# МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО ДЕМПФУВАННЯ

*1. Оптимальність по відношенню до демпфування функції.* Розглянемо керовану систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \tag{1}$$

де $x$ – $n$-вимірний вектор фазових координат, $f(x,u,t)$ – $n$-вимірна вектор-функція, неперервна за сукупністю змінних, $u = u(t)$ – $r$-вимірний вектор керування, що належить класу кусково неперервних функцій, $u \in G$ , $G$ – деякий компакт в $R^r$, $x(t_0) = x_0$, $t \ge t_0$. Розв'язок системи (1), що відповідає керуванню $u$ та початковій умові $x(t_0) = x_0$ будемо позначати $x(t,u,x_0,t_0)$.

Нехай $S = \{(x,t): \psi(x,t) = 0\}$, $\psi \in C(R^{n+1})$ і задача керування системою (1) полягає у знаходженні $u \in G$ такого, що інтегральна крива системи (1) в деякий момент часу попадає з фіксованого положення на поверхню $S$. При цьому можуть бути задані обмеження на фазову змінну та керування. Зрозуміло, що така задача може не мати однозначного розв'язку. Розглянемо функцію $V(x,t)$, яка визначає у якомусь сенсі відстань від точки $x$ в момент $t$ до поверхні $S$. Тоді сформульована задача керування може бути зведена до мінімізації $V(x,t)$ на розв'язках системи (1). У цьому полягає зміст оптимального керування по відношенню до демпфування функції $V$.

*Означення.* Керування $u_*$ називається *оптимальним по відношенню до демпфування* функції $V$, якщо функція $V$ спадає вздовж траєкторії $x_*(t) = x(t,u_*)$ найбільшим чином.

Припустимо, що функція $V(x,t)$ є неперервно диференційованою. Знайдемо повну похідну функції $V$ на розв'язках системи (1)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V(x,t)\, f(x,u,t) = W(x,u,t). \tag{2}$$

Згідно означення, оптимальне керування по відношенню до демпфування функції $V$ доставляє функції $W(x,u,t)$ найменше від'ємне значення.

*2. Приклад.* Розглянемо динамічну систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{3}$$

де $A, B$ є стаціонарні матриці розмірності $n \times n$ та $n \times r$ відповідно. Припустимо, що при керуванні $u = 0$ розв'язок системи (3) є асимптотично стійкий за Ляпуновим. Тоді існує функція Ляпунова $V(x) = x^T D x$ , де $D$ є симетрична, додатновизначена матриця розмірності $n \times n$, яка визначається єдиним чином з матричного рівняння Ляпунова

$$A^T D + D A = -I .$$

Тут $I$ – одинична матриця розмірності $n \times n$. Функція $V(x)$ визначає відстань від точки $x$ до нуля в просторі $R^n$. Побудуємо керування $u$ так, щоб функція $V$ спадала найбільшим чином вздовж траєкторії системи (3). Припустимо, що на керування накладаються обмеження $|u_i| \le 1 \ , i = 1,2, \ldots r$. Побудуємо повну похідну функції $V$ на розв'язках системи (3). Отримуємо

$$W(x,u) = grad^T V(x)(Ax + Bu) =$$

$$(Dx)^T Ax + (D^T x)^T Ax + 2(Dx)^T Bu =$$

$$(Ax)^T Dx + (D^T x)^T Ax + 2(Dx)^T Bu =$$

$$x^T \left(A^T D + DA\right)x + 2x^T D^T Bu .$$

Враховуючи матричне рівняння Ляпунова, $W(x,u) = -x^T x + 2 x^T D^T Bu$. Представимо матрицю $B$ у вигляді $B = (b_1, b_2, \ldots b_r)$, де $b_i \in R^n \ , i = 1,2,\ldots, r$. Тоді

$$W(x,u) = -x^T x + 2\sum_{i=1}^{r} \left(b_i^T Dx\right)^T u_i \ . \tag{4}$$

Враховуємо, що $|u_i| \le 1 \ , i = 1,2, \ldots r$. Тоді з (4) випливає, що функція $W$ отримує найменше значення при

$$(u_j)_* = -sign(b_j^T Dx) . \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (3), отримуємо оптимальну автоматичну систему керування по відношенню до демпфування функції $V(x,t)$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu_*(x) , \tag{6}$$

$$u_* = -(sign(b_1^T Dx), sign(b_2^T Dx), \ldots, sign(b_n^T Dx))^T .$$

Права частина системи (6) є розривною, так як $u_*(x)$ є розривною. Поверхня розриву визначається рівняннями

$$b_j^T Dx = 0 \ , \ j = 1,2,\ldots, r .$$

*3. Зв’язок з оптимальними за швидкодією процесами.* Розглянемо, як приклад, систему

$$\frac{dx}{dt} = u, \tag{7}$$

де $r = n,\ \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. Покладемо $V(x) = \|x\| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Керування, що є оптимальним по відношенню до демпфування функції $V$, визначається шляхом знаходження найменшого можливого значення

$$W(x,u) = grad^T\, V(x)\, u = \frac{x^T u}{\|x\|},$$

при умові $\|u\|^2 = 1$. Це є задача на умовний екстремум. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x,u,\lambda) = \frac{x^T u}{\|x\|} + \lambda(\|u\|^2 - 1)$$

та необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,u,\lambda)}{\partial u} = \dfrac{x}{\|x\|} + 2\lambda u = 0, \\ \dfrac{\partial L(x,u,\lambda)}{\partial \lambda} = \|u\|^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Розв’язавши систему (8) відносно $u$, отримаємо

$$u_* = -\frac{x}{\|x\|}. \tag{9}$$

Таким чином, підставивши (9) в (7), отримаємо $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{\|x\|}$.

Виявляється, що керування (8) є оптимальним за швидкодією для системи (7) при умові, що $\|u\|^2 = 1,\ x(0) = x_0,\ x(T) = 0$, де $T$ - час перехідного процесу. Справді, запишемо рівняння Белмана для задачі швидкодії

$$\min_{\|u\|=1} grad^T\, B(x)\, u = -1, \tag{10}$$

де $B(x)$ - функція Белмана. Розв’язавши задачу (10), отримаємо

$$u_{**} = -\frac{grad\, B(x)}{\|grad\, B(x)\|}. \tag{11}$$

Підставимо (11) в (10) і знаходимо рівняння для визначення функції Белмана

$$\|grad\, B(x)\| = 1. \tag{12}$$

З (12) слідує $grad\, B(x) = -\dfrac{x}{\|x\|}$ і $B(x) = \|x\|$.

Таким чином, оптимальне керування (11) для задачі швидкодії співпадає з оптимальним керуванням (9) по відношенню до демпфування функції $V(x) = \|x\|$, а функція Беллмана дорівнює $V(x)$. При цьому мінімальний час перехідного процесу $T = B(x_0) = \|x_0\|$.

Розглянемо наступне твердження.

*Теорема 1.* Нехай виконуються наступні умови:

1) керування $u_*$ є оптимальним по відношенню до демпфування функції $V(x,t)$;

2) функція $V(x,t) > 0$ коли $\psi(x,t) \neq 0$ і $V(x,t) = 0$ при $\psi(x,t) = 0$;

3) повна похідна функції $V(x,t)$ на розв'язках системи (1) при керуванні $u = u_*$ рівна –1, тобто $\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_{(1)} = -1$.

Тоді керування $u_*$ є оптимальним за швидкодією при переводі системи (1) з стану $x(t_0) = x_0$ на поверхню $S = \{(x,t) : \psi(x,t) = 0\}$.

Доведення. За умовою теореми, вздовж розв'язку $x_*(t) = x(t, u_*, x_0, t_0)$ має місце рівність $\dfrac{dV}{dt} = -1$. Звідси

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt = V(x(t, u_*, x_0, t_0), t) - V(x_0, t_0) = -(t - t_0)$$

і $V(x(t, u_*, x_0, t_0), t) = V(x_0, t_0) + t_0 - t$. Таким чином, при $t = t_1 = V(x_0, t_0) + t_0$ виконується рівність $V(x(t, u_*, x_0, t_0), t) = 0$. Але $V(x,t) = 0$ лише у випадку, коли $\psi(x,t) = 0$. Тому існує момент $t_1 \geq t_0$ такий, що $x_*(t_1) \in S$. Припустимо, що час $T = t_1 - t_0$ не є оптимальним за швидкодією. Тоді існує керування $\tilde{u} \in G$, що переводить точку $x_0$ на поверхню $S$ за час $\tilde{T} < T = V(x_0, t_0)$ , $\tilde{T} = \tau - t_0$. Оскільки керування $u_*$ є оптимальним по відношенню до демпфування функції $V$ , то для керування

$\tilde{u}$ знайдеться функція $\alpha(t) \geq 0$, така, що $\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_{(1)} = -1 + \alpha(t)$ на розв'язку $x(t, \tilde{u}, x_0, t_0)$, $t \in [t_0, \tau]$. Інтегруючи останню рівність, отримуємо

$$\int_{t_0}^{\tau} \frac{dV}{dt} dt = V(x(\tau, \tilde{u}, x_0, t_0), \tau) - V(x_0, t_0) = -V(x_0, t_0) = -(\tau - t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \alpha(t)$$

.

Так як $\int_{t_0}^{\tau} \alpha(t) dt \geq 0$ та $V(x_0, t_0) = T$, то

$\tilde{T} - T = \tau - t_1 = \int_{t_0}^{\tau} \alpha(t) dt \geq 0$. Отримали протиріччя. Теорему доведено.

Розглянемо динамічну систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \ t \geq t_0, \tag{1}$$

де $x \in R^n$ – фазові координати, $u \in U \subset R^m$ – керування з допустимої множини керувань, $n$-вимірна вектор функція $f(x, u, t)$ має частинні похідні $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ та неперервна разом з ними за сукупністю змінних на області визначення. Зафіксуємо умову Коші

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Задача полягає у знаходженні керування $u^* \in U$ такого, що відповідна інтегральна крива $x^*$ системи (1) з умовою (2) у мінімально можливий момент часу $t_1 \geq t_0$ досягне поверхні $S$, тобто

$$(t_1, x^*) \in S, \tag{3}$$

де поверхня визначається

$$S = \{(t, x) \in R \times R^n : s(t, x) = 0\}. \tag{4}$$

Означення. Дійсну неперервну скалярну функцію $V(t, x)$ назвемо додатно-визначеною відносно поверхні $S$, якщо

1). $V(t,x) \ge 0$, для всіх допустимих $(t,x)$;

2). $V(t,x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $(t,x) \in S$.

Позначимо $V_0 = V(t_0, x_0)$, $x = x(t,u,t_0,x_0)$ – траєкторія, динаміка якої визначається в силу системи (1) з керуванням $u$ та у час $t_0$ справджується умова Коші (2).

Лема. Нехай керування $\tilde{u} \in U$ – оптимальне за демпфуванням додатно-визначеної відносно $S$ функції $V(t,x)$ в задачі (1)-(3). Тоді $\tilde{u}$ переводить функцію $V(t,x)$ з $V_0$ у 0 за найменший час

$$\tilde{T} = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \to \min_{u \in U}.$$

Тут $V(t_1, x(t_1, \tilde{u}, t_0, x_0)) = 0$, $V(t, x(t, \tilde{u}, t_0, x_0)) > 0$, для всіх $t \in [t_0, t_1)$.

Доведення. Припустимо від супротивного, що існують $\hat{u} \in U$ та $\hat{t} \in (t_0, t_1)$, такі, що $V(\hat{t}, x(\hat{t}, \hat{u}, t_0, x_0)) = 0$.

В силу додатної визначеності функції $V(t,x)$ справедливо

$$V(\hat{t}, x(\hat{t}, \tilde{u}, t_0, x_0)) > V(\hat{t}, x(\hat{t}, \hat{u}, t_0, x_0)) = 0.$$

Оскільки функція $V(t,x)$ неперервна, то існує $\bar{t} \ge t_0$, таке, що $V(\bar{t}, x(\bar{t}, \tilde{u}, t_0, x_0)) = V(\bar{t}, x(\bar{t}, \hat{u}, t_0, x_0))$ (принаймні це справедливо при $\bar{t} = t_0$). Причому виберемо $\bar{t}$ так, щоб $V(t, x(t, \tilde{u}, t_0, x_0)) > V(t, x(t, \hat{u}, t_0, x_0))$ для всіх $t \in (\bar{t}, \hat{t}]$. Таким чином існує число $\tau > 0$ таке, що на проміжку $[\bar{t}, \bar{t} + \tau]$ функція $V(t, x(t, \hat{u}, t_0, x_0))$ спадає швидше за $V(t, x(t, \tilde{u}, t_0, x_0))$, що суперечить означенню оптимального за демпфуванням керування. Лему доведено.

Теорема. Для того, щоб $u^* \in U$ було оптимальним за швидкодією керуванням задачі (1)-(3) необхідно і достатньо, щоб $u^*$ було оптимальним за демпфуванням додатно-визначеної відносно $S$ функції $V(t,x)$.

Доведення. Нехай $u^* \in U$ – оптимальне за швидкодією керування задачі (1)-(3). Тоді відповідну йому траєкторію позначимо $x^* = x(t,u^*,t_0,x_0)$, а оптимальний час – $T^*$, тобто

$(T^*, x^*(T^*,u^*,t_0,x_0)) \in S$, $T^* \le T$, $(T, x(T,u,t_0,x_0)) \in S$, для всіх $u \in U$. (5)

Оскільки функція $V(t,x)$ додатно-визначена відносно поверхні $S$, то

$$V(T^*, x^*(T^*,u^*,t_0,x_0)) = 0, \tag{6}$$

що означає, що за час $T^*$ керування $u^* \in U$ переведе функцію $V(t,x)$ з $V_0$ у $0$.

Нехай $\tilde{u} \in U$ – оптимальне за демпфуванням $V(t,x)$ задачі (1)-(3). Тоді відповідну йому траєкторію позначимо $\tilde{x} = x(t,\tilde{u},t_0,x_0)$, а оптимальний за демпфуванням час – $\tilde{T}$, тобто

$V(\tilde{T}, \tilde{x}(\tilde{T},\tilde{u},t_0,x_0)) = 0$, $\tilde{T} \le T$, $V(T, x(T,u,t_0,x_0)) = 0$, для всіх $u \in U$. (7)

За означенням додатно-визначеної відносно поверхні $S$ функції,

$$(\tilde{T}, \tilde{x}(\tilde{T},\tilde{u},t_0,x_0)) \in S. \tag{8}$$

Оскільки $u^*$ – оптимальне за швидкодією керування, то з (5), (8) випливає $T^* \le \tilde{T}$. Але $\tilde{u}$ – оптимальне керування за демпфуванням $V(t,x)$, тому згідно леми з (7), (6) випливає $\tilde{T} \le T^*$. Отримуємо $T^* = \tilde{T}$, а отже оптимальне за швидкодією керування буде також і оптимальним за демпфуванням $V(t,x)$ і навпаки. Теорему доведено.

Позначимо $V_0 = V(t_0, x_0)$, $x = x(t, u, t_0, x_0)$ – траєкторія, динаміка якої визначається в силу системи (1) з керуванням $u$ та у час $t_0$ справджується умова Коші (2).

Введемо у розгляд функцію

$$W(x,u,t) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} . \tag{5}$$

*Теорема 1*. Якщо існують деяке $\varepsilon > 0$, керування $u_\varepsilon \in U$ та такий скінчений момент часу $t_\varepsilon \geq t_0$, що

$$W(x_\varepsilon, u_\varepsilon, t) < -\varepsilon, \text{ при } V(t, x_\varepsilon) > 0,\ t \geq t_\varepsilon \tag{6}$$

на розв’язках системи (1), то $u_\varepsilon$ є розв’язком задачі синтезу, причому відповідна траєкторія досягне термінальної множини за скінчений час

$$T^* = t_1 - t_0 < \frac{V_0}{\varepsilon} + t_\varepsilon - t_0 . \tag{7}$$

*Доведення*. З (5),(6) випливає

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} < -\varepsilon, \text{ при } V(t, x_\varepsilon) > 0,\ t \geq t_\varepsilon . \tag{8}$$

Проінтегрувавши за $t$ нерівність (8), отримуємо

$$V(t, x_\varepsilon) - V_0 < -\varepsilon(t - t_\varepsilon) .$$

Тому

$$V(t, x_\varepsilon) < V_0 - \varepsilon(t - t_\varepsilon) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty . \tag{9}$$

При $t = t_\varepsilon$ в силу додатної визначеності $V(t, x)$ відносно $S$ маємо

$$0 \le V(t, x_\varepsilon) < V_0 - \varepsilon(t_\varepsilon - t_\varepsilon) = V_0\,,\ V_0 > 0.$$

В силу співвідношення (9) та неперервності функції $V(t,x)$, знайдеться такий момент часу $t_1 < \infty$, що

$$V(t_1, x_\varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Причому з (9) випливає, що

$$t_1 < \tau = t_\varepsilon + \frac{V_0}{\varepsilon} < \infty. \tag{11}$$

Таким чином, згідно (10) та означення додатно визначеної відносно $S$ функції $V$ отримуємо, що $(t_1, x_\varepsilon) \in S$, а це означає, що $u_\varepsilon$ є розв'язком задачі синтезу (1)-(3). Причому час переведення точки, визначеної умовою Коші (2) на термінальну множину дорівнює, згідно (11), $T^* = t_1 - t_0 < \dfrac{V_0}{\varepsilon} + t_\varepsilon - t_0$. Теорему доведено.

*Теорема* 2. Нехай функція $W(x,u,t)$ залежить явно тільки від $x$, тобто $W(x,u,t) = \varphi(x)$, причому функція $\varphi$ диференційована за $x$. Якщо керування $u^*$, обчислене за формулою

$$u^*(t,x) = \arg\min_{u \in U} \left\| f(x,u,t) + grad_x \varphi(x) \right\| \tag{12}$$

таке, що

$$\left\| f(x,u^*,t) + grad_x \varphi(x) \right\| = 0, \tag{13}$$

причому існує скінчений момент часу $\tilde{t} \ge t_0$, такий, що $W(x^*, u^*, \tilde{t}) < 0$,

то керування $u^*$ розв'язує задачу синтезу за скінчений час $T^* < \dfrac{2V_0}{W(x^*, u^*, \tilde{t})} + \tilde{t} - t_0 < \infty$.

*Доведення*. При виконанні (12),(13) система (1) набуває вигляду

$$\frac{dx}{dt} = -grad_x \varphi(x). \tag{14}$$

Формула (14) є неперервним аналогом методу градієнтного спуску (метод Коші). За умовою теореми в момент часу $t = \tilde{t}$ справедливо $\varphi(x^*) = -\tilde{\varepsilon} < -\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} = -\varepsilon < 0$, де $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} > 0$. Тому, згідно (14), буде справедливо $\varphi(x^*) = W(x^*, u^*, t) < -\varepsilon$ при тих $t > \tilde{t}$, для яких означені $x^*(t), u^*(t)$. В силу теореми 1, керування $u^*$ є розв'язком задачі синтезу, причому відповідна траєкторія $x^*$ досягне термінальної множини за скінчений час $T^* = t_1 - t_0 < \frac{2V_0}{W(x^*, u^*, \tilde{t})} + \tilde{t} - t_0$. Теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли права частина системи (1) лінійна по керуванню $u$, тобто

$$f(x,u,t) = g(x,t) + h(x,t)u(t),$$

де $g(x,t)$ – $n$-вимірна вектор-функція має частинні похідні $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ та неперервна разом із ними за сукупністю змінних, $h(x,t)$ – $n \times m$-матриця, компоненти якої є функціями $h_{\alpha\beta}(x,t)$, які мають частинні похідні $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x_j}$, $\alpha, j = 1, \ldots, n$, $\beta = 1, \ldots, m$ та неперервні разом із ними за сукупністю змінних. Тоді формула (12) набуває вигляду

$$u(t,x) = P_U\left\{-h^+(x,t)\big(g(x,t) + grad_x \varphi(x)\big)\right\}, \tag{15}$$

де $P_U\{\cdot\}$ – операція проектування на допустиму множину керувань $U$, $h^+(x,t)$ – $m \times n$-матриця, що для кожних фіксованих $x, t$ є псевдооберненою для матриці $h(x,t)$.

*Випадок лінійної відносно керування динамічної системи.* Розглянемо систему керування

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + B(x,t)\,u\,, \tag{13}$$

де $f(x,t)$ - $n$-вимірна неперервна вектор-функція, $B(x,t)$ - матриця розмірності $n \times r$ з неперервними компонентами. Припустимо, що керування $u_*$ задовольняють обмеженням

$$|u_i| \le 1\,,\;\; i = 1,2,...,r\,. \tag{14}$$

Знайдемо повну похідну функції $V(x,t)$ в силу системи (13)

$$W(x,u,t) = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(13)} = \frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T\, V(x,t)\; f(x,t) + grad_x^T\, V(x,t)\, B(x,t$$

.

Нехай $B(x,t) = (b_1(x,t),...,b_r(x,t))$, де $b_i(x,t)\,,\; i = 1,2,...,r$ є неперервними $n$-вимірними функціями. Тоді

$$W(x,u,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T\, V(x,t)\; f(x,t) + \sum_{i=1}^{r} (b_i^T\, grad_x^T\, V(x,t))^T\, u_i\,.$$

Враховуючи обмеження (14), отримуємо оптимальне керування по відношенню до демпфування функції $V(x,t)$ у вигляді

$$(u_i)_* = -sign\left(b_i^T\, grad_x V(x,t)\right),\; b_i(x,t)\;,\; i = 1,2,...,r\,. \tag{15}$$

Якщо функція $V(x,t)$ задовольняє умови теореми (1) і на керуванні (15) виконується

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(13)} = -1, \tag{16}$$

то керування (15) розв'язує проблему синтезу оптимального за швидкодією керування. У цьому випадку рівняння (16) має вигляд

$$\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T\, V(x,t)\; f(x,t) - \sum_{i=1}^{r} \left|\; b_i^T(x,t)\, grad_x^T\, V(x,t) \;\right| = -1\,.$$

Зауважимо, що при підстановці керування (15) в систему (13) отримуємо диференціальне рівняння з розривною правою частиною.

*Задача 21.* Знайти оптимальне керування системою

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \tag{17}$$

по відношенню до демпфування функції $V(x) = x^T G x$ при умові, що $\|u\|^2 \le \bar{u}$. Тут $G = G^T$ - додатновизначена матриця розмірності $n \times n$, $\bar{u} > 0$.

*Задача 22.* Побудувати функцію $W(x,u,t)$ та оптимальне керування для системи (17) по відношенню до демпфування функції $V(x) = x^T G x$ при умові, що $u^T H u \le \bar{u}^2$. Тут $G(t) = G^T(t)$ - додатновизначена $n \times n$ неперервна матриця, $H = H^T$ – додатновизначена $r \times r$ матриця.


*Література.*
1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. -496 с.


## Гасіння кутових швидкостей та переорієнтація космічного апарату на основі методу демпфування

*1. Задача найшвидшого гасіння кутових швидкостей космічного апарату.* Розглянемо динамічну систему вигляду

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J\omega = u \,, \tag{9}$$

$$\omega(0) = \omega^{(0)} \,, \tag{10}$$

яка визначає динаміку кутових швидкостей космічного апарату. Тут $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор кутової швидкості космічного апарату, $J$ – додатно-визначена симетрична матриця головних моментів інерції, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – вектор керуючих параметрів, $u \in U$ – множина допустимих керувань, $t \ge 0$. Зв'язана система координат будується на головних осях інерції апарату. Задача полягає в тому, щоб найшвидшим чином загасити кутові швидкості $\omega$ (тобто знайти оптимальне за швидкодією керування $u^* \in U$, що переведе стан апарату з (10) у $\omega(T^*) = (0,0,0)^T$). При цьому передбачається, що пристрої керування космічним апаратом спроможні утворювати моменти, які перебільшують сумарний момент зовнішніх сил, що діють на апарат.

Для розв'язування цієї задачі використаємо метод демпфування. Розглянемо функцію

$$V(t,\omega)=\frac{1}{2}\|\omega(t)\|^2. \qquad (11)$$

Згідно доведеної теореми, керування $\tilde{u}\in U$, яке буде оптимальним за демпфуванням (11), буде також оптимальним за швидкодією керуванням, що гасить кутові швидкості космічного апарату. Знайдемо $\tilde{u}\in U$, для чого обчислимо

$$\left.\frac{d}{dt}V(t,\omega)\right|_{(10)}=\omega^T(t)\cdot J^{-1}\cdot\left(u-\omega\times J\omega\right). \qquad (12)$$

Згідно (12) напрямок найшвидшого спадання функції (11) визначається за формулою

$$v(t)=-\frac{J^{-1}\omega(t)}{\left\|J^{-1}\omega(t)\right\|}, \text{ при } \|\omega\|>0. \qquad (13)$$

Отже керування, що демпфує функцію (11) визначаємо як проекцію вектора $v(t)$ на допустиму множину $U$. У випадку, коли множина керувань є кулею

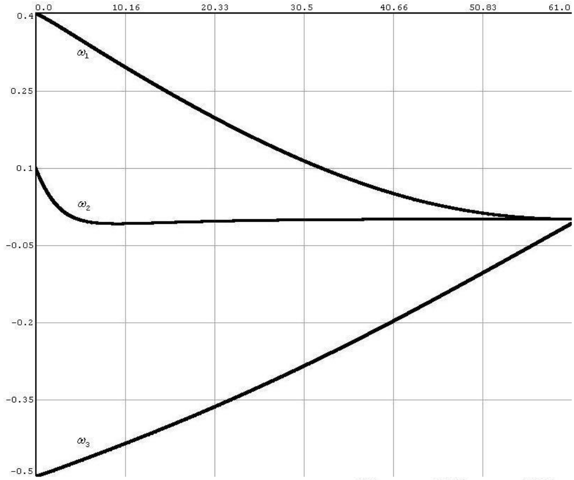
$$U=\left\{z\in R^3:\|z\|\le\rho\right\}, \qquad (14)$$

керування визначаємо

$$\tilde{u}(t)=\rho v(t). \qquad (15)$$

Якщо при цьому матриця моментів інерції володіє властивістю $J^{-1}=kJ$, де дійсне число $k\neq 0$, то (15) є оптимальним за демпфуванням $V(t,x)$ (а отже за швидкодією) керуванням []. В протилежному випадку, керування (15) є наближеним до оптимального з точністю $o\left(\|\omega\|^2\right)$. На рис.1 та 2 представлені відповідно траєкторія та керування, обчислені при наступних значеннях параметрів []: $J = \begin{pmatrix} 40 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 2 & 0 \\ 0.02 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $\omega_0 = (0.4, 0.1, -0.5)^T$, $\rho = 0.01$.

Тут $T^* = 61$ секунда.



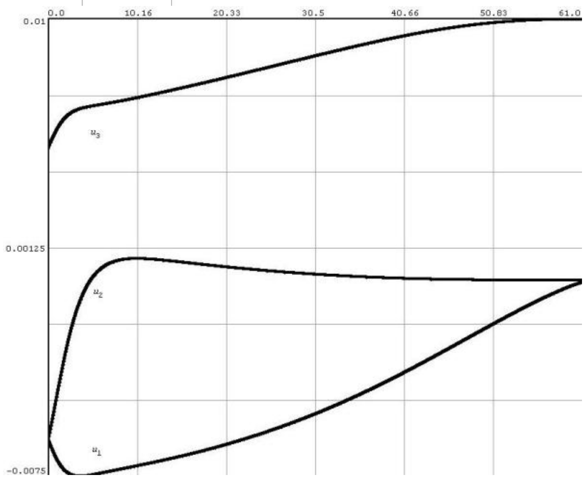




Рис.1. Кутові швидкості

Рис.2. Керування

Введемо додатково у розгляд обмеження на кутові швидкості

$$|\omega_i| \le d\,,\; i = 1,2,3,\; 0 < d < \infty\,. \tag{16}$$

Для тих $t > t_0$ та $i = 1,2,3$, для яких не справджується (16) визначимо

$$w_i(t) = \{\omega(t) \times J\omega(t)\}_i\,,\; i = 1,2,3\,. \tag{17}$$

Тоді керування покладемо

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} v_i, |\omega_i| \le d, \\ w_i, |\omega_i| > d. \end{cases} \tag{18}$$

Зауважимо, що (18) при $\|\omega\| \to 0$ очевидно буде задовольняти обмеженням на керування. Однак, якщо для деякого моменту часу $\bar{t} \ge t_0$ $\tilde{u}(\bar{t}) \notin U$, то замість (17) для відповідних компонент керування необхідно покласти таке значення, яке повністю компенсує вплив зовнішніх сил у відповідній проекції. Такий вибір керування завжди можливий, оскільки за умовою задачі пристрої керування космічним апаратом спроможні утворювати моменти, які перебільшують сумарний момент зовнішніх сил, що діють на апарат.

*2. Задача переорієнтації космічного апарату*. Разом із системою (9) розглянемо систему вигляду []

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)\lambda\,, \tag{19}$$

$$\lambda(0) = \lambda^{(0)}\,, \tag{20}$$

яка визначає орієнтацію космічного апарату у кватерніонах $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$, $\|\lambda\| = 1$. Тут

$$\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^* - \omega_1 & \omega_2^* - \omega_2 & \omega_3^* - \omega_3 \\ \omega_1 - \omega_1^* & 0 & \omega_3 + \omega_3^* & -\omega_2 - \omega_2^* \\ \omega_2 - \omega_2^* & -\omega_3 - \omega_3^* & 0 & \omega_1 + \omega_1^* \\ \omega_3 - \omega_3^* & \omega_2 + \omega_2^* & -\omega_1 - \omega_1^* & 0 \end{pmatrix},$$

$\omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)^T \approx (0,0,0.061)^T$ – орбітальна кутова швидкість. Задача полягає у тому, щоб найшвидшим чином перевести кватерніони $\lambda$ у стан $\lambda(T^*) = (\alpha,0,0,0)^T$, де $\alpha = \pm 1$ і при цьому загасити кутові швидкості відносно орбітальної кутової швидкості, тобто $\omega(T^*) = -\omega^*$. Фізично це означає, що, починаючи з моменту часу $T^*$ обертовий рух стабілізується, причому космічний апарат є нерухомим відносно орбітальної системи.

Для розв'язування цієї задачі також застосуємо метод демпфування. Розглянемо функцію

$$V(t,\omega,\lambda) = 1 - \lambda_0^2 + \int_0^t \left\| \omega(\tau) - \omega^* \right\|^2 d\tau \, . \qquad (21)$$

Знайдемо

$$\frac{d}{dt} V(t,\omega,\lambda) \bigg|_{(9),(19)} = \lambda_0 \Big( (\omega(t) - \omega^*)^T \tilde{\lambda}(t) \Big) + \left\| \omega(t) - \omega^* \right\|^2 , \qquad (22)$$

де $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$. Для найшвидшого спадання функції (22) необхідно, щоб динаміка кутових швидкостей системи (9) змінювалася за напрямком

$$\upsilon(t) = -\frac{\tilde{\lambda}}{\left\| \tilde{\lambda} \right\|} . \qquad (23)$$

Позначимо $c$ – довжину вектора кутових швидкостей $\omega(t)$. Підрахуємо $\hat{c}$ – значення параметру $c$ при якому (22) набуває мінімального значення при умові, що $\omega(t)$ колінеарний до $\upsilon(t)$. З (22) випливає, що параметр $c$ доставляє мінімум виразу

$$\lambda_0 \Big( (c\upsilon - \omega^*)^T \tilde{\lambda} \Big) + \left\| c\upsilon - \omega^* \right\|^2 \to \min_c . \qquad (24)$$

Обчисливши похідну (24) по $c$, отримуємо

$$\hat{c} = \upsilon^T \omega^* - \frac{\lambda_0 \upsilon^T \tilde{\lambda}}{2} = \frac{\lambda_0 \left\| \tilde{\lambda} \right\|}{2} - \frac{\tilde{\lambda}^T \omega^*}{\left\| \tilde{\lambda} \right\|} .$$

Тому оптимальний за демпфуванням (21) закон зміни кутових швидкостей

$$\hat{\omega}(t) = \hat{c}\upsilon(t) = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}^T \omega^*}{\left\|\tilde{\lambda}\right\|^2} - \frac{\lambda_0 \tilde{\lambda}}{2} . \tag{25}$$

Таким чином, для того, щоб розв'язати поставлену задачу необхідно підбирати в кожен момент часу керування $u$ так, щоб мінімізувати нев'язку

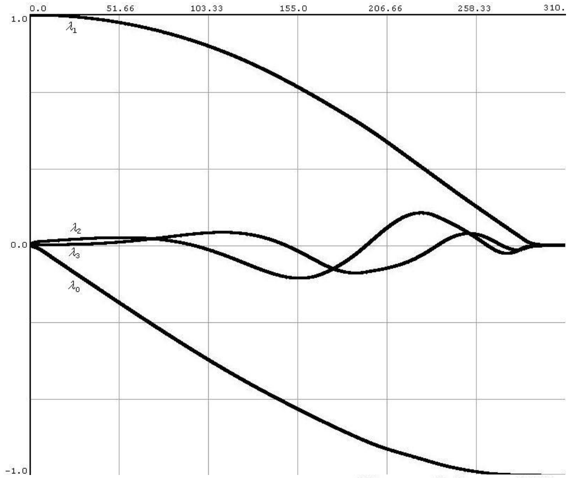
$$\left\| \hat{\omega}(t) + \frac{\lambda_0 \tilde{\lambda}}{2} - \frac{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}^T \omega^*}{\left\|\tilde{\lambda}\right\|^2} \right\| \to \min_{u \in U} . \tag{26}$$

Для інтегрування систем (9), (19) використаємо явну схему Ейлера. Зафіксуємо крок $\Delta t$, тоді для виконання (26) на кроці $k$ чисельного інтегрування покладемо

$$u(t_k) = J \, \frac{\dfrac{\tilde{\lambda}(t_k)\tilde{\lambda}^T(t_k)\omega_3^*}{\left\|\tilde{\lambda}(t_k)\right\|^2} - \dfrac{\lambda_0(t_k)\tilde{\lambda}(t_k)}{2} - \omega(t_k)}{\Delta t} + \omega(t_k) \times J\omega(t_k) ,$$

де $t_k = t_0 + \Delta t \cdot k$ .

При необхідності проекція на допустиму множину керувань здійснюється по аналогії з попереднім методом гасіння кутових швидкостей космічного апарату. Зауважимо, що на $\lambda$ обмеження виконуються автоматично в силу властивостей системи (19). На рис.3,4 представлені відповідно кватерніони та кутові швидкості, обчислені при $\rho = 0.1$, $\lambda(0) = (0{,}1{,}0{,}0)^T$ , обмеженням на кутові швидкості $d = 0.6$ . Тут $T^* = 310$ секунд.



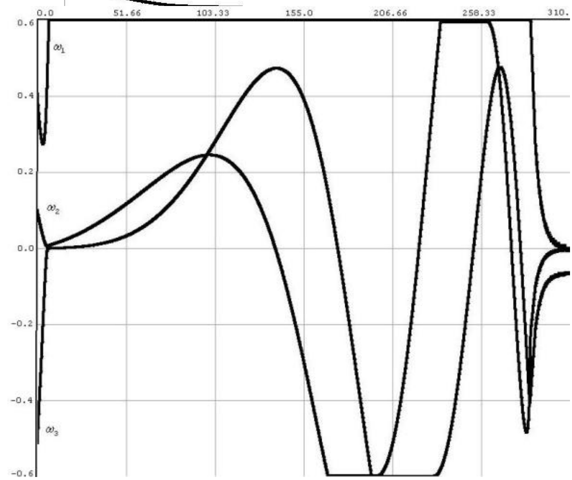




Рис.3. Кватерніони

Рис.4. Кутові швидкості