О.М. Башняков, В.В. Пічкур

Оптимальний синтез систем керування

Електронний посібник для студентів
за напрямком підготовки "Прикладна математика"

ВСТУП ТА АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ

Кожна *система керування* складається з об'єкту керування О та деякого пристрою С, що керує об'єктом О. Стан об'єкту визначається вектором $x=(x_1 x_2 ... x_n)^T$, який називається *фазовими координатами* О. Пристрій С посилає до О вектор сигналів $u=(u_1 u_2 ... u_r)^T$, що називається *функцією керування* (Рис.1). Математично поведінка об'єкта О описується рівняннями руху. Це можуть бути системи алгебраїчних рівнянь (регресійні моделі), диференціальні рівняння, інтегральні рівняння, дискретні рівняння. Якщо рівняння руху записуються у вигляді дискретних рівнянь, то такі системи є дискретними. Для неперервних систем найбільш розповсюдженою математичною формою є звичайні диференціальні рівняння. Такі системи називаються системами *з зосередженими параметрами:*

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t),$$

де $f(x,u,t)$ є n-вимірна вектор функція, t – час функціонування системи.

Якщо стан об'єкту описується рівнянням в частинних похідних, то така неперервна система називається системою *з розподіленими параметрами.*

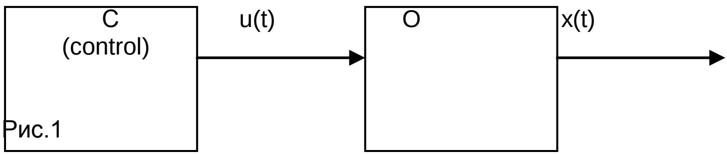

Рис.1

За виглядом керуючого впливу системи керування можна розбити на два класи: системи *з програмним керуванням* та системи *з оберненим зв'язком*. Перший тип систем характеризується тим, що об'єкти керування мають точно визначені рівняння з точно визначеними параметрами, відсутній випадковий вплив, критерій якості є детермінованим. Тоді є можливість розрахувати керування $u(t)$ до початку функціонування системи. Керування вигляду

$$u=F(t)$$

називається *програмним керуванням*. Тут $F(t)$ є деяка r-вимірна функція, що вибирається з класу вимірних або кусково-неперервних керувань. Системи програмного керування називаються ще *незамкненими*. Такі системи є обмеженими, так як вони не відслідковують поточного стану системи, який може змінюватись під впливом випадкових збурень, неточностей моделі тощо. Тому керуючий пристрій наділяється додатковою ланкою. По цій ланці вихідний сигнал $x(t)$ поступає на керуючий пристрій С і тоді система називається системою *з оберненим зв'язком* або *замкненою системою* (рис.2).

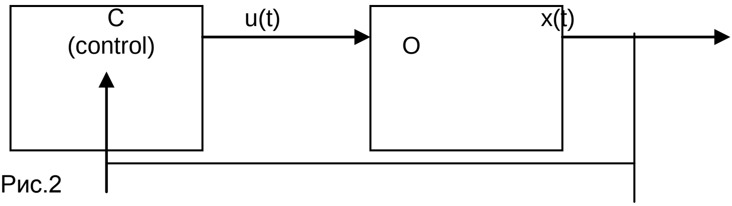

Рис.2

Керування вигляду

$$u = F(x,t)$$

називається керуванням *з оберненим зв'язком.* Тут $F(x,t)$ є r-вимірна функція (з класу вимірних, кусково-неперервних функцій).

Приклад. Розглянемо задачу зупинки маятника в положенні рівноваги.

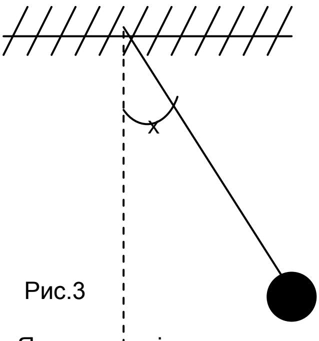

Рис.3

Якщо x є відхиленням маятника від стану рівноваги, а u – сила, яку необхідно прикласти до маятника, то рівняння руху мають вигляд

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = u\,.$$

Припустимо, що сила задовольняє обмеженню $|u| \le \bar{u}$. Зробимо заміну змінних $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = x_2$ і отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + u\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Множина $M = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ визначає стан рівноваги і називається термінальною. Якщо в початковий момент часу $t = t_0$ відомі

$x(t_0)=x_1(t_0)=x_1^0$ та $\dfrac{dx(t_0)}{dt}=x_2(t_0)=x_2^0$, то може бути побудоване програмне керування $u=u(t)$, яке переводить систему (1) з положення (x_1^0,x_2^0) на термінальну множину M. Таких керувань є багато. Одне з них здійснює перевід за найменший час і є оптимальним за швидкодією. Для його знаходження застосовують принцип максимуму Понтрягіна. Але типовою є ситуація, коли стан системи (x_1^0,x_2^0) є невідомим наперед. Наприклад, маятник під впливом невідомих сил перейшов в стан (x_1^0,x_2^0) і його необхідно повернути в стан рівноваги M. Таким чином, ставиться задача про знаходження керування u, такого, що переводить систему (1) з *довільного* положення (x_1^0,x_2^0) на термінальну множину. Така задача є *задачею синтезу керування*. Якщо при цьому потрібно знайти керування, що переводить систему (1) на термінальну множину за найменший час, то така задача називається *задачею синтезу оптимального керування.* Задача синтезу розв'язується у класі керувань з оберненим зв'язком.

Задачу зупинки маятника в положенні рівноваги M можна розглядати наступним чином. Стаціонарний режим $x_1=0, x_2=0$ є розв'язком системи (1), якщо $u=0, x_1^0=0, x_2^0=0$. Такий рух називається програмним. Якщо маятник відхиляється від положення рівноваги, то необхідно знайти допустиме керування, яке б забезпечило асимптотичну стійкість стаціонарного режиму. Така задача називається задачею *стабілізації програмного руху.*

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t), \tag{2}$$

де x – n-вимірний вектор стану, $u=u(x,t)$ - r-вимірний вектор керування, що є вимірним за t і неперервним (або кусково-неперервним) за x та належить компакту $U\subset R^r$, $t\ge t_0$, $f(x,u,t)$ - n-вимірна неперервна вектор функція. Нехай задана термінальна множина $M\subset R^n$.

Означення. Задача *синтезу керування* для системи (2) полягає у визначені множини $W(\tau,T,M)\subset R^n$ та керування з оберненим зв'язком $u=\tilde{u}(x,t)$, такого, що є допустимим і всі розв'язки системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\tilde{u}(x(t),t),t)$$

такі, що $x(\tau)\in W(\tau,T,M)$, в момент $t=T$ попадають на термінальну множину M, тобто $x(T)\in M$. Тут $\tau<T$. Час, за який здійснюється перевід на множину M називається *часом перехідного процесу*. Якщо при цьому

необхідно оптимізувати деякий критерій якості $I(u, x, T)$, то така задача називається *задачею синтезу оптимального керування.*

Важливим питанням при побудові систем керування є аналіз стійкості програмних (заданих) режимів функціонування. Для цього досить широко використовуються методи теорії стійкості. Для побудови стійких систем керування використовуються різні підходи. Один з них полягає в аналізі початкових даних та параметрів системи, які забезпечують стійкий режим функціонування. Інший спосіб полягає у тому, що в структуру системи керування вводиться додаткова ланка оберненого зв'язку. Вибір цієї ланки здійснюється на основі теорії стійкості руху. Це означає, що побудова стійкої системи керування здійснюється за допомогою додаткових керувань (регуляторів), при яких програмний рух буде стійким. Задача побудови таких керувань називається *задачею стабілізації програмного руху* або задачею аналітичного конструювання регуляторів. Якщо потрібно забезпечити стійкість програмного руху і на класі стабілізуючих регуляторів оптимізувати деякий критерій якості $I(x, u)$, то така постановка називається задачею *оптимальної стабілізації.*

Основою розв'язування задачі оптимального синтезу керування є метод динамічного програмування Беллмана. Він широко висвітлений у науковій літературі

1. Беллман Р. Динамическое программирование:Пер с анг. -М.: Изд-во иностранной литературы, 1973. -400 с.
2. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией: Пер с анг. -М.: Наука, 1964. -359 с.
3. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования: Пер с анг. -М.: Наука, 1965. -458 с.
4. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления: Пер с анг. -М.: Наука, 1969. -118 с.
5. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. –К.: Вища школа, 1975. –328 с.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980. -520 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. -Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. -262 с.
8. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. -М.: Наука, 1975. -528 с.

Розвиток методу динамічного програмування здійснюється за двома основними напрямками. Перший напрямок пов'язаний з методами розв'язування диференціального рівняння Беллмана

1. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. -М.: Наука, 1973. -446 с.
2. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. –К.: УМК ВО, 1988. -190 с.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика, 1960. №№4-6.

Знайти точний розв'язок рівняння Беллмана надзвичайно складно, це вдається зробити у виняткових випадках. В зв'язку з цим розвиваються наближені методи. Вагомий внесок в цьому напрямку зробив Кротов. За допомогою методу Кротова показано існування ковзних оптимальних режимів, які відіграють важливу роль в питаннях оптимального регулювання.

1. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования// Вестник Московского университета, Серия математика, механика.– 1959. – №2. – С.25-32.

2. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления.– Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1977. – 232с.

3. Вапнярский И.Б. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее приложения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. –т.7, №2. – С.259-283.

4. Гамкрелидзе Р.В. О скользящих оптимальных режимах// Доклады Академии Наук СССР. – 1962.–т.143, №6. – С.1243-1245.

Другий напрямок пов'язано з розвитком алгоритму методу динамічного програмування

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. -М.: Наука, 1975. -528 с.

Надзвичайно велика кількість праць присвячена проблемі стабілізації

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. -М.: Наука, 1966. -532 с.

2. Зубов В.И. Устойчивость движения. -М.: Высшая школа, 1973. -271 с.

3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. -М.: Наука, 1975. -494 с.

4. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. -К.: Выща школа, 1978. -184 с.

5. Кириченко Н.Ф. Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. К.: Изд-во Киев. ун-та, 1972. -212 с.

6. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. –К.: Наукова думка, 1985. –304 с.

РОЗДІЛ 1
МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЛЕКЦІЯ 2
ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТІ БЕЛЛМАНА

1. Постановка задачі. Нехай X - простір стану з R^n, $\Omega_t(X)$ - фазові обмеження, $U \subset R^r$ - простір керувань, $\Omega_t(U)$ - замкнені множини, $t \in [t_0, T]$. Задача оптимального керування полягає в знаходженні нижньої точної грані функціоналу

$$J(u,x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(T)) \quad (1)$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \quad (2)$$

$$x(t) \in \Omega_t(X), \quad (3)$$

$$u(t) \in \Omega_t(U),\ t \in [t_0, T]. \quad (4)$$

Тут u - функція керування, x - вектор фазових координат, $f(x,u,t)$ - n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування розв'язку задачі Коші, $f_0(x,u,t)$ - інтегрована функція, $\Phi(x)$ - неперервна функція. Розв'язком задачі (1) – (4) називають пару (u_*, x_*), яка доставляє значення точної нижньої грані функціоналу (1). Керування u вибирають як правило, з класу кусково-неперервних функцій, або з класу вимірних функцій.

2. Принцип Беллмана. Метод динамічного програмування базується на принципі оптимальності Беллмана. Геометричний зміст принципу Беллмана є наступним:

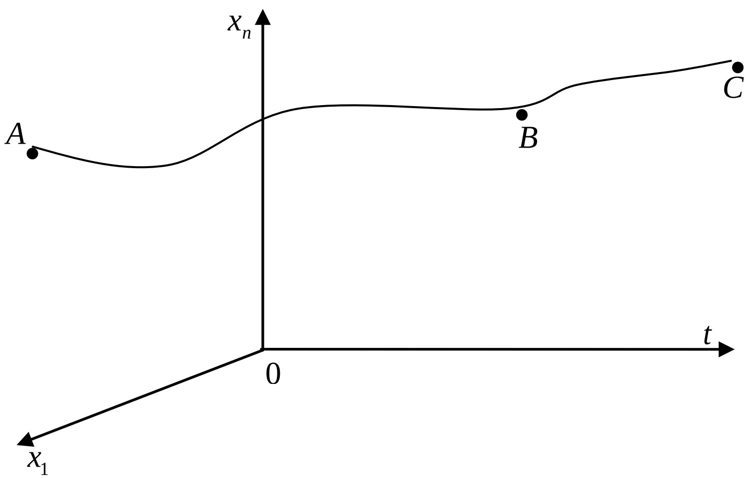

Рис. 1

якщо траєкторія системи (2) з'єднує точки АС і є оптимальною траєкторією задачі (1) – (4), то траєкторія ВС також буде оптимальною для деякої задачі оптимального керування при довільному виборі точки В на траєкторії АС.

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (1) – (4). Зафіксуємо $s \in (t_0, T)$. Задача полягає в тому. щоб мінімізувати функціонал

$$J_s(u,x)=\int_s^T f_0(x,u,t)dt+\Phi(x(T)) \qquad (5)$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t), \qquad (6)$$

$$x(t)\in\Omega_t(X), \qquad (7)$$

$$x(s)=x_*(s), \qquad (8)$$

$$u(t)\in\Omega_t(U),\ t\in[s,T]. \qquad (9)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1 (принцип оптимальності Беллмана). Якщо пара $(\tilde{u}(t),\tilde{x}(t))$ є розв'язком задачі (5) – (9), то $(\tilde{u}(t),\tilde{x}(t))=(u_*(t),x_*(t))$ на відрізку $t\in[s,T]$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $(\tilde{u}(t),\tilde{x}(t))\neq(u_*(t),x_*(t))$. Тоді $J_s(u_*,x_*)>J_s(\tilde{u},\tilde{x})$. Побудуємо керування

$$\hat{u}(t)=\begin{cases}u_*(t),t\in[t_0,s],\\ \tilde{u}(t),t\in[s,T].\end{cases}$$

Тоді відповідна йому траєкторія має вигляд

$$\hat{x}(t)=\begin{cases}x_*(t),t\in[t_0,s],\\ \tilde{x}(t),t\in[s,T].\end{cases}$$

Таким чином,

$$J(\hat{u},\hat{x})=\int_{t_0}^T f_0(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)dt+\Phi(\hat{x}(t))=\int_{t_0}^s f_0(x_*(t),u_*(t),t)dt+$$

$$\int_s^T f_0(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t),t)dt+\Phi(\tilde{x}(t))<$$

$$\int_{t_0}^s f_0(x_*(t),u_*(t),t)dt+J_s(u_*,x_*)=J(u_*,x_*).$$

Отже, керування u_* не є оптимальним. Протиріччя доводить теорему.

Приклад. Принцип Беллмана виконується не для всіх задач оптимального керування. Так, розглянемо задачу мінімізації функціоналу

$$J(u) = \alpha^2 \int_0^{2\pi} (x - \sin t)^2 dt + (\int_0^{2\pi} x dt)^2 , \tag{10}$$

де

$$\frac{dx}{dt} = u , \ t \in [0, 2\pi]. \tag{11}$$

Очевидно, що $J(u) \geq 0$. Тому пара

$u_*(t) = \cos t$, $x_*(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

є розв'язком цієї задачі, причому оптимальне значення функціоналу $J_* = J(u_*) = 0$. Побудуємо для задачі (10), (11) допоміжну задачу. Зафіксуємо $s \in [0, 2\pi]$. Потрібно мінімізувати функціонал

$$J_s(u) = \alpha^2 \int_s^{2\pi} (x - \sin t)^2 dt + (\int_s^{2\pi} x dt)^2$$

при умові, що

$$\frac{dx}{dt} = u , \ x(s) = x_*(s) = \sin s , \ t \in [s, T]$$

Візьмемо $s = \pi$. Тоді $x_*(\pi) = 0$ і

$$J_s(u^*) = (\int_\pi^{2\pi} \sin t dt)^2 = 4 .$$

Розглянемо керування $\tilde{u}(t) = 0$. Йому відповідає траєкторія $\tilde{x}(t) = 0$ в силу допоміжної задачі. Таким чином,

$$J_s(\tilde{u}) = \alpha^2 \int_\pi^{2\pi} \sin^2 t dt = \alpha^2 \frac{\pi}{2} .$$

Знайдемо α, при яких $J_s(u^*) > J_s(\tilde{u})$. Для цих α виконується $\alpha^2 \frac{\pi}{2} < 4$. Таким чином, u_* не є оптимальним керуванням допоміжної задачі при $\alpha^2 < \frac{8}{\pi}$.

3. Рівняння Беллмана для дискретної системи. Розглянемо наступну задачу оптимального керування: мінімізувати функціонал

$$J(u_k, x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x_k, u_k, t_k) + \Phi(x_N) \tag{12}$$

при умовах

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, t_k),\ k = 0,1,\dots,N-1, \quad (13)$$

$$x_k \in \Omega_k(X),\ k = 0,1,\dots,N, \quad (14)$$

$$u_k \in \Omega_k(U),\ k = 0,1,\dots,N-1, \quad (15)$$

Тут $X \subseteq R^n$, $\Omega_k(X) \subseteq X$, $k = 0,1,\dots,N$, $U \subseteq R^r$, $\Omega_k(U) \subseteq U$, $k = 0,1,\dots,N-1$, $F_0(x,u,t)$, $\Phi(x)$ - неперервні функції, $F(x,u,t)$ - неперервна вектор-функція. Розв'язком задачі (12) – (15) називається пара послідовностей $(\{u_k^*\},\{x_k^*\})$, який забезпечує мінімум функціоналу (12), при умовах (13) – (15).

Задача (12) – (15) має зміст, якщо множина $\Omega_N(X)$ є досяжною з точок множини $\Omega_0(X)$.

Означення. Множина $\Omega_N(X)$ називається досяжною з точки $x_k \in \Omega_k(X)$, якщо існує таке допустиме керування $\{u_j\}_{j=k}^{N-1}$ та відповідна йому траєкторія системи (13) $\{x_j\}_{j=k}^{N-1}$ з початковою умовою x_k такі, що $x_N \in \Omega_N(X)$.

Задача 1. Для задачі (13) – (15) виконується принцип оптимальності Беллмана. Сформулювати цей принцип і довести його.

Отже, задачу (13) – (15) можна розбити на дві.

1). Для кожної точки $x_0 \in \Omega_0(X)$ мінімізувати функціонал (13) при обмеженнях (13) – (15). Таким чином оптимальне значення функціоналу буде залежати від точки x_0:

$$g(x_0) = \min_{\{u_k\}_{k=0}^{N-1}} J(\{u_k\},\{x_k\}).$$

2). Знайти оптимальне значення функціоналу

$$J^* = \min_{x_0 \in \Omega_0(X)} g(x_0).$$

Зафіксуємо k і позначимо

$$B_k(x_k, t_k) = \min_{\{u_j\}_{j=k}^{N-1}} \{\sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j, u_j, t_j) + \Phi(x_N)\} =$$

$$\sum_{j=k}^{N-1} F(x_j^*, u_j^*, t_j) + \Phi(x_N^*).$$

Функція $B_k(x_k, t_k)$ є ***функцією Беллмана*** для задачі (12)-(15).

Цю рівність можна переписати наступним чином

$$B_k(x_k,t_k) = F_0(x_k^*,u_k^*,t_k) + \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j^*,u_j^*,t_j) + \Phi(x_N^*) \quad (16)$$

Враховуючи, що

$x_{k+1} = F(x_k, u_k^*(x_k), t_k)$

та використовуючи принцип оптимальності, з (16) отримуємо

$$B_k(x_k,t_k) = F_0(x_k^*,u_k^*,t_k) + B_{k+1}(x_{k+1},t_{k+1}) =$$
$$F_0(x_k,u_k^*(x_k),t_k) + B_{k+1}(F(x_k,u_k^*(x_k),t_k),t_{k+1}). \quad (17)$$

Якщо замість $u_k^*(x_k)$ поставити інше оптимальне керування $u_k \in \Omega_k(U)$, то права частина рівності (17) може тільки збільшитись. Тому

$$B_k(x_k,t_k) = \min_{u_k \in \Omega_k(U)} \{F_0(x_k,u_k,t_k) + B_{k+1}(F(x_k,u_k,t_k),t_{k+1})\}. \quad (18)$$

Співвідношення (18) називається *різницевим рівнянням Беллмана*. На його основі будується алгоритм розв'язування задачі (12) – (15).

4. Алгоритм методу динамічного програмування для дискретних систем.

Прямий хід алгоритму.

Крок 1. Покладемо в рівняння (18) $k = N-1$ і розв'яжемо задачу

$$B_{N-1}(x_{N-1},t_{N-1}) =$$
$$\min_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1}(U)} \{F_0(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1}) + \Phi(F(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1}))\} \quad (19)$$

для всіх $x_{N-1} \in \Omega_{N-1}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$, тобто, для яких $x_N = F(x_{N-1},u_{N-1},t_{N-1}) \in \Omega_N(X)$. Це означає, що ми знаходимо і запам'ятовуємо функцію $u_{N-1}^*(x_{N-1})$, яка мінімізує праву частину рівняння (19) та $B_{N-1}(x_{N-1},t_{N-1})$ для кожної точки $x_{N-1} \in \Omega_{N-1}(X)$.

Крок 2. В рівняння (18) покладемо $k = N-2$ і розв'яжемо задачу

$$B_{N-2}(x_{N-2},t_{N-2}) =$$
$$\min_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2}(U)} \{F_0(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}) + B_{N-1}(F(x_{N-2},u_{N-2},t_{N-2}),t_{N-1})\}$$

для всіх $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$, для яких досяжна множина $\Omega_N(X)$. Отримуємо $B_{N-2}(x_{N-2},t_{N-2})$ і оптимальне керування $u_{N-2}^*(x_{N-2})$, як функцію від $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$.

Крок 3. Продовжуючи аналогічно процес обчислень, приходимо до задачі

$$B_0(x_0,t_0) = \min_{u_0 \in \Omega_0(U)} \{F_0(x_0,u_0,t_0) + B_1(F(x_0,u_0,t_0),t_1)\}.$$

Для всіх $x_0 \in \Omega_0(X)$ розв'язуємо цю задачу і отримуємо оптимальне керування $u_0^*(x_0)$, $B_0(x_0,t_0)$.

Зворотній хід методу.

Крок 4. Якщо x_0 не є фіксованим, то знаходимо $x_0^* = \arg\min_{x_0 \in \Omega_0(X)} B_0(x_0,t_0)$.

Якщо ж x_0 є заданим в задачі (12) – (15), то $x_0^* = x_0$.

Крок 5. Знаходимо $u_0^* = u_0^*(x_0^*)$. Далі $x_1^* = F(x_0^*, u_0^*, t_0)$, $u_1^* = u_1^*(x_1^*)$. Остаточно $x_i^* = F(x_{i-1}^*, u_{i-1}^*, t_{i-1})$, $u_{i-1}^* = u_{i-1}^*(x_{i-1}^*)$, $i = 1,2,...,N$.

5. Аналіз алгоритму. Розглянемо особливості алгоритму методу динамічного програмування.

1. Алгоритм може бути застосований для задачі з нефіксованим інтервалом, у тому числі і до задачі швидкодії. Для цього потрібно будувати сітку по проміжку $[t_0, t_{\max}]$. Тоді T має приймати всеможливі значення з цієї сітки.

2. Метод динамічного програмування полягає у послідовному розв'язанні задач про мінімум деяких функцій за змінними $u_k \in \Omega_k(U)$ при довільних значеннях $x_k \in \Omega_k(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$. Якщо при цьому множина вказаних x_k є скінченною і їх небагато, то обчислення $B_k(x_k,t_k)$ можна здійснити для кожного такого x_k. Якщо ж таких точок багато або нескінченна кількість, то потрібно для $k = 0,1,...,N-1$ на множинах $\Omega_k(U)$ вводити сітку, апроксимувати $\Omega_k(U)$ скінченною кількістю вузлів і потім обчислювати $B_k(x_k,t_k)$ в вузлах сітки.

3. При умові повної дискретизації, метод дає абсолютний мінімум з врахуванням обмежень.

4. Метод розв'язує задачу *синтезу оптимального керування*.

5. При зростанні розмірності векторів x та u суттєво зростає складність обчислення алгоритму, яка полягає в тому, що значно зростають об'єми пам'яті необхідної для запам'ятовування векторів $u_k^*(x_k)$, x_k на прямому ході методу. Ця обставина має назву "прокляття розмірності".

6. На кожному кроці прямого ходу методу запам'ятовується лише оптимальне керування. Це значно економить час обчислень порівняно з перебором.

Література.

1. Беллман Р. Динамическое программирование:Пер с анг. -М.: Изд-во иностранной литературы, 1973. -400 с.

2. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. –К.: Вища школа, 1975. -328 с.

3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980. -520 с.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. –262 с.

ЛЕКЦІЯ 3
РІВНЯННЯ БЕЛЛМАНА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМАХ

1. Функція Беллмана. Розглянемо задачу оптимального керування: необхідно мінімізувати функціонал

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(T)) \tag{1}$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t) \tag{2}$$

при обмеженнях

$$x(t_0) = x_0\,,\; u(t) \in \Omega_t(U)\,,\; x(t) \in \Omega_t(X)\,,\; t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

Тут t_0, T є фіксованими моментами, скалярні функції $f_0(x,u,t), \Phi(x)$ є неперервними, $f(x,u,t)$ є n-вимірною вектор функцією неперервною за x, u та t і ліпшицевою за x, керування належить класу кусково неперервних функцій на відрізку $[t_0, T]$.

Функція

$$B(y,s) = \min_{\substack{u \in \Omega_t(U) \\ t \in [s,T]}} \left\{ \int_s^T f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(T)) \right\}, \tag{4}$$

що визначена на розв'язках системи (2) при початковій умові $x(s) = y$, називається *функцією Беллмана* задачі (1)-(3). За означенням $B(x_0, t_0)$ дорівнює оптимальному значенню функціоналу.

2. Інтегральне рівняння Беллмана. Виходячи з (4) та властивостей інтеграла, отримуємо

$$B(x,t) = \min_{\substack{u \in \Omega_\tau(U) \\ \tau \in [t,T]}} \left\{ \int_t^T f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x(T)) \right\} =$$

$$\int_t^T f_0(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x^*(T)) =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} f_0(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)d\tau + \int_{t+\Delta t}^{T} f_0(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x^*(T)).$$

Тут Δt – довільне число, таке, що $t+\Delta t<T$, $(x^*(t),u^*(t))$ – розв'язок задачі (1)-(3). Згідно принципу оптимальності

$$\int_{t+\Delta t}^{T} f_0(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)d\tau+\Phi(x^*(T))=B(x^*(t+\Delta t),t+\Delta t).$$

На довільній парі $(x(t),u(t))$ має місце нерівність

$$B(x,t)\le\int_{t}^{T} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\Phi(x(t)).$$

Таким чином

$$B(x,t)=\min_{\substack{u\in\Omega_\tau(U)\\ \tau\in[t,T]}}\left\{\int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+B(x(t+\Delta t),t+\Delta t)\right\}. \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається *рівнянням Беллмана в інтегральній формі*. За його допомогою будуються методи, аналогічні алгоритму динамічного програмування для дискретних систем.

3.Алгоритм методу динамічного програмування для неперервних систем. Алгоритм складається з двох частин: прямого ходу і зворотного ходу методу. Прямий хід методу полягає у тому що на часовій сітці у напрямку від T до t_0 для кожної допустимої точки x розв'язується рівняння (5). Цим самим будується синтезуюча функція керування. На зворотному ході оптимальне керування „збирається" у напрямку від t_0 до T за допомогою системи (2), умови Коші $x(t_0)=x_0$ з використанням побудованої на першому етапі алгоритму синтезуючої функції керування.

Розіб'ємо відрізок $[t_0,T]$ сіткою $t_0<t_1<t_2<...<t_N=T$ з деяким кроком h. Позначимо $\Omega_i(X)=\Omega_{t_i}(X)$, $\Omega_i(U)=\Omega_{t_i}(U)$, $i=0,1,2,...,N$.

Прямий хід методу.

Крок 1. Для будь-якого $x\in\Omega_{N-1}(X)$ розв'язуємо задачу

$$B(x,t_{N-1})=\min_{u\in\Omega_{N-1}(u)}\left\{\int_{t_{N-1}}^{T} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\Phi(x(T))\right\},$$

$x(t_N)\in\Omega_N(x)$.

Тут $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t)$, $x(t_{N-1}) = x$, $t \in [t_{N-1}, T]$. Знаходимо оптимальну функцію керування $u^* = u^*(x, t_{N-1})$ та запам'ятовуємо $B(x, t_{N-1})$, $x \in \Omega_{N-1}(X)$.

Крок 2. Розв'язуємо для $x \in \Omega_{N-2}(X)$ задачу

$$B(x, t_{N-2}) = \min_{u \in \Omega_{N-1}(u)} \left\{ \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(t_{N-1}), t_{N-1}) \right\},$$

$x(t_{N-1}) \in \Omega_{N-1}(x)$.

Тут $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t)$, $x(t_{N-2}) = x$, $t \in [t_{N-2}, t_{N-1}]$. Знаходимо $u^* = u^*(x, t_{N-2})$ та запам'ятовуємо $B(x, t_{N-2})$ для всіх $x \in \Omega_{N-2}(X)$.

Продовжуємо аналогічно процедуру обчислень, доки не прийдемо до наступної задачі.

Крок 3. Для $x \in \Omega_0(X)$ розв'язуємо

$$B(x, t_0) = \min_{u \in \Omega_0(u)} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + B(x(t_1), t_1) \right\}, \ x(t_1) \in \Omega_1(X),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t), \ x(t_0) = x, \ t \in [t_0, t_1]. \quad (6)$$

Якщо початкова умова задачі (1)-(3) є фіксованою – $x(t_0) = x_0$, то в (6) $x = x_0$. Знаходимо $u^* = u^*(x, t_0)$ та запам'ятовуємо $B(x, t_0)$ для кожного $x \in \Omega_0(X)$.

Зворотній хід методу.

Крок 4. Якщо точка $x(t_0)$ не є фіксованою, то знаходимо

$$x_0 = \arg\min_{x \in \Omega_0(x)} B(x, t_0).$$

Обчислюємо $u^* = u^*(x_0, t_0)$, підставивши x_0 в знайдену на прямому ході функцію $u^*(x, t_0)$. Далі, розв'язуючи задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u^*, t), \ x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, t_1],$$

визначаємо $x^*(t_1)$. Підставляємо $x^*(t_1)$ у $u^*(x, t_1)$ і знаходимо $u^* = u^*(x^*(t_1), t_0)$. Далі знову розв'язуємо задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u^*,t)\,,\ x(t_1) = x^*(t_1)\,,\ t \in [t_1,t_2]$$

і отримуємо $x^*(t_2)$ і т.д. поки не визначимо $x^*(t_N)$. Таким чином, знаходимо дві послідовності $x^*(t_k)$, $u^* = u^*(x^*(t_k),t_k)$, $k = 0,1,2,...,N$, що апроксимують оптимальний розв'язок задачі (1)-(3) на часовій сітці $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. Опис алгоритму методу динамічного програмування закінчено.

4. Диференціальне рівняння Беллмана. Припустимо, що функція Беллмана (4) є диференційованою, $f_0(x,u,t)$, $\Phi(x)$, $f(x,u,t)$ є неперервними за своїми змінними функціями. Розглянемо інтегральне рівняння Беллмана (5). При зроблених припущеннях

$$B(x(t+\Delta t),t+\Delta t) = B(x,t) + \frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\Delta t + grad_x^T B(x,t)\big(x(t+\Delta t) - x\big) + o(\Delta t$$

. (7)

Вважаємо, що обмеження $\Omega_t(U)$, $\Omega_t(X)$ є неперервними за Хаусдорфом за змінною t. З (5) і (7) випливає

$$B(x,t) = \min_{\substack{u\in\Omega_\tau(U)\\ \tau\in[t,T]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. B(x,t) + \frac{\partial B(x,t)}{\partial t}\Delta t + grad_x^T B(x,t)\big(x(t+\Delta t) - x\big) + o(\Delta t) \right\}.$$

Звідси, скоротивши $B(x,t)$ і поділивши останній вираз на Δt, отримуємо

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + \min_{\substack{u\in\Omega_\tau(U)\\ \tau\in[t,T]}} \left\{ \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. grad_x^T B(x,t)\frac{x(t+\Delta t) - x}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right\} = 0. \qquad (8)$$

Враховуємо, що $\dfrac{x(t+\Delta t) - x}{\Delta t} \to \dfrac{dx(t)}{dt}$, $\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Позначимо $G(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau$. Так як

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau = \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right] =$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[G(t+\Delta t)-G(t)\right]\to\frac{d}{dt}G(t)$$

при $\Delta t\to 0$ і $\dfrac{dG(t)}{dt} = f_0(x,u,t)$, то

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \to f_0(x,u(t),t),\ \Delta t\to 0.$$

Таким чином, з (8) отримаємо

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}+\min_{u\in\Omega_t(U)}\left\{grad_x^T B(x,t)\frac{dx(t)}{dt}+f_0(x,u,t)\right\}=0.$$

Так як $\dfrac{dx(t)}{dt} = f(x,u,t)$, то

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t}+\min_{u\in\Omega_t(U)}\left\{grad_x^T B(x,t) f(x,u,t)+f_0(x,u,t)\right\}=0. \qquad (9)$$

З означення функції Беллмана випливає, що при $t=T$ виконується

$$B(x,T)=\Phi(x). \qquad (10)$$

Рівняння (9) називається *рівнянням Беллмана в диференціальній формі* для задачі оптимального керування (1)-(3).

5. Рівняння Беллмана для задачі на швидкодію. Припустимо, що необхідно перевести систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t)) \qquad (11)$$

з заданої точки $x(0)=x_0$ в фіксоване положення $x(T)=x_1$ за мінімально можливий час T. При цьому умови (3) мають виконуватись. Тоді функція Беллмана $B(x)$ означає мінімальний час досяжності точки x_1 з точки x в силу системи (11) (мінімальний час перехідного процесу). Інтегральне рівняння Беллмана для задачі швидкодії має вигляд

$$B(x)=\min_{u(t)\in\Omega_t(U)}\left\{\Delta t+B(x(t+\Delta t),u(t))\right\}.$$

Запишемо диференціальне рівняння Беллмана для задачі на швидкодію. Виходячи з рівняння (9) та умови (10), отримаємо співвідношення

$$\min_{u(t)\in\Omega_t(U)} grad_x^T B(x) f(x,u) = -1. \qquad (12)$$

При цьому умова на правому кінці має вигляд

$$B(x_1) = 0. \tag{13}$$

Література.

1. Беллман Р. Динамическое программирование:Пер с анг. -М.: Изд-во иностранной литературы, 1973. -400 с.
2. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. –К.: Вища школа, 1975. –328 с.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980. -520 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Основы динамического программирования. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. –262 с.

ЛЕКЦІЯ 4
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1. Аналітичне конструювання оптимального регулятора лінійної системи. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u \tag{1}$$

при умові

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, $A(t)$ – $n \times n$ – матриця з неперервними компонентами**,** u – m-вимірний вектор керування, $Q(t)$ – $n \times m$ –матриця з неперервними компонентами.

Задача про аналітичне конструювання оптимального регулятора лінійної системи (1), (2) полягає у знаходженні керування $u_*(t)$, яке б мінімізувало квадратичний функціонал

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \left(x^T(t)G(t)x(t) + u^T(t)D(t)u(t) \right) dt + x^T(T)Hx(T). \tag{3}$$

Тут $G(t), D(t), H$ є додатновизначені симетричні матриці, причому $G(t), H$ – матриці розмірності $n \times n$, $D(t)$ – матриця розмірності $m \times m$ і матриці $G(t)$, $D(t)$ є неперервними при $t \in [t_0, T]$. Позначимо за $B(x,t)$ функцію Беллмана і запишемо для задачі (1)-(3) рівняння Беллмана у диференціальній формі

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + \min_u \{ grad_x^T B(x,t)(A(t)x + Q(t)u) + [x^T G(t)x + u^T D(t)u] \} = 0$$

, (4)

$$B(x,T) = x^T Hx. \tag{5}$$

Для того, щоб знайти розв'язок задачі (4), (5), необхідно розв'язати екстремальну задачу

$$\min_u L(x,u,t) \qquad (6)$$

де $L(x,u,t) = grad_x^T B(x,t)(A(t)x + Q(t)u) + x^T G(t)x + u^T D(t)u$.
Запишемо необхідні умови екстремуму

$$\frac{\partial L(x,u,t)}{\partial u} = 0$$

і отримаємо

$$B^T(t) grad_x B(x,t) + 2D(t)u = 0.$$

Звідси

$$u_*(t) = -\frac{1}{2} D^{-1}(t) Q^T(t) grad_x B(x,t). \qquad (7)$$

Підставимо (7) у (4).

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + grad_x^T B(x,t)A(t)x - \frac{1}{2} grad_x^T B(x,t)Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t) grad_x B(x,t)$$

$$x^T G(t)x + \frac{1}{4} grad_x^T B(x,t)Q(t)(D^{-1}(t))^T D(t)D^{-1}(t)Q^T(t) grad_x B(x,t) = 0$$

.

Зводячи подібні доданки, отримуємо співвідношення

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} + grad_x^T B(x,t)A(t)x + x^T G(t)x -$$

$$\frac{1}{4} grad_x^T B(x,t)Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t) grad_x B(x,t) = 0. \qquad (8)$$

Функцію Беллмана будемо шукати у вигляді квадратичної функції

$$B(x,t) = x^T P(t)x, \qquad (9)$$

де $P(t)$ – $n \times n$ неперервна матриця, яку необхідно визначити. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} = x^T \frac{dP(t)}{dt} x, \quad grad_x B(x,t) = (P(t) + P^T(t))x,$$

з (8) отримуємо

$$x^T \frac{dP(t)}{dt} x + x^T P^T(t)A(t)x + x^T P(t)A(t)x + x^T G(t)x -$$

$$\frac{1}{4}(x^T (P(t) + P^T(t))Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t)(P(t) + P^T(t))x) = 0.$$

Звідси, враховуючи, що $x^T P(t)A(t)x = x^T A^T(t)P^T(t)x$, маємо

$$x^T[\frac{dP(t)}{dt} + P^T(t)A(t) + A^T(t)P^T(t) + G(t) -$$

$$\frac{1}{4}(P(t)+P^T(t))Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t)(P(t)+P^T(t))]x = 0 \quad (10)$$

Легко перевірити наступне твердження: якщо для будь-якого вектора $x \in R^n$ справджується тотожність

$$x^T S x = 0$$

де S – $n \times n$ - матриця, то $S = 0$. Застосовуючи його до співвідношення (10), отримуємо

$$\frac{dP(t)}{dt} + P^T(t)A(t) + A^T(t)P^T(t) + G(t) -$$

$$\frac{1}{4}[(P(t)+P^T(t))Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t)(P(t)+P^T(t))] = 0. \quad (11)$$

А з умови (5) випливає

$$P(T) = H. \quad (12)$$

Транспонуючи (11) та (12), маємо

$$\frac{dP^T(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + G(t) -$$

$$\frac{1}{4}[(P(t)+P^T(t))Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t)(P(t)+P^T(t))] = 0,$$

$$P^T(T) = H.$$

Порівнявши останні два співвідношення з (11) та (12), помічаємо, що матриці $P(t)$ і $P^T(t)$ задовольняють одному і тому ж диференціальному рівнянню з однаковими умовами Коші, причому матриця H є симетрична. Таким чином, $P(t) = P^T(t)$. Таким чином, співвідношення (11), (12) переписуються у наступній формі

$$\frac{dP(t)}{dt} + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t)P(t) + G(t) = 0$$

, (13)

$$P(T) = H. \quad (14)$$

Матричне диференціальне рівняння (13) є *рівнянням Рікатті.* Знайшовши з рівняння (13), (14) матрицю $P(t)$, отримуємо функцію Беллмана

$$B(x,t) = x^T P(t)x.$$

При цьому з (7) знаходимо оптимальне керування

$$u_*(t) = -D^{-1}(t)Q^T(t)P(t)x, \tag{15}$$

яке є керуванням з оберненим зв'язком. Використовуючи властивості функції Беллмана, отримуємо оптимальне значення функціоналу (3)

$$I_* = I(u_*) = x_0^T P(t_0)x_0.$$

Алгоритм.

Крок1. Розв'язуємо матричне диференціальне рівняння (13), (14). Знаходимо матрицю $P(t)$.

Крок2. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) - Q(t)D^{-1}(t)Q^T(t)P(t)]x$$

при умові $x(t_0) = x_0$, яка отримана при підстановці (15) в (1). Будуємо оптимальну траєкторію $x_*(t)$, оптимальне керування (15) і оптимальне значення критерію якості

$$I_* = x_0^T P(t_0)x_0.$$

Якщо матриці A, Q, G, D є постійними, $\mathrm{H} = 0$, та $T \to +\infty$, то функція Беллмана $B(x,t)$ може бути вибрана незалежною від t. Тоді $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ і для визначення матриці P отримаємо алгебраїчне рівняння Рікатті

$$PA + A^T P - PQD^{-1}Q^T P = 0. \tag{16}$$

При цьому оптимальний регулятор має вигляд

$$u_*(x) = -D^{-1}G^T Px. \tag{17}$$

Він забезпечує мінімум функціонала

$$I(u) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T(t)Gx(t) + u^T(t)Du(t))dt$$

на розв'язках системи (1) і асимптотичну стійкість системи керування (1) з оберненим зв'язком (17), якщо $I(u_*) < \infty$.

Задача 1. Розв'язати задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації критерію якості

$$I(u) = \int_0^T (\alpha(t)x^2(t) + \beta(t)u^2(t))dt + \gamma x^2(T)$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)u, \quad x(0) = x_0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \beta(t) > 0, \quad \gamma > 0,$$

$t \in [0,T]$.

Тут $\alpha(t), \beta(t), x(t), u(t)$ - скалярні функції.

Задача 2. Побудувати функцію Беллмана і знайти оптимальне керування для задачі керування

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = u(t)$$

$$x(0) = x_0, \ \frac{dx(0)}{dt} = x_1$$

з функціоналом

$$I(u) = \int_0^T (\alpha(t)x^2 + \beta(t)u^2 + \gamma(t)(\frac{dx}{dt})^2)dt + \sigma x^2(T) + \delta(\frac{dx(T)}{dt})^2 \to \min_u$$

Тут $x(t), u(t), \omega(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ - скалярні функції, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $\gamma(t) > 0$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$.

Задача 3. Розв'язати задачу аналітичного конструювання регуляторів для системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u + f(t), \ x(t_0) = x_0$$

з критерієм якості (3), де $f(t)$ – неперервна n-вимірна вектор-функція.

2. Задача синтезу керування, що здійснює оптимальне за швидкодією гасіння кутових швидкостей мікросупутника. Розглянемо динамічну систему вигляду

$$J\frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = u, \tag{18}$$

де $\times$–знак векторного добутку, $\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ – вектор кутової швидкості мікросупутника, $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ – вектор керуючих параметрів, $J = J^T$ – додатновизначена матриця розмірності 3×3, яка називається тензором інерції. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати час переходу мікросупутника з довільного положення $\omega(0) = \omega_0$ на термінальну множину, що задається нерівністю

$$\|J\omega\| \le \varepsilon. \tag{19}$$

Робимо заміну змінних $p = J\omega$. Тоді система (18) матиме вигляд

$$\frac{dp}{dt} = -(J^{-1}p) \times p + u.$$

При цьому $p(0) = p_0$, $p_0 = J\omega_0$, а обмеження (19) зведуться до наступних $\|p\| \le \varepsilon$.

Нехай $T \ge 0$ - перший момент, для якого $p_1^2(T) + p_2^2(T) + p_3^2(T) = \varepsilon^2$. Позначимо функцію Беллмана $V = V(p) = V(p_1, p_2, p_3)$, яка вибирається залежною тільки від фазових координат $(p_1,\ p_2,\ p_3)$.

Рівняння Беллмана для даного випадку запишеться у формі

$$\inf_{\|u\| \le \rho} \left\{ -grad^T V(p) \cdot \left(J^{-1} p\right) \times p + grad^T V(p) u \right\} = -1, \quad (20)$$

при цьому

$$V(p) = 0. \quad (21)$$

в момент $t = T$. Складемо функцію Лагранжа

$$L(u, \lambda) = grad^T V(p) u + \lambda \left(u^T u - \rho^2\right).$$

На основі необхідних умов екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = gradV(p) + 2\lambda u = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = u^T u - \rho^2 = 0, \end{cases}$$

отримаємо функцію керування у вигляді

$$u^* = -\rho \frac{gradV(p)}{\|gradV(p)\|}. \quad (22)$$

Підстановка (22) в (20) приводить до співвідношення

$$-grad^T V(p) \cdot \left(J^{-1} p\right) \times p - \rho grad^T V(p) \frac{gradV(p)}{\|gradV(p)\|} = -1.$$

Звідси отримуємо рівняння в частинних похідних

$$grad^T V(p) \cdot \left(J^{-1} p\right) \times p + \rho \|gradV(p)\| = 1. \quad (23)$$

Розв’яжемо рівняння (23), знайшовши функцію $V(p)$, яка задовольняє наступним умовам

$$\begin{cases} grad^T V(p) \cdot \left(J^{-1} p\right) \times p = 0, \\ \rho \|gradV(p)\| = 1. \end{cases} \quad (24)$$

Перше рівняння системи (24) можна записати в наступній формі

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial p_1} & \frac{\partial V}{\partial p_2} & \frac{\partial V}{\partial p_3} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0 , \qquad (25)$$

де $\left(q_1\, q_2\, q_3\right)^T = J^{-1} p$. Вибираємо функцію Беллмана так, щоб

$$gradV(p) = h(p)\, p \,. \qquad (26)$$

Тут $h(p)$ – деяка скалярна функція, яка підлягає визначенню. Тоді співвідношення (25) буде мати місце. Підставляючи (26) в друге рівняння системи (24), отримаємо $h(p) = \dfrac{1}{\rho\|p\|}$. Таким чином

$$gradV(p) = \frac{p}{\rho\|p\|} \,. \qquad (27)$$

З (27) отримуємо

$$V(p) = \frac{1}{\rho}\left(\|p\| + c\right),$$

де c – довільна стала. Використовуючи умову $p_1^2(T) + p_2^2(T) + p_3^2(T) = \varepsilon^2$ та співвідношення (21), знаходимо $c = -\varepsilon$. Отже, функція Беллмана має вигляд

$$V(p) = \frac{1}{\rho}\left(\|p\| - \varepsilon\right). \qquad (28)$$

Враховуючи (22), (27) та заміну $p = J\omega$, отримуємо оптимальну функцію керування

$$u^* = -\rho \frac{J\omega}{\|J\omega\|} \,. \qquad (29)$$

Алгоритм.

Задаємо $\varepsilon > 0$, початкові умови $\omega(0) = \omega_0$.

Крок 1 . Якщо $\|J\omega_0\| > \varepsilon$, то переходимо на кінець алгоритму.

Крок 2. Оцінюємо час перехідного процесу $T = V(p_0) = \dfrac{1}{\rho}\left(\|p_0\| - \varepsilon\right)$, $p_0 = J\omega_0$.

Крок 3. Інтегруємо систему (18) за умови $\omega(0)=\omega_0$, $t\in[0,T]$. При цьому керування вибираємо згідно (29). Таким чином, будуємо оптимальну траєкторію та оптимальне керування.

Література.

1. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. –К.: Вища школа, 1975. –328 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980. -520 с.
3. Раушенбах Б.В., Токарь Э.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. –600с.
4. Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В., Харченко И.И. Оптимальное по быстродействию гашение угловых скоростей космического аппарата на основе метода динамического программирования//Киберенетика и вычислительная техника .-2002. –Вып.134. -С. 51-60.

ЛЕКЦІЯ 5
ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТУ

1. Означення прохідної та властивості функції сліду. Введемо наступні позначення: $R^{m\times n}$ – множина матриць розмірності $m\times n$, $trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ – слід матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – норма матриці A, $I_n\in R^{n\times n}$ – одинична матриця, T – знак транспонування. Функцію виду $f:R^{m\times n}\to R^1$ ми будемо називати *функцією матричною аргументу*. Такими функціями є $f(A)=trA,$ $f(A)=\det A,$ $f(A)=\lambda_{\max}(A),$ $f(A)=\|A\|,$ $f(A)=tr\exp(A)$, де $\lambda_{\max}(A)$ – максимальне власне число, $tr\exp(A)$ – слід експоненти, $\det A$ – визначник матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Множина $R^{m\times n}$ утворює лінійний нормований простір, тому можна ввести поняття похідної від функції матричного аргументу.

Означення. Похідною $\dfrac{df(A)}{dA}$ функції $f:R^{m\times n}\to R^1$ в точці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ називається *матриця* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}$.

Можна показати що це означення еквівалентне означенню похідної, як лінійного приросту у евклідовому просторі $R^{m\times n}$, де скалярний добуток $\langle A, B\rangle = tr\left(A^T B\right)$, $A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{m\times n}$. Тобто,

$$f(A+H) = f(A) + tr\left(\left(\frac{df(A)}{dA}\right)^T H\right) + o\left(\|H\|\right),$$

де $H\in R^{m\times n}$, $\|H\|\to 0$, $\dfrac{df(A)}{dA} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}$.

Нехай $f(A) = \det A$, $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Використаємо співвідношення $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, де A_{ik} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ik}. Тоді за означенням отримуємо $\dfrac{df(A)}{dA} = \left(A_{ij}\right)_{n\times n}$. Якщо матриця A – неособлива, то $\dfrac{df(A)}{dA} = \left(A^T\right)^{-1}\det A$.

Нижче ми виведемо основні співвідношення для диференціювання функцій, які пов'язані зі слідом матриці. Тому приведемо основні властивості функції сліду. Нехай $A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{m\times n}$.

Властивість 1. $\|A\|^2 = tr\left(A^T A\right)$.

Властивість 2. $tr\left(A^T B\right) = tr\left(BA^T\right)$.

Властивість 3. $tr\left(A^T B\right) = tr\left(AB^T\right)$.

Ці властивості доводяться виходячи з означення сліду матриці. Як наслідок з властивості 3, випливає

Властивість 4. $a^T b = tr\left(ab^T\right)$, де $a\in R^n$, $b\in R^n$.

Задача 5. Довести властивості 1-4.

2. Диференціювання функцій від сліду.

Теорема 1. Якщо $A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{m\times n}$, то $\dfrac{d}{dB}tr\left(A^T B\right) = A$.

Доведення. Нехай $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Позначимо $a_i = \left(a_{1i}, a_{2i},..., a_{mi}\right)^T$, $b_i = \left(b_{1i}, b_{2i},..., b_{mi}\right)^T$, $i = 1,2,...,n$ – вектори, які є стовпчиками матриць A, B відповідно. Тоді виконується співвідношення

$tr\left(A^T B\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^T b_i$. Звідси для фіксованих індексів $i\in\{1,2,...,m\}$, $j\in\{1,2,...,n\}$ отримуємо $\frac{\partial}{\partial b_{ij}} tr\left(A^T B\right)=a_{ij}$. Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{n\times p}$, $C\in R^{p\times m}$. Тоді $\frac{d}{dB} tr(ABC)=A^T B^T$.

Наслідок 2. Якщо $a\in R^n$, $D\in R^{n\times n}$, то $\frac{d}{dD}\ a^T Da=aa^T$.

Справедливість наслідків випливає із співвідношень $tr(ABC)=tr(CAB)$, $tr\left(a^T Da\right)=a^T Da$.

Теорема 2. Якщо $F:R^{m\times n}\to R^{p\times q}$, $G:R^{m\times n}\to R^{q\times p}$ – неперервно диференційовані функції матричного аргументу, то

$$\frac{d}{dA} tr\left(F(A)G(A)\right)=\frac{d}{dA} tr\left(F(A)X\right)+\frac{d}{dA} tr\left(YG(A)\right),$$

де $X=G(A)$, $Y=F(A)$. Тут під $\frac{d}{dA} tr\left(F(A)X\right)$, $\frac{d}{dA} tr\left(YG(A)\right)$ розуміємо похідні за аргументом A при умові, що матриці X, Y – фіксовані.

Доведення. Нехай $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $F^T(A)=\left(f_1(A)\quad f_2(A)\quad \dots\quad f_p(A)\right)$, $G(A)=\left(g_1(A)\quad g_2(A)\quad \dots\quad g_p(A)\right)$, $f_i(A)$, $g_i(A)$ – вектор функції розмірності q, $i=1,2,...,p$. Тоді

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} tr\left(F(A)G(A)\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\sum_{s=1}^{p} f_s^T(A)g_s(A)=\sum_{s=1}^{p}\left(\frac{\partial f_s^T(A)}{\partial a_{ij}} g_s(A)+f_s^T(A)\frac{\partial g_s(A)}{\partial a_{ij}}\right),$$

$i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$. Позначимо $x_s=g_s(A)$, $y_s=f_s(A)$, $s=1,2,...,p$. З останніх співвідношень випливає

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\, tr\big(F(A)G(A)\big) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{s=1}^{p} f_s^T(A)x_s + \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{s=1}^{p} y_s^T\ g_s(A) = \frac{d}{dA}$$

$$tr\big(F(A)X\big) + \frac{d}{dA}\, tr\big(YG(A)\big),$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \end{pmatrix}$, $Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_p \end{pmatrix}$. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо $A \in R^{m\times m}$, $U \in R^{m\times n}$, то $\dfrac{d}{dU}\, tr\big(U^T AU\big) = \big(A^T + A\big)U$.

Доведення. Позначимо $X = U^T A$, $Y = U$. Тоді за теоремою 2 $\dfrac{d}{dU}\, tr\big(U^T AU\big) = \dfrac{d}{dU}\, tr\big(XU\big) + \dfrac{d}{dU}\, tr\big(U^T AY\big)$. За теоремою 1 $\dfrac{d}{dU}\, tr\big(XU\big) = X^T = A^T U$. Оскільки $tr\big(U^T AY\big) = tr\big(AYU^T\big) = tr\big((AY)^T U\big)$, то $\dfrac{d}{dU}\, tr\big(U^T AY\big) = AY = AU$.

Наслідок доведено.

Задача 6. Довести, що якщо $B \in R^{n\times n}$, $U \in R^{m\times n}$, то $\dfrac{d}{dU}\, tr\big(UBU^T\big) = U\big(B^T + B\big)$.

Наслідок 2. Якщо в умовах наслідку 1 теореми 2 матриця $A^T = A$, то $\dfrac{d}{dU}\, tr\big(U^T AU\big) = 2AU$.

Теорема 3 Нехай $g(X(s), s)$ – неперервно диференційована скалярна функція, $X(s) \in R^{m\times n}$, $s \in R^1$. Тоді

$$\frac{dg}{ds} = \frac{\partial g}{\partial s} + tr\left[\left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)^T \frac{dX}{ds}\right].$$

Теорема 4. Нехай $A(s) \in R^{m\times n}$, $B(s) \in R^{n\times m}$ – матриці з неперервно диференційованими компонентами. Тоді

$$\frac{d}{ds}\, tr\big(A(s)B(s)\big) = tr\left(\frac{dA(s)}{ds} B(s)\right) + tr\left(A(s)\frac{dB(s)}{ds}\right).$$

Справедливість теорем 3 та 4 випливає з властивостей неперервно диференційованих функцій та функції сліду.

Задача 7. Довести теореми 3, 4.

3. Приклади. Розглянемо приклади знаходження похідних від деяких функцій матричного аргументу.

Приклад 1. $f(A) = \|A\|^2 = tr\left(A^T A\right),\ A \in R^{m\times n}$. З наслідку 2 теореми 2 випливає, що $\dfrac{df}{dA} = 2A$.

Задача 8. Знайти похідну від $f(A) = \|A\|$.

Приклад 2. $f(A) = tr(BA^2)$, $A,B \in R^{n\times n}$. За теоремою 2

$$\frac{df}{dA} = \frac{d}{dA} tr(XA) + \frac{d}{dA} tr(BAY),$$

де $X = BA$, $Y = A$. Тоді

$$\frac{df}{dA} = X^T + (YB)^T = A^T B^T + B^T A^T.$$

Якщо $B = I_n$, то $\dfrac{df}{dA} = 2A^T$.

Задача 9. Показати, що для $f(A) = tr(BA^p)$, $A,B \in R^{n\times n}$ має місце формула

$$\frac{df}{dA} = B^T\left(A^T\right)^{p-1} + A^T B^T \left(A^T\right)^{p-2} + \ldots + \left(A^T\right)^{p-1} B^T.$$

Література.

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. – 197 с.

ЛЕКЦІЯ 6
ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ МАТРИЧНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ ОПТИМАЛЬНОСТІ БЕЛЛМАНА

1. Постановка задачі і принцип оптимальності. Нехай $Y \subseteq R^{m\times n}$ – множина обмежень на розв'язки матричного диференціального рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X,U,t) \tag{1}$$

і задана початкова умова

$$X(t_0) = X_0. \tag{2}$$

Тут $X(t) \in Y$ – матриця розв'язків рівняння (1), $U(t) \in V$ – матриця керування, $V \subseteq R^{p \times q}$ – множина обмежень на матрицю керування, $F(X,U,t)$ – матрична функція розмірності $m \times n$, яка задовольняє умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $X_0 \in Y$ – відома матриця.

Задача оптимального керування матричним рівнянням (1) полягає в тому, щоб знайти матрицю керування $U_* = U_*(t) \in V$ і відповідний розв'язок задачі (1), (2) $X_* = X_*(t) \in Y$ такі, що мінімізують функціонал

$$I(U) = \int_{t_0}^{T} f_0(X,U,t)dt + \Phi(X(T)), \tag{3}$$

де $f_0(X,U,t)$ – інтегрована на $[t_0,T]$ функція, $\Phi(X)$ – неперервна функція. Розв'язком задачі (1)-(3) назвемо пару (U_*, X_*). Припустимо, що така пара існує.

Розглянемо *допоміжну задачу*. Нехай $s \in (t_0,T)$ – фіксований момент часу. Необхідно мінімізувати функціонал

$$I_s(U) = \int_{s}^{T} f_0(X,U,t)dt + \Phi(X(T)) \tag{4}$$

при умовах

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X,U,t), \tag{5}$$

$$X(s) = X_*(s). \tag{6}$$

Тут $X(t) \in Y$, $U(t) \in V$, $t \in [s,T]$.

Теорема 1 (принцип оптимальност). Якщо $(\tilde{U}, \tilde{X})$ – розв'язок допоміжної задачі (4)-(6), то $(U_*, X_*) = (\tilde{U}, \tilde{X})$, $t \in [s,T]$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $(\tilde{U}, \tilde{X}) \neq (U_*(t), X_*(t))$. Тоді $I_s(U_*) > I_s(\tilde{U})$. Побудуємо керування

$$\hat{U}(t) = \begin{cases} U_*(t), t \in [t_0, s], \\ \tilde{U}(t), t \in [s,T]. \end{cases}$$

Тоді відповідна йому траєкторія має вигляд

$$\hat{X}(t) = \begin{cases} X_*(t), t \in [t_0, s], \\ \tilde{X}(t), t \in [s,T]. \end{cases}$$

Таким чином,

$$I(\hat{U}) = \int_{t_0}^{T} f_0(\hat{X}(t),\hat{U}(t),t)dt + \Phi(\hat{X}(T)) = \int_{t_0}^{s} f_0(X_*(t),U_*(t),t)dt +$$

$$\int_{s}^{T} f_0(\widetilde{X}(t),\widetilde{U}(t),t)dt + \Phi(\widetilde{X}(T)) < \int_{t_0}^{s} f_0(X_*(t),U_*(t),t)dt +$$

$I_s(U_*) = I(U_*)$.

Прийшли до протиріччя. Теорему доведено.

2. Функція Беллмана і диференціальне рівняння Беллмана. Нехай $Z \in Y$ – деяка матриця. Функція виду

$$B(Z,s) = \min_{U \in V}\left\{\int_{s}^{T} f_0(X,U,t)dt + \Phi(X(T))\right\},$$

що визначена на розв'язках рівняння

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X,U,t)$$

при умовах $X(s) = Z$, $t \in [s,T]$ називається *функцією Беллмана* задачі (1)-(3). Якщо функція $B(X,s)$ є неперервно диференційованою за X та s, то має місце рівняння Беллмана в диференціальній формі

$$\frac{\partial B}{\partial s} + \min_{U \in V}\left[tr\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial X}\right)^T F(X,U,s)\right\} + f_0(X,U,s)\right] = 0, \qquad (7)$$

$$B(X,T) = \Phi(X). \qquad (8)$$

Справді, при виведенні рівняння Беллмана приходимо до співвідношення

$$\min_{U \in V}\left\{\frac{dB(X,s)}{ds} + f_0(X,U,s)\right\} = 0 \qquad (9)$$

(лекція 3). Оскільки похідна $\frac{dB(X,s)}{ds}$ розглядається на розв'язках рівняння (1), то за теоремою 3 (лекція 5)

$$\frac{dB(X,s)}{ds} = \frac{\partial B(X,s)}{\partial s} + tr\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial X}\right)^T F(X,U,s)\right\}.$$

Звідси випливає справедливість (7). Співвідношення (8) слідує з означення функції Беллмана.

Задача 10. Довести співвідношення (9).

Рівняння (7) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial B}{\partial s} + \min_{U \in V} L(B, X, U, s) = 0,$$

де $L(B, X, U, s) = tr\left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial X} \right)^T F(X, U, s) \right\} + f_0(X, U, s)$.

3. Оптимальне керування лінійним матричним рівнянням. Застосуємо рівняння Беллмана (7), (8) до розв'язування задачі оптимального керування лінійним матричним диференціальним рівнянням з квадратичним критерієм якості. Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + G(t)U(t), \tag{10}$$

де $X(t) \in R^{n \times n}$ – матриця розв'язків рівняння (10), $U(t) \in R^{k \times n}$ – матриця керування, $A(t) \in R^{n \times n}$, $G(t) \in R^{n \times k}$ – відомі матриці з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$, $X(t_0) = X_0$, $X_0 \in R^{n \times n}$ – відома матриця. Необхідно знайти матрицю $U_*(t) \in R^{k \times n}$, яка мінімізує функціонал

$$I(U) = \int_{t_0}^{T} tr\left\{ X^T Q_1 X + U^T Q_2 U \right\} dt + tr(X^T(T) Q_0 X(T)). \tag{11}$$

Тут Q_0, $Q_1(t) \in R^{n \times n}$ – невід'ємновизначені симетричні матриці, $Q_2(t) \in R^{k \times k}$ – додатновизначена симетрична матриця, $t \in [t_0, T]$. Оптимальну матрицю $U_*(t)$ визначимо з умови

$$\frac{\partial}{\partial U} L(B, X, U, s) = 0, \tag{12}$$

де

$$L(B, X, U, s) = tr\left[\frac{\partial B^T(X, s)}{\partial X} \left(\mathrm{A(s)X(s)} + \mathrm{G(s)U(s)} \right) \right] +$$

$$tr(X^T(s) Q_1(s) X(s) + U^T(s) Q_2(s) U(s)).$$

З теореми 1 та наслідку 1 теореми 2 (лекція 5) випливає

$$\frac{\partial}{\partial U} tr\left[\frac{\partial B^T(X, s)}{\partial X} \left(\mathrm{A(s)X(s)} + \mathrm{G(s)U(s)} \right) \right] = \mathrm{G^T(s)} \frac{\partial B(X, s)}{\partial X},$$

$$\frac{\partial}{\partial U} tr\left\{ X^T(s) Q_1(s) X(s) + U^T(s) Q_2(s) U(s) \right\} = 2 Q_2(s) U(s).$$

З (12) отримуємо

$$U_*(s) = -\frac{1}{2} Q_2^{-1}(s) G^T(s) \frac{\partial B(X,s)}{\partial X}.$$

Нехай $P(t) \in R^{n \times n}$ – деяка невідома диференційована матриця, яку потрібно визначити. Виберемо функцію Беллмана у вигляді

$$B(X,s) = tr(X^T P(s) X).$$

Матрицю $P(s)$ шукаємо з рівняння

$$\frac{\partial B}{\partial s} + L(B, X, U_*, s) = 0, \quad B(X,T) = tr(X^T Q_0 X)$$

Так як $\dfrac{\partial B}{\partial s} = tr(X^T \dfrac{dP(s)}{ds} X)$, $\dfrac{\partial B(X,s)}{\partial X} = \left(P^T(s) + P(s)\right) X$, то

$$\frac{\partial B}{\partial s} + L(B, X, U_*, s) = tr(X^T \frac{dP(s)}{ds} X) +$$

$$tr\left[X^T \left(P(s) + P^T(s)\right) \left(\mathrm{A}(s) X - \frac{1}{2} G(s) \mathrm{Q}_2^{-1} G^T(s) \left(P(s) + P^T(s)\right) X \right) \right] +$$

$$tr(X^T(s) Q_1(s) X(s)) +$$

$$\frac{1}{4} tr\left\{ X^T \left(P^T(s) + P(s)\right) G(s) Q_2^{-1}(s)\, G^T(s) \left(P^T(s) + P(s)\right) X \right\} = 0.$$

Звідси

$$tr\left\{ X^T \left[\frac{dP(s)}{ds} + \left(P(s) + P^T(s)\right) \mathrm{A}(s) \right.\right.$$

$$- \frac{1}{2} \left(P(s) + P^T(s)\right) G(s) \mathrm{Q}_2^{-1} G^T(s) \left(P(s) + P^T(s)\right) + Q_1(s) +$$

$$\left.\left. \frac{1}{4} \left(P(s) + P^T(s)\right) G(s) \mathrm{Q}_2^{-1} G^T(s) \left(P(s) + P^T(s)\right) \right] X \right\} = 0. \qquad (13)$$

Використовуючи властивості сліду, матимемо.

$$trX^T P^T(s) A(s) X = trXX^T P^T(s) A(s) = trA(s) XX^T P^T(s) = tr\left(A(s) XX^T\right)^T P(s$$

$$trXX^T A^T(s) P(s) = trX^T A^T(s) P(s) X.$$

З співвідношення (13), зводячи подібні доданки, отримуємо

$$trX^T\left[\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^T(s)P(s)+Q_1(s)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{4}\left(P(s)+P^T(s)\right)G(s)Q_2^{-1}G^T(s)\left(P(s)+P^T(s)\right)\right]X=0.$$

Твердження 1. Нехай $S\in R^{n\times n}$ і для будь-якої матриці $X\in R^{n\times n}$ виконується $trX^TSX=0$. Тоді $S=0$.

Задача 11. Довести твердження 1.

З твердження 1 випливає

$$\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^T(s)P(s)+Q_1(s)-$$

$$\frac{1}{4}\left(P(s)+P^T(s)\right)G(s)Q_2^{-1}G^T(s)\left(P(s)+P^T(s)\right)=0. \quad (14)$$

Оскільки $B(X,T)=tr(X^TQ_0X)$, то

$$P(T)=Q_0. \quad (15)$$

Якщо матриця $P(s)$ задовольняє співвідношення (14), (15), то $P^T(s)$ також задовольняє (14), (15). Тому $P(s)=P^T(s)$. Таким чином, з (14) випливає

$$\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^T(s)P(s)+Q_1(s)-$$

$$P(s)G(s)Q_2^{-1}G^T(s)P(s)=0. \quad (16)$$

При цьому має місце умова Коші (15). Співвідношення (16) є диференціальним рівнянням Ріккаті. Тоді оптимальне керування обчислюється за формулою

$$U_*(t)=-Q_2^{-1}(t)G^T(t)P(t)X.$$

Алгоритм.

Крок1. Розв'язуємо задачу (15), (16). Знаходимо матрицю $P(t)$.

Крок2. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt}=\left(A(t)-G(t)\ Q_2^{-1}(t)G^T(t)P(t)\right)X,$$

при умові $X(t_0)=X_0$ і знаходимо $X_*(t)$. Тоді оптимальне керування $U_*(t)=-Q_2^{-1}(t)G^T(t)P(t)X_*(t)$ і оптимальне значення критерію якості

$$I_*=trX_0^TP(t_0)X_0.$$

4. Оптимальне керування матричним рівнянням Ляпунова. Розглянемо матричне диференціальне рівняння типу Ляпунова

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left(D(t) + H(t)U(t)\right)X(t) + X(t)\left(D(t) + H(t)U(t)\right)^T + R(t) \tag{17}$$

з початковою умовою

$$X(t_0) = X_0. \tag{18}$$

Тут $X(t) \in R^{n \times n}$ – матриця розв'язків рівняння (17), $U(t) \in R^{k \times n}$ – матриця керування, $X_0 \in R^{n \times n}$ – відома симетрична матриця, $D(t) \in R^{n \times n}$, $H(t) \in R^{n \times k}$, $R(t) \in R^{n \times n}$ – відомі матриці з неперервними компонентами, $R(t) = R^T(t)$, $t \in [t_0, T]$. Розв'язки задачі (17), (18) є симетричними матрицями.

Задача полягає у визначені матриці керування $U_*(t) \in R^{k \times n}$, яка мінімізує функціонал

$$I(U) = \mu \int_{t_0}^{T} tr(UXU^T)dt + tr\left(S^T X(T) S\right). \tag{19}$$

Тут $\mu > 0$ – деякий параметр, $S \in R^{n \times n}$ – відома матриця. Позначимо

$$L(B, X, U, s) = tr\left[\frac{\partial B^T(X,s)}{\partial X}\right.$$

$$\left.\left(D(s) + H(s)U(s)\right)X(s) + X(s)\left(D(s) + H(s)U(s)\right)^T + R(s)\right] +$$

$$\mu tr\left(U(s)X(s)U^T(s)\right).$$

Оптимальне керування $U_*(s) \in R^{k \times n}$ шукаємо з умови $\frac{\partial}{\partial U} L(B, X, U, s) = 0$. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial U} tr \frac{\partial B^T(X,s)}{\partial X} \left(D(s) + H(s)U(s)\right)X(s) = H^T(s) \frac{\partial B(X,s)}{\partial X}$$

$$X^T(s),$$

$$\frac{\partial}{\partial U} tr \frac{\partial B^T(X,s)}{\partial X} X(s)\left(D(s) + H(s)U(s)\right)^T = H^T(s) \frac{\partial B^T(X,s)}{\partial X}$$

$$X^T(s),$$

$$\frac{\partial}{\partial U}\,tr\Big(U(s)X(s)U^T(s)\Big)=U(s)\Big(X(s)+X^T(s)\Big)$$

і матриця $X(s)$ є симетрична, то

$$\frac{\partial}{\partial U}\,L(B,X,U,s)=H^T(s)\left(\frac{\partial B(X,s)}{\partial X}+\frac{\partial B^T(X,s)}{\partial X}\right)X(s)$$

$+2\mu U(s)\;X(s)$.

Звідси знаходимо

$$U_*(s)=-\frac{1}{2\mu}H^T(s)\left(\frac{\partial B(X,s)}{\partial X}+\frac{\partial B^T(X,s)}{\partial X}\right).$$

Вибираємо функцію Беллмана у вигляді $B(X,s)=tr\Omega^T(s)X+tr\Psi(s)$, де $\Omega(s)\in R^{n\times n}$, $\Psi(s)\in R^{n\times n}$ – деякі невідомі матриці, які необхідно визначити, $\Omega(s)=\Omega^T(s)$. Оскільки $\dfrac{\partial B(X,s)}{\partial X}=\dfrac{\partial B^T(X,s)}{\partial X}=\Omega(s)$, то

$$U_*(s)=-\frac{1}{\mu}H^T(s)\Omega(s).$$

Матриці $\Omega(s)$, $\Psi(s)$ будемо визначати з рівняння

$$\frac{\partial B}{\partial s}+L(B,X,U_*,s)=0,$$

яке має вигляд

$$tr\,\frac{d\Omega^T(s)}{ds}X+tr\,\frac{d\Psi(s)}{ds}+$$

$$tr\Omega(s)$$

$$\left[\left(D(s)-\frac{1}{\mu}H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)X+X\left(D(s)-\frac{1}{\mu}H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)^T+R(s)\right]$$

+

$$\frac{1}{\mu}\,tr\Big(H^T(s)\Omega(s)X\Omega(s)H(s)\Big)=0. \qquad (20)$$

Проведемо наступні перетворення:

$$tr\Omega(s)\ X\left(D(s)-\frac{1}{\mu}H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)^T =$$

$$tr\left(D(s)-\frac{1}{\mu}H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)^T\Omega(s)X\ ,$$

$$tr\Big(H^T(s)\Omega(s)X\Omega(s)H(s)\Big)=tr\Big(\Omega(s)H(s)H^T(s)\Omega(s)X\Big).$$

З (20) отримуємо

$$tr\left(\frac{d\Omega(s)}{ds}+\Omega(s)\left(D(s)-\frac{1}{\mu}H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)+\right.$$

$$\left(D(s)-\frac{1}{\mu}H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)^T\Omega(s)+$$

$$\left.\frac{1}{\mu}\Omega(s)H(s)H^T(s)\Omega(s)\right)X+tr\left(\frac{d\Psi(s)}{ds}+\Omega(s)H(s)\right)=0\,.$$

При цьому $B(X,T)=tr(\Omega^T(T)X+\Psi(T))=tr(S^TX(T)S)$. Таким чином, для визначення $\Omega(s)$, $\Psi(s)$ отримуємо дві задачі Коші

$$\frac{d\Omega(s)}{ds}+\Omega(s)D(s)+D^T(s)\Omega(s)-\frac{2}{\mu}\Omega(s)H(s)H^T(s)\Omega(s)+$$

$$\frac{1}{\mu}\Omega(s)H(s)H^T(s)\Omega(s)=0\,, \qquad (21)$$

$$\Omega(T)=S^TS\,, \qquad (22)$$

$$\frac{d\Psi(s)}{ds}+\Omega(s)H(s)=0\,, \qquad (23)$$

$$\Psi(T)=0\,, \qquad (24)$$

де $s\in\big[t_0,T\big]$.

Алгоритм.

Крок1. Розв’язуємо (21)-(24) і знаходимо матриці $\Omega(t)$, $\Psi(t)$.

Крок2. Розв’язуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt}=\left(D(t)-\frac{1}{\mu}H(t)H^T(t)\Omega(t)\right)X(t)+X(t)\left(D(t)-\frac{1}{\mu}H(t)H^T(t)\Omega(t)\right)$$

при умові $X(t_0) = X_0$ і визначаємо $X_*(t)$. Тоді обчислюємо оптимальне керування

$$U_*(t) = -\frac{1}{\mu} H^T(t)\Omega(t)$$

і оптимальне значення критерію якості

$$I_* = tr\Omega^T(t_0)X_0 + tr\Psi(t_0).$$

Література.

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. – 197 с.

ПОСЛІДОВНИЙ АНАЛІЗ ВАРІАНТІВ

1. Зведення задачі оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$I(u,x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt \tag{1}$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

Тут $f_0(x,u,t)$ є неперервна функція, $f(x,u,t)$ – n-вимірна вектор-функція, неперервна за x,u,t, x – n-вимірний вектор фазових координат з фазового простору $X \subset R^n$, u – r-вимірний вектор фазових координат з простору керувань $U \subset R^r$. Припустимо, що задані також обмеження

$$x(t) \in \Omega_t(X),\ u(t) \in \Omega_t(U), \tag{4}$$

де $\Omega_t(X) \subseteq X$, $\Omega_t(U) \subseteq U$, $t \in [t_0, T]$. В просторі (x,t) проведемо гіперплощини $t = t_0 + i\tau$, $i = 1,2,...,N$, $\tau > 0$ – крок інтегрування, $T = t_0 + N\tau$. Припустимо також, що на проміжку $(t_0 + i\tau, t_0 + (i+1)\tau)$ керування приймає постійні значення u_i. Тоді функціонал (1) можна замінити інтегральною сумою

$$I(x_i,u_i)=\tau\sum_{i=0}^{N-1}F_i(x_i,u_i)\,, \qquad (5)$$

а співвідношення (2), (3) – різницевою схемою

$$x_{i+1}=x_i+\tau f_i(x_i,u_i)\,. \qquad (6)$$

При цьому

$$x_i\in\Omega_i(X)\,,\ u_i\in\Omega_i(U)\,,\ i=1,2,...,N\,, \qquad (7)$$

де $\Omega_i(X)=\Omega_{t_0+i\tau}(X)$, $\Omega_i(U)=\Omega_{t_0+i\tau}(U)$, $f_i(x_i,u_i)=f(x_i,u_i,t_0+i\tau)$, $F_i(x_i,u_i)=f_0(x_i,u_i,t_0+i\tau)$. Таким чином, отримали задачу нелінійного програмування. Якщо врахувати, що

$$x_1=x_0+\tau f_0(x_0,u_0)=\Phi_1(u_0)\,,$$

$$x_2=\Phi_1(u_0)+\tau f_1(x_1,u_1)=\Phi_2(u_0,u_1)\,,$$

$$\vdots$$

$$x_k=\Phi_k(u_0,...,u_{k-1})\,,$$

то функціонал (5) можна переписати у вигляді

$$I=\sum_{i=0}^{N-1}I_i(u_0,u_1,...,u_i)\,, \qquad (8)$$

де $I_i(u_0,u_1,...,u_i)=\tau F_i(\Phi_i(u_0,...,u_{i-1}),u_i)$.

Таким чином, задача (1) – (4) зведена до задачі мінімізації функції (8) від скінченої кількості змінних. Слід зауважити, що функція (8) володіє важливою особливістю: функція I є сумою скінченої кількості функцій I_i, при цьому I_i залежить тільки від $(u_0,...,u_i)$, тобто від перших $(i+1)$ невідомих.

2. Елементарна операція. Розглянемо фазову траєкторію γ системи (2) при деякому керуванні. Позначимо через x_i точки, в яких γ перетинає площину $t=t_0+i\tau$. Введемо оператор $B(x_i,x_{i+1})$, який парі точок (x_i,x_{i+1}) ставить у відповідність керування u_i, що переводить систему (2) із стану $x(t_0+i\tau)=x_i$ в точку $x(t_0+(i+1)\tau)=x_{i+1}$, а також траєкторію $\gamma_{i,i+1}$, що з‘єднує точки x_i і x_{i+1}. Таким чином

$$(u_i,\gamma_{i,i+1})=B(x_i,x_{i+1})$$

Оператор $B(x_i,x_{i+1})$ називають *елементарною операцією*. Тоді функціонал (1) має вигляд

$$I(x,u) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(\gamma_{i,i+1}, u_i, t)dt = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(x_i, x_{i+1}) \quad (9)$$

де $\varphi_i(x_i, x_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(\gamma_{i,i+1}(t), u_i, t)dt$ – функція, що визначена за допомогою елементарних операцій. Таким чином, за допомогою елементарної операції будується апроксимація фазової траєкторії γ деякою ламаною, що складається з дуг $\gamma_{i,i+1}$ (рис.1).

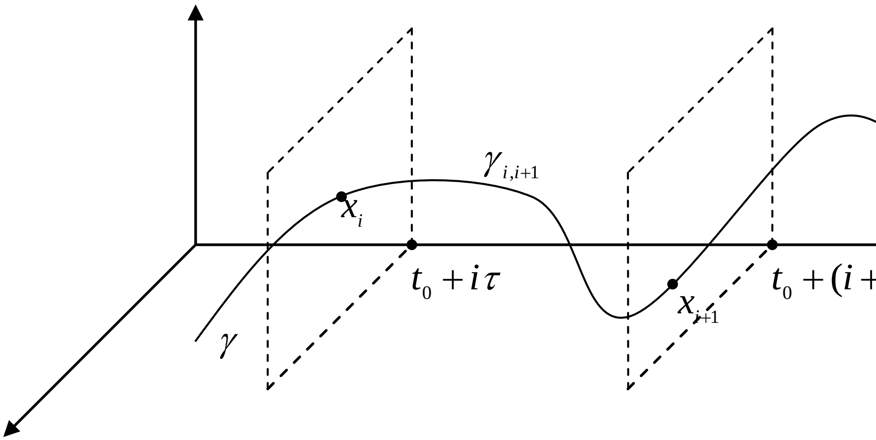

Рис. 1

Редукція задачі (1) – (4) до задачі (5) – (7) досить тривіальна, тоді як редукція за допомогою елементарної операції досить складна. До їх розв'язання можуть застосовуватись методи типу градієнтного спуску.

3. Адитивні задачі нелінійного програмування. Адитивною функцією векторів $x_0, x_1, ..., x_N$ будемо називати функцію, що має вигляд

$$f(x_0, x_1, ..., x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}) \quad (10)$$

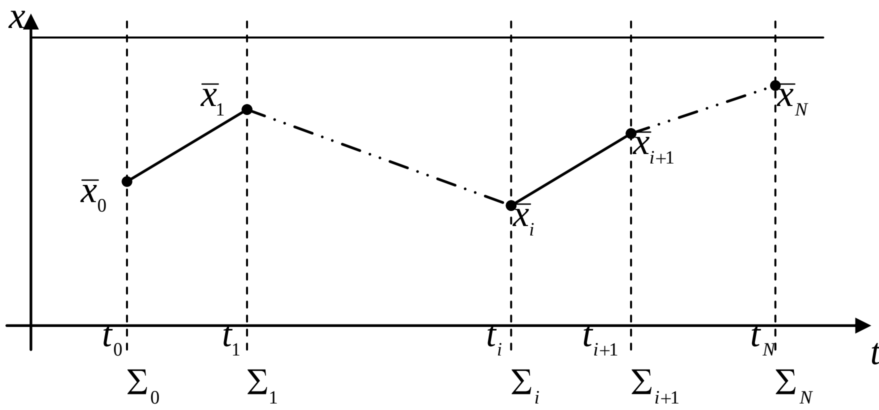

Рис. 2

Задача нелінійного програмування називається *адитивною*, якщо мова йде про знаходження екстремуму адитивної функції при обмеженнях вигляду $x_i \in G_i \subset R^n$

Адитивні задачі мають простий геометричний зміст. Побудуємо в просторі (x,t) гіперплощини $t_i = t_0 + i\tau, i = 0,1,...,N$, які позначимо Σ_i. Задамо послідовність векторів $\bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_N$, у якості довжини відрізка, що з'єднує точки $\bar{x}_i$ та $\bar{x}_{i+1}$ приймемо значення $f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$. Тоді функція $f(\bar{x}_0,...,\bar{x}_N)$, що обчислена за допомогою (10) визначає довжину ламаної, що проходить через точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_N$ (рис.2).

Адитивна задача нелінійного програмування може бути сформульована наступним чином: серед всіх допустимих ламаних, що з'єднують площини Σ_0 і Σ_N, знайти ту, довжина якої є найменшою. З (9) випливає зв'язок між адитивною задачею математичного програмування та задачею оптимального керування.

4. Алгоритм „київський віник”. Це один із основних алгоритмів, що застосовуються для розв'язання адитивних задач математичного програмування. Це є багатокроковий процес, на кожному кроці якого відбувається „відмітання” деякої множини варіантів, про яку в процесі роботи алгоритму стає відомо, що вона не містить оптимального варіанта.

Нехай $x_1 \in \Sigma_1$. Позначимо $l(x_1) = \min\limits_{x_0 \in G_0} f_1(x_0, x_1)$ – відстань від точки x_1 до Σ_0

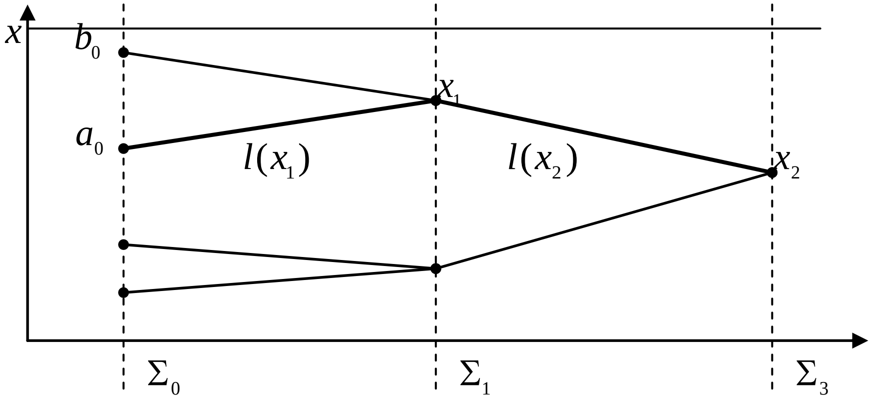

Рис. 3

Оскільки

$$\min_{x_0 \in G_0} f(x_0, x_1, ..., x_N) = l(x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}),$$

то ламані, що не містять відрізок (a_0, x_1), не можуть претендувати на розв‘язок і їх потрібно „відмести”. Множину „відметених” ламаних на нульовому кроці позначимо S_0 (на рис. 3 це є (b_0, x_1)). Розглянемо точку $x_2 \in \Sigma_2$. Позначимо тепер через $l(x_2)$ довжину найбільш короткої ламаної, що з‘єднує x_2 з Σ_0

$$l(x_2) = \min_{x_1 \in G_1}(l(x_1) + f_1(x_1, x_2)).$$

Множина варіантів S_1, яку ми відмітаємо на цьому кроці, складається з усіх ламаних, які не містять ламаної довжини $l(x_2)$. На рис. 3 ламана (a_0, x_1, x_2) має довжину $l(x_2)$.

Нехай тепер кожну точку $x_i \in \Sigma_i$ ми з‘єднали з Σ_0 ламаною найменшої довжини $l(x_i)$. Тоді довжина найкоротшої ламаної, що з‘єднує точку x_{i+1} з Σ_0 визначається за формулою

$$l(x_{i+1}) = \min_{x \in G_i}(l(x_i) + f_i(x_i, x_{i+1})) \tag{11}$$

Всі варіанти S_i, що не містять ламаної довжини $l(x_{i+1})$ відмітаються. На останньому кроці згідно (11) ми знаходимо $l(x_N)$ і потім розв‘язуємо задачу мінімізації

$$l = \min_{x_N \in G_N} l(x_N)$$

На цьому процедура розв‘язування задачі завершується.

„Київський віник" дозволяє знаходити глобальний екстремум. Знайдена оптимальна траєкторія має важливу властивість – будь-який її відрізок є знову оптимальною траєкторією. Це означає, що частина траєкторії, що з‘єднує довільні дві точки x_i та x_k є ламаною, що серед всіх допустимих ламаних, що з‘єднують точки x_i та x_k, має найменшу довжину (принцип оптимальності Беллмана).

Для реалізації алгоритму необхідно сформувати в просторі (x,t) сітку: $t_i = t_0 + i\tau$, і на Σ_i побудувати сітку за змінною x з кроком Δx. Вузол сітки позначимо $p_k(i)$, де i відповідає номеру гіперплощини Σ_i, k – номеру вузла на Σ_i за змінною x.

Таким чином ми з‘єднуємо кожні два вузла, що лежать в сумісних гіперплощинах, і обчислюємо довжину згідно (12). Множина ламаних, що з‘єднують вузли на гіперплощині Σ_0 з вузлами на гіперплощині Σ_N і проходять через вузли на гіперплощинах $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_{N-1}$, є дискретною.

Позначимо $\Delta_i \in \Sigma_i$ – множина вузлів $p_k(i)$, що лежать в області G_i. Множина Δ_i називається *шкалою*.

Алгоритм.

Крок 1. Для всіх $x_1 \in \Delta_1$ розв‘язуємо задачу

$$l(x_1) = \min_{x_0 \in \Delta_0} f_1(x_0, x_1) = f_1(x_0^*(x_1), x_1).$$

Запам‘ятовуємо ламану $(x_0^*(x_1), x_1)$ для кожної точки x_1 та значення $l(x_1)$.

Крок 2. Для всіх $x_2 \in \Delta_2$ розв‘язуємо задачу

$$l(x_2) = \min_{x_1 \in \Delta_1} \{l(x_1) + f_1(x_1, x_2)\} = l(x_1^*(x_2)) + f_1(x_1^*(x_2), x_2).$$

Запам‘ятовуємо ламану $(x_0^*(x_1^*(x_2)), x_1^*(x_2), x_2)$ і значення $l(x_2)$ і т. д., поки не прибудемо до множини Δ_N.

Крок 3. Розв‘язуємо задачу

$$l(x_N) = \min_{x_{N-1}\in\Delta_{N-1}} \{l(x_{N-1}) + f_{N-1}(x_{N-1}, x_N)\}$$

$$= l(x^*_{N-1}) + f_{N-1}(x^*_{N-1}, x_N),\ x_N \in \Delta_N$$

Запам‘ятовуємо відповідну ламану, що з‘єднує x_N з $x^*_{N-1}(x_N)$ та $x^*_{N-2}(x_{N-1})$ і т. д. Остання точка ламаної лежить в Δ_0. Крім того, фіксуємо $l(x_N)$, $x_N \in \Delta_N$.

Крок 4. Знаходимо x^*_N як розв‘язок задачі

$$l = l(x^*_N) = \min_{x_N\in\Delta_N} l(x_N)$$

Відтворюємо оптимальну ламану

$$x^*_{N-1} = x_{N-1}(x^*_N),\ x^*_{N-2} = x_{N-2}(x^*_{N-1}),\ \dots,\ x^*_0 = x_0(x^*_1).$$

Крок 5. Вихід з алгоритму

Результат. Оптимальне значення l функціоналу та послідовність x_i, що визначає оптимальну ламану.

Реалізація алгоритму „київський віник” потребує значних затрат оперативної пам‘яті та часу обчислень.

5. Схема Моісєєва. Розглянемо задачу оптимального керування (1) – (4). Розіб‘ємо відрізок $[t_0, T]$ сіткою $t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. На множині $\Omega_i = \Omega_{t_i}(X)$ візьмемо деяку дискретну сітку точок $x_{ij} \in \Omega_i$ і цю сітку будемо називати *шкалою* H_i. Шкали H_i та H_{i+1} називаються *сусідніми*. Розглянемо для деяких $x \in H_i$, $y \in H_{i+1}$ допоміжну задачу

$$J_i(x, y, u) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_0(x, u, t)dt \to \min \tag{12}$$

при умові, що

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t),\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ x(t_i) = x,\ x(t_{i+1}) = y, \tag{13}$$

$$x(t) \in \Omega_t(X),\ u(t) = \Omega_t(U),\ t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{14}$$

Задача (1) – (4) є *елементарною операцією*. Позначимо через $\Delta_i(x, y)$ множину керувань, що задовольняють умовам (13), (14), $M_i(x, y) = \min_{u\in\Delta_i(x,y)} J(x, y, u)$.

Таким чином, отримуємо функціонал

$$f(x_0, x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} M_i(x_i, x_{i+1}) + \Phi(x_N) \to \min, \tag{15}$$

де $x_i \in H_i$, $x_{i+1} \in H_{i+1}$, $x_N \in H_N$, $i = 0,1,...,N-1$. Для розв'язування задачі (15) застосовується метод „київський віник”.

З*адача 12*. Побудувати на основі алгоритму „київський віник” метод розв'язування задачі (1) – (4) з елементарною операцією (12) – (14).

Література

1. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. – 488 с.

2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. – 520 с.

3. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. – 528 с.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПРИНЦИП БЕЛЛМАНА

1. Основні положення. Як було показано в прикладі лекції 2, не для всіх задач оптимального керування має місце принцип оптимальності Беллмана. Аналіз доведення принципу оптимальності показує, що важливу роль відіграє вид критерію якості. А саме, критерій якості в задачі Больца є адитивний за множиною визначеності. Це дозволяє поставити допоміжну задачу на вужчій множині. Вид диференціального зв'язку не є принциповим, головне, щоб для кожного допустимого керування існував розв'язок задачі Коші. Але в допоміжній задачі початкова умова фіксується на оптимальній траєкторії і це є принциповий момент, який демонструє природу розв'язків диференціальних рівнянь, а саме – не допускається розриву фазової траєкторії для задачі Больца з лекції 2.

Вказані закономірності лежать в основі узагальненого принципу Беллмана. Він полягає в тому, щоб показати, що аналог принципу оптимальності виконується для досить широкого класу задач оптимізації адитивної функції множин і, виходячи з узагальненого принципу Беллмана, можна довести принцип оптимальності для різних класів оптимізаційних задач.

Нехай X – *основний* простір. Це означає, що всі множини, які розглядаються, належать простору X. Під *класом множин* ми будемо розуміти сукупність множин з основного простору. *Функцією множин* називають функцію, що визначена на класі множин, значення якої належать R^1. Важливими прикладами функції множин є міра Лебега, функція ймовірності.

2. Узагальнений принцип оптимальності. Розглянемо три задачі оптимізації функції множин. Для кожної з цих задач принцип оптимальності буде мати свій вигляд.

Задача 1. Нехай $T = \{E : E \subseteq X\}$ – непорожній клас множин. Побудуємо клас $\mathfrak{R}$, для якого виконуються наступні умови:

1) клас $\mathfrak{R}$ містить T і не співпадає з T, тобто $\mathfrak{R} \supset T$;

2) для будь-якої множини $E \in \mathfrak{R}$ і довільної її підмножини F виконується $F \in \mathfrak{R}$ (умова спадковості);

3) якщо $E \in \Re$ та $F \in \Re$ то $E \cup F \in \Re$, $E / F \in \Re$ (умова кільця).

Визначимо на класі $\Re$ обмежену невід'ємну функцію множин $\mu : \Re \to R^1$ таку, що:

1) а порожній множині функція μ рівна нулю: $\mu(\varnothing) = 0$;

2) для будь-яких множин E і F з класу $\Re$ таких, що $E \cap F = \varnothing$ виконується

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

(умова адитивності).

Задача оптимізації функції множин μ на класі $\Re$ полягає в тому, щоб знайти множину A^* таку, що

$$\max_{E \in \Re} \mu(E) = \mu(A^*).$$

Побудуємо клас $\Im = \Re / T$. Нехай $\Im$ – непорожній клас. Розглянемо *допоміжну задачу*: знайти множину B^* таку, що $\max_{E \in \Im} \mu(E) = \mu(B^*)$. Припустимо, що $\mu(A^*) > 0$, $\mu(B^*) > 0$.

Теорема 1 (множинний принцип оптимальності). З точністю до множин, на яких функція μ рівна нулю, має місце співвідношення $B^* \subseteq A^*$.

Доведення. Нехай умова $B^* \subseteq A^*$ не виконується. Якщо $B^* \cap A^* = \varnothing$, тоді з властивостей функції μ випливає, що виконується

$$\mu(A^* \cup B^*) = \mu(A^*) + \mu(B^*) > \mu(B^*).$$

Так як $A^* \cup B^* \in \Re$, то отримали протиріччя тому, що множина A^* – розв'язок задачі оптимізації функції μ на класі $\Re$. Отже, $B^* \cap A^* \neq \varnothing$. Тоді множина $H = B^* / A^*$ є множиною, для якої $\mu(H) = 0$. Справді, з того, що $B^* \in \Re$ і з умови кільця слідує, що $H \in \Re$ і $A^* \cup H \in \Re$. Оскільки $A^* \cap H = \varnothing$, то з властивостей функції μ випливає, що $\mu(A^* \cup H) = \mu(A^*) + \mu(H) \geq \mu(A^*)$. Але множина A^* – розв'язок задачі оптимізації функції μ на класі $\Re$. Тому $\mu(A^* \cup H) = \mu(A^*)$. А це має місце, коли $\mu(H) = 0$. Тобто $B^* \subseteq A^*$ з точністю до множини, на якій функція μ дорівнює нулю. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо μ – обмежена міра на кільці $\Re$, то для неї виконується множинний принцип оптимальності. Зокрема, множинний принцип оптимальності виконується для ймовірнісної міри.

Задача 2. Нехай A – деяка непорожня множина, $S = \{C : C \subseteq A\}$ – фіксований клас множин такий, що якщо $P \in S$, $Q \in S$, то $P \cup Q \in S$,

$P/Q \in S$. Визначимо для кожного $C \in S$ непорожній клас множин $\Re(C) = \{E : E \subset X\}$ основного простору X. Для будь-якої множини $C \in S$ визначимо клас

$$B_C = \{L : L = C \times B, B \in \Re(C)\},$$

де $\times$ – знак декартового добутку. З допомогою сукупності класів B_C, $C \in S$ визначимо клас $\Im_A$ такий, що:

1) для довільної множини $C \in S$ виконується $\Im_A \supset B_C$;

2) для будь-яких множин $C \in S$, $F \in S$ і довільних множин $L \in B_C$, $M \in B_F$ виконується $L \cup M \in \Im_A$ (умова адитивності).

З означення класу $\Im_A$ випливає, що довільну множину $L \in \Im_A$ можна подати у вигляді $L = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \times E_i$, де $C_i \in S$, $C_i \underset{i \neq j}{\cap} C_j = \varnothing$, $E_i \in \Re(C)$, $i, j = 1,2...,n$, n – деяке натуральне число.

Визначимо на класі $\Im_A$ обмежену функцію множин $\sigma : \Im_A \to R^1$ таку, що:

1) на порожній множині $\sigma(\varnothing) = 0$;

2) якщо множини L і M належать класу $\Im_A$ і $L \cap M = \varnothing$, то $\sigma(L \cup M) = \sigma(L) + \sigma(M)$.

Задача оптимізації функції множин σ на класі $\Im_A$ полягає в тому, щоб знайти множину $G*$ таку, що

$$\min_{E \in \Im_A} \sigma(E) = \sigma(G*).$$

Зафіксуємо множину $B \in S$. Розглянемо клас $\bar{S} = \{C \cap B : C \in S\}$ і за його допомогою побудуємо клас $\Im_B$ аналогічно класу $\Im_A$. Допоміжна задача полягає в тому, щоб знайти множину $H*$ таку, що $\min_{E \in \Im_B} \sigma(E) = \sigma(H*)$.

Множину $G*$ можна представити у вигляді $G* = \bigcup_{i=1}^{m} G_i \times E_i$, де $G_i \in S$ і знайдеться $C \in S$ таке, що $E_i \in \Re(C)$, $G_i \underset{i \neq j}{\cap} G_j = \varnothing$, $i, j = 1,2...,m$, m – деяке натуральне число та для довільних $k = 1,2,...,m$ виконується або умова $G_k \cap B = \varnothing$, або умова $G_k \subseteq B$. Останнє випливає зі співвідношення

$$G_k \times E_k = \{(G_k / B) \times E_k\} \cup \{(G_k \cap B) \times E_k\},$$

де $(G_k / B) \cap B = \varnothing$, $(G_k \cap B) \subseteq B$. Має місце наступне твердження.

Теорема 2. Розв'язок допоміжної задачі $H^* = \bigcup\limits_{i \in I} G_i \times E_i$, де $I = \{\, i : G_i \subseteq B, i = 1,2,...,m \,\}$.

Доведення. З побудови класу $\Im_A$ випливає, що множина $H^* \in \Im_A$. Нехай $E_0 \in \Im_B$ – множина, яка є розв'язком допоміжної задачі і $E_0 \neq H^*$, $\sigma(E_0) < \sigma(H^*)$. Тоді $E_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{k} C_i \times E_i$, де $C_i \in \overline{S}$, $E_i^0 \in \Re(C)$, $i = 1,2...,k$, k – деяке натуральне число. Позначимо $F_0 = \bigcup\limits_{i \in J} G_i \times E_i$, де $J = \{\, i : G_i \cap B = \varnothing, i = 1,2,...,m \,\}$. За побудовою множин E_0 і F_0 виконуються співвідношення $E_0 \cap F_0 = \varnothing$, $F_0 \subset G^*$, $F_0 \in \Im_A$. Нехай $H_0 = E_0 \cup F_0$. З умови адитивності функції σ маємо

$$\sigma(H_0) = \sigma(F_0) + \sigma(E_0) < \sigma(H^*) + \sigma(F_0) = \sigma(H^* \cup F_0).$$

Але $H^* \cup F_0 = G^*$. Отже, $\sigma(H_0) < \sigma(G^*)$, що суперечить тому, що G^* – розв'язок задачі оптимізації функції σ на класі $\Im_A$. Теорему доведено.

Зауваження. а) Визначаючи клас $\Im_A$, умову 2) можна замінити на наступну умову:

2$'$) для будь-яких множин $C \in S$, $F \in S$, $F \cap C = \varnothing$ і довільних множин $L \in B_C$, $M \in B_F$ виконується $L \cup M \in \Im_A$.

Якщо S є класом всіх підмножин множини A, то умову 2$'$) можна розглядати в більш простому вигляді:

2$''$) для довільної множини $C \subset A$ і будь-яких множин $L \in B_C$, $M \in B_{A/C}$ виконується $L \cup M \in \Im_A$. Тоді множини класу $\Im_A$ будуть мати структуру $(C \times E_1) \cup ((A/C) \times E_2)$, $E_1 \in \Re(C)$, $E_2 \in \Re(A/C)$, $C \subset A$. Їх можна подати у вигляді

$$(D_1 \times E_1) \cup (D_2 \times E_1) \cup (D_3 \times E_2) \cup (D_4 \times E_2),$$

де $D_1 = C \cap B$, $D_2 = C / B$, $D_3 = (A/C) \cap B$, $D_4 = (A/C)/B$.

б) Визначаючи функцію σ, умову 2) можна замінити на умову

2$'$) якщо $C \in S$, $F \in S$, $F \cap C = \varnothing$ та $L \in B_C$, $M \in B_F$, то $\sigma(L \cup M) = \sigma(L) + \sigma(M)$.
Тоді теорема 2 також буде мати місце.

в) Класи B_C, $C \subseteq A$ можна визначити, виходячи з різних непорожніх класів $\Re(C)$. Тоді $B_C = \{L : L = C \times E, E \in \Re(C)\}$.

Задача 3. Розглянемо випадок, коли множина A є обмеженою підмножиною деякої впорядкованої множини. Нехай $h = \sup A$, $h \in A$, $\Re = \{E : E \subset X\}$ – фіксований клас множин простору X, $B \subseteq A$ – непорожня множина, $\Psi = \{\psi : A \to \Re\}$ – множина однозначних функцій така, що як тільки $\varphi_i \in \Psi$, $i = 1,2$ і $\varphi_1(d) = \varphi_2(d)$, $d \in B$, то $\varphi \in \Psi$, де

$\varphi(t) = \varphi_1(t)$ при $t \in D$,

$\varphi(t) = \varphi_2(t)$ при $t \in A / D$, $D = \{p : p \geq d, p \in A\}$.

Розглянемо клас $\Im_A$ множин виду

$L = \{(a, \Phi_a) : \psi_L(a) = \Phi_a, a \in A, \Phi_a \in \Re\}$, $\psi_L \in \Psi$.

Нехай $\sigma : \Im_A \to R^1$ є обмежена функція така, що:

1) на порожній множині функція $\sigma(\varnothing) = 0$;

2) для довільної точки $d \in B$ і для довільних множин $L \in \Im_D$, $M \in \Im_{A/D}$ виконується $\sigma(L \cup M) = \sigma(L) + \sigma(M)$, де $D = \{p : p \geq d, p \in A\}$.

Визначимо функцію $m(L) = \sigma(L) + \rho(\psi_L(h))$. Тут $\rho : \Re \to R^1$ – обмежена функція, $L \in \Im_A$, $\psi_L \in \Psi$. Задача оптимізації функції множин m на класі $\Im_A$ полягає в знаходженні множини G^* такої, що

$$\min_{L \in \Im_A} m(L) = m(G^*).$$

Нехай $G^* = \{(a, \Phi_a^*) : \Phi_a^* \in \Re, a \in A\}$. Зафіксуємо точку $d \in B$, $D = \{p : p \geq d, p \in A\}$. Розглянемо допоміжну задачу: знайти множину H^* таку, що $\min\limits_{E \in \Im_D} m(L) = m(H^*)$ при умові $\psi_L(d) = \psi_{G^*}(d)$, $L \in \Im_D$, $\psi_L \in \Psi$, $\psi_{G^*} \in \Psi$.

Теорема 3. Оптимальний розв’язок допоміжної задачі має вигляд

$$H^* = \{(a, \Phi_a^*) : a \in D\}.$$

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що

$$H_0 = \{(p, Q_p): Q_p \in \Re, p \in D\}$$

є розв'язком допоміжної задачі, $H_0 \neq H^*$, $m(H_0) < m(H^*)$, $\psi_{H_0}(d) = \psi_{G^*}(d)$, $\psi_{H_0} \in \Psi$. Позначимо $L = \{(p, \Phi_p^*): p \in A/D\}$, $M = \{(p, \Phi_p^*): p \in D\}$. Тоді

$$m(G^*) = \sigma(G^*) + \rho(\psi_{G^*}(h)) = \sigma(L) + \sigma(M) + \rho(\psi_M(h)) >$$
$$\sigma(L) + \sigma(H_0) + \rho(\psi_{H_0}(h)) = m(Q),$$

де $Q = L \cup M$, $Q \in \Im_A$, $\psi_M \in \Psi$. Отримали протиріччя з тим, що множина G^* – розв'язок задачі оптимізації функції множин m на класі $\Im_A$. Теорему доведено.

3. Застосування узагальненого принципу Беллмана. Покажемо, як використовуються результати попереднього пункту лекції в доведенні принципу оптимальності Беллмана для задачі оптимального керування пучком траєкторій.

Нехай $X \subseteq R^n$ – множина обмежень на вектор фазових координат, $U \subseteq R^m$ – множина обмежень на вектор керування. Розглянемо динамічну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x(t_0) \in M_0, \tag{2}$$

де $t \in [t_0, T]$ – незалежна змінна, $x(t) \in X$ – вектор фазових координат, $u(t) \in U$ – вектор керування, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор функція, яка задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $M_0 \subseteq X$ – компакт. Позначимо

$$M(t, u) = \{x \in R^n : x = x(t, u, x_0), x_0 \in M_0\}$$

перетин пучка траєкторій задачі (1), (2) в момент $t \in [t_0, T]$.

Задача оптимального керування пучком траєкторій полягає в тому, щоб знайти допустиме керування u^* і відповідний йому пучок траєкторій P^*, які мінімізують функціонал

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} \int_{M(t,u)} \omega(x,u,t) dx dt + \int_{M(T,u)} g(x,T) dx \,. \quad (3)$$

Тут $\omega(x,u,t)$, $g(x,T)$ – інтегровані за Лебегом на перетинах пучка функції. Розв'язком задачі (1)-(3) назвемо пару (u^*, P^*).

Розглянемо допоміжну задачу. Нехай $s \in (t_0, T)$ – фіксований момент часу. Необхідно мінімізувати функціонал

$$I_s(u) = \int_{s}^{T} \int_{M(t,u)} \omega(x,u,t) dx dt + \int_{M(T,u)} g(x,T) dx \quad (4)$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t) \,, \; t \in [s,T], \quad (5)$$

$$x(s) \in M(t,u^*) \,, \; x \in X \,, \; u \in U \,. \quad (6)$$

Теорема 4. На відрізку $t \in [s,T]$ має місце рівність

$$(u^*, X^*) = (\bar{u}, \bar{X}),$$

де $(\bar{u}, \bar{X})$ – розв'язок допоміжної задачі.

Доведення. Використаємо позначення теореми 3 для даного випадку. Множина $A = [t_0, T]$, $B = A$, Ψ – клас розв'язків системи (1), $\Re$ – клас довільних підмножин фазового простору X, $\Im_A$ є класом розв'язків задачі (1), (2) при будь-якому керуванні $u \in U$. Якщо $L \in \Im_A$, то

$$L = \{(t, M(t,u) : t \in A, u \in U)\}, \qquad \sigma = \int_{t_0}^{T} \int_{M(t,u)} \omega(x,u,t) dx dt \,,$$

$\rho = \int_{M(T,u)} g(x,T) dx$, $m = I(u)$, множина $D = [s,T]$, $\Im_D$ є класом розв'язків задачі (5), (6). З теореми 3 випливає справедливість сформульованого твердження.

Задача 13. За допомогою узагальненого принципу Беллмана довести справедливість принципу оптимальності Беллмана для задачі оптимального керування динамічною системою з інтегральним функціоналом (лекція 2) та для задачі оптимального керування матричним диференціальним рівнянням з інтегральним критерієм (лекція 6).

Література.

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. – 197 с.