у *X* називається нечітка множина з функцією належності $\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$.

Приклад 1.4. Нехай нечіткі множини *A* і *B* на числовій осі описуються функціями належності, показаними на рис. 1.4. Жирною лінією на цьому малюнку показана функція належності перетину цих множин. Іншим чином можна визначити перетин нечітких множин *A* і *B* як алгебраїчний добуток їх функцій належності:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x)\ ,\ x\in X\ .$$

Це визначення може бути дуже зручним у випадку нечітких множин *A* та *B* таких, що $B\subseteq A$. За першим з цих визначень отримаємо,

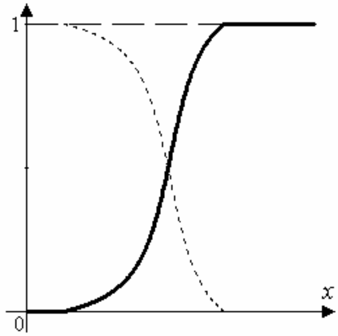


Рис. 1.5.

що $\mu_{A\cap B}(x)=\mu_B(x)$, $\forall x\in X$, тобто функція належності множини A фактично "не бере участі" у результуючій функції належності, тоді як за останнім визначенням функція належності перетину завжди зберігає інформацію про функції належності обох множин.

Корисною може виявитися наступна властивість носіїв нечітких множин:

$$\text{supp }(A\cup B)=(\text{supp A})\cup(\text{supp B}),$$

$$\text{supp }(A\cap B)=(\text{supp A})\cap(\text{supp B}).$$

Доповненням нечіткої множини A у X називається нечітка множина A' з функцією належності виду $\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)$, $\forall x\in X$.

Цікаво, що при такому визначенні, може бути, що $A'\cap A\neq\varnothing$.

Приклад 1.5. Розглянемо множину $A=\{x,\text{ занадто більше } 0\}$, і нехай функція належності цієї множини має вигляд, показаний на рис. 1.5 (суцільна крива). Тоді пунктирна лінія на цьому малюнку відповідає функції належності доповнення A' множини A на множині всіх чисел. Іншими словами, множину A' можна описати як множину чисел, що не є набагато більшими за нуль. Непорожній перетин множин A і A' у цьому прикладі являє собою нечітку множину чисел, "набагато більших за нуль і одночасно таких, що не є набагато більшими за нуль". Непорожність цієї нечіткої множини відбиває той факт, що саме поняття "бути набагато більшим" описане нечітко, внаслідок чого, деякі числа можуть з визначеним ступенем належати одночасно як одній, так і іншій множині. У деякому сенсі цей перетин можна розглядати як нечітку "межу" між множинами A і A'.

Визначимо поняття різниці, декартового добутку та опуклої комбінації нечітких множин.

Різницею множин A і B у X називається нечітка множина $A\backslash B$ с функцією належності:

$$\mu_{A\backslash B}=\begin{cases}\mu_A(x)-\mu_B(x), & \mu_A(x)\geq\mu_B(x),\\ 0, & \mu_A(x)<\mu_B(x).\end{cases}$$

Декартовим добутком нечітких множин $A_i\subseteq X_i$, $i=1,2,...,n$, називається нечітка множина $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subseteq X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ з функцією належності

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in X.$$

Опуклою комбінацією нечітких множин $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq X$ називається нечітка множина *A* з функцією належності виду:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x), \text{ де } \lambda_1 \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Опуклі комбінації нечітких множин можуть знайти застосування, наприклад, у задачах прийняття рішень з декількома нечіткими обмеженнями. Зауважимо, що для звичайних множин ця операція не має змісту.

Множини рівня й декомпозиція нечіткої множини. Множиною рівня α нечіткої множини *A* у *X* називається множина у звичайному розумінні, яка складається з елементів $x \in X$, ступені належності яких нечіткій множині *A*, не менші за число α. Таким чином, якщо A_α – множина рівня α нечіткої множини *A*, то $A_\alpha = \{x | x \in X,\ \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Операції над множинами рівня:

♦ операція об'єднання $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ (при визначенні об'єднання як алгебраїчну суму функцій належності: $(A \cup B)_\alpha \supseteq A_\alpha \cup B_\alpha$);

♦ операція перетину $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ (при визначенні перетину як алгебраїчного добутку функцій належності: $(A \cap B)_\alpha \subseteq A_\alpha \cap B_\alpha$);

♦ декартовий добуток $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)_\alpha = (A_1)_\alpha \times (A_2)_\alpha \times \ldots \times (A_n)_\alpha$;

♦ опукла комбінація *A* нечітких множин $A_1, A_2, \ldots A_n$ – $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i)_\alpha \subseteq A_\alpha$.

В деяких випадках зручно користуватися *декомпозицією* (розкладанням) нечіткої множини за її множинами рівня, тобто представленням цієї множини у вигляді $A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha$, де $\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha \mu_{A_\alpha}(x)$, а об'єднання нечітких множин береться по всіх α від 0 до 1.

П р и к л а д 1.6. Нехай $X = \{0, 2,..., 6\}$, а функція належності нечіткої множини A у X задана табл. 1.1.

Тоді A можна декомпозувати на наступні множини рівня:

$$A_{0,1} = \{1,2,...,6\},\ A_{0,3} = \{2,3,4,5,6\},\ A_{0,5} = \{3,4,5,6\},$$

$$A_{0,7} = \{4,5,6\},\ A_{0,9} = \{5,6\},\ A_{1,0} = \{6\}$$

і представити множину A у вигляді: $A = 0.1\{1,2,...,6\} \cup 0.3\{2,3,4,5,6\} \cup$ $\cup\, 0.5\{3,4,5,6\} \cup 0.7\{4,5,6\} \cup 0.9\{5,6\} \cup 1\{6\}$.

Таблиця 1.1.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1

Відображення нечітких множин. Лотфі-Заде запропонував визначення образа нечіткої множини при звичайному (чітко описаному) відображенні. Нехай $\varphi : X \to Y$ - задане відображення і нехай A – деяка нечітка підмножина множини X із функцією належності $\mu_A(x)$. Відповідно до узагальнення Лотфі-Заде образ A при відображенні φ визначається як нечітка підмножина множини Y, що представляє собою сукупність пар виду $(y, \mu_B(y))$, де $\mu_B : Y \to [0,1]$ функція належності образа. Неважко зрозуміти, що функцію належності μ_B можна записати:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x),\ y \in Y,$$

де $\varphi^{-1}(y) = \{x | x \in X,\ \varphi(x) = y\},\ \forall y \in Y$, являє собою множину усіх елементів $x \in X$, образом кожного з яких при відображенні φ, є елемент y.

При такому підході *нечітке відображення чіткої множини* можна описати як відображення, при якому елементові $x \in X$ ставиться у відповідність не конкретний елемент множини Y, а, взагалі кажучи, нечітка підмножина множини Y. Це нечітке відображення описується функцією належності $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$ так, що функція $\mu_\varphi(x_0, y)$ (при фіксованому $x = x_0$) є функцією належності нечіткої множини з Y і представляє собою нечіткий образ елемента x_0 при даному відображенні. В межах цієї концепції можна визначити *нечітке відображення нечіткої множини*. Нехай $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$ - задане нечітке відображення нечіткої множини $\mu_A(x)$ з X. Тоді образом цієї нечіткої множини при нечіткому відображенні буде сукупність пар виду: $(\mu_\varphi(x,y),\mu_A(x))$, $x\in X$, де $\mu_\varphi(x,y)$ при кожному фіксованому $x\in X$ являє собою нечітку підмножину множини Y. Таким чином, нечіткий образ нечіткої множини є досить складним об'єктом – нечіткий підклас класу всіх нечітких підмножин множини Y. Ясно, що використання подібних об'єктів для аналізу реальних систем є досить складним. Більш зручним для практичного використання є інший підхід, що запропонував С.О. Орловський [12].

Визначення 1.1. *Образом B у Y нечіткої множини A у X при нечіткому відображенні* $\mu_\varphi : X\times Y \to [0,1]$ називається нечітка множина з функцією належності виду: $\mu_B(y)=\sup\limits_{x\in X}\min\{\mu_\varphi(x,y),\mu_A(x)\}$.

Якщо розуміти $\mu_A(x)$ як нечітке унарне відношення на множині X, то легко бачити, що в основі цього визначення образу лежить максмінний добуток (композиція) нечітких відношень $\mu_A(x)$ і $\mu_\varphi(x,y)$ (див. нижче "Нечіткі бінарні відношення").

Неважко перевірити, що в окремому випадку, коли $\mu_\varphi(x,y)$ - звичайне відображення: $\varphi: X\to Y$ (тобто $\mu_\varphi(x,y)=1$ при $y=\varphi(x)$ і $\mu_\varphi(x,y)=1$ для інших пар (x,y)), це визначення дає $\mu_B(y)=\sup\limits_{x\in\varphi^{-1}(y)}\mu_A(x)$, $y\in Y$, що відповідає приведеному вище класичному визначенню Лотфі-Заде для образа нечіткої множини при звичайному відображенні.

Введемо тепер визначення прообразу нечіткої множини при нечіткому відображенні.

Визначення 1.2. *Прообразом A нечіткої множини B в Y при нечіткому відображенні* $\mu_\varphi : X\times Y \to [0,1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать (є підмножинами) нечіткій множині *B*.

Якщо образ нечіткої множини *a* при відображенні μ_φ позначати як $a\circ\mu_\varphi$, то прообразом нечіткої множини *B* є об'єднання всіх множин *a*, що задовольняють умові $a\circ\mu_\varphi\subseteq B$ чи, іншими словами,

$$\sup_{x\in X}\min\{\mu_\varphi(x,y),\mu_a(x)\}\le\mu_B(y),\ \forall y\in Y.$$

Явний вираз для функції належності прообразу визначається наступним чином: $\mu_A(x)=\begin{cases}\inf\limits_{y\in N_x}\mu_B(y), & x\in X_0,\\ 1, & x\in X\setminus X_0,\end{cases}$

де $X_0=\{x\in X \mid \exists y\in Y,\ \mu_\varphi(x,y)>\mu_B(y)\}$, $N_x=\{y\in Y \mid \mu_\varphi(x,y)>\mu_B(y)\}$.

Приклад 1.7. Нехай в універсальній множині $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ нечітка множина A задається функцією належності $\mu_A(x)$ (табл.1.2), а нечітке відображення $\varphi: X\to Y$ функцією належності $\mu_\varphi(x,y): X\times Y\to[0,1]$ (табл. 1.3).

Таблиця 1.2.

x	$\mu_A(x)$
x_1	0.4
x_2	0.6
x_3	1.0

Таблиця 1.3.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.7	1.0	0.1	0.3	0.6
x_2	0.7	0.4	0.7	0.5	0.6
x_3	0.3	0.4	0.1	0.2	1.0

Таблиця 1.4.

x	$M(x,y_1)$	$M(x,y_2)$	$M(x,y_3)$	$M(x,y_4)$	$M(x,y_5)$
x_1	0.4	0.4	0.1	0.3	0.4
x_2	0.6	0.4	0.6	0.5	0.6
x_3	0.3	0.4	0.1	0.2	1.0
$\mu_B(y)$	0.6	0.4	0.6	0.5	1.0

1. Знайти образ B нечіткої множини A при відображенні $\mu_\varphi(x,y)$.

Для зручності позначимо через $M(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_\varphi(x,y)\}$ і складемо таблицю 1.4. З останнього рядка цієї таблиці отримаємо функцію належності $\mu_B(y)$ (табл. 1.5) образу $B\subseteq Y$ нечіткої множини A, що задається нечітким відображенням $\mu_\varphi(x,y)$.

2. Знайти прообраз $A^*\subseteq X$ нечіткої множини $B^*\subseteq Y$ із функцією належності $\mu_{B^*}(y)$ (табл. 1.5) при відображенні $\mu_\varphi(x,y)$.

Побудуємо: $X_0 = \{x \in X \mid \exists y \in Y,\ \mu_\varphi(x,y) > \mu_{B*}(y)\} = \{x_1, x_2\}$. Відмітимо, що елемент x_3 множини X не буде належати множині X_0, оскільки, при будь-яких y числа у відповідних комірках рядка x_3 таблиці 1.3 є не більшими за числа у відповідних комірках стовпчика $\mu_{B*}(y)$ таблиці 1.6. Тому одразу можна записати, що $\mu_{A*}(x_3) = 1$, і не будувати множину N_{x_3}.

Таблиця 1.5.

y	$\mu_B(y)$
y_1	0.6
y_2	0.4
y_3	0.6
y_4	0.5
y_5	1.0

Таблиця 1.6.

y	$\mu_{B*}(y)$
y_1	0.3
y_2	0.7
y_3	0.4
y_4	0.6
y_5	1.0

Для x_1, x_2 визначимо множини:

$$N_{x_1} = \{y \in Y \mid \mu_\varphi(x_1, y) > \mu_B(y)\} = \{y_1, y_2\},$$

$$N_{x_2} = \{y \in Y \mid \mu_\varphi(x_2, y) > \mu_B(y)\} = \{y_1, y_3\}.$$

Нарешті, за таблицею 1.6 знайдемо:

$$\mu_{A*}(x_1) = \min\{0.3,\ 0.4\} = 0.3,$$

$$\mu_{A*}(x_2) = \min\{0.3,\ 0.7\} = 0.3.$$

Приклад 1.8. Нехай задана нечітка множина $A = \{x \mid \mu_A(x) = e^{-x/2}\}$ (рис. 1.6) в універсальній множині $X = E_{\geq 0}$ також нечітке відобра-

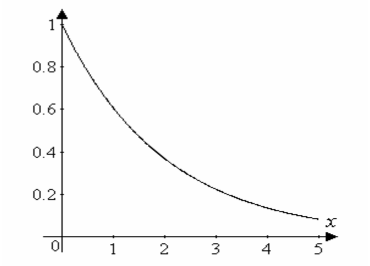


Рис. 1.6

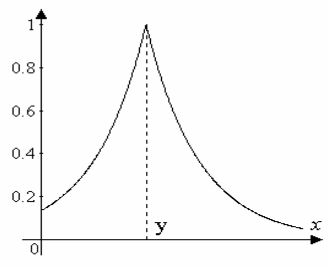


Рис. 1.7.

ження у множину $Y = E_{\geq 0}$ з функцією належності $\mu_\varphi(x,y) = e^{-|x-y|}$ (графік при фіксованому y на рис. 1.7).

1. Знайти образ B нечіткої множини A при відображенні $\mu_\varphi(x,y)$.

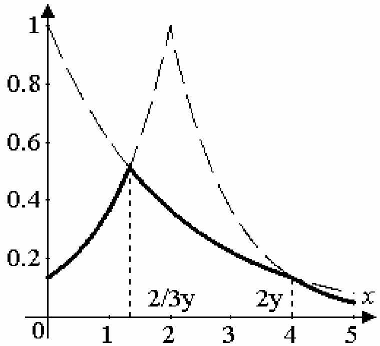


Рис. 1.8.

Розв'язок. За означенням $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_\varphi(x,y), \mu_A(x)\}$. На рис. 1.8 жирною лінією виділено графік функції $\min\left\{e^{-|x-y|}, e^{-\frac{1}{2}x}\right\}$, з якого ми бачимо, що функція $\min\left\{e^{-|x-y|}, e^{-\frac{1}{2}x}\right\}$ має два максимуми у точках $x = 2/3y$ і $x = 2y$, серед яких перший, для $\forall y \in E_{\geq}$, є глобальним. Таким чином, образ *B* нечіткої множини *A*, що задається нечітким відображенням $\mu_\varphi(x,y)$ є нечіткою множиною з функцією належності $\mu_B(y) = \max_{x \in E_{\geq 0}} \min\left\{e^{-|x-y|}, e^{-\frac{1}{2}x}\right\} = e^{-\frac{1}{3}y}$.

2. Знайти прообраз *A** нечіткої множини *B**, яка задана функцією належності $\mu_{B^*}(y) = e^{-\frac{1}{4}y}$ (рис. 1.9), при нечіткому відображенні $\mu_\varphi(x,y)$ (на рис. 1.10 – графік функції належності нечіткого відображення $\mu_\varphi(x,y)$ при фіксованому *y* = *x*).

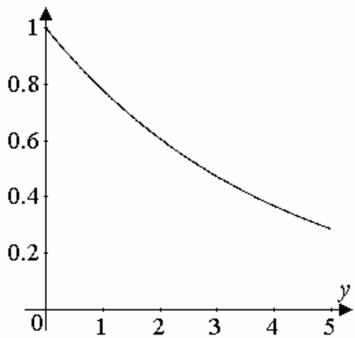


Рис. 1.9.

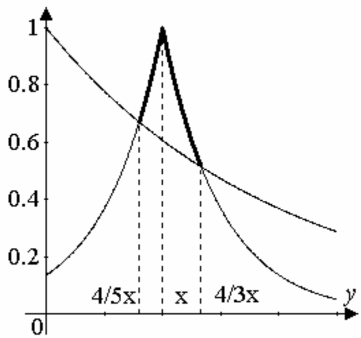


Рис. 1.10.

Розв'язок. Побудуємо

$$X_0 = \{x | \exists y \in Y, \mu_\varphi(x,y) > \mu_{B^*}(y)\} =$$

$$= \left\{ x \in E_{\geq 0} \middle| \exists y \in E_{\geq 0},\ e^{-|x-y|} > e^{-\frac{1}{4}y} \right\} =$$

$$= \left\{ x \in E_{\geq 0} \middle| \exists y \in E_{\geq 0},\ \tfrac{3}{4}y < x < \tfrac{5}{4}y \right\} = E_{>0}\,.$$

Одержали всі додатні точки числової осі. Одразу можна записати, що $\mu_{A^*}(0) = 1$. Визначимо множину:

$$N_x = \{y \in Y | \mu_\varphi(x_1,y) > \mu_B(y)\} = \left\{ y \in E_{\geq 0} \middle| e^{-|x-y|} > e^{-\frac{1}{4}y} \right\} =$$

$$= \left\{ y \in E_{\geq 0} \middle| \tfrac{4}{5}x < y < \tfrac{4}{3}x \right\},\ \forall x \in E_{>0}$$

(її легко побачити на рис. 1.10; жирною лінією на графіку виділений фрагмент, для якого нерівність виконується). Тепер знайдемо для $\forall x \in E_{>0}$ функцію належності:

$$\mu_{A^*}(x) = \inf_{y \in N_x} \mu_B(y) = \min\left\{ e^{-\frac{1}{4}y} \middle| \tfrac{4}{5}x < y < \tfrac{4}{3}x,\ y > 0 \right\} = e^{-\frac{1}{3}x}$$

(на рисунку бачимо, що її мінімум досягається при $y = \frac{4}{3}x$). Остаточно отримаємо, $\mu_{A^*}(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$, $\forall x \in E_{\geq 0}$.

Нечіткі бінарні відношення. Аналогічно "звичайним" бінарним відношенням можна ввести *поняття нечіткого бінарного відношення* на множині *X* як нечітку підмножину декартового добутку $X \times X$ з функцією належності $\mu_R(x,y)$. Для нечітких бінарних відношень поняття носія й множини рівня нечіткого відношення, а також операції об'єднання, перетину, доповнення вводяться відповідно введеним поняттям теорії нечітких множин:

♦ носієм нечіткого відношення $\mu_R(x,y)$ на множині X називається чітка множина $\mathrm{supp}(R) = \{(x,y) \in X \times X \,|\, \mu_R(x,y) > 0\}$;

♦ множиною рівня α нечіткого відношення $\mu_R(x,y)$ на множині *X* називається чітка множина $R_\alpha = \{(x,y) \in X \times X \,|\, \mu_\mathrm{R}(x,y) \geq \alpha\}$;

♦ об'єднанням нечітких відношень $\mu_R(x,y)$ і $\mu_S(x,y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R\cup S}(x,y)=\max\{\mu_R(x,y),\mu_S(x,y)\},\ \forall x,y\in X\ ;$$

♦ перетином нечітких відношень $\mu_R(x,y)$ і $\mu_S(x,y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R\cap S}(x,y)=\min\{\mu_R(x,y),\mu_S(x,y)\},\ \forall x,y\in X\ ;$$

♦ доповненням нечіткого бінарного відношення $\mu_R(x,y)$ на множині *X* називається нечітка множина з функцією належності

$$\mu_{\overline{R}}(x,y)=1-\mu_R(x,y),\ \forall x,y\in X\ .$$

Операція композиції (добутку) вводиться різними способами:

♦ для максмінної композиції нечітких відношень R і S

$$\mu_{R\times S}(x,y)=\sup_{z\in X}\min(\mu_R(x,z),\mu_S(z,y));$$

♦ для мінмаксної композиції

$$\mu_{R\times S}(x,y)=\inf_{z\in X}\max(\mu_R(x,z),\mu_S(z,y));$$

♦ для максимультипликативної композиції

$$\mu_{R\times S}(x,y)=\sup_{z\in X}(\mu_R(x,z)\circ\mu_S(z,y)).$$

Оскільки для $\forall x,y,z\in X$ виконуються нерівності :

$$\max(\mu_R(x,z),f_S(z,y))\ge\min(\mu_R(x,z),\mu_S(z,y))\ge\mu_R(x,z)\circ\mu_S(z,y),$$

то, якщо позначити через R_1^2,R_2^2,R_3^2 – відповідно максмінну, мінімаксну та максимультипликативну композиції відношення *R* самого на себе, матимемо: $R_1^2\supseteq R_2^2\supseteq R_3^2$.

Для оберненого відношення R^{-1} : $\mu_{R^{-1}}(x,y)=\mu_R(y,x),\forall x,y.$

Якщо задавати бінарне відношення матрицею, то її елементи будуть довільними числами з відрізка [0,1]. По змісту ця матриця аналогічна матриці, що описує "звичайне" бінарне відношення, але оскільки її елементи приймають значення не тільки 0 чи 1, а й проміжні між ними, факт, що елемент r_{ij} цієї матриці дорівнює $\alpha\in[0,1]$ означає, що ступінь виконання відношення x_iRx_j дорівнює α. Інтерпретація операцій над нечіткими бінарними відношеннями у термінах матриць, які їх задають, є такою ж самою як і у випадку "звичайних" бінарних відношень.

Найважливішими властивостями нечітких бінарних відношень, що використовуються у теорії прийняття рішень є:

♦ рефлексивність $(\mu_R(x,x)=1,\forall x)$;

♦ антирефлексивність $(\mu_R(x,x)=0,\forall x)$;

♦ симетричність $(\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x),\forall x,y)$;

♦ антисиметричність $(\min((\mu_R(x,y),\mu_R(y,x))=0,\forall x\neq y)$;

♦ транзитивність ($R\circ R\subseteq R$).

Слід відмітити, що оскільки операція композиції може бути введеною трьома способами (максмінна композиція, мінмаксна композиція, максимультипликативна композиція), то і властивість транзитивності визначається відповідно.

Нечіткі відношення переваги, байдужності, подібності і строгої переваги. Нехай *X* – задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* на *X* будемо називати будь-яке задане на цій множині рефлексивне нечітке бінарне відношення. Оскільки нечітке відношення можна розуміти як нечітку підмножину декартового добутку $X\times X$, то нечітке відношення переваги $R_{\geq}$ на множині *X* будемо описувати функцією належності виду $\mu_{\geq}:X\times X\rightarrow[0,1]$, яка є рефлексивною, тобто $\mu_{\geq}(x,x)=1,\ \forall x\in X$.

Рефлексивність нечіткого відношення переваги відбиває той природний факт, що будь-яка альтернатива $x\in X$ не гірша самої себе.

Якщо $\mu_{\geq}$ нечітке відношення переваги на множині альтернатив *X*, то для будь-якої пари альтернатив $x,\ y\in X$, значення $\mu_{\geq}(x,y)$ розуміється як ступінь переваги *x* у порівнянні з y. Рівність $\mu_{\geq}(x,y)=0$ може означати або те, що з позитивним ступенем має місце зворотна перевага, тобто, $\mu_{\geq}(y,x)>0$ або те, що альтернативи *x* і *y* є непорівнянні між собою з жодним позитивним ступенем, тобто, $\mu_{\geq}(y,x)=0$.

За заданим на множині *X* нечітким відношенням переваги $\mu_{\geq}$ можна однозначно визначити три відповідних йому нечітких відношення: *байдужності* $R_{\sim}$ (функцію належності будемо позначати через $\mu_{\sim}$), *подібності* $R_{\approx}$ $(\mu_{\approx})$ (квазіеквівалентності) і *строгої переваги* $R_{>}$ $(\mu_{>})$. За аналогією зі звичайними відношеннями переваги ці три відношення можна визначити наступним чином:

$R_{\sim}=(X\times X\setminus R_{\geq}\cup R_{\geq}^{-1})\cup(R_{\geq}\cap R_{\geq}^{-1}), R_{\approx}=R_{\geq}\cap R_{\geq}^{-1},\quad R_{>}=R_{\geq}\setminus R_{\geq}^{-1},$

де $R_{\geq}^{-1}$ – зворотне до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$ і описується функцією належності $\mu_{\leq}(x,y)=\mu_{\geq}(y,x), \ \ \forall x,y\in X$.

За визначеннями перетину, об'єднання й різниці нечітких множин, одержимо такі вирази для функції належності цих відношень:

1. Нечітке відношення байдужності:

$$\mu_{\sim}(x,y)=\max\{1-\max\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\},\min\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\}\}=$$
$$=\max\{\min\{1-\mu_{\geq}(x,y),1-\mu_{\geq}(y,x)\},\min\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\}\}.$$

2. Нечітке відношення подібності:

$$\mu_{\approx}=\min\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\}.$$

3. Нечітке відношення строгої переваги:

$$\mu_{>}(x,y)=\begin{cases}\mu_{\geq}(x,y)-\mu_{\geq}(y,x), & \mu_{\geq}(x,y)\geq\mu_{\geq}(y,x),\\ 0, & \mu_{\geq}(x,y)\leq\mu_{\geq}(y,x).\end{cases}$$

Розглянуті нечіткі відношення: байдужності $\mu_{\sim}$, подібності $\mu_{\approx}$ і строгої переваги $\mu_{>}$ успадковують властивості їх чітких прототипів.

1. Нечіткі відношення байдужності $\mu_{\sim}$ і подібності $\mu_{\approx}$ – рефлексивні й симетричні.

2. Нечітке відношення строгої переваги $\mu_{>}$ - антирефлексивне й антисиметричне.

3. Якщо вихідне нечітке відношення переваги на множині X транзитивне, то цією ж властивістю володіють нечіткі відношення подібності $\mu_{\approx}$ і строгої переваги $\mu_{>}$.

Контрольні завдання до §1

1. Нехай в універсальній множині $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ задані дві нечіткі множини *A* і *B*, задані функціями належності μ_A та μ_B. Знайти для цих множин: об’єднання, перетин та різницю.

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$	0.2	0.1	0	0.1	0.9	0.3	0
$\mu_B(x)$	0	0,1	0.3	0.5	0.7	0.9	1

2. Нехай задані дві нечіткі множини $A=\{x\in E^1 \,|\, x$ - приблизно

дорівнює 1}, $B=\{x\in E^1 \mid x$- приблизно дорівнює 3}. Знайти об'єднання, перетин та різницю цих множин.

3. Нехай задана нечіткі множини $\mu_A(x)=e^{-x}$ та $\mu_B(x)=e^{-(x-3)^2}$. Знайти об'єднання, перетин та різницю цих множин.

4. Нехай в універсальній множині $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ нечітка множина A задається функцією належності $\mu_A(x)$, а нечітке відображення $\varphi: X\to Y$ функцією належності $\mu_\varphi(x,y): X\times Y\to[0,1]$. Знайти образ B нечіткої множини A, що задається відображенням $\mu_\varphi(x,y)$.

5. Нехай задана нечітка множина $\mu_A(x)=e^{-x}$ в універсальній множині $X=E^1$ та також задане нечітке відображення у множину $Y=E^1$ з функцією належності $\mu_\varphi(x,y)=e^{(x-y)^2}$. Знайти образ B нечіткої множини A.

§2. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги

Якщо інформація про ситуацію прийняття рішення описана у формі звичайного відношення переваги, раціональним, природно вважати вибір недомінованих альтернатив. Застосуємо подібний підхід до задачі прийняття рішень при нечітко описаному відношенні переваги на множині альтернатив. При цьому ми розглянемо спочатку задачі, у яких сама множина альтернатив описана чітко, тобто як звичайна множина, а потім звернемося до більш загального випадку з нечіткою множиною альтернатив.

Отже, нехай X – звичайна (чітко описана) множина альтернатив, $\mu_\geq$ задане на ньому нечітке відношення нестрогої переваги, а $\mu_>$ відповідне нечітке відношення строгої переваги. Визначимо нечітку підмножину недомінованих альтернатив множини X за відношенням $\mu_\geq$. Відповідно до визначення відношення строгої переваги $\mu_>$, для будь-яких альтернатив $x,\ y\in X$ величина $\mu_>(x,y)$ є ступінь, із якою альтернатива y домінується альтернативою x. Отже, при фіксованому $y\in X$ визначену на X функцію $\mu_>(y,x)$ можна розглядати як функцію належності нечіткої множини "всіх" альтернатив x, що строго домінуються альтернативою y. Нехай, наприклад, ступінь належності альтернативи x^* цій множині (відповідній деякому фіксованому y) дорівнює 0.3. Це означає, що x^* домінується y із ступенем 0.3.

Неважко зрозуміти, що множина "всіх" альтернатив x, що не домінуються альтернативою y, являє собою доповнення у X введеної множини $\mu_>(y,x)$. Звідси одержуємо, що ця нечітка множина описується функцією належності виду $1-\mu_>(y,x),\ \forall x\in X$. Якщо, наприклад, $\mu_>(y,x)$ =0.3, то зі ступенем 0.7 альтернатива x не домінується альтернативою y. Тому для виділення у X підмножини "всіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою з X, потрібно взяти перетин нечітких множин виду $1-\mu_>(y,x)$ за всіма $y\in X$. Цей перетин ми і назвемо *нечіткою підмножиною недомінованих (ефективних) альтернатив (нечітка множина Парето)* і позначимо його

$$\mu^P(x)=\inf_{y\in X}\{1-\mu_>(y,x)\}=1-\sup_{y\in X}\mu_>(y,x)=1-\sup_{y\in X}(\mu_\geq(y,x)-\mu_\geq(x,y)).$$

Останнє співвідношення отримується з визначення нечіткого відношення строгої переваги. Дійсно, нехай x – довільно обрана альтернатива. Введемо множини:

$$Y^1(x)=\{y\in X \mid \mu_\geq(y,x)>\mu_\geq(x,y)\},$$

$$Y^2(x)=\{y\in X \mid \mu_\geq(y,x)\leq\mu_\geq(x,y)\}.$$

Користуючись тим, що $Y^1(x)\cup Y^2(x)=X,\ \forall x\in X$, отримаємо:

$$\mu^P(x)=1-\sup_{y\in X}\mu_>(y,x)=1-\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}\mu_>(y,x)-\sup_{y\in Y^2(x)}\mu_>(x,y)\right\}.$$

Далі, спираючись на визначення $\mu_>$, одержуємо:

$$\mu^P(x)=1-\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}(\mu_\geq(y,x)-\mu_\geq(x,y)),0\right\}=$$

$$=1-\max\left\{\sup_{y\in Y^1(x)}(\mu_\geq(y,x)-\mu_\geq(x,y)),\ \sup_{y\in Y^2(x)}(\mu_\geq(y,x)-\mu_\geq(x,y))\right\}=$$

$$=1-\sup_{y\in X}(\mu_\geq(y,x)-\mu_\geq(x,y)),\ x\in X.$$

Отриманий вираз дозволяє описати нечітку підмножину недомінованих альтернатив через вихідне відношення нестрогої переваги на множині X.

Значення $\mu^P(x)$ являє собою ступінь, із якою альтернатива x не домінується жодною з альтернатив множини X. Нехай $\mu^P(x^*) = \alpha$ для деякої альтернативи x^*. Тоді x^* може домінуватися іншими альтернативами, але із ступенем не вище $1-\alpha$. Дійсно, при цьому $\sup\limits_{y\in X} \mu_>(y, x^*) = 1-\alpha$, отже, $\mu_>(y, x^*) \le 1-\alpha$ для $\forall y \in X$.

Оскільки величина $\mu^P(x)$ є ступінь "недомінованості" альтернативи x, то в умовах нечіткої інформації раціональним природно вважати вибір альтернатив, що мають по можливості більшу ступінь належності нечіткій множині $\mu^P(x)$.

Множина таких альтернатив $X^P = \{x \in X \mid \mu^P(x) = \sup\limits_{y\in X} \mu^P(y)\}$ називається *множиною максимальних недомінованих альтернатив* множини X за відношенням переваги $\mu_\ge$.

Приклад 2.1. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, задане за табл. 2.1 нечітке відношення переваги $\mu_\ge(x_i, x_j)$, $i, j \in \overline{1,4}$.

За визначенням отримаємо нечітку множину Парето (див. табл. 2.2). Звідси видно, що найбільший (рівний 0.8) ступінь недомінованості має альтернатива x_3, тому її вибір як розв'язку варто вважати раціональним у рамках розглянутого підходу.

Таблиця 2.1.

$\mu_\ge$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.2	0.3	0.1
x_2	0.5	1	0.2	0.6
x_3	0.1	0.6	1	0.3
x_4	0.6	0.1	0.5	1

Таблиця 2.2.

	x_1	x_2	x_3	x_4
μ^P	0.5	0.6	0.8	0.5

Розглянемо тепер задачу прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги у випадку, коли множина альтернатив є нечіткою.

Нехай на універсальній множині X задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \to [0,1]$, нечіткою ціль ОПР задається відношенням переваги $\mu_\ge(x, y)$.

Відмінність цієї задачі від попередньої полягає у тім, що більш переважними слід вважати альтернативи, які мають більшу ступінь переваги як за нечітким відношенням $\mu_{\geq}$, так і за функцією належності μ_D. Для вирішення цієї проблеми побудуємо ще одне відношення переваги $\eta_{\geq}$, яке є індукованим функцією належності μ_D

$$\eta_{\geq}(x,y)=\begin{cases}1, & \mu_D(x)\geq\mu_D(y),\\ 0, & \mu_D(x)<\mu_D(y).\end{cases}$$

Тепер, якщо вважати відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ рівноцінними для ОПР, їх можна агрегувати в одне відношення переваги, яке визначається як їх перетин $\omega_{\geq}(x,y)=\min\{\mu_{\geq}(x,y),\eta_{\geq}(x,y)\}$. Далі слід розв'язати задачу прийняття рішень у попередній постановці (на чіткій множині альтернатив із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги).

Контрольні завдання до §2

1. Нехай на множині $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, задане нечітке відношення переваги $\mu_{\geq}(x_i,x_j)$, $i,j\in\overline{1,4}$. Знайти нечітке відношення Парето.

$\mu_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.8	0.7	0.5
x_2	0.2	1	0.1	0.4
x_3	0.4	0.3	1	0.2
x_4	0.1	0.1	0.5	1

2. Нехай на множині $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, задане нечітке відношення переваги $\mu_{\geq}(x_i,x_j)$, $i,j\in\overline{1,4}$. Знайти нечітке відношення Парето.

$\mu_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.4	0.4	0.1
x_2	0.5	1	0.5	0.2
x_3	0.9	0.9	1	0.9
x_4	0.6	0.2	0.1	1

3.Нехай на універсальній множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \to [0,1]$ із нечіткою ціллю $\mu_{\geq} : X \times X \to [0,1]$. Знайти нечітке відношення Парето.

X	μ_D
x_1	0.1
x_2	0.6
x_3	0.4
x_4	0.2

$\mu_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.4	0.4	0.1
x_2	0.5	1	0.5	0.2
x_3	0.9	0.9	1	0.9
x_4	0.6	0.2	0.1	1

§3. Нечіткі задачі багатокритеріальної оптимізації

Задача прийняття рішень із нечітко визначеною ціллю (підхід Белмана – Лотфі-Заде). В основі цього підходу є визначення цілі задачі прийняття рішень як нечіткої підмножини універсальної множини альтернатив.

Нехай *X* – універсальна множина альтернатив. Нечіткою ціллю у *X* будемо називати нечітку підмножину *X*, яку будемо позначати через *G* і задавати функцією належності $\mu_G : X \to [0,1]$. Якщо, наприклад, *X* – числова вісь, то нечіткою ціллю прийняття рішень може бути нечітка множина типу "величина *x* повинна приблизно дорівнювати 5" або "бажано, щоб величина *x* була значно більшою за 10" і т.п. Чим більший ступінь належності альтернативи *x* нечіткій множині цілі *G*, тобто чим більше значення $\mu_G(x)$, тим більше ступінь досягнення цієї цілі при виборі альтернативи *x* як розв'язку задачі.

Нечітка множина альтернатив також може описуватися нечіткою підмножиною універсальної множини альтернатив *X*. У наведеному вище прикладі нечітка множина альтернатив може мати, наприклад, такий вигляд: "значення *x* повинно бути не занадто великим" чи "значення *x* не повинне бути набагато більше 50" і т.п.

Більш загальною є постановка задачі, у якій нечітка ціль і нечітка множина альтернатив є підмножинами різних універсальних множин. Нехай *X* – універсальна множина альтернатив, елементи якої оцінюються за вектором критеріїв $f=(f_1,...,f_m)$, який задає відображення X в універсальну множину оцінок Y, тобто $f:X\to Y$. В універсальній множині оцінок Y задана ціль у вигляді нечіткої множини $\mu_G:Y\to[0,1]$.

Задача при цьому зводиться до попередньої постановки (тобто до випадку, коли ціль – нечітка підмножина X) наступним чином. Визначимо нечітку множина альтернатив $\overline{\mu}_G$, що забезпечує досягнення заданої цілі μ_G. Ця множина є прообразом нечіткої множини μ_G при відображенні f, тобто за визначенням прообразу нечіткої множини маємо: $\overline{\mu}_G(x)=\mu_G(f(x)),\ x\in X$.

Після цього вихідна задача розглядається як задача досягнення нечіткої цілі $\overline{\mu}_G$ на нечіткій множині альтернатив.

Перейдемо тепер до визначення розв'язку задачі прийняття рішень із нечітко визначеною ціллю. Грубо говорячи, розв'язати цю задачу – означає досягти цілі і задовольнити обмеження, причому у даній нечіткій постановці варто говорити не просто про досягнення цілі, а про її досягнення з тим або іншим ступенем із врахуванням і ступеню належності до множини альтернатив.

За підходом Белмана – Лотфі-Заде ці фактори враховуються наступним чином. Нехай, наприклад, деяка альтернатива x забезпечує досягнення мети із ступенем $\mu_G(x)$ і належить множині альтернатив із ступенем $\mu_D(x)$. Тоді покладається, що ступінь належності цієї альтернативи множині розв'язків задачі дорівнює мінімальному з цих чисел. Іншими словами, альтернатива зі ступенем, наприклад, 0.3, із тим же ступенем належить нечіткій множині розв'язків, незважаючи на те, що вона забезпечує досягнення цілі зі ступенем, рівним, наприклад, 0.8.

Таким чином, нечіткою множиною розв'язків задачі досягнення нечіткої цілі на нечіткій множині альтернатив називається перетин нечітких множин цілі й альтернатив, тобто функція належності множини розв'язків має вигляд $\mu(x)=\min\{\mu_G(x),\mu_D(x)\}$.

При наявності декількох цілей нечіткий розв'язок описується функцією належності: $\mu(x)=\min\{\mu_{G_1}(x),...,\mu_{G_m}(x),\mu_D(x)\}$.

Якщо функції належності до множини альтернатив та цілі розрізняються по важливості, а також задані відповідні коефіцієнти відноної важливості ступеню належності до множини альтернатив $\lambda_0 > 0$ і відносної важливості цілей $\lambda_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$, то функція належності розв'язку визначається виразом:

$$\mu(x) = \min\{\lambda_1 \mu_{G_1}(x), ..., \lambda_m \mu_{G_m}(x), \mu_D(x)\}.$$

Приклад 4.1. Нехай $X = \{1,2,...,10\}$, а нечітка ціль і множина альтернатив задаються таблицею 4.1:

Таблиця 4.1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	0.9	0.7	0.5
$\mu_D(x)$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0

Тоді множину розв'язків μ отримаємо у наступній таблиці 4.2.

Таблиця 4.2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(x)$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.6	0.4	0.2	0

Ціль, множину альтернатив та множину рішень можна інтерпретувати, наприклад, так: *G* = "значення *x* повинно бути близьким до 7", *D* = " *x* повинно бути близьким до 5". Тоді отриманий розв'язок: "значення *x* повинно бути близьким до 6".

Якщо виникає потреба у визначенні конкретної альтернативи, яку слід вважати розв'язком задачі з нечіткою ціллю, то її можна визначити різними способами. Один із найбільш розповсюджених способів полягає у виборі альтернативи *x**, що має максимальну ступінь належності множині нечітких розв'язків, тобто:

$$\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\}.$$

Такі альтернативи називають *максимізуючими розв'язками.*

Багатокритеріальні задачі з нечіткою множиною альтернатив. Спочатку розглянемо звичайну (однокритеріальну) задачу математичного програмування з нечіткою множиною альтернатив, а потім узагальнимо отримані результати на випадок багатокритеріальної задачі.

Нехай X – універсальна множина, а φ – функція $X \to E^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору елементів із множини X. У множині X задана нечітка підмножина $\mu_D : X \to [0,1]$, яку ми назвемо нечіткою множиною альтернатив. Задача полягає у "максимізації" у деякому сенсі функції φ на нечіткій множині μ_D.

Під "максимізацією" за підходом С.О. Орловського [12] розуміють вибір нечіткої підмножини μ множини μ_D, якій відповідають найбільші значення як функції φ, так і функції належності μ_D нечіткої множини альтернатив. Ці альтернативи у задачах багатокритериальної оптимізації (Розділ 4) у залежності від способу їх порівняння називаються ефективними, слабко ефективними, власно ефективними (відповідно максимальними за Парето, за Слейтером, за Джеофріоном). Далі для простоти без обмеження загальності ми будемо використовувати тільки визначення ефективних альтернатив.

Зрозуміло, що представлення розв'язку у формі усієї нечіткої множини ефективних альтернатив за критеріями φ і μ_D має сенс, коли така форма змістовно зрозуміла особі, що приймає рішення. Нагадаємо, що альтернатива $x^* \in X$ називається ефективною за двома функціями $\varphi(x)$ і $\mu_D(x)$, якщо не існує іншої альтернативи $x \in X$ строго кращої за x^*, тобто $\neg \exists x \in X : \varphi(x) \geq \varphi(x^*)$, $\mu_D(x) \geq \mu_D(x^*)$ і хоча б одна нерівність є строгою. Іншими словами, якщо $x^* \in X$ ефективна альтернатива за функціями $\varphi(x)$ і $\mu_D(x)$ на множині X, то вибором будь-якої іншої альтернативи з X неможливо збільшити (у порівнянні з $\varphi(x^*)$ та $\mu_D(x^*)$) значення однієї функції, не зменшивши при цьому значення іншої. Якщо ж опис розв'язку задачі у вигляді нечіткої множини є не прийнятним ОПР, то під розв'язком задачі варто розуміти деякий компроміс між бажанням одержати найбільші значення як функції φ, так і функції належності μ_D. Цей компроміс може бути знайдений будь-яким із методів багатокритеріальної оптимізації.

Отже, нехай P – множина всіх ефективних альтернатив двохкритеріальної задачі: $\varphi(x) \to \max$, $\mu_D(x) \to \max$, $x \in X$.

Визначення 4.2. Розв'язком задачі математичного програмування з нечіткою множиною альтернатив називається нечітка множина з функцією належності:

$$\mu(x) = \left\{\mu_D(x) \middle| x \in P;\ 0 \middle| x \notin P\right\}.$$

У цьому визначенні наголошується, що ОПР повинна використовувати у своєму рішенні лише ті альтернативи універсальної множини X, що мають значення функцій $\varphi(x)$ і $\mu_D(x)$, які не покращуються одночасно. Вибір деякої конкретної альтернативи з множини P може зробити лише ОПР, яка має деяку додаткову інформацію (чи міркування) про те, що важливіше: значення функції φ чи ступінь належності μ_D до множини альтернатив.

Відповідне нечіткому розв'язку нечітке значення функції φ записується у вигляді

$$\mu_\varphi(\psi) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(\psi)} \mu(x).$$

У випадку, коли ми маємо багатокритеріальну задачу з нечіткою множиною альтернатив, функція φ є векторною $\varphi: X \to R^m$. Під розв'язком такої задачі ми будемо розуміти вибір нечіткої підмножини μ множини μ_D, елементам якої відповідають найбільші значення як функцій φ_i, $i = \overline{1,m}$, так і функції належності μ_D нечіткої множини альтернатив.

Нехай P_m – множина всіх ефективних альтернатив $(m+1)-$ критеріальної задачі:

$$\varphi_i(x) \ \to \max,\ i = \overline{1,m},$$
$$\mu_D(x) \to \max,\ x \in X.$$

Визначення 4.3. Розв'язком багатокритеріальної задачі з нечіткою множиною альтернатив називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\mu(x) = \left\{\mu_D(x) \middle| x \in P_m;\ 0 \middle| x \notin P_m\right\}.$$

Таким чином, у випадку багатокритеріальної задачі нечітка множина розв'язків буде включати у себе ті і тільки ті альтернативи, які будуть ефективними як за критеріями φ_i, $i = \overline{1,m}$, так і за функцією належності μ_D до нечіткої множини альтернатив. Вибір деякої конкретної з них здійснюється за допомогою будь-якого з методів багатокритеріальної оптимізації.

Задача нечіткої векторної оптимізації. Формально загальна задача нечіткої векторної оптимізації описується наступним чином. Нехай на універсальній множині *X* задана нечітка підмножина альтернатив $\mu_D : X \to [0,1]$. На універсальній множині $Y \subseteq E^m$ числових оцінок наслідків альтернатив із множини *X* задане нечітке відношення переваги $\mu_R : Y \times Y \to [0,1]$. Альтернативи оцінюються нечіткими значеннями векторів оцінок $y = (y_1,..., y_m) \in Y$, які задаються нечітким відображенням $\varphi : X \times Y \to [0,1]$.

При такому нечіткому описі цілі задачі прийняття рішень альтернативи потрібно порівнювати одна з одною за відповідними їм нечіткими множинами значень векторів оцінок *y* за нечітким відношенням переваги μ_R ("більш кращим" нечітким оцінкам відповідають "більш кращі" альтернативи).

Таким чином, необхідним етапом в аналізі подібної задачі прийняття рішень є побудова відношення переваги для порівняння між собою нечітких множин на основі нечіткого відношення переваги μ_R.

Побудова узагальненого відношення переваги. Нехай на універсальній множині оцінок *Y* задане нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R : Y \times Y \to [0,1]$. Нехай Ψ клас всіх нечітких підмножин із множини *Y*, тобто Ψ – клас всіх функцій належності виду $\mu : Y \to [0,1]$. Треба побудувати відношення переваги між нечіткими множинами класу Ψ, яке є *індукованим* вихідним відношенням μ_R.

Неважко зрозуміти, що задане на множині *Y* нечітке відношення переваги μ_R можна розглядати як нечітке відображення $Y \to \Psi$. Образ будь-якого елементу $y^0 \in Y$ при цьому відображенні є нечітка підмножина множини *Y* із функцією належності $\mu_R(y^0, y)$. Фактично, функція $\mu_R(y^0, y)$ описує нечітку множину елементів *Y*, зв'язаних із y^0 відношенням *R*, тобто таких $y \in Y$, що $y^0 R y$.

Нехай $\mu : Y \to [0,1]$ – деяка нечітка підмножина множини *Y*. Тоді за визначенням 1.1 μ_R є нечітка підмножина *Y* із функцією належності виду: $\tilde{\eta}(\mu, y) = \sup_{z \in Y} \min\{\mu(z), \mu_R(z, y)\}$.

Побудована таким чином функція $\tilde{\eta}$ описує нечітке відображення $\Psi \to \Psi$ і є узагальненням вихідного нечіткого відображення $\mu_R : Y \to \Psi$. Неважко зрозуміти і те, що ця функція описує узагальнення $\tilde{R}$ вихідного відношення переваги *R* на множину $\Psi \times Y$. Іншими словами, для фіксованої нечіткої множини $\mu^0 \in \Psi$ функція $\tilde{\eta}(\mu^0, y)$ описує нечітку множину елементів множини *Y*, зв'язаних з μ^0 узагальненим відношенням переваги, тобто таких $y \in Y$, що $\mu^0 \tilde{R} y$. Величина $\tilde{\eta}(\mu^0, y)$, таким чином, є ступінь, із яким нечітка множина μ^0 є переважнішою елемента *y*. Аналогічним чином, одержуємо, що величина $\tilde{\eta}(x, \mu^0) = \sup\limits_{z \in Y} \min\{\mu(z), \mu_R(y, z)\}$ є ступенем оберненої переваги $y \geq \mu^0$.

Продовжимо процес узагальнення вихідного нечіткого відношення переваги *R*. Розглянемо отриману функцію $\tilde{\eta}(\mu, y)$ як нечітке відображення $Y \to \tilde{\Psi}$, де $\tilde{\Psi}$ клас усіх нечітких підкласів класу Ψ (тобто усіх функцій виду $\Psi \to [0,1]$), і нехай μ^0 довільний елемент Ψ. Тоді за визначенням 1.1 образом μ^0 при нечіткому відображенні $\tilde{\eta}$ є нечіткий підклас класу Ψ з функцією належності виду: $\eta(\mu, \mu^0) = \sup\limits_{y \in Y} \min\{\mu^0(y), \tilde{\eta}(\mu, y)\}$, причому його можна розуміти як підклас нечітких підмножин μ таких, що $\mu \geq \mu^0$.

Іншими словами, функція η описує узагальнення нечіткого відношення переваги $\tilde{R}$ на множину $\Psi \times \Psi$. Отже, і відповідне узагальнення вихідного нечіткого відношення переваги *R*. Величина $\eta(\mu_1, \mu_2)$ є ступінь виконання переваги $\mu_1 \geq \mu_2$. Остаточно одержуємо такий вираз для функції належності узагальненого відношення переваги:

$$\eta(\mu_1, \mu_2) = \sup_{y \in Y} \min\left\{\mu_1(y), \sup_{z \in Y} \min\{\mu_2(z), \mu_R(y, z)\}\right\} =$$
$$= \sup_{z, y \in Y} \min\{\mu_1(y), \mu_2(z), \mu_R(y, z)\}.$$

Аналогічним образом можна прийти до висновку про те, що обернена перевага $\mu_2 \geq \mu_1$ виконується зі ступенем, рівним величині: $\eta(\mu_2,\mu_1)=\sup\limits_{z,y\in Y}\min\{\mu_1(y),\mu_2(z),\mu_R(z,y)\}$.

Отримана функція належності узагальненого відношення переваги у випадку, коли вихідне відношення переваги є чітким, конкретизується наступним чином:

$$\eta(\mu_1,\mu_2)=\sup_{\substack{z,y\in Y,\\ y\ge z}}\min\{\mu_1(y),\mu_2(z)\},$$

коли R є відношенням нестрогого порядку $(\ge)$ в E^m (доречно нагадати, що $(y_1,\dots,y_m)\ge(z_1,\dots,z_m)\Leftrightarrow y_i\ge z_i,\ \forall i=\overline{1,m},\ \exists j: y_j>z_j$) і $\eta(\mu_1,\mu_2)=\sup\limits_{\substack{z,y\in Y,\\ y>z}}\min\{\mu_1(y),\mu_2(z)\}$, коли R є відношенням строгого порядку $(>)$ в E^m.

Приклад 4.2. Нехай Y – числова вісь і R – природний порядок $(\ge)$ на Y. Розглянемо дві нечітких підмножини Y : М1, М2, які показані на рис. 4.1. З отриманих формул маємо:

$$\eta(M1,M2)=\sup_{z,y\in Y,y\ge z}\min\{M1(y),M2(z)\}=0.4,$$

$$\eta(M2,M1)=\sup_{z,y\in Y,\,z\ge y}\min\{M1(y),M2(z)\}=1.$$

Тобто, іншими словами: М1 краща за М2 із ступенем 0.4, М2 краще за М1 із ступенем 1. Звідси, за бажанням, можна виразити відношення строгої переваги й байдужості: М1 байдужа до М2 із ступенем 0.4, М2 строго краща за М1 із ступенем 0.6.

Нечітка множина недомінованих альтернатив. Звернемося тепер безпосередньо до розв'язку задачі нечіткої багатокритеріальної оптимізації. Спочатку, для простоти викладення матеріалу, будемо вважати, що множина альтернатив описана чітко і будемо позначати її через X. Наприкінці розділу коротко зупинимося і на задачах із нечіткою множиною альтернатив. Для розв'язку поставленої задачі побудуємо

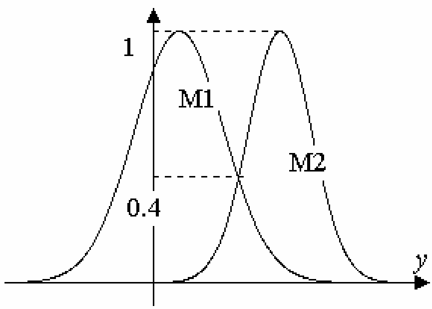


Рис. 4.1.

на множині альтернатив X нечітке відношення переваги, індуковане вихідним нечітким відношенням переваги R і нечіткою ціллю, яка задана нечітким векторним відображенням φ. Після цього виділимо у X нечітку підмножину недомінованих альтернатив, яка і буде множиною оптимальних за Парето рішень задачі нечіткої багатокритеріальної оптимізації.

Будь-якій альтернативі x^* задане нечітке відображення φ ставить у відповідність нечітку векторну оцінку цієї альтернативи у формі нечіткої підмножини $\varphi(x^*, y)$ множини оцінок $Y \subseteq E^m$.

Нехай $\tilde{\eta}$ - нечітке відношення переваги, індуковане нечітким відношенням переваги R на класі Ψ усіх нечітких підмножин множини Y. Користуючись цим відношенням, можна порівнювати одну з іншою нечіткі оцінки альтернатив, а отже і самі альтернативи. Іншими словами, ступенем переваги альтернативи $x_1 \in X$ альтернативі $x_2 \in X$ ми будемо вважати ступінь переваги нечіткої множини оцінок $\varphi(x_1, y)$ нечіткій множині оцінок $\varphi(x_2, y)$, тобто покладемо $\eta(x_1, x_2) = \tilde{\eta}(\varphi(x_1, y), \varphi(x_2, y))$.

Таким чином, використовуючи визначення узагальненого нечіткого відношення переваги, одержуємо нечітке відношення переваги на множині альтернатив X наступного виду:

$$\eta(x_1, x_2) = \sup_{z, y \in Y} \min\{\varphi(x_1, z), \varphi(x_2, y), \mu_R(z, y)\}.$$

Після того як і у множині альтернатив уведене нечітке відношення переваги вихідна задача зводиться до задачі прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги (див. §2). Неважко переконатися у тому, що коли функція φ має властивість $\sup_{y \in Y} \varphi(x, y) = 1,\ \forall x \in X$, тобто коли оцінка будь-якої альтернативи є нормальною нечіткою множиною, то нечітке відношення переваги η рефлексивно, тобто $\forall x \in X,\ \eta(x, x) = 1$.

Виділимо тепер у множині X нечітку підмножину недомінованих (оптимальних за Парето) альтернатив. Відповідно до визначення вона буде мати наступний вигляд:

$$\tilde{\eta}^P(x) = 1 - \sup_{x' \in X}\{\eta(x', x) - \eta(x, x')\} =$$

$$= 1 - \sup_{x' \in X}\{ \sup_{z,y \in Y} \min\{\varphi(x',z), \varphi(x,y), \mu_R(z,y)\}$$
$$- \sup_{z,y \in Y} \min\{\varphi(x',z), \varphi(x,y), \mu_R(y,z)\}\}.$$

Необхідно відзначити, що коли функція $\varphi(x, y)$ є такою, що для деякої альтернативи x^* має місце нерівність $\sup_{y \in Y} \varphi(x^*, y) = \alpha < 1$, то значення $\tilde{\eta}^P(x^*)$ може не відповідати фактичному ступеню недомінованості цієї альтернативи.

Для ілюстрації розглянемо крайній випадок, коли $\alpha = 0$. У вихідній задачі це відповідає тому, що оцінка альтернативи x^* є невідомою або невизначеною. У той же час для цієї альтернативи $\eta(x^*, x^*) = 0$ і $\tilde{\eta}^P(x^*) = 1$, тобто альтернатива виявляється недомінованою, причому винятково через відсутність інформації про неї.

Для того щоб виключити такі аномальні випадки, величину $\tilde{\eta}^P(x^*)$ необхідно скорегувати. Для цього значення функції $\tilde{\eta}^P(x)$ потрібно порівнювати з відповідними значеннями $\sup_{y \in Y} \varphi(x, y)$.

Спираючись на ці міркування, розв'язком вихідної задачі будемо вважати не функцію належності $\tilde{\eta}^P$, а скореговану функцію виду:

$$\eta^P(x) = \min\left\{\tilde{\eta}^P(x), \sup_{y \in Y} \varphi(x, y)\right\}.$$

Неважко показати, що для будь-якого x має місце рівність $\sup_{y \in Y} \varphi(x, y) = \eta(x, x)$. Тоді остаточно функцію $\eta^P(x)$ можна записати у вигляді: $\eta^P(x) = \min\{\tilde{\eta}^P(x), \eta(x, x)\}$. Отримана функція належності й описує нечітку множину рішень вихідної задачі, раціональним можна вважати вибір $x^* = \arg\max_{x \in X} \eta^P(x)$.

Якщо у вихідній задачі множина альтернатив описана нечітко (нехай μ_D – функція належності цієї множини), то вибір альтернатив варто здійснювати з врахуванням двох відношень переваги: отриманого вище узагальненого відношення переваги η й відношення переваги $\eta_{\geq}$, що відбиває ступені допустимості альтернатив. Це відношення є індукованим функцією належності μ_D до нечіткої множини альтернатив і визначається наступним чином:

$$\eta_{\geq}(x,y)=\begin{cases}1, & \mu_D(x)\geq\mu_D(y),\\ 0, & \mu_D(x)<\mu_D(y).\end{cases}$$

Тепер, якщо вважати відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ рівноцінними для ОПР, їх можна агрегувати в одне відношення переваги, яке визначимо як їх перетин $\omega_{\geq}(x,y)=\min\{\mu_{\geq}(x,y),\eta_{\geq}(x,y)\}$ і розв'язати задачу на чіткій множині альтернатив із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги. У випадку, коли відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ не є рівноцінними для ОПР, все буде складніше.

Задачі нечіткої векторної оптимізації. У випадку, коли відношення переваги R на множині оцінок Y є чітким і це – відношення нестрогого порядку ($\geq$) â E^m вибір конкретного розв'язку вихідної задачі можна зробити більш конструктивним. Функція належності $\eta^P(x)$, що описує нечітку множину розв'язків вихідної задачі конкретизується так: $\eta^P(x)=\min\{\tilde{\eta}^P(x),\eta(x,x)\}$, де

$$\tilde{\eta}^P(x)=1-\sup_{x'\in X}\{\sup_{\substack{z,y\in Y,\\ z\geq y}}\min\{\varphi(x',z),\varphi(x,y)\}-\sup_{\substack{z,y\in Y,\\ z\geq y}}\min\{\varphi(x,z),\varphi(x',y)\}\}.$$

Доречно нагадати, що:

$$y=(y_1,...,y_m)\geq z=(z_1,...,z_m)\Leftrightarrow y_i\geq z_i,\ \forall i=\overline{1,m},\ \exists j: y_j>z_j.$$

Оскільки величина $\eta^P(x)$ є ступінь недомінованості альтернативи x, то можна зробити наступний висновок. Якщо $\eta^P(x)\geq\alpha$, то у множині X немає жодної альтернативи, що домінувала б альтернативу x із ступенем більшим, ніж $1-\alpha$. Це зауваження дає можливість вибрати конкретний розв'язок зі ступенем недомінованості не меншим за α, як розв'язок звичайної багатокритеріальної задачі:

$$\begin{aligned}&y_i\to\max,\ i=\overline{1,m},\\ &\varphi(x,y)\geq\alpha, x\in X,\ y=(y_1,...,y_m)\in Y.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Дійсно, нехай (x^*,y^*) – розв'язок отриманої багатокритеріальної задачі. Припустимо супротивне, тобто, нехай знайдуться $\tilde{x}\in X$ і $\varepsilon>0$ такі, що: $\sup\limits_{z,y\in Y,\,z\geq y}\min\{\varphi(\tilde{x},z),\varphi(x^*,y)\}-$

$$-\sup_{z,y\in Y,\,z\geq y}\min\{\varphi(x^*,z),\varphi(\tilde{x},y)\}\geq 1-\alpha+\varepsilon.\tag{3.2}$$

Виберемо $\tilde{y} \in Y$ так, що $\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \alpha - \varepsilon$ (відсутність такого $\tilde{y}$ означає, що $\sup\limits_{y \in Y} \varphi(x, y) < \alpha$ і розв'язку із ступенем недомінованості не меншим за α, не існує, тому слід вибрати меншу ступінь). Оскільки (x^*, y^*) є розв'язком задачі (3.1), то $\varphi(x^*, y^*) \geq \alpha$. Звідси $\sup\limits_{z, y \in Y,\, z \geq y} \min\{\varphi(x^*, z), \varphi(\tilde{x}, y)\} \geq \min\{\varphi(x^*, y^*), \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})\} \geq \min\{\alpha, \alpha - \varepsilon\} =$ $= \alpha - \varepsilon,$ але тоді наше припущення є неможливим, оскільки лівий доданок у лівій частині (3.2) не перевищує 1.

Таким чином, будь-який компромісний розв'язок багатокритеріальної задачі (3.1) буде розв'язком вихідної задачі зі ступенем недомінованості не меншим за α.

У випадку, коли множина альтернатив є нечіткою (нехай μ_D – функція належності цієї множини), отримаємо багатокритеріальну задачу з чіткими критеріями і нечіткою множиною альтернатив μ_D. Під розв'язком такої задачі будемо розуміти вибір нечіткої підмножини μ множини μ_D, якій відповідають найбільші значення як функцій y_i, $i = \overline{1, m}$, так і функції належності μ_D нечіткої множини альтернатив.

Нехай $P_m(\alpha)$ – множина всіх ефективних альтернатив $(m+1)-$ критеріальної задачі:

$$\mu_D(x) \to \max,\ y_i \to \max,\ i = \overline{1, m},$$
$$\phi(x, y) \geq \alpha,\ x \in X,\ y = (y_1, ..., y_m) \in Y.$$

Тоді розв'язком задачі нечіткої векторної оптимізації з нечіткою множиною альтернатив зі ступенем недомінованості альтернатив, не меншим за α, називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \mu_D(x), & x \in P_m(\alpha), \\ 0, & x \notin P_m(\alpha). \end{cases}$$

Таким чином, нечітка множина рішень вихідної задачі буде включати у себе ті й тільки ті альтернативи зі ступенем недомінованості не меншим за α, які будуть ефективними як за числовими оцінками альтернатив y_i, $i = \overline{1, m}$, так і за функцією належності μ_D нечіткої множини альтернатив. Вибір деякої конкретної з них альтернативи здійснюється за допомогою методів багатокритеріальної оптимізації (див. Розділ 4).

Контрольні завдання до §3

1. Розв'язати методом ідеальної точки (S=1) наступну задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$x_1 + x_2 \to \max,\ x_{1,2} \in [0,1],\ \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

2. Розв'язати методом ідеальної точки (S=∞) наступну задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 1)^3 \to \max,\ x_{1,2} \in [0,1],\ \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

3. Розв'язати методом послідовних поступок (три кроки) наступну задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$x_1 \to \max,\ x_1 + x_2 \to \max,\ x_{1,2} \in [0,1],\ \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2 .$$

4. Розв'язати (зробити дві ітерації) методом послідовного уводу обмежень (варіант 2) наступну задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$(x_1 - 1)^3 + 2(x_2 - 1)^3 \to \max,\ x_{1,2} \in [0,1],\ \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2.$$

5.Розв'язати (зробити дві ітерації) методом послідовного уводу обмежень (варіант 3) наступну задачу прийняття рішень в умовах нечіткої інформації:

$$2(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 1)^3 \to \max,\ x_{1,2} \in [0,1],\ \mu(x) = 1 - (x_1 + x_2 - 1)^2.$$

Питання для самоперевірки до розділу 7

1. Що таке універсальна множина альтернатив?
2. Дайте визначення множини рівня нечіткої множини.
3. Дайте визначення нечіткого відображення чіткої множини.
4. Дайте визначення нечіткого відношення Парето.
5. Що таке множина максимальних недомінованих альтернатив?
6. Яка основна ідея розв'язку ігор з нечіткою цільовою множиною стратерій.
7. Дайте визначення нечіткої рівноваги Неша.
8. У чому полягає підхід Белмана – Лотфі-Заде.
9. У чому полягає підхід С.О. Орловського до багатокритеріальних задач з нечіткою множиною альтернатив?

СПИСОК ОСНОВНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Розен В.В. Цель – оптимальность – решение. – Москва: Радио и связь, 1982. – 168 с.

2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. –Москва: Мир, 1985.-200 с.

3. Макаров И.М., Виноградская Т.М и др. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. – Москва: Наука. 1982.– 328 с.

4. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.

5. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – Москва: Мир, 1990. – 206 с.

6. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – Москва: Мир, 1991. – 464 с.

7. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Київ: Наукова думка, 2002. – 381с.

8. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений.-Москва: Логос, 2000. – 296с.

9. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Методичні рекомендації до виконання практичних і лабораторних робіт з теорії прийняття рішень.- Київ: ВПЦ „Київський університет", 2001. – 46с.

10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 254 с.

11. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. – Санкт-Петербург: Экономическая школа, 2001. – 424 с.

12. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука, 1981. – 206 с.

СПИСОК ДОДАТКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ

13. Arrow K. Social Choice and Individual Values, 2nd ed. (1st ed. 1951), New York: John Wiley.

14. Nash J.F. Equilibrium Points in n-Person Games // Proceedings of National Acadamy of Science (US), 1951, N36.

15. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы проектирования сложных систем. – Москва: Наука, 1982. – 288с.

16. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Методы и алгоритмы проектирования сложных систем. – Київ: Наукова думка,1984. – 216с.

17. Воронин А.Н. и др. Векторная оптимизация динамических систем.-Київ: Техніка, 1999. – 284с.

18. Хоменюк В.В. Элементы теории многоцелевой оптимизации.-Москва: Наука, 1983. – 125с.

19. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. – Москва: Наука, 1974. – 256с.

20. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. – Москва:Наука,1989. – 320с.

21. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами.-Моска: Наука, 1976. – 328с.

22. Салуквадзе М.Е. Методы векторной оптимизации. – Тбилиси: Мецниереба, 1976.

23. Волошин О., Піхотник Є. Експертна система прогнозування нестабільних процесів//"Штучний інтелект", 1999, №2. – С.354-359.

24. Волошин О.Ф., Панченко М.В. Експертна система якісного оцінювання на основі багатопараметричних залежностей //"Проблеми математичних машин і систем", 2002, №2. – С.83-89.

25. Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н. Метод косвенного определения весовых коэффициентов параметров объектов //Проблемы управления и информатики, 2003, №2.

26. Волошин А.Ф., Гнатиенко Г.Н. Нечеткие функции принадлежности в нечетких задачах принятия решений//International Journal "Information: Theories&Applications", 2003, N3. – P.243-247.

27. Волошин А., Маляр М. Нечеткие модели многокритериального коллективного выбора // XI-th International Comference “KDS-05" Proceedings, FOI-Commerce, 2005. – P.247-250.

28. Мащенко С.О. Исследование стабильности равновесий на основе принципа индивидуальной оптимальности / С.О. Мащенко // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 4. – С. 162 – 169.

29. Мащенко С.О. Индивидуально-оптимальные равновесия некооперативных игр в отношениях предпочтения / С.О. Мащенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С. 171 – 179.

30. Мащенко С.О. Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие / С.О. Мащенко // Журнал обчисл. та прикладн. матем. - 2012. - № 1(107).- С. 40 - 65.