Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

В. Т. Матвієнко, В. В. Пічкур, Д. І. Черній

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни „Диференціальні рівняння"

Частина I. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння

для студентів спеціальностей
113 Прикладна математика
122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології
124 Системний аналіз

Київ – 2023

Рецензенти:

Клюшин Дмитро Анатолійович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Лебідь Олексій Григорович, доктор технічних наук, заступник директора Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики, протокол № 11 від 29 травня 2023 р.

В. Т. Матвієнко, В. В. Пічкур, Д. І. Черній. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни „Диференціальні рівняння". Частина І. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні рівняння для студентів спеціальностей 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології, 124 Системний аналіз факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Наведено короткі відомості про методику розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними, однорідних диференціальних рівнянь. Наведено приклади розв'язання, запропоновано завдання для самостійного розв'язування.

Зміст

Тема 1

Рівняння з відокремлюваними змінними

1.1 Диференціальні рівняння першого порядку. Базові поняття

Співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну $x \in I = (a, b)$, функцію $y(x)$, а також її похідні $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$, тобто співвідношення вигляду

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \tag{1.1}$$

називається **звичайним диференціальним рівнянням**. Тут f є деяким скалярним відображенням. Число n називається порядком диференціального рівняння.

Означення 1.1. *Функція $y(x)$ називається розв'язком диференціального рівняння* (1.1)*, якщо вона є n-разів неперервно диференційованою на деякому інтервалі $I = (a, b)$ і задовольняє диференціальному рівнянню* (1.1) *для всіх $x \in I$. Це означає, що при підстановці функції $y(x)$ в рівняння* (1.1) *ми одержуємо тотожність, тобто*

$$f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) = 0, \;\; x \in I.$$

Приклад 1.1. Рівняння

$$y'' + 3xy' + 2y = x^2$$

є диференціальним рівнянням другого порядку. Слід зауважити, що при постановці задач можемо не вказувати аргументу функції явно, а орієнтуватись за контекстом. Так, наявність позначення першої і другої похідних y', y'' показує, що y позначає шукану функцію, а x – незалежну змінну, $x \in (-\infty, +\infty)$. Слід зазначити, що позначення похідних можуть варіюватись. Так, перша похідна y' може бути позначена як $\frac{dy}{dx}$. Може бути застосоване також механічне позначення $\dot{y}$. Друга похідна y'' може бути позначена як $\frac{d^2 y}{dx^2}$, або $y^{(2)}$. Може бути застосоване також механічне позначення $\ddot{y}$. Для похідних n-го порядку використовують позначення $\frac{d^n y}{dx^n}$ або $y^{(n)}$.

При $n = 1$ диференціальне рівняння (1.1) називається диференціальним рівнянням *першого порядку*

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.2}$$

Тут F – відоме скалярне відображення. Диференціальне рівняння (1.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.3}$$

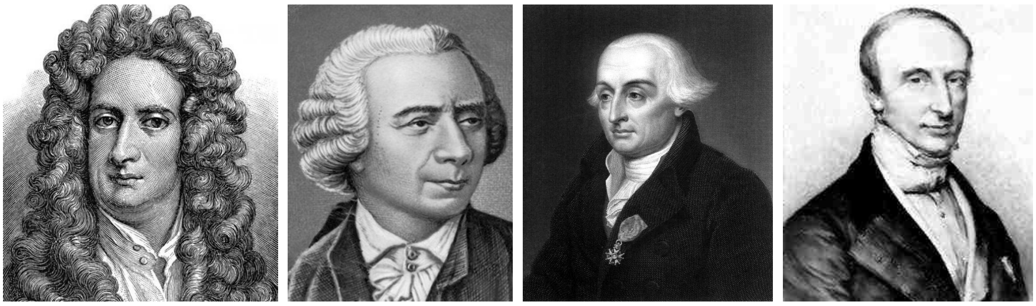

Рис. 1.1. Сер Ісаак Ньютон (1643 - 1725), Леонард Ейлер (1707 - 1783), Жозеф-Луї Лагранж (1736 - 1813), Огюстен Луї Коші (1789 - 1857) – основоположники теорії диференціальних рівнянь

де $f(x, y)$ – відоме скалярне відображення.

Означення 1.2. *Розв'язком диференціального рівняння* (1.3) *на інтервалі* I *назвемо неперервно диференційовану на* I *функцію*

$$y = \varphi(x),$$

яка визначена в області визначення функції $f(x, y)$ *і яка перетворює диференціальне рівняння* (1.3) *на тотожність для всіх* $x \in I$*, тобто*

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)),\ x \in I.$$

При цьому графік розв'язку $y = \varphi(x)$*,* $x \in I$ *називається інтегральною кривою диференціального рівняння* (1.3).

Приклад 1.2. Рівняння

$$y' + 2y = 0$$

є диференціальним рівняння першого порядку. Функція $y(x) = e^{-2x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ є розв'язком цього рівняння. Його можна розв'язати відносно похідної і подати у вигляді

$$y' = -2y.$$

Поряд з записом диференціального рівняння *у нормальній формі*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ми будемо розглядати еквівалентний його запис *в диференціальній формі*

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

Еквівалентність цих записів випливає з означення диференціала функції $dy = y'(x)dx$. В більш загальному вигляді рівняння *в диференціальній формі* подається так

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.4}$$

Тут $M(x, y)$, $N(x, y)$ – неперервні в деякій області з $\mathbb{R}^2$ функції. Якщо $N(x, y) \neq 0$, то (1.4) можна подати у нормальній формі. Для цього ділимо праву і ліву частину рівняння (1.4) на $N(x, y)$ і одержуємо

$$dy + \frac{M(x, y)}{N(x, y)}dx = 0.$$

Тоді з означення диференціалу функції одержуємо рівняння в нормальній формі

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

Звідси робимо висновок, що представлення диференнціального рівняння першого порядку в нормальній і у диференціальній формах є еквівалентними.

Приклад 1.3. Рівняння

$$y' = y$$

є диференціальним рівняння першого порядку, розв'язаним відносно похідної. Функція $y = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ є розв'язком цього рівняння. Втім, функція $y = 2e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ є також розв'язком цього рівняння. Такий розв'язок називають частинним. Ми можемо помітити, що, домножуючи функцію e^x на будь-яку константу, одержуємо розв'язок запропонованого диференціального рівняння. Це наштовхує на думку, що диференціальне рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Тому постає питання про параметричне представленні розв'язків диференціального рівняння, щоб описати всі можливі його частинні розв'язки. Таке представлення розв'язку називається загальним розв'язком. Для запропонованого рівняння загальним розв'язком є функція $y = Ce^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, де C – довільна константа.

В теорії диференціальних рівнянь важливу роль відіграє задача, яка називається задачею Коші.

Означення 1.3. *Задача Коші для диференціального рівняння вигляду*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

полягає у тому, щоб знайти такий розв'язок $y = y(x)$*, який проходить через задану точку* (x_0, y_0)*, тобто*

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.5}$$

Співвідношення (1.5) *називається умовою Коші, або початковою умовою. Точка* (x_0, y_0) *називається початковою.*

Геометричний зміст задачі Коші полягає у тому, щоб знайти таку інтегральну криву диференціального рівняння (1.3), яка проходить через початкову точку (x_0, y_0).

Приклад 1.4. Розглянемо задачу Коші

$$y' = y,\ y(0) = 1.$$

Розв'язком задачі Коші є функція $y(x) = e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, так як вона є розв'язком диференціального рівняння $y' = y$, причому при $x = 0$ її значення дорівнює 1. Слід зазначити, що графік функції $y(x) = e^x$ проходить через точку $(0, 1)$.

Для рівняння першого порядку ми можемо виділити такі способи представлення його розв'язку:

- загальний розв'язок;
- частинний розв'язок;
- особливий розв'язок;
- загальний інтеграл;
- інтеграл.

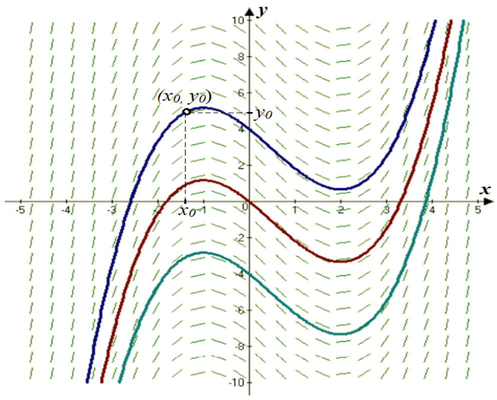

Рис. 1.2. Інтегральні криві

Означення 1.4. *Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

називається такий його розв'язок, що в кожній точці його інтегральної кривої виконуються умови єдиності розв'язку задачі Коші. Це означає, що через кожну точку інтегральної кривої цього розв'язку можна провести лише одну інтегральну криву цього рівняння.

Означення 1.5. *Особливим розв'язком диференціального рівняння першого порядку*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

називається такий його розв'язок, що в кожній точці його інтегральної кривої порушуються умови єдиності розв'язку задачі Коші. Це означає, що через кожну точку інтегральної кривої цього розв'язку можна провести дві, або більше інтегральних кривих цього рівняння.

Слід зауважити, що розв'язки можуть бути і не частинними, і не особливими.

Означення 1.6. *Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \;\; x \in I$$

називається параметричне представлення його розв'язку у вигляді

$$y = \varphi(x, C),$$

де $x \in I$, $C \in \mathbb{R}$ *– параметр, для якого виконуються такі умови:*

- *для кожного фіксованого* $C_0 \in \mathbb{R}$ *функція* $\varphi(x, C_0)$ *є частинним розв'язком рівняння* (1.3)*;*

- *для кожної точки* (x_0, y_0) *знайдеться така стала* $C_0 \in \mathbb{R}$*, що функція* $\varphi(x, C_0)$ *є розв'язком задачі Коші з початковою точкою* (x_0, y_0)*, тобто*

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0).$$

Означення загального розв'язку говорить про те, що існує однозначна відповідність між початковою умовою (x_0, y_0) і значенням параметра C. Тому загальний розв'язок можна подати у вигляді $y = \varphi(x, x_0, y_0)$. Такий спосіб представлення загального розв'язку називається формою Коші.

Якщо загальний розв'язок подано у неявному вигляді $F(x, y, C) = 0$, то таке представлення розв'язку називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Означення 1.7. *Неперервна функція $U(x, y)$, яка не є тотожно постійною, називається інтегралом диференціального рівняння першого порядку*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ x \in I,$$

якщо результатом підстановки будь-якого розв'язку $y = \varphi(x)$ цього рівняння у функцію $U(x, y)$ є постійна величина, тобто

$$U(x, \varphi(x)) = C, \ x \in I,$$

де $C \in \mathbb{R}$ – константа. За умови, що функція $U(x, y)$ є неперервно диференційованою, маємо

$$dU(x, \varphi(x)) = 0, \ x \in I.$$

Якщо вдається визначити інтеграл $U(x, y)$ диференціального рівняння, то за допомогою співвідношення

$$U(x, y) = C$$

одержуємо загальний інтеграл цього рівняння, де $C \in \mathbb{R}$ – довільна константа.

Приклад 1.5. Функція

$$U(x, y) = e^{-x}y$$

є інтегралом диференціального рівняння $y' = y$. Дійсно, оскільки в диференціальній формі рівняння має вигляд

$$dy = ydx,$$

то на розв'язках рівняння

$$dU(x, y) = -e^{-x}ydx + e^{-x}dy = -e^{-x}ydx + e^{-x}ydx = 0.$$

Це означає, що для довільного розв'язку $\varphi(x)$ цього рівняння

$$U(x, \varphi(x)) = C, \ x \in (-\infty, +\infty),$$

де $C \in \mathbb{R}$ – константа. Отже, за означенням (1.7) функція $U(x, y)$ є інтегралом цього рівняння, а співвідношення

$$e^{-x}y = C$$

є його загальним інтегралом. З загального інтегралу можемо одержати загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = e^{x}C.$$

Якщо (x_0, y_0) є початковою точкою, то відповідне їй значення C записується так

$$C = e^{-x_0}y_0.$$

Тоді

$$y = e^{x-x_0}y_0$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння у формі Коші.

1.2 Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Розглянемо рівняння

$$f(x)dx + g(y)dy = 0, \tag{1.6}$$

де $f(x)$, $g(y)$ – неперервні функції своїх аргументів. Диференціальне рівняння (1.6) називається рівнянням з **відокремленими змінними**. Рівняння (1.6) є еквівалентним до

$$d\left(\int f(x)dx + \int g(y)dy\right) = 0.$$

Тоді, використовуючи властивості диференціала, загальний розв'язок у неявній формі, тобто, загальний інтеграл рівняння (1.6) в квадратурах (за допомогою інтегралів функцій) можна подати так

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C, \tag{1.7}$$

де C – довільна константа. Загальний інтеграл рівняння (1.6) можна також записати з використанням визначених інтегралів

$$\int_{x_0}^{x} f(s)ds + \int_{y_0}^{y} g(s)ds = C. \tag{1.8}$$

Тут C – довільна константа. Якщо потрібно знайти розв'язок задачі Коші $y(x_0) = y_0$, то $C = 0$ і маємо загальний інтеграл у формі Коші

$$\int_{x_0}^{x} f(s)ds + \int_{y_0}^{y} g(s)ds = 0. \tag{1.9}$$

До рівнянь з відокремленимим змінними зводяться рівняння, які називаються рівняннями з відокремлюваними змінними.

Означення 1.8. *Рівняння вигляду*

$$m(x)n(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \tag{1.10}$$

*називають **рівнянням з відокремлюваними** змінними.*

Тут $m(x)$, $n(y)$, $f(x)$, $g(y)$ – неперервні функції. Припустимо, що

$$f(x)n(y) \neq 0.$$

Тоді, якщо поділити ліву і праву частину рівняння (1.10) на $f(x)n(y)$, то отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{m(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{n(y)}dy = 0. \tag{1.11}$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (1.10) має вигляд

$$\int \frac{m(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{n(y)}dy = C, \tag{1.12}$$

де C – довільна константа. Слід зазначити, що при діленні на $f(x)n(y)$ ми можемо втратити розв'язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$, $f(x) = 0$. Тому ці співвідношення слід окремо аналізувати.

Приклад 1.6. Розв'язати рівняння

$$y' \sin x = y \ln y.$$

Розв'язок: Подамо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y.$$

Розділивши змінні, отримаємо рівняння

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Проінтегрувавши ліву і праву частини одержаного співвідношення, знайдемо

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + C_1,$$

де C_1 – довільна константа. Подамо константу C_1 у вигляді

$$C_1 = \ln |C|,$$

де C – довільна константа. Тоді

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + \ln |C|.$$

Перший інтеграл дає

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{d \ln y}{\ln y} = \ln |\ln y| \, .$$

Другий інтеграл

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{d \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 - \cos x)} + \frac{1}{(1 + \cos x)} \right],$$

то

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right) d \cos x =$$
$$= \frac{1}{2} \ln |1 - \cos x| - \frac{1}{2} \ln |1 + \cos x| = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| .$$

Отже,

$$\ln |\ln y| = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + \ln |C|,$$

де C – довільна константа. Звідси

$$\ln y = C \, tg \frac{x}{2}.$$

У такий спосіб одержуємо загальний розв'язок рівняння

$$y = e^{C \, tg \frac{x}{2}}.$$

Тут C – довільна константа.

При $y = 1$ функція $y \ln y = 0$. Підставляємо $y = 1$ в

$$y' \sin x = y \ln y.$$

Одержуємо тотожність. Робимо висновок, що $y(x) = 1$ – розв'язок, який ми втратили при розділенні змінних. Аналогічно перевіряємо $x = 0$, який не є розв'язком.

Відповідь: загальний розв'язок рівняння

$$y = e^{C\, tg \frac{x}{2}},$$

де C – довільна константа; $y = 1$.

Приклад 1.7. Розв'язати рівняння

$$x^2 y^2 y' + y = 1.$$

Розв'язок: Подамо рівняння у вигляді

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + y = 1.$$

Звідси

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + y - 1 = 0.$$

Приведемо рівняння до диференціальної форми

$$x^2 y^2 dy + (y - 1)dx = 0.$$

Розділимо на $x^2(y - 1)$. Отримуємо

$$\frac{y^2}{y - 1} dy + \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Інтегруємо одержану рівність

$$\int \frac{y^2}{y - 1} dy + \int \frac{dx}{x^2} = C.$$

Тут C – довільна константа. Знайдемо інтеграли

$$\int \frac{y^2}{y - 1} dy = \int \frac{y^2 - 1}{y - 1} dy + \int \frac{1}{y - 1} dy =$$

$$= \int (y + 1)dy + \int \frac{1}{y - 1} dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1|,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| - \frac{1}{x} = C.$$

Тут C – довільна константа.

При $y = 1$ функція $y - 1 = 0$. Підставляємо $y = 1$ в

$$x^2 y^2 dy + (y - 1)dx = 0.$$

Одержуємо тотожність. Робимо висновок, що $y(x) = 1$ – розв'язок, який ми втратили при розділенні змінних.

Відповідь: Загальний інтеграл рівняння

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| - \frac{1}{x} = C,$$

де C – довільна константа; $y = 1$.

Приклад 1.8. Розв'язати рівняння

$$x(1+y^2)+y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0.$$

Розв'язок: Представимо рівняння у вигляді

$$x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0.$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $(1+x^2)(1+y^2)$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{y}{1+y^2}dy=0.$$

Інтегруємо це рівняння

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}+\int\frac{ydy}{1+y^2}=C_1$$

і послідовно знаходимо

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln{(1+x^2)},\ \int\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln{(1+y^2)}.$$

Тут C_1 – довільна константа. Отже,

$$\frac{1}{2}\ln{(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln{(1+y^2)}=\frac{1}{2}\ln|C|.$$

Тут $\frac{1}{2}\ln|C|=C_1$, C – довільна константа. Звідси $(1+x^2)(1+y^2)=C$.

Відповідь: загальний інтеграл рівняння

$$(1+x^2)(1+y^2)=C,$$

де C – довільна константа.

Приклад 1.9. Знайти розв'зок задачі Коші

$$(1+e^x)yy'=e^x,\ y(0)=1.$$

Розв'язок: Запишимо рівняння у вигляді

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx}=e^x.$$

Відокремлюючи змінні, отримуємо

$$ydy=\frac{e^xdx}{1+e^x}.$$

Інтегруючи ліву і праву частини рівняння, знайдемо загальний інтеграл

$$\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C. \tag{1.13}$$

Тепер з умови Коші $y(0)=1$ знайдемо відповідну цій умові довільну константу. Підставлюючи $x=0$ та $y=1$ в (1.13), матимемо

$$\frac{1}{2}=\ln 2+C,$$

звідки

$$C=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Підставляючи в (1.13) знайдене значення C, отримуємо

$$\frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+\frac{1}{2}-\ln 2.$$

Відповідь: розв'язок задачі Коші має вигляд

$$\frac{y^2}{2}=\ln\frac{1+e^x}{2}+\frac{1}{2}.$$

1.3 Рівняння, яке зводиться до рівняння з відокремленими змінними

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + p),$$

де a, $b \neq 0$, p — сталі, $f(x)$ – неперервна функція. Одним з загальних прийомів, який застосовується при знаходженні розв'язків диференціальних рівнянь, є заміна змінних. Вдала заміна змінних дозволяє одержати рівняння, для якого ми вміємо знайти розв'язок. У випадку, який розглядається, доцільно зробити заміну

$$z = ax + by + p.$$

Тоді

$$dz = adx + bdy,$$

звідки

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}.$$

В результаті одержуємо рівняння

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

В диференціальній формі маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0.$$

Після знаходження загального інтегралу одержаного рівняння, слід застосувати перетворення $z = ax + by + p$.

Приклад 1.10. Розв'язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Розв'язок: Введемо заміну змінних

$$z = 4x + 2y - 1.$$

Тоді

$$z' = 4 + 2y'.$$

Одержуємо рівняння

$$z' - 4 = 2\sqrt{z}.$$

В диференціальній формі маємо

$$\frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = 2dx.$$

Інтегруємо ліву і праву частини і одержуємо

$$\int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = \int 2dx + C,$$

де C – довільна константа. Знайдемо перший інтеграл

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}}.$$

Заміна

$$\sqrt{z}=t, \quad dz=2tdt, \quad 2+\sqrt{z}=2+t$$

дає

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}} = \int \frac{2tdt}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{t+2}dt =$$
$$= 2t - 4\ln|2+t| = 2\sqrt{z} - 4\ln\left(2+\sqrt{z}\right).$$

Отже, отримуємо

$$2\sqrt{z} - 4\ln\left(2+\sqrt{z}\right) = 2x + 2C,$$

де C – довільна константа. Враховуючи, що

$$z = 4x + 2y - 1,$$

знаходимо загальний інтеграл рівняння

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(2+\sqrt{4x+2y-1}\right) - x = C,$$

де C – довільна константа.

Відповідь: загальний інтеграл рівняння

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln\left(2+\sqrt{4x+2y-1}\right) - x = C,$$

де C – довільна константа.

1.4 Питання, тести для самоконтролю

1. Наведіть означення розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
2. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку. Наведіть її геометричний зміст.
3. Наведіть означення загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
4. Сформулюйте означення загального інтегралу диференціального рівняння першого порядку.
5. Наведіть означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
6. У чому полягає методика розв'язування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними ?
7. Наведіть приклад диференціального рівняння першого порядку, яке не є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

1.5 Задачі для самостійної роботи

Знайти загальні розв'язки або загальні інтеграли рівнянь. В задачах 3, 8, 9, 10 знайти розв'язок задачі Коші.

1. $(y^2-1)(x+2)dx - x^2ydy = 0$
2. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$
3. $xy - (x^2+1)y' = 0,\ y(0) = 1$
4. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0$
5. $x^2dx + y^3e^{x+y}dy = 0$
6. $y^{-3}\ln\,\ln x dx + xe^{y^2}dy = 0$
7. $\frac{e^x-1}{e^y} = e^{e^y}(1+e^x)y'$
8. $2x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0,\ y(1) = 0$
9. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y},\ y(0) = 0$
10. $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0,\ y(1) = 1$
11. $y' = \frac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln y)}$
12. $\left(\frac{\cos x}{\ln y}\right)^2 dx + \frac{y}{x^2}dy = 0$
13. $\frac{1-\ln^2 y}{x\ln y}dx + \frac{\sqrt{3-\ln^2 x}}{y}dy = 0$
14. $y' = \cos(y-x)$

Тема 2

Однорідні рівняння. Узагальнено-однорідні рівняння

2.1 Однорідні функції і однорідні рівняння

Означення однорідного диференціального рівняння базується на означенні однорідної функції.

Означення 2.1. *Скалярна функція $f(x, y)$ називається **однорідною функцією** виміру m, якщо для довільного $t > 0$ знайдеться таке число m, що для будь-яких дійсних x, y справджується рівність*

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Приклад 2.1. Функції

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2,\ f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

є однорідними функціями виміру $m = 2$ і $m = 0$ відповідно.

Означення 2.2. *Рівняння*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.1}$$

*в якому функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є неперервними однорідними функціями одного і того ж виміру m, називається **однорідним диференціальним рівнянням.***

Однорідне рівняння можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right), \tag{2.2}$$

в якому функція $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Однорідне рівняння заміною змінних

$$y = zx,$$

де z – нова функція від x, приводить до рівняння **з відокремлюваними змінними.** Тоді диференціал

$$dy = d(zx) = zdx + xdz.$$

Застосуємо запропоновану заміну змінних до рівняння (2.1). Одержуємо

$$M(x,zx)dx + N(x,zx)(zdx + xdz) = 0.$$

Оскільки функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями виміру m, то

$$x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(zdx + xdz) = 0.$$

Звідси

$$\left(M(1,z) + zN(1,z)\right)dx + xN(1,z)dz = 0.$$

Одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}dz = 0.$$

Застосовуємо міркування, які використовуються при розв'язуванні рівнянь з відокремлюваними змінними і одержуємо

$$\ln|x| + \int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}dz = \ln|C|,$$

де C – довільна константа. Враховуючи, що

$$y = zx,\ z = \frac{y}{x},$$

одержуємо загальний інтеграл однорідного рівнянняу вигляді

$$x = Ce^{\phi(\frac{y}{x})},\ \phi(z) = \int \frac{N(1,z)}{M(1,z) + zN(1,z)}dz.$$

Зауважимо, що при відокремленні змінних ми могли загубити розв'язки, які задовольняють рівності

$$M(1,z) + N(1,z)z = 0.$$

Отже, якщо рівняння задовольняє умови означення 2.2, тобто ми маємо однорідне рівняння, то заміною $y = zx$ приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними. Потім розв'язуємо одержане рівняння, відокремлюючи змінні. В кінці застосовуємо знову заміну змінних $y = zx$ і одержуємо загальний інтеграл однорідного рівняння.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0.$$

Розв'язок: Рівняння

$$(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

є однорідним рівнянням, так як функції

$$M(x,y) = x^2 + xy + y^2,\ N(x,y) = x^2$$

є однорідними рівняннями виміру $m = 2$. Дійсно, для $t > 0$ маємо

$$M(tx,ty) = t^2\left(x^2 + xy + y^2\right) = t^2M(x,y),$$

$$N(tx,ty) = t^2x^2 = t^2N(x,y).$$

Зробимо заміну змінних

$$y = zx, dy = zdx + xdz.$$

Тоді
$$(1+z+z^2)dx-(xdz+zdx)=0.$$
Звідси
$$(1+z^2)dx-xdz=0$$
і одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні
$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{1+z^2}=0,$$
одержуємо
$$\ln|x|-arctg\, z=\ln|C|,$$
де C – довільна константа. Звідси
$$x=Ce^{arctg\, z}.$$
Згадуючи, що
$$y=zx,\ z=\frac{y}{x},$$
одержуємо загальний інтеграл рівняння
$$x=Ce^{arctg\, \frac{y}{x}},$$
де C – довільна константа. Не важко пересвідчитись, що $x=0$ – також розв'язок, який загубили при діленні.

Відповідь: загальний розв'язок рівняння
$$x=Ce^{arctg\, \frac{y}{x}},$$
де C – довільна константа; $x=0$.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння
$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y.$$

Розв'язок: Запишемо рівняння у вигляді
$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$
так що дане рівняння виявляється однорідним щодо x та y. Покладемо
$$u=\frac{y}{x},$$
або $y=ux$. Тоді
$$y'=xu'+u.$$
Підставляючи в рівняння вирази для y та y', отримуємо
$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}.$$
Підставляючи в рівняння вирази для y та y', маємо
$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}.$$

Відокремлюючи змінні, отримуємо
$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$
Звідси інтегруванням знаходимо
$$\arcsin u = \ln|x| + \ln|C|,$$
або
$$\arcsin u = \ln|Cx|.$$
Замінюючи u на $\frac{y}{x}$, матимемо загальний інтеграл
$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln|Cx|.$$
Звідси загальний розв'язок можна записати так
$$y = x\sin\ln Cx.$$
При розділенні змінних ми ділили обидві частини рівняння на добуток
$$x\sqrt{1-u^2},$$
тому могли втратити розв'язки, які визначаються з умови $x = 0$ та $\sqrt{1-u^2} = 0$. При $x \neq 0$, $u = \frac{y}{x}$ з співвідношення
$$\sqrt{1-u^2} = 0$$
отримуємо
$$\frac{y^2}{x^2} = 1.$$
Цю рівність задовольняють функції $y = -x$ і $y = x$. Безпосередньо підстановкою в рівняння переконуємося, що функції $y = -x$ і $y = x$ також є розв'язками даного рівняння.

Відповідь: загальний розв'язок рівняння
$$y = x\sin\ln|Cx|,$$
де C – довільна константа; $y = -x$, $y = x$.

2.2 Рівняння, яке зводиться до однорідного

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду
$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0,$$
де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – постійні. Якщо $c_1 = c_2 = 0$, то таке рівняння є однорідним виміру $m = 1$. Якщо ця умова не виконується, то слід застосувати заміну змінних у такий спосіб, щоб в нових координатах рівняння було однорідним рівнянням виміру $m = 1$. Слід розглянути такі випадки.

Випадок 1. Визначник
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$
Це означає, що система рівнянь
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $x = x_0$, $y = y_0$. Тоді заміна змінних

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \end{cases}$$

$$du = dx, \; dv = dy$$

приводить до однорідного рівняння виміру $m = 1$.

Випадок 2. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Припустимо $b_1 \neq 0$. Заміна

$$z = a_1 x + b_1 y, \; a_2 x + b_2 y = kz,$$

де k – коефіцієнт пропорційності, зводить вихідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, тоді

$$dz = a_1 dx + b_1 dy, \; dy = \frac{dz - a_1 dx}{b_1}$$

і приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$(z + c_1)dx + (kz + c_2)\frac{dz - a_1 dx}{b_1} = 0.$$

Приклад 2.4. Розв'язати рівняння

$$(x - 1)dy = (x + y + 2)dx.$$

Розв'язок: Запишемо рівняння у вигляді

$$(x + y + 2)dx - (x - 1)dy = 0.$$

Знайдемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, шукаємо розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Одержуємо

$$x_0 = 1, \; y_0 = -3.$$

Робимо заміну

$$\begin{cases} u = x - 1, \\ v = y + 3, \end{cases}$$

$$du = dx, \; dv = dy.$$

Отримуємо однорідне рівняння

$$(u + v)du - udv = 0$$

виміру $m = 1$. Дійсно, при $t > 0$ маємо

$$M(u, v) = u + v, \; N(x, y) = -u,$$

$$M(tu,tu)=t(u+v)=tM(u,u),\ N(tu,tu)=-tu=tN(u,v).$$

Розв'язуємо однорідне рівняння. Зробимо ще одну заміну

$$v=zu,\ dv=zdu+udz.$$

Тоді

$$(u+uz)du-u(udz+zdu)=0.$$

Звідси

$$(1+z)du-udz-zdu=0,$$

$$du-udz=0.$$

Одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні

$$\frac{du}{u}-dz=0$$

і інтегруємо. Маємо

$$\ln|u|-z=\ln|C|,$$

де C – довільна константа. Звідси

$$u=Ce^{z}.$$

Оскільки

$$v=zu,\ z=\frac{v}{u},$$

то

$$u=Ce^{\frac{v}{u}}$$

– загальний інтеграл однорідного рівняння, де C – довільна константа. Помітимо, що $u=0$ – також розв'язок, який загубили при діленні. Для знаходження загального інтегралу вихідного диференціального рівняння слід у $u=Ce^{\frac{v}{u}}$ підставити

$$\begin{cases} u=x-1,\\ v=y+3. \end{cases}$$

Відповідь: загальний інтеграл рівняння

$$x-1=Ce^{\frac{y+3}{x-1}},$$

де C – довільна константа; $x=1$.

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння

$$(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0.$$

Розв'язок: Знайдемо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Тому застосуємо заміну

$$z=x+y,\ dz=dx+dy,$$

$$2z=2x+2y,\ dy=dz-dx.$$

Одержуємо

$$(z+1)dx+(2z-1)(dz-dx)=0.$$

Звідси
$$(2-z)dx+(2z-1)dz=0.$$
Приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними
$$dx-\frac{2z-1}{z-2}dz=0.$$
Інтегруємо і знаходимо загальний інтеграл цього рівняння
$$x-2z-3\ln|z-2|=-C,$$
де C – довільна константа. Так як $z=x+y$, то
$$-x-2y-3\ln|x+y-2|=-C,$$
звідки
$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C$$
де C – довільна константа. Помітимо, що $z=2$ – також розв'язок, йому відповідає $x+y=2$.

Відповідь: загальний інтеграл рівняння
$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C,$$
де C – довільна константа; $x+y=2$.

2.3 Узагальнено-однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо рівняння
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{2.3}$$
в якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є неперервними. Рівняння (2.3) називається **узагально однорідним**, якщо для довільного $t>0$ існує таке число k, що для будь-яких x, y підстановка в ліву частину
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy$$
рівняння (2.3) замість x, y, dy відповідно
$$tx,\ t^ky, t^{k-1}dy,$$
дає знову рівняння (2.3). Це означає, що знайдеться таке m, для якого рівність
$$M(tx,t^ky)dx+N(tx,t^ky)t^{k-1}dy=t^m[M(x,y)dx+N(x,y)dy] \tag{2.4}$$
виконується при всіх $t>0$ для довільних x, y, dx та dy. У такому випадку при будь-яких $t>0$ існують такі числа k, m, що для будь-яких x, y виконується умова
$$\begin{cases} M(tx,t^ky)=t^mM(x,y),\\ N(tx,t^ky)=t^{m-k+1}N(x,y). \end{cases} \tag{2.5}$$
Помітимо, що при $k=1$ маємо звичайне однорідне рівняння.

Для того, щоб визначити, чи є рівняння узагальнено однорідним, можна застосувати означення узагальнено-однорідного рівняння, або метод зважування. **Метод зважування** полягає у тому, що ми розбиваємо ліву частину
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

Множник	Вага
x	1
x^m	m
y	k
y^m	mk
dx	0
dy	$k-1$

Табл. 2.1. Правило зважування

рівняння на доданки, які не містять операції додавання. Потім для кожного доданку визначимо його вагу за правилом, що вага множників сумується, константа не має ваги і вага кожного множника визначається за таблицею 2.1. Якщо знайдеться константа k, при якій ваги кожного з доданків співпадають, то рівняння є узагальнено-однорідним.

Отже, визначивши k за означенням узагальнено-однорідного рівняння, або за методом зважування, застосуємо заміну змінних

$$y = u^k,\ dy = d(u^k) = ku^{k-1}du.$$

Така заміна приводить узагальнено-однорідне рівняння до однорідного. Тому можна зробити висновок, згадуючи метод розв'язування однорідного рівняння, що заміна

$$y = zx^k,\ dy = d(zx^k) = x^k dz + kx^{k-1}zdx \tag{2.6}$$

приводить узагальнено-однорідне рівняння до рівняння з розділеними змінними.

Наведемо алгоритм розв'язування узагальнено-однорідного рівняння на основі означення.

- Підставляємо в рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ замість x, y, dy

$$tx,\ t^k y, t^{k-1}dy.$$

- Знаходимо таке k, щоб в результаті підстановки знову одержати рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

  Для цього, можливо, потрібно винести за спільну дужку t^m, де m – деяке число.

- Робимо підстановку (2.6).
- Приходимо до рівняння з розділеними змінними.

Наведемо алгоритм знаходження показника k методом зважування.

- Розбиваємо ліву частину рівняння $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ на доданки, які не містять додавання і віднімання.
- Оцінюємо вагу кожного доданку за правилом, яке наведене у таблиці 2.1. Вага добутку рівна сумі їхніх ваг, вага константи рівна нулеві.
- Знаходимо k так, щоб ваги кожного доданку співпали.
- Робимо підстановку (2.6).
- Приходимо до рівняння з розділеними змінними.

Рис. 2.1. Маріус Софус Лі (1842 - 1899)

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0. \tag{2.7}$$

Розв'язок: Рівняння

$$(6 - x^2y^2)dx + x^2dy = 0$$

розбиваємо на доданки

$$6dx - x^2y^2dx + x^2dy = 0.$$

Проводимо зважування кожного доданку згідно таблиці 2.1. Вага $6dx$ рівна нулеві, вага x^2y^2dx рівна $2 + 2k$, вага x^2dy рівна $2 + k - 1$. Прирівнюємо ваги кожного доданку і одержуємо систему

$$0 = 2 + 2k = 2 + k - 1. \tag{2.8}$$

Ця система сумісна і її розв'язком є

$$k = -1.$$

Можна підібрати k іншим способом, а саме, за означенням узагальнено-однорідного рівняння. Для цього в рівняння замість x, y, dy підставляємо

$$tx,\ t^ky, t^{k-1}dy.$$

Одержуємо

$$\left(6 - (tx)^2(t^ky)^2\right)dx + (tx)^2t^{k-1}dy = 0.$$

Розбиваємо на доданки

$$6dx - t^{2+2k}x^2y^2dx + t^{2+k-1}x^2dy = 0.$$

Аналізуємо степені змінної t в кожному доданку. Знаходимо k з умови

$$0 = 2 + 2k = 2 + k - 1.$$

Розв'язком останнього співвідношення є $k = -1$. Далі застосовуємо заміну змінних

$$y = \frac{z}{x}. \tag{2.9}$$

Враховуючи означення диференціала

$$df(x) = f'(x)dx,$$

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

одержуємо

$$dy = d\frac{z}{x} = \frac{dz}{x} - \frac{z}{x^2}dx.$$

Звідси

$$xdz - (z^2 + z - 6)dx = 0. \tag{2.10}$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні

$$\frac{dz}{z^2 + z - 6} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\int \frac{dz}{z^2 + z - 6} - \int \frac{dx}{x} = \ln|C_1|$$

або

$$\int \frac{dz}{(z-2)(z+3)} - \ln|x| = \ln|C_1|.$$

Тут C_1 – довільна константа. Так як

$$\frac{1}{(z-2)(z+3)} = \frac{1}{5(z-2)} - \frac{1}{5(z+3)},$$

то

$$\int \frac{dz}{(z-2)(z+3)} - \ln|x| = \ln|C_1|,$$

$$\int \frac{dz}{5(z-2)} - \int \frac{dz}{5(z+3)} - \ln|x| = \ln|C_1|.$$

Звідси

$$\frac{1}{5}\ln|z-2| - \frac{1}{5}\ln|z+3| - \ln|x| = \ln|C_1|.$$

Проводячи перетворення, одержуємо

$$\ln|z-2| - \ln|z+3| - 5\ln|x| = 5\ln|C_1|,$$

$$\ln|z-2| - \ln|z+3| - \ln|x|^5 = \ln|C_1^5|.$$

Позначимо $C_1^5 = C$. Тоді

$$\ln\frac{|z-2|}{|z+3||x|^5} = \ln|C|,$$

звідки

$$\frac{z-2}{(z+3)x^5} = C. \tag{2.11}$$

Підставляючи в останню рівність

$$z = xy,$$

одержуємо загальний інтеграл рівняння.

Відповідь: загальний інтеграл рівняння

$$\frac{xy-2}{(xy+3)x^5} = C,$$

де C – довільна константа.

Приклад 2.7. Розв'язати рівняння

$$4xydx + (y - x^2)dy = 0.$$

Розв'язок: Підставляємо в рівняння замість x, y, dy

$$tx,\ t^k y, t^{k-1}dy$$

і одержуємо

$$4(tx)(t^k y)dx + (t^k y - (tx)^2)t^{k-1}dy = 0.$$

Звідси

$$4t^{k+1}ydx + (t^{2k-1}y - t^{k+1}x)dy = 0.$$

Знаходимо k з умови рівності показників степенів змінної t, яка записується так

$$k + 1 = 2k - 1 = k + 1.$$

З останнього рівняння одержуємо $k = 2$. Враховуючи (2.6), робимо заміну

$$y = zx^2,\ dy = x^2dz + 2xzdx.$$

Тоді

$$4x^3zdx + (zx^2 - x^2)(x^2dz + 2xzdx) = 0.$$

Звідси

$$2z(1 + z)dx + x(z - 1)dz = 0.$$

Одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z-1)dz}{2z(1+z)} = 0$$

і інтегруємо

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(z-1)dz}{2z(1+z)} = \ln|C|.$$

Знаходимо інтеграли

$$\int \frac{(z-1)dz}{2z(1+z)} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z(1+z)}$$

і приходимо до співвідношення

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|z| + \ln|1+z| = \ln|C|.$$

Звідси

$$xz^{-\frac{1}{2}}(1+z) = C.$$

Так як

$$z = \frac{y}{x^2},$$

то

$$x^2 + y = y^{\frac{1}{2}}C.$$

Відповідь: загальний інтеграл рівняння

$$x^2 + y = y^{\frac{1}{2}}C,$$

де C – довільна константа.

2.4 Питання, тести для самоконтролю

1. Сформулюйте означення однорідної функції виміру m.
2. Наведіть приклади однорідних функкій вимірів 0, 1, 2, 4.
3. Наведіть означення однорідного диференціального рівняння першого порядку.
4. Яка підстановка застосовується при розв'язуванні однорідних диференціальних рівнянь? До якого типу рівнянь ми приходимо в результаті цієї підстановки?
5. Наведіть означення узагальнено однорідного диференціального рівняння першого порядку.
6. У який спосіб можна перевірити, що рівняння є узагальнено однорідним?
7. Яка підстановка застосовується при розв'язуванні узагальнено однорідних диференціальних рівнянь? До якого типу рівнянь ми приходимо в результаті цієї підстановки?

2.5 Задачі для самостійної роботи

Знайти загальні розв'язки або загальні інтеграли наведених нижче рівнянь. В задачі 2 знайти розв'язок задачі Коші.

1. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$
2. $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0,\ y(1) = 1$
3. $(2x + 3y)dx + (x + 2y)dy = 0$
4. $xy' - x\cos\frac{y}{x} - y = 0.$
5. $(y^3 + 2x^2y)dx - (2x^3 + 2xy^2)dy = 0$
6. $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy = 0$
7. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
8. $y(x^2y^2 + 1)dx + (x^2y^2 - 1)xdy = 0$
9. $xydx + (y^4 - x^2)dy = 0$
10. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$
11. $xdy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx = 0$
12. $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx - x^2e^{\frac{x}{y}}dy = 0$
13. $(6xy + 5y^2)dx + (3x^2 + 10xy - y^2)dy = 0$
14. $(x^3 + 3xy^2)dx + (2y^3 + 3x^2y)dy = 0$
15. $(x - 2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0$
16. $(x + 2y + 1)dx + (2x + 4y + 3)dy = 0$
17. $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$
18. $(xy^2 - y)dx - (x^3y^2 - 3x^2y + 3x)dy = 0$

Позначення

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір;

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.
Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^*$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^*$, $*$ – знак транспонування ;

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ – евклідова норма;

$f'(x)$, f', $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ – похідна функції $f(x)$;

dx – диференціал змінної x;

$df(x)$, df – диференціал функції $f(x)$.

Література

[1] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків. - К., ВПЦ „Київський університет", 2008. – 352 с.

[2] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Пічкур В.В., Харченко І.І. Диференціальні рівняння, варіаційне числення та їх застосування. – К., ВПЦ „Київський університет", 2015. – 271 с.

[3] Диференціальні рівняння / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. – К.: Вища школа, 1981.

[4] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

[5] Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. – Львів, 2017. -– 372 с.

[6] Barbu V. Differential Equations. -– Springer, Switzerland, 2016. — 230 p.

[7] Гаращенко Ф.Г., Харченко І.І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. –К.: ВПЦ „Київський університет", 2004. – 162 с.

[8] Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вища школа, 1972. –156 с.

[9] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 454 с.

[10] Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. – К.: Техніка, 1997.

[11] Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.

[12] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз. Частина 1. – К.: Вища школа, 1992. –495 с.