РОЗДІЛ 2
МЕТОД КРОТОВА

МЕТОД ФУНКЦІЙ КРОТОВА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.

1. Постановка задачі оптимального керування. Нехай $X \subseteq R^n$ – фазовий простір, $U \subseteq R^r$ – простір керувань, $V \subseteq X \times U \times [t_0, T]$. Перетин V площиною $t = \bar{t}$ будемо позначати $V(\bar{t})$, проекцію $V(t)$ на X через $V_X(t)$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \qquad (1)$$

де $u(t)$ – кусково-неперервна вектор функція з U, $x(t) \in X$, $f(x,u,t)$– вектор функція розмірності n, неперервна за сукупністю змінних разом з частинними похідними за x та u. Множину пар $v = (x(t), u(t)) \in V(t), t \in [t_0, T]$, для яких існує інтеграл

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt$$

і які задовільняють (1), будемо називати допустимим класом і позначати D. Нехай на D заданий функціонал

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x_0, x_1). \qquad (2)$$

Тут $\Phi(x_0, x_1)$-неперервна функція, точки $x_0 = x(t_0), x_1 = x(T)$ є нефіксованими. Задача оптимального керування системою (1) з функціоналом (2) полягає в тому, щоб знайти послідовність $\{v_S\}$, $v_S = (x_S, u_S) \in D$, таку, що

$$I(v_S) \to \inf_D I, \; s \to \infty. \qquad (3)$$

Задача 14. Якому функціональному класу буде належати $x(t)$, що є інтегральною кривою системи (1) при вказаних вище умовах на праву частину (1) та функцію керування ?

2. Основні теореми. Нехай $\varphi(x,t)$ неперервно-диференційована скалярна функція за винятком, можливо, скінченної кількості точок $(x,t) \in X \times [t_0, T]$. Розглянемо функцію Гамільтона

$$H(x,u,p,t) = p^T f(x,u,t) - f_0(x,u,t), \qquad (4)$$

де $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$. Введемо функції

$$R(x,u,t)=H(x,u,grad_x\varphi,t)+\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{5}$$

$$G(x_0,x_1)=\Phi(x_0,x_1)+\varphi(x_1,T)-\varphi(x_0,t_0). \tag{6}$$

Позначимо

$$\mu(t)=\sup_{(x,u)\in V(t)} R(x,u,t),\ m=\inf_{(x_0,x_1)\in V_x(t_0)\times V_x(T)} G(x_0,x_1). \tag{7}$$

Тут $grad_x^T\varphi=(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},...,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n})$, $V_x(t)$ – проекція множини $V(t)$ на множину X. Відносно φ будемо також припускати, що $R(x,u,t)$ визначена і неперервна, а $\mu(t)$ – кусково неперервна, $t\in[t_0,T]$. Такий клас функцій φ позначимо Φ.

Зауваження. Якщо $V(t)$ – компакти, кусково неперервні за Хаусдорфом, $f(x,u,t)$ – неперервна за сукупністю змінних, то функція $\mu(t)$ буде кусково неперервною.

Задача 15. Довести зауваження.

Теорема 1. Нехай існує функція $\varphi\in\Phi$ і послідовність $\{v_s\}\subset D$, $v_s=(x_s,u_s), s=1,2,...$, така, що

$$\int_{t_0}^{T} R(x_s,u_s,t)dt\to\int_{t_0}^{T}\mu(t)dt,\ s\to\infty, \tag{8}$$

$$G(x_{0s},x_{1s})\to m>-\infty,\ s\to\infty. \tag{9}$$

Тоді ця послідовність мінімізує функціонал I на D. І навпаки, будь-яка послідовність, що мінімізує I на D, задовольняє умовам (8), (9).

Доведення. Позначимо

$$L(v)=G(x_0,x_1)-\int_{t_0}^{T}R(x,u,t)dt,\ l=m-\int_{t_0}^{T}\mu(t)dt.$$

Для всіх $v\in D$ має місце нерівність $L(v)\ge l$, але $L(v)=I(v)$, $\varphi\in\Phi$, $v\in D$. Дійсно. Нехай $(x(t),u(t))\in D$. Тоді

$$R(x,u,t)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+grad_X^T\varphi(x,t)\cdot f(x,u,t)-f_0(x,u,t)=$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+grad_X^T\varphi(x,t)\cdot\dot{x}-f_0(x,u,t)=\frac{d}{dt}\varphi(x(t),t)-f_0(x,u,t).$$

Звідси

$$L(v)=G_0(x_0,x_1)-\int_{t_0}^{T}\frac{d}{dt}\varphi(x(t),t)dt+\int_{t_0}^{T}f_0(x,u,t)dt=$$

$$\Phi(x_0,x_1)+\int_{t_0}^{T}f_0(x,u,t)dt=I(v)$$

Оскільки $L(v_S)\to l$, $s\to+\infty$, то $l=\inf_D I$.

Доведемо останнє речення теореми. Припустимо, що v_S - послідовність, що мінімізує I на D, $\lim_{s\to\infty}L(v_S)=l$, але одна з умов (8), (9) не виконується. Тоді знайдеться $\varepsilon>0$, таке, що

$$G(x_{0s},x_{1s})\geq m+\varepsilon \quad \text{або} \quad \int_{t_0}^{T}R(x_S,u_S,t)dt\leq\int_{t_0}^{T}\mu(t)dt-\varepsilon,\quad s=1,2,...,$$

або ці нерівності виконуються одночасно. Але тоді $L(v_S)\geq l+\varepsilon$, що суперечить умові $\underset{S\to+\infty}{L(v_S)\to l}$. Теорему доведено.

Зауваження. Умова (8) буде виконуватись, якщо $R(x_S,u_S,t)\geq N>-\infty$ при всіх $t\in[t_0,T]$, $s=1,2,...$ і $R(x_S,u_S,t)\xrightarrow{\sigma}\mu(t),\ t\in[t_0,T]$ (σ – міра Лебега). Дійсно, за означенням μ: $|R|\leq max\{|N|,sup|\mu(t)|\}$, $t\in[t_0,T]$. За теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла виконується (8).

Означення. Елемент $\bar{v}\in D$,такий, що $I(\bar{v})=\inf_D I$ називається мінімаллю (оптимальним елементом) на D.

Підставивши в доведенні теореми 1 послідовність вигляду $x_S(t)=\bar{x}(t)$, $u_S(t)=\bar{u}(t)$ отримаємо наступне твердження.

Теорема 2. Нехай функція $\varphi\in\Phi$ і $\bar{v}=(\bar{x}(t),\bar{u}(t))\in D$ задовольняють умовам

$$R(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t)=\mu(t) \text{ майже скрізь, } t\in[t_0,T], \tag{10}$$

$$G(x_0,x_1)=m. \tag{11}$$

Тоді $\bar{v}$ є мініміаль функціоналу I на D. І навпаки, будь-яка мінімаль функціоналу I задовольняє умовам (10), (11).

Означення. Функція $\varphi(x,t)$ в теоремах 1, 2 називається *функцією Кротова.*

Якщо $\varphi(x,t)$ є функцією Кротова і $\alpha(t)$ – довільна абсолютно неперервна на $t\in[t_0,T]$ функція, то з умов теорем 1, 2 випливає, що функція $\varphi_1(x,t)=\varphi(x,t)+\alpha(t)$ є функцією Кротова.

3. Метод Кротова для задачі оптимального керування з фіксованим лівим кінцем. Припустимо, що в задачі (1)-(3) точка x_0 є фіксованою. Позначимо

$$\Phi(x_0,x_1)=\Phi(x_1),\qquad G(x_1)=\Phi(x_1)+\varphi(T,x_1),$$

$$m=\inf_{x_1\in V_x(T)} G(x_1).$$

У цьому випадку, як легко переконатись, теореми 1, 2 залишаються справедливими.

Приклад. Розглянемо задачу оптимального керування: мінімізувати функціонал

$$I(u)=\int_{t_0}^{T}u^2(s)ds+x_1^2$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt}=u,\ x(t_0)=x_0,\ x\in R^1,\ u\in R^1.$$

Застосуємо для розв’язування цієї задачі метод функцій Кротова. Використавши позначення до теорем 1, 2, маємо

$$R(x,u,t)=-u^2+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ G(x_1)=\varphi(x_1,T)+x_1^2.$$

За теоремою 2

$$\frac{\partial R}{\partial u}=-2u+\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi(x_1,T)}{\partial x_1}+2x_1=0.$$

Виберемо функцію Кротова у вигляді $\varphi(x,t)=c(t)x^2$, де $c(t)$- неперервно диференційована функція. Тоді оптимальне керування $u_0(t)=c(t)x(t)$ і $c^2(t)x+c'(t)x=0$ при умові $c(T)=-1$. Звідси

$$c(t)=\frac{1}{t-T-1}\ \text{і}\ u_0(t)=\frac{x(t)}{t-T-1}.$$

Задача 16. За методом Кротова розв’язати задачу оптимального керування

$$I(u)=\int_0^T u^2(s)ds+x^2(T)\to\min_u$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt}=a(t)u+b(t),\ x(0)=x_0,$$

де $x\in R^1$, $u\in R^1$, $a(t),\ b(t)$-задані неперервні функції.

Між функцією Кротова і функцією Беллмана існує безпосередній зв'язок. Так, у формулюванні теорем 1, 2 візьмемо замість функції $\varphi(x,t)$ функцію

$\varphi_1(x,t)=\varphi(x,t)+\alpha(t)$, де $\alpha(t)=-\int_T^t \mu(\tau)d\tau-m$. Позначимо

$$R_1(x,u,t)=H(x,u,grad_x\varphi_1,t)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=R(x,u,t)-\mu(t),$$

$$G_1(x_1)=\Phi(x_1)+\varphi_1(x_1,T)=G(x_1)-m.$$

Оскільки

$$\sup_{(x,u)\in V(t)} R_1(x,u,t)=0,\quad \inf_{x_1\in V_x(T)} G_1(x_1)=0,$$

то , без обмеження загальності, у теоремах 1, 2 для випадку динамічних систем з фіксованим лівим кінцем можемо прийняти $\mu(t)=0$, $m=0$. Враховуючи це зауваження, з теорем 1, 2 отримаємо

$$R(x,u,t)=grad_x^T\varphi(x,t)f(x,u,t)-f_0(x,u,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\le 0, \tag{12}$$

$$G(x)=\Phi(x)+\varphi(x,T)\ge 0, \tag{13}$$

де $(x,u,t)\in V$. При цьому нерівності (12), (13) перетворюються у рівності а) в граничному переході $s\to\infty$ при $x=x_S(t)$, $u=u_S(t)$ (див. теорему 1), б) при $x=\bar{x}(t)$, $u=\bar{u}(t)$ (згідно теореми 2). Позначимо $a(x,t)=-\varphi(x,t)$. Тоді з співвідношень (12), (13) еквівалентні

$$grad_x^T a(x,t)f(x,u,t)+f_0(x,u,t)+\frac{\partial a(x,t)}{\partial t}\ge 0, \tag{14}$$

$$G(x)=\Phi(x)-a(x,T)\ge 0. \tag{15}$$

Отже, функція Кротова є функцією Беллмана $b(x,t)$ (з точністю до знаку), так як диференціальне рівняння Беллмана

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}+\min_u\left\{grad_x^T b(x,t)f(x,u,t)+f_0(x,u,t)\right\}=0,$$

$$b(x,T)=\Phi(x),$$

є частинним випадком (14), (15) [2].

Література.

1. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. -М.: Наука, 1973. -446с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980. -520 с.
3. Кротов В.Ф. Методы решений вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. Часть I//Автоматика и телемеханика. -1962. -Т. 23,№12. -С.1571-1583.
4. Кротов В.Ф. Методы решений вариационных задач. Часть II//Автоматика и телемеханика. -1963. -Т. 24, №5. -С.581-598.
5. Кротов В.Ф. Приближенный синтез оптимального управления//Автоматика и телемеханика. -1964. -Т. 25, № 11. -С. 1521-1527.

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ КРОТОВА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1. Задача з лінійністю. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$I=\int_0^T(p_0(x,t)+q_0(x,t)u)dt \qquad (1)$$

на розв'язках рівняння

$$\frac{dx}{dt}=p\ \ (x,t)+q\ \ (x,t)u \qquad (2)$$

Тут $x(t)$, $u(t)$- скалярні функції, $t\in[0,T]$, $x(0)=x_0$, $x(T)=x_1$, $p(x,t),q(x,t),p_0(x,t),q_0(x,t)$ - задані неперервні функції, $q(x,t)\neq 0$.

Особливістю задачі (1), (2) є *лінійна залежність* від керування правої частини рівняння (2) та підінтегральної функції в (1). Застосуємо метод функцій Кротова для розв'язування задачі (1), (2). Запишемо функцію R

$$R(x,u,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(p(x,t)+q(x,t)u)-p_0(x,t)-q_0(x,t)u \qquad (3).$$

Тут $\varphi(x,t)$ - функція Котова. Потрібно підібрати φ таким чином, щоб процес $(x_*(t),u_*(t))$, що максимізує співвідношення (3), був оптимальним. Задамо функцію Кротова так, щоб функція $R(x,u,t)$ не залежала від u. З (3) видно, що це означає рівність нулю коефіцієнта при u в (3). Тобто,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} q(x,t) - q_0(x,t) = 0 \tag{4}$$

Тоді $R(x,u,t) = R(x,t)$. Для кожного t знайдемо $\max\limits_x R(x,t)$ і отримаємо деяку траєкторію $x_*(t)$. Якщо ця траєкторія задовольняє умовам на правому та лівому кінцях, а саме $x_*(T) = x_1$, $x_*(0) = x_0$, то вона є згідно принципу Кротова оптимальною. Тоді з (2) знаходимо оптимальне керування

$$u_*(t) = \frac{\dfrac{dx_*(t)}{dt} - p(x_*(t),t)}{q(x_*(t),t)}. \tag{5}$$

Знайдемо з умови (4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q_0(x,t)}{q(x,t)}$$

Звідси

$$\varphi(x,t) = \int_{x_0}^{x} \frac{q_0(\xi,t)}{q(\xi,t)} d\xi + c(t) \tag{6}$$

де x_0 – довільне число, $c(t)$ - довільна функція. З (6) випливає

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_0(\xi,t)}{q(\xi,t)}\right) d\xi + c'(t) \tag{7}$$

Підставляємо (7) в (3) і отримаємо

$$R(x,t) = \frac{q_0(x,t)p(x,t) - p_0(x,t)q(x,t)}{q(x,t)} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q_0(\xi,t)}{q(\xi,t)}\right) d\xi + c'(t) \tag{8}$$

Оскільки значення $x_*(t)$, що максимізує функцію $R(x,t)$ не залежить від $c'(t)$, то можемо покласти $c(t) = 0$. Необхідною умовою максимуму функції $R(x,t)$ за змінною x є $\dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$ при $x = x_*(t)$, таким чином з (8) випливає

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_0(x,t)p(x,t) - p_0(x,t)q(x,t)}{q(x,t)} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q_0(x,t)}{q(x,t)} \right) = 0. \tag{9}$$

Рівність (9) можна використати для знаходження $x_*(t)$. Припустимо, що ця траєкторія знайдена (рис. 1).

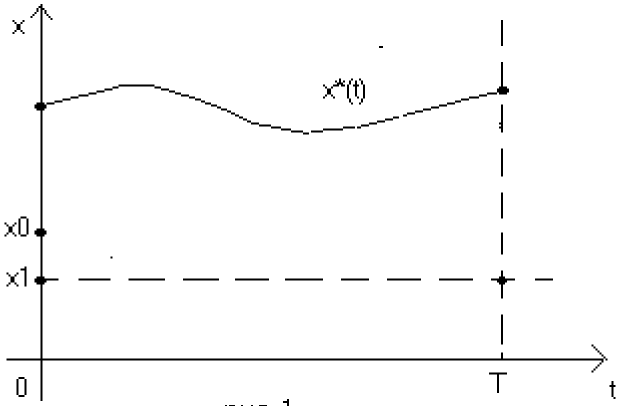

рис. 1

В загальному випадку траєкторія $x_*(t)$ не є допустимою, тобто не задовольняє умовам на лівому і правому краях. Тоді потрібно побудувати мінімізуючи послідовність. Для цього розглянемо довільну послідовність моментів часу $\tau_s \to 0, \tau_s' \to T$ (рис. 2)

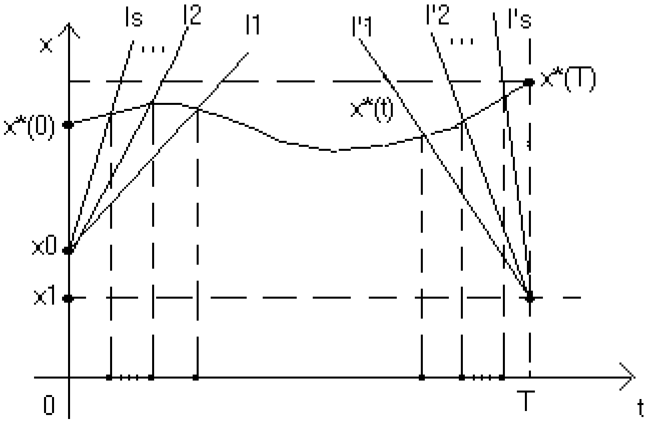

рис. 2

З’єднаємо початкову точку x_0 прямою l_1 з точкою $x_*(\tau_1)$, точку x_0 з точкою $x_*(\tau_2)$ – прямою l_2 і т. д. Те ж саме здійснюємо з кінцевою точкою x_1 , з’єднавши її прямою l_1' з точкою $x_*(\tau_1')$, прямою l_2' - з точкою $x_*(\tau_2')$ і т. д. Таким чином, отримаємо послідовність кривих $\hat{x}_s(t)$, які мають наступний вигляд

$$\hat{x}_s(t)=\begin{cases} l_s, t\in[0,\tau_s), \\ x_*(t), t\in[\tau_s,\tau_s'), \\ l_s', t\in[\tau_s',T]. \end{cases}$$

Прямі l_s і l_s' задаються рівняннями

$$x = x_0 + \frac{x_*(\tau_s) - x_0}{\tau_s} t,$$

$$x = x_1 + \frac{x_*(\tau'_s) - x_1}{\tau'_s}(t - T).$$

Отриману криву $\hat{x}_s(t)$ розглянемо як траєкторію рівняння (2). Керування $\hat{u}_s(t)$, що реалізує траєкторію $\hat{x}_s(t)$ знайдемо з (5). Таким чином, отримуємо послідовність $(\hat{x}_s(t),\hat{u}_s(t))$, причому $\hat{x}_s(t)$ є допустимим процесом. Побудована послідовність є мінімізуючою і, тому, є розв’язком задачі (1), (2). Справді

$$\int_0^T R(\hat{x}_s(t),t)dt = \int_0^{\tau_s} R(\hat{x}_s(t),t)dt + \int_{\tau_s}^{\tau'_s} R(x_*(t),t)dt + \int_{\tau'_s}^{T} R(\hat{x}_s(t),t)dt \to \int_0^T R(x_*(t),t$$

при $s\to\infty$

Це випливає з того, що $\tau_s \to 0, \tau_s' \to T$ при $s\to\infty$. Отже, розв’язок цієї задачі обґрунтовується принципом оптимальності Кротова.

2. Приклад. Знайдемо динамічне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -x + xu$$

при умовах

$$x(0) = x_0,\ x(T) = x_1.$$

Необхідно мінімізувати функціонал

$$I = \int_0^T ((t+1)x^2 - tx(1-u))dt.$$

Запишемо функцію R для цієї задачі

$$R(x,u,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-x+xu)-(t+1)x^2=tx(1-u),$$

де φ - функція Кротова. Повторюючи хід розв'язування задачі (1), (2), вибираємо $R(x,u,t)$ так, щоб вона не залежала від u, тобто

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x-tx=0 .$$

Звідси

$$\varphi(x,t)=\int\limits_{x_0}^{x}td\xi+c(t).$$

Далі $c(t)=0$ і отримуємо $\varphi(x,t)=t(x-x_0)$. Таким чином,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=x-x_0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=t$$

і при $x_0=0$ маємо

$$R(x,t)=x-tx-(t+1)x^2+tx=x-x^2(t+1).$$

Знаходимо $\dfrac{\partial R}{\partial x}=1-2x(t+1)=0$ і звідси $x_*(t)=\dfrac{1}{2(t+1)}$.

У даному випадку функція $R(x,t)$ досягає максимуму, так як

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=-t\le 0,\ t\ge 0.$$

З того, що $u=\dfrac{\frac{dx}{dt}+x}{x}$ отримуємо $u_*(t)=\dfrac{t}{t+1}$.

Пара

$$\left(x_*(t),u_*(t)\right)=\left(\frac{1}{2(t+1)},\frac{t}{t+1}\right)$$

є оптимальним розв'язком лише у тому випадку, якщо $x_*(0)=\dfrac{1}{2}=x_0$, $x_*(T)=\dfrac{1}{2(T+1)}=x_1$. Якщо ж це не виконується, то будуємо послідовність $\tau_s\to 0,\tau_s'\to T$ при $s\to\infty$

$$\hat{x}_s(t)=\begin{cases} x_0+\dfrac{1-2(\tau_s+1)x_0}{2\tau_s(\tau_s+1)},\ t\in[0,\tau_s), \\ \dfrac{1}{1(t+1)},\ t\in[\tau_s,\tau_s'), \\ x_1+\dfrac{1-2(\tau_s'+1)x_1}{2(\tau_s'-T)(\tau_s'+1)},\ t\in[\tau',T], \end{cases}$$

$$\hat{u}_s(t)=\frac{a(\tau_s)}{x_0+a(\tau_s)t}+1,\ a(\tau_s)=\frac{1-2\tau_s x_0}{\tau_s+1}$$

і послідовність $(\hat{x}_s(t),\hat{u}_s(t))$ є мінімізуючою.

Задача 17. Розв'язати наступну задачу оптимального керування методом Кротова

$$I=\int_0^T(8(t+1)x^2-8tx^2u)dt\to\min$$

при умовах $\dfrac{dx}{dt}=x+2+xu$, $x(0)=3$, $x(4)=8$, $t\in[0,4]$.

3. Приклад ковзного режиму. Розглянемо задачу оптимального керування: мінімізувати функціонал

$$I=\int_{t_0}^T f_0(x,u,t)dt$$

при умовах $\dot{x}=u$, $x(t_0)=x_0$, $x(T)=x_1$ - задані точки, $f_0(x,u,t)=g_0(x,u,t)+h_0(x,t)u$, $g(x,u,t)$ - функція, обмежена по u при будь-яких фіксованих x та t.

Маємо :

$$R(x,u,t)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-h_0(x,t)\right)u-g_0(x,u,t).$$

Функцію φ шукаємо з рівності

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=h_0(x,t).$$

Тоді $\varphi(x,t)=\int_p^x h_0(\xi,t)d\xi+c(t)$ і $\dfrac{d\varphi}{dt}=\int_p^x\dfrac{\partial h_0(\xi,t)}{\partial t}d\xi+c'(t)$.

Вибираємо $c\equiv 0$. Звідси

$$R = -g_0(x,u,t) + \int_p^x \frac{\partial h_0(\xi,t)}{\partial t} d\xi .$$

Нехай існує пара $(\bar{x}(t),\bar{u}(t))$ така, що $R(\bar{x},\bar{u},t) \equiv \mu(t)$ де $\bar{u}(t)$ - кусково-неперервна, $\dot{x}(t)$ - кусково-гладка. Задамо ціле $s > 0$ і поставимо йому у відповідність пару функцій $x_S(t), u_S(t)$, яка будується так:

1) Проводиться розбиття відрізка $[t_0, T_1]$, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_S < T$, яке містить всі точки розриву похідної $\bar{x}(s)$.

2) На кожному проміжку $\lfloor \tau_p, \tau_{p+1} \rfloor, p = 1,2,\ldots,s-1$ функція $x_S(t)$ задається формулою

$$x_S(t) = \begin{cases} \bar{x}(\tau_p + 0) + \bar{u}(\tau_p + 0)(t - \tau_p), & \text{при } \tau_p \le t < \tau'_p \\ \bar{x}(\tau_p + 0) + \dfrac{t - \tau_{p+1}}{\tau_{p+1} - \tau'_p}\left[\bar{x}(\tau_{p+1} + 0) - \bar{x}(\tau_p + 0) - \bar{u}(\tau_p + 0)(\tau'_p - \tau_p)\right], & \text{пр} \end{cases}$$

,

де $\tau'_p = \tau'_{p+1} + \dfrac{1}{s^2}\left(\tau_{p+1} - \tau_p\right).$

3) На проміжку $[t_0, \tau_1)$ та $[\tau_S, T]$

$$x_S(t) = x_0 + \frac{\bar{x}(\tau_1) - x_0}{\tau_1 - t_0}(t - t_0), \quad \text{при } t_0 \le t < \tau_1,$$

$$x_S(t) = x_1 + \frac{\bar{x}(\tau_S) - x_1}{\tau_S - T}(t - T_1), \quad \text{при } \tau_S \le t \le T.$$

Керування $u_S(t) = \dot{x}(t)$. Графічно функція $x_S(t)$ зображена на рисунку 3.

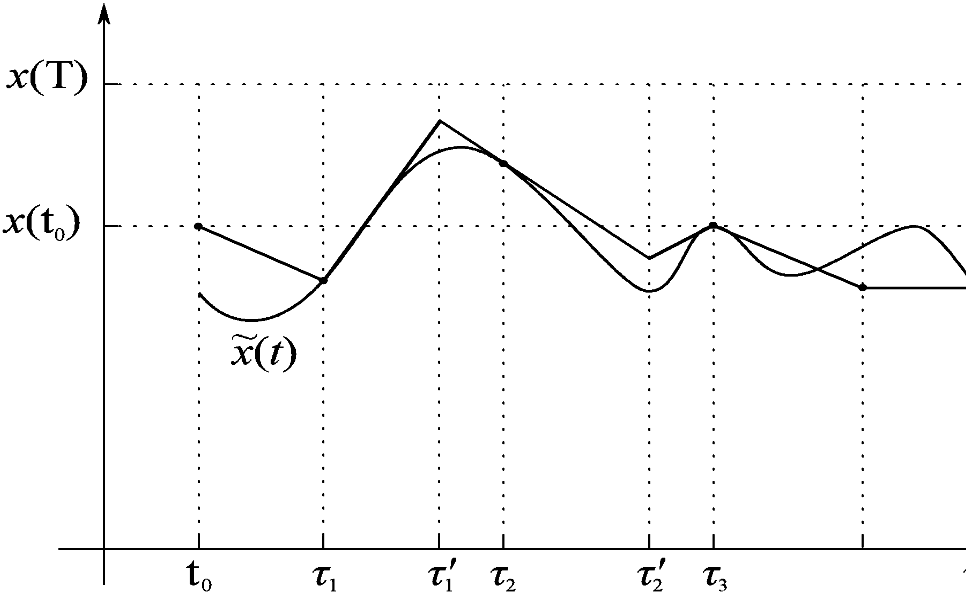

Рис. 3.

Нехай

$\Delta_S = max(\tau_1 - t_0, \tau_2 - \tau_1, \ldots, \tau_S - \tau_{S-1}, T - \tau_S) \to 0$.

Очевидно, $\bar{x}_S(t) \xrightarrow{m} \bar{x}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $(x_S(t), u_S(t)) \in D$. Крім цього, $u_S(t) \xrightarrow{m} \bar{u}(t)$, в силу побудови послідовності $x_S(t)$. Тому

$R(x_S(t), u_S(t), t) \xrightarrow{m} R(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \equiv \mu(t)$.

Рівномірна обмеженість функції R випливає з конструкції $x_S(t)$ та обмеженості g_0 по u. Тому за теоремою 2 послідовність $(x_S(t), u_S(t))$ є мінімізуючою, $x_S(t)$ сходиться до $\bar{x}(t)$. Але $u_S(t) = \dot{x}_S(t)$ *не сходиться* до $\dot{x}(t)$, $\bar{u}(t) \neq \dot{\bar{x}}(t)$. При цьому в околах інтервалів, де $\dot{x}_S(t)$ є близькою до $\bar{u}(t)$, при $s \to \infty$, мають місце імпульси. Таке явище називається *ковзним режимом.*

Література.

1. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. - М.: Наука, 1973. -446с.

2. Основы теории оптимального управления /под ред. Кротова В.Ф. М: “Высшая школа”, 1990. – 430 с.

РОЗДІЛ 3
ПРОБЛЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

СТАБІЛІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

1. Постановка задачі. Розглянемо систему виду

$$\frac{dx}{dt} = g(x,u,t), \tag{1}$$

де x – n - вимірний вектор фазових координат, u – m - вимірний вектор керування, $g(x,u,t)$ - вектор-функція розмірності n, що є неперервною за сукупністю змінних. Припустимо, що задано режим $\hat{x}(t)$ $t \geq t_0$, який називається *програмним* і задано початкові умови $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$. Програмний режим реалізується системою (1) при керуванні $\hat{u}(t)$, тобто

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dx} = g(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t), \; x(t_0) = \hat{x}(t_0).$$

Керування $\hat{u}(t)$ називається *програмним.* Нехай в початковий момент $t = t_0$ вектор стану системи (1) отримує деяке збурення

$$x(t_o) = \hat{x}(t_0) + \Delta x(t_0).$$

Подамо для збуреного руху вектор стану системи у вигляді

$$x(t) = \hat{x}(t) + \Delta x(t).$$

Тоді $\frac{d\Delta x(t)}{dt} = g(\hat{x}(t) + \Delta x(t),\hat{u}(t),t) - g(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)$. Перепишемо останнє співвідношення у вигляді

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \varphi(\Delta x(t),\hat{u}(t),t), \tag{2}$$

де $\varphi(\Delta x(t),\hat{u}(t),t) = g(\hat{x}(t) + \Delta x(t),\hat{u}(t),t) - g(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t)$. Стійкість за Ляпуновим програмного руху системи (1) еквівалентна стійкості нульового розв'язку $\Delta x(t) = 0$ системи (2). Візьмемо додаткове керування $\Delta u(t) = \hat{u}(t) + \Delta u(\Delta x(t),t)$. Позначимо

$$f(\Delta x(t),\Delta u(\Delta x(t),t),t) = \varphi(\Delta x(t),\hat{u}(t) + \Delta u(\Delta x(t),t),t).$$

Задача *стабілізації програмного режиму* полягає у тому, щоб нульовий розв'язок системи

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(\Delta x(t),\Delta u(t),t) \tag{3}$$

був стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим.

2. Стабілізація стаціонарних систем. Припустимо, що система (3) є лінійна, тобто

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(\Delta x(t), t). \quad (4)$$

Тут $A(t)$ – $n \times n$- неперервна матриця, $B(t)$ – $n \times m$- неперервна матриця. Для зручності зробимо перепозначення $\Delta x(t) = y(t)$, $\Delta u(\Delta x(t), t) = v(y(t), t)$. Тоді система (4) має вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + B(t)v(y(t), t). \quad (5)$$

Припустимо, що матриця $A(t) = A$, $B(t) = B$, тобто, ці матриці є постійні. Задача стабілізації програмного руху може розглядатись в даному випадку як задача побудови матриці C розмірності $m \times n$, такої, що $v(y, t) = Cy$. Тоді система (5) матиме вигляд

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A + BC)y. \quad (6)$$

Запишемо для (6) характеристичний многочлен

$$p(\lambda) = \det(A + BC - \lambda I)$$

і характеристичне рівняння $p(\lambda) = 0$, корені цього рівняння λ_i, $i = 1,2,...,n$. Тому елементи матриці C потрібно вибрати з умови $\operatorname{Re}\lambda_i(C) < 0$, $i = 1,2,...,n$. Це забезпечить асимптотичну стійкість системи (6). Якщо

$$p(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n, \; p_0 > 0,$$

то будують матрицю Гурвіца

$$G(C) = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{bmatrix}, \; p_i = 0, \; i > n.$$

Критерій Гурвіца полягає у тому, що корені характеристичного рівняння $\operatorname{Re}\lambda_i(C) < 0$, $i = 1,2,...,n$, тоді і тільки тоді, коли головні мінори $\Delta_i(C)$ матриці $G(C)$ є додатними, $i = 1,2,...,n$. Таким чином, щоб побудувати регулятор, що розв'язує задачу стабілізації, потрібно побудувати матрицю

Гурвіца $G(C)$ і підібрати елементи матриці C так, щоб $\Delta_i(C) > 0$, $i = 1,2,...,n$.

Приклад. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 3-го порядку

$$y''' - 2y'' + 3y' - 2y = u. \tag{7}$$

Побудуємо регулятор u, який доставляє асимптотичну стійкість нульовому розв'язку цього рівняння. Регулятор виберемо у вигляді

$$u = ay'' + by' + cy. \tag{8}$$

Тоді з (7) отримаємо

$$y''' - (2+a)y'' + (3-b)y' - (2+c)y = 0. \tag{9}$$

Запишемо для (9) матрицю Гурвіца

$$G(a,b,c) = \begin{pmatrix} -(2+a) & 1 & 0 \\ -(2+c) & (3-b) & -(2+a) \\ 0 & 0 & -(2+c) \end{pmatrix}.$$

Підберемо параметри a,b,c згідно критерію Гурвіца так, щоб

$$\Delta_1 = -(2+a) > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -(2+a) & 1 \\ -(2+c) & 3-b \end{vmatrix} > 0,\ \det G(a,b,c) > 0.$$

Отже, $a < -2$, $\Delta_3 = -\Delta_2(2+c) > 0$. Тому вибираємо $c < -2$. Мінор

$$\Delta_2 = -(2+a)(3-b) + (2+c) > 0,$$

якщо $3 - b > \dfrac{2+c}{2+a}$ при умові, що $a < -2$. Тому $b < -\dfrac{2+c}{2+a} + 3$. Отже отримали наступні умови

$$a < -2,\ b < -\frac{2+c}{2+a} + 3,\ c < -2.$$

Наприклад, можемо взяти $a = -3$, $b = 1$, $c = -3$. Таким чином, регулятор (8) має вигляд

$$u = -3y'' + y' - 3y.$$

Слід зауважити, що при $u = 0$ нульовий розв'язок (7) не є стійким. Справді, характеристичний многочлен (7) має вигляд

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

і $\lambda = \pm 1$ є коренем характеристичного рівняння.

Задача 19. Побудувати регулятор для рівняння $y''' + 6y'' - 2y' - 5y = u$.

Припустимо, що в системі (5) $A(t) = A$, $B(t) = b \in R^n$ і функція керування v є скалярною. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Якщо $\det(b, Ab, ..., A^{n-1}b) \neq 0$, то існує функція керування $u = c^T y$, $c \in R^n$ при якому система $\frac{dy}{dt} = (A + bc^T)y$ має наперед задані корені характеристичного рівняння.

3. Стабілізація на основі прямого методу Ляпунова. Розглянемо систему з керуванням

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t) + G(x,t)u\,. \tag{10}$$

Тут $x \in R^n$ - вектор фазових координат, $F(x,t)$ - n- вимірна вектор-функція, $G(x,t)$ - $n \times m$ матриця з неперервними компонентами, u - m- вимірний вектор керування, $m \leq n$. Керування u вибирається у класі з оберненим зв'язком, $F(0,t) = 0$, $u^*(0,t) = 0$, $t \geq 0$.

Згідно з прямим методом Ляпунова, будь-яке керування u^* з оберненим зв'язком, яке задовольняє умові

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + grad_x^T V(x,t)(F(x,t) + G(x,t)u^*(x,t)) = -W(x,t) \tag{11}$$

є стабілізуючим законом керування. Тут $V(x,t)$, $W(x,t)$- додатновизначені функції, при цьому $V(x,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю. Отже, в рамках метода функції Ляпунова розв'язок задачі стабілізації зводиться до побудови множини керувань з оберненим зв'язком, що забезпечують виконання співвідношення (11). Таким чином,

$$[G^T(x,t)grad_x V(x,t)]^T u^*(x,t) =$$

$$-W(x,t) - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} - grad_x^T V(x,t)F(x,t)\,. \tag{12}$$

Подамо функцію керування у вигляді

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)\,. \tag{13}$$

Керування $u_2(x,t)$ подамо наступним способом

$$u_2(x,t) = P(x,t)G^T(x,t)grad_x V(x,t)\,. \tag{14}$$

Тут матриця $P(x,t)$ є довільна антисиметрична, тобто, $P^T = -P$. Таким чином,

$$G^T(x,t)grad_x V(x,t)u_2(x,t) = 0\,.$$

Керування $u_1(x,t)$ вибирається у вигляді

$$u_1(x,t) = -\lambda G^T(x,t)\frac{\partial V}{\partial x}\,, \tag{15}$$

де $\lambda(x,t)$ - скалярна функція, яку потрібно визначити. Підставимо (13)-(16) у (13). Отримуємо

$$\lambda(x,t)=\frac{W(x,t)+\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t}+grad_x^T V(x,t)F(x,t)}{\left\|G^T(x,t)\dfrac{\partial V}{\partial x}\right\|^2}. \tag{16}$$

Отже, отримали стабілізуюче керування у формі (13).

4. Приклад. Розглянемо задачу про гасіння кутових швидкостей твердого тіла. Математична модель має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\omega}{dt}=-J^{-1}(\omega\times J\omega)+J^{-1}u \tag{17}$$

де $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T$ - вектор кутових швидкостей, J - тензор інерції, який є додатно визначеною симетричною матрицею розмірності 3×3, $\times$ - знак векторного добутку, $u=(u_1,u_2,u_3)^T$ - вектор керування (вектор моментів).

Функцію Ляпунова виберемо у вигляді $V(\omega)=\|J\omega\|^2$. Похідна $gradV=2J^TJ\omega$. Тоді керування u_1, u_2 згідно (14), (15) вибирається у вигляді

$u_1=-2\lambda J\omega$, $u_2=P(\omega,t)J\omega$

і стабілізуюче керування

$$u(\omega,t)=u_1+u_2=2(P(\omega,t)-\lambda I_3)J\omega. \tag{18}$$

Тут I_3 - одинична матриця розмірності 3×3, $\lambda>0$ - довільна константа,

$$P(\omega,t)=\begin{pmatrix}0 & p_{12} & p_{13}\\ -p_{12} & 0 & p_{23}\\ -p_{13} & -p_{23} & 0\end{pmatrix},$$

а $p_{ij}=p_{ij}(\omega,t)$ - довільні функції, $i,j=1,2,3$.

Покажемо, що згідно (12) можна підібрати функцію $W(\omega)$, яка є додатновизначеною. Справді, з (2) випливає, що

$$W(\omega)=-grad^TV(\omega)(J^{-1}\omega\times J\omega-2J^{-1}(-\lambda I_3+P(\omega,t))J^{-1}\omega)=$$
$$-2\omega^T(J^{-1}\omega\times J\omega)+4\lambda\omega^T(J^{-1})^2\omega+4\omega^TJ^{-1}P(\omega,t)J^{-1}\omega.$$

Доданок $4\omega^TJ^{-1}P(\omega,t)J^{-1}\omega=0$, так як матриця P є кососиметрична. Тоді

$$W(\omega) = -2\omega^T J^T J J^{-1} \omega \times J\omega - 4\omega^T J^T J (J^{-1}(P(\omega,t) - \lambda I_3) J\omega) = -4\lambda\omega^T J^T J\omega$$

.

Тут були використані наступні співвідношення

$$\omega^T J^T J J^{-1} (\omega \times J\omega) = (J\omega)^T \omega \times J\omega = 0,$$

$$\omega^T J^T P(\omega,t) J\omega = 0.$$

Таким чином, функція $W(\omega) = 4\lambda\omega^T J^T J\omega$ є додатновизначена і регулятор (18) забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (17).

Література.

1. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Д. Основы теории управления. К.: Вища школа, 1975.– 328с.

2. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.– 248с.

3. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977.– 400с.

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

1. Приклад. У попередній лекції розглядалась система диференційних рівнянь

$$\frac{d\omega}{dt} = -J^{-1}\left(\omega \times j\omega\right) + J^{-1}u, \tag{1}$$

яка описує динаміку обертового руху твердого тіла навколо центру мас. Тут $\omega \in R^3$ - вектор кутових швидкостей, $u \in R^3$ - вектор моментів, $J \in R^{3\times3}$ - тензор інерції, який є додатновизначеною симетричною матрицею, $\times$ - знак векторного добутку, $t \geq 0$. Було показано, що регулятор

$$u(\omega,t) = 2\left(P(\omega,t) - \lambda I_3\right)J\omega \tag{2}$$

забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного руху $\omega(t) = 0$. Тут $P(\omega,t) \in R^{3\times3}$ - антисиметрична матриця, $I_3 \in R^3$ - одинична матриця. Функція Ляпунова має вигляд

$$V\left(\omega\right) = \left\|J\omega\right\|^2. \tag{3}$$

Але функцію Ляпунова можна будувати по різному, головне, щоб виконувались теореми про стійкість. Виберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V\left(\omega\right) = \left\|J\omega\right\|. \tag{4}$$

Ця функція є додатновизначеною. Градієнт

$$gradV\left(\omega\right) = J^T \frac{J\omega}{\left\|J\omega\right\|}.$$

Тоді, застосовуючи підхід попередньої лекції, отримаємо

$$u_1(\omega,t) = -\lambda\left(J^{-1}\right)^T J^T \frac{J\omega}{\|J\omega\|} = -\lambda \frac{J\omega}{\|J\omega\|}, \ \lambda > 0.$$

$$u_2(\omega,t) = P(\omega,t)\left(J^{-1}\right)^T J^T \frac{J\omega}{\|J\omega\|} = P(\omega,t)\frac{J\omega}{\|J\omega\|}.$$

Тоді регулятор має вигляд

$$u(\omega,t) = \left(P(\omega,t) - \lambda I_3\right)\frac{J\omega}{\|J\omega\|}. \tag{5}$$

Підберемо функцію $W(\omega,t)$ у вигляді

$$W(\omega,t) = -grad^T V\left(-J^{-1}(\omega\times j\omega) + J^{-1}u\right) =$$

$$\left(J^T \frac{J\omega}{\|J\omega\|}\right)^T \left(J^{-1}(\omega\times J\omega)\right) - \left(J^T \frac{J\omega}{\|J\omega\|}\right)^T J^{-1}\left[-\lambda I_3 + P(\omega,t)\right]\frac{J\omega}{\|J\omega\|} =$$

$$\frac{(J\omega)^T \omega\times J\omega}{\|J\omega\|} - \frac{(J\omega)^T}{\|J\omega\|}\left[-\lambda I_3 + P(\omega,t)\right]\frac{J\omega}{\|J\omega\|}.$$

Оскільки $(J\omega)^T \omega\times J\omega = 0$, то

$$W(\omega,t) = \lambda\frac{(J\omega)^T J\omega}{\|J\omega\|^2} - \frac{(J\omega)^T P(\omega,t) J\omega}{\|J\omega\|^2}.$$

Врахуємо, що $P(\omega,t) = -P^T(\omega,t)$. Тоді $(J\omega)^T P(\omega,t) J\omega = 0.$ Тому $W(\omega,t) = W(\omega) = \lambda > 0$.

Отже, регулятор (5) забезпечує стійкість нульового розв'язку. В лекції 4 було показано, що керування (5) при $P = 0$, $\lambda = 1$ є розв'язком задачі оптимальної швидкості при переводі системи з довільної точки в точку нуль. При цьому функція Ляпунова (4) співпадає з функцією Беллмана. Таким чином, між задачами стабілізації та оптимального керування існує певний зв'язок, що розкривається через постановку задачі оптимальної стабілізації. При цьому функція Беллмана може виступати як функція Ляпунова, забезпечуючи стійкий режим для оптимальної траєкторії.

2. Постановка задачі оптимальної стабілізації. Нехай система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \tag{6}$$

описує динаміку збуреного руху, $f\left(x,u(0,t),t\right)=0$. Тут $x \in R^n$, $u \in R^r$ - вектор керування, $f(x,u,t)$ – n-вимірна вектор-функція. На розв'язках системи (6) розглядається функціонал

$$J(u)=\int_{t_0}^{\infty}\omega(x,u,t)dt. \tag{7}$$

Тут функція $\omega(x,u,t)$ має бути інтегрованою на розв'язках системи (6). Задача про *оптимальну стабілізацію* полягає у наступному:

1). Знайти керування $u_*(x,t)$, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (6).

2). Яке б не було інше керування $\hat{u}(x,t)$, що розв'язує задачу 1), виконується нерівність $J(u_*) \le J(\hat{u})$, для всіх початкових умов $x(t_0)=x_0$, $\left\|x_0\right\| \le R$.

Функція u_* називається у цьому випадку *оптимальним керуванням*. Позначимо $x_*(t)$ - розв'язок системи (6) при $u=u_*(x,t)$. Запишемо деяку функцію

$$b\left(V,x,u,t\right)=\frac{\partial V}{\partial t}+grad_x^T V(x,t)f(x,u,t)+\omega(x,u,t),$$

де $V\left(x,t\right)$ - функція Ляпунова, яка є додатновизначена. Зрозуміло, що якщо $b\left(V,x,u,t\right)=0$ при деякому виборі функції V та u , то повна похідна у силу системи

$$\frac{dV}{dt}=-\omega\left(x,u,t\right).$$

Основною теоремою про оптимальну стабілізацію є теорема *Красовського Н.Н.* , яка полягає у наступному.

Теорема 1 (Красовського Н.Н.). Якщо для системи диференціальних рівнянь (6) можна побудувати додатновизначену функцію $V\left(x,t\right)$, яка допускає нескінченно малу вищу границю, а також функцію керування $u_*(x,t)$ такі, що задовольняють наступним умовам:

1) функція $\omega\left(x,t\right)=\omega\left(x,u_*(x,t),t\right)$ є додатно визначена;

2) має місце рівність

$$b\left(V_*,x,u_*,t\right)=0\ ; \tag{8}$$

3) для довільного вектора u виконується нерівність

$$b\left(V_*,x,u,t\right)\ge 0, \tag{9}$$

то керування $u_*(x,t)$ розв’язує задачу про оптимальну стабілізацію (6), (7), при цьому

$$J\left(u_*\right)=\int_{t_0}^{\infty}\omega(x_*(t),u_*(t),t)dt=\min\int_{t_0}^{\infty}\omega(x(t),u(t),t)dt=V_*\left(x_0,t_0\right). \quad (10)$$

Доведення. При $u=u_*(t)$ функція $V_*\left(x,t\right)$ задовольняє умовам теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Її похідна в силу (6) визначається згідно співвідношення (8) рівністю

$$\frac{dV_*\left(x_*,t\right)}{dt}=-\omega(x_*(t),u_*(t),t) \quad (11)$$

і тому є від’ємновизначеною. Доведемо справедливість формули (10). Оскільки розв’язок системи (6) є асимптотично стійкий, то

$$\lim_{t\to\infty}V_*\left(x_*(t),t\right)=0. \quad (12)$$

Інтегруємо (11) від $t=t_0$ до $t=T$ і враховуємо (12). Таким чином, отримуємо

$$\int_{t_0}^{T}\frac{dV_*\left(x_*(t),t\right)}{dt}=V_*\left(x_*(T),T\right)-V_*\left(x_*(t_0),t_0\right)$$

$$=-\int_{t_0}^{T}\omega(x_*(t),u_*(t),t)dt.$$

Тепер при $T\to\infty$

$$V_*\left(x_0,t_0\right)=\int_{t_0}^{T}\omega(x_*(t),u_*(t),t)dt. \quad (13)$$

Нехай, з іншого боку, керування $\hat{u}\left(x,t\right)$ розв’язує задачу стабілізації незбуреного руху. З нерівності (9) випливає, що

$$\left(\frac{dV_*}{dt}\right)_{(6)}\ge-\omega\left(\hat{x}\left(t\right),\hat{u}\left(t\right),t\right), \quad (14)$$

де $\hat{x}\left(t\right)$ - траєкторія системи (6) при керуванні $\hat{u}\left(t\right)$. Інтегруємо (14) від t_0 до T і отримуємо

$$V_*\left(\hat{x}(T),T\right)-V_*\left(\hat{x}(t_0),t_0\right)=V_*\left(\hat{x}(T),T\right)-V_*\left(x_0,t_0\right)\ge-\int_{t_0}^{T}\omega\left(\hat{x}\left(t\right),\hat{u}\left(t\right),t\right)dt$$

.

Враховуючи, що $\lim\limits_{t\to+\infty} V_*\left(\hat{x}(t),t\right)=0$, з останньої нерівності отримуємо

$$V_*\left(x_0,t_0\right)\le\int\limits_{t_0}^{\infty}\omega\left(\hat{x}(t),\hat{u}(t),t\right)dt .$$

Це доводить справедливість формули (10). Теорему доведено.

Функцію Ляпунова $V_*\left(x,t\right)$, що задовольняє умовам теореми Красовського, називають *оптимальною.* Розглянемо умови (8), (9). Вони означають наступне: на керуваннях, що забезпечують розв'язок задачі стабілізації чи на оптимальному керуванні справджується диференціальне рівняння Беллмана. Таким чином, для задачі оптимальної стабілізації функція Беллмана і оптимальна функція Ляпунова співпадають.

3. Оцінка області стабілізації. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x,u,t\right), \tag{15}$$

де x - n-вимірний вектор фазових координат, $f\left(x,u,t\right)$ - n-вимірна вектор функція, що є неперервна за x, u та t , u - r-вимірна функція керування, $t\ge t_0$. Припустимо також, що керування $u=u(x,t)$ розглядається у класі з оберненим зв'язком, $u(0,t)\equiv 0$, $f\left(0,u(0,t),t\right)\equiv 0$.

Означення. Множина $X\subset R^n$, що містить точку нуль, називається *областю асимптотичної стійкості* незбуреного руху системи (15), якщо при $x(t_0)=x_0$, $x_0\in X$ має місце граничне співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x(t,x_0,t_0)\right\|=0$.

Як правило, отримати всю множину X асимптотичної стійкості дуже складно. Тому X оцінюють, тобто, знаходять найбільшу кульку чи еліпсоїд, що міститься в X .

Означення. Множина $\hat{X}$ фазового простору називається оцінкою області X асимптотичної стійкості системи (15), якщо для всіх початкових умов $x_0\in\hat{X}$ виконується співвідношення $x(t,x_0,t_0)\in X$, $t\ge t_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x(t,x_0,t_0)\right\|=0$.

Очевидно, що $\hat{X} \subset X$. Оскільки асимптотична стійкість програмного руху системи (15) забезпечується за рахунок належного вибору керування $u(x,t)$, то область $\hat{X}$ називають оцінкою області стабілізації. Розглянемо випадок

$$f(x,u,t) = f(x,u), u(x,t) = u(x).$$

Оцінку області асимптотичної стійкості шукаємо у вигляді множини

$$\hat{X} = \{x \in R^n : v(x) \le c\},$$

де $v(x)$ є додатно визначена функція Ляпунова. Припустимо, що система (15) є лінійна, тобто

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

де A - $n \times n$ матриця, B - $n \times r$ матриця, причому має місце критерій цілком керованості

$$rang(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n.$$

Керування вибираємо у вигляді $u = Px$, де P - $r \times n$ постійна матриця. Зручно функцію Ляпунова вибирати у вигляді

$$v(x) = x^T Dx,$$

де D - додатно визначена симетрична матриця. Тоді

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(15)} = \frac{dx^T}{dt} Dx + x^T D \frac{dx}{dt} = \left(Ax + Bu\right)^T Dx + x^T D\left(Ax + Bu\right) =$$

$$x^T \left(A + BP\right)^T Dx + x^T D\left(A + BP\right)x = x^T \left[\left(A + BP\right)^T D + D\left(A + BP\right)\right]x$$

.

Будемо вимагати для асимптотичної стійкості, щоб

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(15)} = -x^T x.$$

Тоді

$$\left(A + BP\right)^T D + D\left(A + BP\right) = -I. \qquad (16)$$

З рівняння (16) визначається матриця P.

Як відомо, розв'язком екстремальної задачі

$$x^T y \to \max, \quad x \in \left\{x \in R^n : x^T Dx \le \alpha\right\}, \quad y \in R^n$$

є точка $x = \alpha \dfrac{D^T Dy}{\|Dy\|}$. При цьому

$$\max\left\{x^T y : x \in \left\{x \in R^n : x^T Dx \le \alpha\right\}\right\} = \alpha \|Dy\|. \qquad (17)$$

Задача 20. Довести співвідношення (17).

Якщо обмеження на керування мають вигляд

$$\|u\| \le \bar{u}\,, \tag{18}$$

то використовуючи (17)і представлення керування у формі $u = Px$, отримуємо

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (p_i^T x)^2 \le \alpha \sum_{i=1}^{r} \|Dp_i\|.$$

Тут $p^T = (p_1, p_2, ..., p_r)$, $p_i \in R^n, i = 1,2,...,r$. Параметр $\alpha > 0$ підбираємо так, щоб $\alpha \sum_{i=1}^{r} \|Dp_i\| \le \bar{u}$.

Тоді виконується обмеження (18). Отже,

$$\alpha \le \frac{\bar{u}}{\sum_{i=1}^{r} \|Dp_i\|}. \tag{19}$$

Оцінка (19) є оцінкою області стабілізації у формі еліпсоїда. Знаходження оцінки (19) здійснюється за наступним методом.

Алгоритм.

Крок 1. Вибираємо довільну додатновизначену симетричну матрицю $D \in R^{n \times n}$.

Крок 2. Знаходимо матрицю P з матричного рівняння Ляпунова (16).

Крок 3. Будуємо регулятор $u = Px$ і знаходимо оцінку області стабілізації у вигляді (19).

Якщо обмеження на керування мають вигляд $\max\limits_{i=1,2,...,r} |u_i| \le \bar{u}$, то, оскільки $u_i = p_i^T x$, отримуємо $|p_i^T x| \le \alpha \|Dp_i\|$. Звідси

$$\max_{i=1,2,...,r} |u_i| \le \alpha \max_{i=1,2,...,r} \|Dp_i\|.$$

Параметр $\alpha > 0$ вибираємо з умови $\alpha \max\limits_{i=1,2,...,r} \|Dp_i\| \le \bar{u}$. Звідси оцінка області стабілізації має вигляд

$$\alpha \le \frac{\bar{u}}{\max\limits_{i=1,2,...,r} \|Dp_i\|}.$$

Задача 21. Як обчислювати оцінку області стабілізації у випадку, якщо обмеження на керування мають вигляд $|u_i| \le \bar{u}_i, i = 1,2,...,r$?

Література.

1. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Д. Основы теории управления. К.: Вища школа, 1975.– 328с.

2. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.– 248с.

3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: - Наука , 1966. – 532с.