

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
Институт телекоммуникаций
и глобального информационного пространства

С. А. ДОВГИЙ
И. К. ЛИФАНОВ
Д. И. ЧЕРНИЙ

**МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ**

Киев
Издательство “Юстон”
2016

УДК 517.3; 532.5
ББК 22.161.1
Д58

*Утверждено к печати ученым советом
Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства
Национальной академии наук Украины (протокол № 9, от 15 декабря 2015г.).*

Рецензенты:

Барьяхтар Виктор Григорьевич, д.ф.-м.н., академик НАН Украины
Гуржий Александр Андреевич, д.ф.-м.н.

Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И.
Д58 **Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии.** – К.: Издательство «Юстон» 2016.–380 с.: Илл. – 267 рис., Библиогр. – 157 наим.

ISBN 978-617-7361-29-8.

В книге представлены основные сведения необходимые для изучения и практического применения метода сингулярных интегральных уравнений, построения численных методов и вычислительных технологий на их основе. Изложены основы вычисления определенных, сингулярных и гиперсингулярных одномерных и двумерных интегралов, методы численного решения уравнений с ними. Особое внимание уделено гиперсингулярным интегральным уравнениям, к которым сводится задача Неймана для уравнения Лапласа и Гельмгольца. Приводятся элементы метода теории потенциала. Дано приложение рассматриваемых методов к построению дискретных моделей для численного решения стационарных и нестационарных, линейных и нелинейных, плоских и пространственных задач аэрогидродинамики, моделированию процессов обтекания кусочно-гладких границ (препятствий имеющих острые кромки и углы), подвижных и деформирующихся границ. Приведено обоснование и даны примеры построения вычислительных технологий на основе метода дискретных особенностей.

Для студентов, аспирантов и научных работников, а также специалистов по численным методам и моделированию в аэродинамике, электродинамике, радиоэлектронике, теории упругости, дифракции волн и других прикладных областях.

УДК 517.94; 532.5
ББК 22.161.

ISBN 978-617-7361-29-8

© Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И., 2016

Оглавление

Глава 1. Интегральные уравнения и методы их решения	7
1.1. Классификация интегральных уравнений	7
1.2. Квадратурные методы решения интегральных уравнений	9
1.3. Вырожденные ядра. Проективные и коллокационные методы	10
1.4. Итеративный метод для решения линейных и нелинейных интегральных уравнений	13
Глава 2. Элементы теории сингулярных уравнений и квадратурные представления ..	16
2.1. Понятие сингулярного интеграла	16
2.2. Сингулярный интеграл по замкнутому контуру	19
2.3. Сингулярный интеграл по отрезку	24
2.4. Сингулярный интеграл по кусочно-гладкой кривой	33
2.5. Сингулярный интеграл с ядром Гильберта	38
2.6. Квадратурные формулы для сингулярного интеграла с ядром Гильберта	40
2.7. Квадратурные формулы для сингулярного интеграла на окружности	44
2.8. Квадратурные формулы для сингулярного интеграла на отрезке	46
Глава 3. Элементы теории потенциала	50
3.1. Функция источника и протекание жидкости через точки кривой. Плоский случай	50
3.2. Потенциал двойного слоя и его свойства. Плоский случай	64
3.3. Потенциал двойного слоя и его производные Плоский случай	65
3.4. Потенциал простого слоя и его производные. Плоский случай	66
3.5. Функция источника и потенциалы. Пространственный случай	69
Глава 4. Краевые задачи и вычисление одномерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов	84
4.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа	84
4.2. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца	91
4.3. Задача Неймана для уравнения Лапласа	94
4.4. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца	101
4.5. Задача Неймана для уравнения Лапласа в плоском случае. Сведение ее к гиперсингулярному интегральному уравнению	105
4.6. Гиперсингулярный интеграл на отрезке	107
4.7. Гиперсингулярный интеграл от периодических функций	113
4.8. Гиперсингулярный интеграл на отрезке. Интерполяционный метод	117
4.9. Гиперсингулярный интеграл от периодических функций. Интерполяционный метод	118
Глава 5. Квадратурные формулы для двумерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов	120
5.1. Квадратурные формулы для двумерного сингулярного интеграла	120
5.2. Квадратурные формулы для интеграла задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца	128

5.3.	Квадратурные формулы для интеграла задачи Неймана для уравнения Лапласа и Гельмгольца	132
5.4.	Гиперсингулярный интеграл на сфере	143
5.5.	Гиперсингулярный интеграл на торе	158
Глава 6.	Метод численного решения одномерных сингулярных интегральных уравнений первого рода	167
6.1.	Характеристическое уравнение на отрезке	167
6.2.	Полное уравнение на отрезке	182
6.3.	Уравнение на системе непересекающихся отрезков	186
6.4.	Уравнение на окружности	190
6.5.	Уравнения с ядром Гильберта	194
6.6.	Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа	199
6.7.	Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца	202
Глава 7.	Одномерные сингулярные интегральные уравнения первого рода	205
7.1.	Об одном свойстве сингулярных интегральных операторов	205
7.2.	Общая схема построения численных методов интерполяционного типа	208
7.3.	Уравнение на отрезке и системе отрезков	210
7.4.	Уравнение на окружности и с ядром Гильберта	214
7.5.	Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа	215
Глава 8.	Одномерные сингулярные интегральные уравнения второго рода	219
8.1.	Уравнение с постоянными коэффициентами на отрезке	219
8.2.	Уравнение с постоянными коэффициентами на окружности	221
8.3.	Уравнение с постоянными коэффициентами с ядром Гильберта	222
8.4.	Уравнение с переменными коэффициентами на отрезке	224
8.5.	Примеры численного решения	226
Глава 9.	Дискретные вихревые системы в аэродинамике	238
9.1.	О постановке задач аэродинамики	238
9.2.	Основные положения метода дискретных вихрей	240
9.3.	Основные дискретные вихревые системы	242
Глава 10.	Метод дискретных особенностей для плоских стационарных задач аэродинамики. Дискретные вихри, вихревые пары, диполи, стоки/источники	248
10.1.	Задачи для профиля, решетки профилей	248
10.2.	Телесный и пронизаемый профили	263
10.3.	Профиль при наличии устройств отсоса внешнего потока	267
Глава 11.	Метод дискретных вихрей для плоских нестационарных задач	278
11.1.	Линейная нестационарная задача для тонкого профиля. Гипотеза Кутта-Жуковского	278
11.2.	Нелинейная нестационарная задача для произвольного кусочно-гладкого контура	282

11.3.	Моделирование обтекания профиля с эжекцией и выдувом струи.....	285
11.4.	Моделирование обтекания колеблющегося профиля вблизи твердых границ.....	293
11.5.	Моделирование взаимодействия системы колеблющихся крыльев.....	303
11.5.1.	<i>Нелинейное взаимодействие системы крыльев (схема типа «биплан»).....</i>	<i>304</i>
11.5.2.	<i>Нелинейное взаимодействие системы крыльев (схема типа «тандем»).....</i>	<i>306</i>
11.6.	Моделирование струйных течений.....	308
Глава 12.	Вычислительные технологии на основе дискретных особенностей для плоских нестационарных задач.....	314
12.1.	О физических аспектах постановки задач аэродинамики.....	314
12.2.	О постановках математических задач аэродинамики.....	315
12.3.	О математических моделях плоских нестационарных течений.....	317
12.4.	Дискретные математические модели и элементы вычислительных технологий для плоских нестационарных течений.....	318
12.4.1.	<i>Дискретизация интегральных представлений.....</i>	<i>318</i>
12.4.2.	<i>Элементы вычислительных технологий для плоских течений.....</i>	<i>319</i>
12.4.3.	<i>Алгоритм выделения однозначной ветви и положения разреза многозначной функции для линейного контура.....</i>	<i>320</i>
12.4.4.	<i>Алгоритм преобразования для выделения однозначной ветви и разреза многозначной функции (заданной на произвольном контуре).....</i>	<i>322</i>
12.4.5.	<i>Дискретные представления моделей (как функций комплексной переменной).....</i>	<i>325</i>
12.4.6.	<i>Дискретные представления моделей (как функций действительных переменных).....</i>	<i>325</i>
12.4.7.	<i>Математические постановки задач для дискретных моделей.....</i>	<i>326</i>
12.5.	Алгоритмы вычислительных технологий для математических моделей плоских нестационарных течений.....	327
12.5.1.	<i>Последовательность вычислений при моделировании нестационарного отрывного обтекания подвижного, деформирующегося контура (этапы I-VI).....</i>	<i>327</i>
12.5.2.	<i>Алгоритм преобразования дискретных особенностей.....</i>	<i>330</i>
12.5.3.	<i>Тестовые результаты применения вычислительных технологий.....</i>	<i>332</i>
12.6.	Моделирование вращательного движения системы крыльев.....	334
Глава 13.	Метод дискретных вихрей в пространственных задачах.....	341
13.1.	Линейная стационарная задача.....	341
13.2.	Линейная стационарная задача для крыла произвольной формы в плане.....	346
13.3.	Бесциркуляционное обтекание произвольной поверхности.....	348
13.4.	Задача нестационарного обтекания кусочно-гладких поверхностей.....	352
13.5.	Моделирование колебания крыла конечного размаха.....	359
13.6.	Моделирование трехмерных струйных течений.....	367
	Список литературы.....	372

Предисловие

Предлагаемая вниманию читателей книга является результатом многолетнего международного научного сотрудничества, по развитию методов численного решения сингулярных интегральных уравнений, построения вычислительных технологий на их основе и их применению для решения прикладных задач.

Расширение спектра прикладных задач в рамках применимости теории потенциалов, в аэро/гидродинамике, радиоэлектронике, бионике, в теории фильтрации, в экологии, в энергетике привело к активизации исследований и развитию теории численных методов решения не только сингулярных, но и гиперсингулярных интегральных уравнений, т.е. уравнений, в которых ядро может иметь, как особенность Коши, так и особенность более высокого порядка. Необходимость исследования прикладных проблем в пространственной постановке и расширение возможностей компьютерной техники привели к возникновению вычислительных технологий на основе дискретных особенностей для прямого компьютерного моделирования сложных явлений, систем и процессов.

В книге представлено построение численных методов решения сингулярных интегральных уравнений как на канонических, так и на произвольных контурах и поверхностях. Представлено метод и алгоритм преобразований, изменяющий порядок особенностей и свойства системы дискретных особенностей, составляющих основу вычислительных технологий. На примере аэрогидродинамических задач показано, как метод дискретных вихрей (МДВ, метод численного решения задач аэродинамики, практическое применение которого началось еще с середины XX столетия) получает свое дальнейшее развитие и обобщение, как метод дискретных особенностей (МДО).

Приведены примеры использования особенностей и вихревых элементов разных типов, построения плоских и пространственных математических моделей в аэрогидродинамике, а также результаты численного моделирования с их применением.

Материалы отдельных разделов книги входят в лекционные курсы «Методы интегральных уравнений» и «Вычислительные технологии моделирования» читаемых студентам старших курсов факультета кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченка.

С. А. Довгий
И. К. Лифанов
Д. И. Черный

Глава 1. Интегральные уравнения и методы их решения

В данной главе представлено общее понятие интегральных уравнений и рассмотрены некоторые методы их решения в случае "хороших" ядер.

1.1. Классификация интегральных уравнений

Интегральным уравнением называется уравнение, когда неизвестная функция входит и под знак интеграла. В общем случае интегральное уравнение имеет следующий вид:

$$\int_a^b K(x, s, u(s)) ds = f(x, u(x)), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1.1)$$

Здесь x является независимой переменной, $u(x)$ – неизвестной функцией, функция $K(x, s, u(s))$ называется ядром интегрального уравнения, s является переменной интегрирования.

Многие проблемы в науке и технике (механике, гидродинамике, аэродинамике, электродинамике, квантовой механике, теории упругости и т.д.) сводятся к интегральным уравнениям. Интегральная форма уравнений движения в форме законов сохранения используется также и при построении консервативных разностных схем для некоторого типа задач (в частности, в механике сплошной среды).

Для решения некоторых задач гораздо удобнее использовать интегральные уравнения, нежели дифференциальные. Например [91, 116], задача Коши

$$\frac{du}{dx} = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0 \quad (1.1.2)$$

может быть сформулирована в виде интегрального уравнения

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(s, u(s)) ds. \quad (1.1.3)$$

Таким образом, интегральное уравнение содержит полную информацию о задаче и для него не надо дополнительных условий (начальных и граничных).

Уравнение (1.1.1) записано для случая одной независимой переменной x . Однако легко написать его многомерный аналог для многих независимых переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Многомерное интегральное уравнение для некоторой области G в рассматриваемом n -мерном пространстве может быть записано в виде

$$\int_G K(x, s, u(s)) ds = f(x, u(x)), \quad x \in G, \quad (1.1.4)$$

или

$$\int_G K(x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_n, u(s_1, \dots, s_n)) ds_1 \dots ds_n = f(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n.$$

Методы решения одномерного уравнения (1.1.1), естественно, переносятся на случай многомерного интегрального уравнения (1.1.4) (одномерные интегралы заменяются многомерными). В то же время для дифференциальных уравнений переход от одномерного случая (обыкновенные уравнения) к многомерному (уравнения с частными производными) требует совершенно других подходов и методов решения.

В силу сказанного далее будем ограничиваться рассмотрением одномерного уравнения (1.1.1).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи уравнения (1.1.1), которые часто встречаются в приложениях и наиболее изучены.

Уравнение (1.1.1) называется линейным интегральным уравнением, если неизвестная функция входит в него линейно. Уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.1.5)$$

является одним из них.

Уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1.6)$$

В уравнениях Фредгольма ядро $K(x,s)$ определено и ограничено на квадрате $a \leq x \leq b, a \leq s \leq b$, т. е. $|K(x,s)| \leq C$ для всех точек на квадрате, где $C > 0$ – некоторая константа, λ является числовым параметром, функции $K(x,s)$ и $f(x)$, которая называется правой частью, известны. Когда в уравнениях (1.1.5) и (1.1.6) имеем переменный предел интегрирования (например, верхний), тогда уравнения (1.1.5) и (1.1.6) являются в уравнениями Вольтерра первого и второго рода соответственно

$$\int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.1.7)$$

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1.8)$$

Далее будут рассматриваться только уравнения Фредгольма второго рода, так как уравнения Фредгольма первого рода являются некорректными и требуют для их исследования специфических методов.

Если правая часть уравнения (1.1.6) равна нулю, то это уравнение называется однородным уравнением Фредгольма второго рода, которое может быть записано в виде

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1.9)$$

Это уравнение имеет нулевое (тривиальное) решение $u(x) = 0$. Для него можно сформулировать задачу о собственных значениях. Если уравнение (1.1.9) имеет решение $u = \varphi_i(x)$, которое не равно нулю для некоторого значения параметра λ_i , тогда этот параметр называется собственным значением для ядра $K(x,s)$ или уравнения (1.1.9), а решение $u = \varphi_i(x)$ называется собственной функцией.

Если ядро $K(x,s)$ является непрерывной функцией на квадрате $a \leq x \leq b, a \leq s \leq b$, а λ не является собственным значением для этого ядра, тогда неоднородное уравнение (1.1.6) имеет единственное непрерывное решение $u(x)$, $x \in [a,b]$, для любой непрерывной части $f(x)$. В противном случае (λ является собственным значением) неоднородное уравнение или не имеет решений, или имеет их бесконечно много.

Если ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны вместе с их производными порядка p , то решение $u(x)$ также имеет непрерывные производные до порядка p включительно.

В практических приложениях [102, 116] большую роль играют уравнения Фредгольма второго рода с действительным симметричным ядром $K(x, s)$, т. е. когда $K(x, s) = K(s, x)$.

Симметричное ядро обладает следующими свойствами:

- 1) симметричное ядро имеет не менее одного собственного значения;
- 2) все собственные значения симметричного ядра являются действительными;
- 3) собственные функции $\varphi_i(x)$ симметричного ядра являются взаимноортогональными, то есть

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad i \neq j.$$

Уравнение Вольтерра (1.1.8) не имеет собственных значений. Соответствующее однородное уравнение ($f(x) \equiv 0$), имеет только тривиальное решение $u(x) = 0$. Следовательно, неоднородное уравнение (1.1.8) имеет решение и в этом случае это решение всегда единственное для любого значения λ .

Итак, для рассмотренного интегрального уравнения основными задачами являются следующие:

- 1) нахождение решения неоднородного интегрального уравнения для данного значения параметра λ ;
- 2) вычисление собственных значений и нахождение соответствующих собственных функций однородного интегрального уравнения.

Обе сформулированные задачи очень интересны для теории и приложений интегральных уравнений. Однако первая задача более интересна (с нашей точки зрения) в практических приложениях. Так как найти аналитическое решение $u(x)$ можно очень редких случаях, развиваются приближенные методы численного решения для этих уравнений. При этом уравнение Вольтерра (1.1.8) можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма. Функция $u(x)$ называется решением уравнения (1.1.6), если справедливо тождество

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u(s) ds \equiv f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1.10)$$

При построении численных методов часто предполагается, что параметр λ не является собственным значением уравнения и уравнение имеет единственное решение. В этом случае можно полагать параметр λ равным единице, что эквивалентно введению нового ядра и рассмотрению уравнения

$$u(x) - \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.1.11)$$

1.2. Квадратурные методы решения интегральных уравнений

Из численных методов решения интегральных уравнений наиболее широко используемыми являются квадратурные методы. Эти методы основаны на применении формул численного интегрирования для вычисления определенных интегралов, входящих в интегральные уравнения. Такие формулы были указаны в предыдущих главах.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение (1.1.1). Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, и заменим интеграл в уравнении (1.1.1) некоторой квадратурной формулой с помощью узлов x_j :

$$\sum_{i=1}^n c_i K(x_j, x_i, u_i) = f(x_j, u_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2.1)$$

где c_i – коэффициенты квадратурной формулы численного интегрирования, $u_i = u(x_i)$.

Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений. Решая ее, получаем значения сеточной функции в выбранных узлах отрезка $[a, b]$. Для практического решения этой системы можно использовать, например, метод Ньютона решения систем нелинейных алгебраических уравнений [9, 24, 64].

Вопрос о сходимости сеточного решения u_i к значениям требуемой функции $u(x_i)$ при $n \rightarrow \infty$ может быть рассмотрен только для конкретного вида интегрального уравнения. В общем случае исследование сходимости численного метода – сложная задача.

Для линейного интегрального уравнения система (1.2.1) переходит в систему линейных алгебраических уравнений. В частности, для уравнения Фредгольма второго рода (1.1.11) эта система принимает вид

$$u_i - \sum_{i=1}^n c_i K(x_j, x_i) u_i = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.2.2)$$

Система уравнений (1.2.2) может быть решена одним из методов решения систем линейных алгебраических уравнений, для примера, методом Гаусса с выбором максимального по модулю члена на главной диагонали.

1.3. Вырожденные ядра. Проективные и коллокационные методы

Считается, что ядро интегрального уравнения Фредгольма (1.1.11) является вырожденным, если это ядро имеет вид

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \psi_i(s), \quad (1.3.1)$$

где все функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Подставляя выражение (1.3.1) для ядра $K(x, s)$ в уравнение Фредгольма (1.1.11) получаем следующий вид требуемого решения:

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x), \\ c_i &= \int_a^b \psi_i(s) u(s) ds, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где c_i – неизвестные константы, так как $u(x)$ пока неизвестна. Для нахождения этих констант можно поступить следующим образом. Умножим равенства (1.3.2) почленно на $\psi_j(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$. Тогда получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно констант c_i , $i = 1, \dots, n$:

$$c_j - \sum_{i=1}^n c_i a_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.3.3)$$

где $a_{i,j} = \int_a^b \varphi_i(x)\psi_j(x)dx$, $b_j = \int_a^b \psi_j(x)f(x)dx$.

Пусть матрица системы (1.3.3) будет невырожденной, т. е. эта система имеет единственное решение. Тогда из этой системы находим значения c_i , $i=1, \dots, n$, и подставляем их в выражение (1.3.2). После этого находим конкретный вид решения $u(x)$.

Теперь пусть ядро уравнения (1.1.11) не представляется в виде (1.3.1), но существует последовательность ядер $K_n(x, s)$ такого вида, т. е.

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^n \varphi_{n_i}(x)\psi_{n_i}(s), \quad (1.3.4)$$

которые приближают ядро $K(x, s)$ в некотором смысле. Наиболее часто эти приближения понимают либо в виде

$$\|K - K_n\|_c = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, s) - K_n(x, s)| ds, \quad (1.3.5)$$

или в виде

$$\|K - K_n\|_{L_2} = \left(\int_a^b \int_a^b [K(x, s) - K_n(x, s)]^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3.6)$$

при условии, что $\|K - K_n\|_c \rightarrow 0$ или $\|K - K_n\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда за приближенное решение $u_n(x)$ берем решение уравнения Фредгольма

$$u_n(x) - \int_a^b K_n(x, s)u_n(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.3.7)$$

Решение $u_n(x)$ уравнения (1.3.7) находим по описанному выше в данном параграфе алгоритму.

Описанный метод вырожденного ядра начинает работать, когда можно найти последовательность вырожденных ядер $K_n(x, s)$, аппроксимирующих исходное ядро $K(x, s)$. Например, если исходное ядро достаточно гладкое (оно имеет все частные производные достаточно высокого порядка), тогда в качестве $K_n(x, s)$ возможно взять полином Тейлора степени n по переменным x и s для ядра $K(x, s)$.

В частном случае, если $K(x, s) = g(x \cdot s)$ и $g(v) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i v^i$, берем

$$K_n(x, s) = \sum_{i=0}^n a_i x^i s^i, \quad (1.3.8)$$

и система (1.3.3) принимает вид

$$c_j - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+j+1} [b^{i+j+1} - a^{i+j+1}] c_i = a_j \int_a^b x^j f(x) dx, \quad j=0, 1, \dots, n-1. \quad (1.3.9)$$

В добавление

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i, \\ \|K - K_n\|_c = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b \left| \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i s^i \right| ds.$$

Обратимся теперь к проективному методу, который достаточно близок к методу вырожденного ядра, и состоит в следующем.

Пусть L_2 является гильбертовым пространством, $L_2^{(n)}$ – конечномерное подпространство и P_n – ограниченный оператор проектирования из L_2 в $L_2^{(n)}$, т. е. P_n является ограниченным линейным оператором из L_2 в $L_2^{(n)}$, при условии $P_n x = x$ для всех $x \in L_2^{(n)}$. Тогда $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\| \leq \|P_n\|^2$, откуда получаем $\|P_n\| \geq 1$.

Проективный метод для решения уравнения $(I - K)u = f$ состоит в переходе к уравнению

$$P_n(I - K)u_n = P_n f, \quad u_n \in L_2^{(n)}. \quad (1.3.10)$$

Из этой общей схемы получаем метод Галеркина. Пусть в представлении (1.3.4) ядра $K_n(x, s)$ имеем $\varphi_{n,i}(x) = \varphi_i(x)$, $\psi_{n,i}(s) = \psi_i(s)$, $i = 1, \dots, n$, как, например, в (1.3.8), и пусть $f(x)$ может быть представлена линейной комбинацией функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, для достаточно больших n , т. е. функцию $f(x)$ можно записать в виде

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n b_j \varphi_j(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.3.11)$$

Тогда приближенное решение $u_n(x)$ ищем из уравнения

$$u_n(x) - \int_a^b K_n(x, s) u_n(s) ds = f_n(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.3.12)$$

Из уравнения (1.3.12) следует, что решение $u_n(x)$ может быть представлено линейной комбинацией тех же функций, т. е.

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.3.13)$$

Если функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, взаимно ортогональны на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$, $i = 1, 2, \dots$, то уравнение (1.3.12) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$c_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} c_i = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.3.14)$$

где коэффициенты b_j даны в (1.3.11), а a_{ij} – в формуле (1.3.3).

Определение приближенного решения $u_n(x)$ на основе решения системы (1.3.14) и формулы (1.3.13) называют проективным методом решения исходного уравнения Фредгольма второго рода. Это название связано с тем, что уравнение (1.3.12) есть проекция уравнения (1.3.11) на множество функций, которые являются произвольными линейными комбинациями функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

К рассмотренным в данном параграфе приближенным методам примыкает также метод коллокационных методов.

Пусть $C[a, b]$ является банаховым пространством, $a \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq b$ и $v_1(x), \dots, v_n(x)$ являются непрерывными на $[a, b]$ функциями с $\det\{v_i(s_j)\} \neq 0$. Построим метод коллокаций для функции

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_i(x). \quad (1.3.15)$$

Определим остаток как

$$r_n(x) \equiv u_n(x) - Ku_n(x) - f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.3.16)$$

где

$$Ku_n(x) = \int_a^b K(x, s)u_n(s)ds.$$

Будем находить числа a_1, a_2, \dots, a_n из условия

$$r_n(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x_i = s_i,$$

порождающего систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_j \left\{ v_j(x_i) - \int_a^b K(x_i, s)v_j(s)ds \right\} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.17)$$

Чтобы показать, что система равенств (1.3.15) и (1.3.17) определяет проективный метод, полагаем $X_n = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n(x)\}$ (совокупность произвольных линейных комбинаций функций $v_1, v_2, \dots, v_n(x)$). Заметим, что из условия $\det\{v_i(s_j)\} \neq 0$ получаем линейную независимость системы функций $v_1, v_2, \dots, v_n(x)$. Для произвольной функции $u(x) \in C[a, b]$ определим $P_n : u(x) \rightarrow u_n(x)$, где $u_n(x)$ является элементом в X_n и определяется из условия совпадения в точках x_1, x_2, \dots, x_n , с функцией $u(x)$, т. е.

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^n c_j v_j(x), \quad (1.3.18)$$

где коэффициенты c_1, \dots, c_n выбираются из условия

$$\sum_{j=1}^n c_j v_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.19)$$

Система (1.3.19) однозначно разрешима, и в силу линейной независимости функций $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ получаем, что $P_n u(x) = u(x)$ для любой функции $u(x) \in X_n$, т. е. оператор P_n действительно является оператором проектирования пространства $C[a, b]$ на пространство X_n .

Под коллокационным методом в общем случае понимают метод, в котором значения приближенного решения находят в узловых точках сетки, которое методом интерполяции восстанавливают на всем отрезке.

1.4. Итеративный метод для решения линейных и нелинейных интегральных уравнений

Одним из наиболее простых итеративных методов является метод последовательных приближений, который мы построим для интегрального уравнения Фредгольма второго рода (1.1.11). Метод последовательных приближений состоит в построении последовательности функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots$, сходящейся к функции $u(x)$ в некотором смысле, причем функция $u_n(x)$ выражается через функцию $u_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, а функция $u_0(x)$ задается из некоторых соображений. Для уравнения (1.1.11) метод последовательных приближений можно определить в виде

$$u_n(x) - \int_a^b K(x,s)u_{n-1}(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad n=1,2,\dots, \quad (1.4.1)$$

где $u_0(x)$ – известная функция.

Если функции $K(x,s)$, $f(x)$ являются непрерывными и

$$\max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x,s)| ds < 1, \quad (1.4.2)$$

тогда последовательные приближения $u_n(x)$ равномерно сходятся к непрерывному решению $u(x)$ уравнения (1.1.11), т. е.

$$\max_{x \in [a,b]} |u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.4.3)$$

Условие (1.4.2) является достаточным условием сходимости.

Для интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u(x) - \int_a^x K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad (1.4.4)$$

рассмотрим метод последовательных приближений:

$$u_n(x) - \int_a^x K(x,s)u_{n-1}(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad n=1,2,\dots, \quad u_0(x) = f(x). \quad (1.4.5)$$

Если функции $K(x,s)$, $f(x)$ непрерывны, тогда последовательные приближения равномерно сходятся (см. (1.4.3)) к непрерывному решению $u(x)$ уравнения (1.4.4). Важно, что метод последовательных приближений можно применять и для решения нелинейных интегральных уравнений. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) - \int_a^b K(x,s,u(s))ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad (1.4.6)$$

где $K(x,s,p)$ – непрерывная функция трех переменных в соответствующей области.

Определим последовательные аппроксимации

$$u_n(x) - \int_a^b K(x,s,u_{n-1}(s))ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad n=1,2,\dots, \quad u_0(x) = f(x). \quad (1.4.7)$$

Если функция $f(x)$ является непрерывной, а функция $K(x,s,p)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной p , т. е.

$$|K(x,s,p_1) - K(x,s,p_2)| \leq L|p_1 - p_2|, \quad (1.4.8)$$

для любых действительных p_1 и p_2 , L – константа, то при выполнении условия

$$L(b-a) < 1 \quad (1.4.9)$$

последовательные аппроксимации $u_n(x)$ равномерно сходятся к решению уравнения (1.4.7).

Для нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) - \int_a^x K(x,s,u(s))ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad (1.4.10)$$

рассматривают следующие последовательные приближения:

$$u_n(x) - \int_a^x K(x,s,u_{n-1}(s))ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad n=1,2,\dots, \quad u_0(x) = f(x). \quad (1.4.11)$$

Если функции $f(x)$, $K(x, s, p)$ непрерывны и $K(x, s, p)$ удовлетворяет условию Липшица (1.4.8), тогда последовательные приближения $u_n(x)$ равномерно сходятся к непрерывному решению уравнения (1.4.10). При этом условие (1.4.9) не обязательно должно выполняться.

Ниже представлен метод Ньютона для нахождения решения построением последовательных приближений для нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) - \int_a^b K(x, s, u(s)) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.4.12)$$

где функции $K(x, s, p)$, $\frac{\partial K(x, s, p)}{\partial p}$ и $f(x)$ непрерывны.

Идея метода Ньютона состоит в оценке последовательности функций

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + z_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.13)$$

где $z_n(x)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$z_n(x) - \int_a^b \frac{\partial K}{\partial p}(x, s, u_n(s)) z_n(s) ds = -u_n(x) + \int_a^b K(x, s, u_n(s)) ds + f(x). \quad (1.4.14)$$

Сходимость функций $u_n(x)$ к решению $u(x)$ уравнения (1.4.12) зависит от первого приближения $u_1(x)$. Существует другой вариант метода Ньютона. Вместо уравнения (1.4.14) рассматривают уравнение

$$z_n(x) - \int_a^b \frac{\partial K}{\partial p}(x, s, u_0(s)) z_n(s) ds = -u_n(x) + \int_a^b K(x, s, u_n(s)) ds + f(x). \quad (1.4.15)$$

Важно заметить, что ядро $\frac{\partial K}{\partial p}(x, s, u_n(s))$ уравнения (1.4.14) зависит от итерационного числа n , а ядро $\frac{\partial K}{\partial p}(x, s, u_0(s))$ уравнения (1.4.15) не зависит от него.

Глава 2. Элементы теории сингулярных уравнений и квадратурные представления

2.1. Понятие сингулярного интеграла

Ниже рассматриваются лишь линии, расположенные на плоскости с декартовой правой системой координат OXY . Иногда точки плоскости будем рассматривать как комплексные числа и обозначать их $t = x + iy$, где i – мнимая единица.

Под гладкими линиями будем понимать простые линии, т.е. которые не пересекают сами себя.

Гладкой разомкнутой кривой (дугой) L будем называть линию, которую можно описать параметрически следующим образом [98]:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leq s \leq s_b, \quad (2.1.1)$$

где s_a и s_b – некоторые конечные постоянные, а $x(s)$, $y(s)$ и $x'(s)$, $y'(s)$ – непрерывные функции на $[s_a, s_b]$, причем производные одновременно в нуль не обращаются. При этом различным значениям параметра $s \in [s_a, s_b]$ соответствуют различные точки кривой L .

Если через $t = x(s) + iy(s)$ обозначить точки кривой L , то между t и s существует взаимно однозначное соответствие ($t \in L, s \in [s_a, s_b]$) и $t'_s = x'(s) + iy'(s)$.

Иногда кривую L , описанную выше, будем обозначать ab , где $a = t(s_a)$, $b = t(s_b)$.

Гладким замкнутым контуром L будем называть гладкую кривую, у которой $x(s_b) = x(s_a)$, $y(s_b) = y(s_a)$, причем

$$\begin{aligned} x'(s_b - 0) &= x'(s_a + 0), \\ y'(s_b - 0) &= y'(s_a + 0). \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае функции $x(s)$, $y(s)$ и $x'(s)$, $y'(s)$ можно рассматривать как периодические с периодом $T = s_b - s_a$.

Гладкой линией (простой) будем называть совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых гладких контуров, не имеющих общих точек (в том числе и концов).

Кусочно-гладкой кривой будем называть кривую, состоящую из конечного числа гладких разомкнутых кривых, не имеющих общих точек, за исключением, быть может, концов. При этом будем говорить, что эта кривая имеет только угловые точки, если в каждом узле любые две гладкие кривые сходятся под углами, отличными от нулевого, т.е. узел не является точкой возврата.

В добавлении I в [98] показано следующее. Пусть L – простая кусочно-гладкая кривая (т.е. состоит из конечного числа гладких разомкнутых кривых a_1a_2 , $a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$, расположенных так, что конечная точка каждой предыдущей гладкой кривой совпадает с начальной точкой последующей), которая имеет только угловые узлы. Тогда для любой пары точек t_1, t_2 на кривой L выполняется неравенство

$$K_0 \sigma(t_1, t_2) \leq r(t_1, t_2) \leq \sigma(t_1, t_2), \quad (2.1.2)$$

где:

1) $\sigma(t_1, t_2)$ – длина части кривой L , заключенной между точками t_1 и t_2 , причем если L – замкнутая, то $\sigma(t_1, t_2)$ обозначает меньшую длину;

- 2) $r(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$ – расстояние между точками t_1 и t_2 на плоскости OXY ;
 3) константа $K_0 \in (0, 1)$ не зависит от положения точек t_1 и t_2 на кривой L .

Заметим, что если кусочно-гладкая кривая L имеет только угловые узлы, то для ее точек также выполняется неравенство (2.1.2).

Определение 2.1.1. Функция $\varphi(t)$ переменной t (вообще, комплексной) удовлетворяет условию $H(\mu)$ (условию Гёльдера степени μ) на данном множестве D значений этой переменной, если для любых двух значений t_1 и t_2 из этого множества имеем

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\mu, \quad (2.1.3)$$

где A и μ – положительные числа, $0 < \mu \leq 1$. Постоянную A называют *коэффициентом*, а μ – *показателем* условия $H(\mu)$. Если показатель μ нас не интересует, то будем говорить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H (или принадлежит классу H) на множестве D , и будем писать $\varphi(t) \in H(\mu)$ или $\varphi(t) \in H$.

Заметим, что если $\varphi(t) \in H(\mu)$, то и $|\varphi(t)| \in H(\mu)$.

Понятие условия H обобщается на случай функции нескольких аргументов. Функция $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет условию $H(\mu_1, \dots, \mu_n)$ (или просто H) на множестве D переменных t_1, t_2, \dots, t_n , если для любых двух точек (t'_1, \dots, t'_n) и (t''_1, \dots, t''_n) из этого множества выполняется неравенство

$$|\varphi(t''_1, \dots, t''_n) - \varphi(t'_1, \dots, t'_n)| \leq A_1 |t''_1 - t'_1|^{\mu_1} + \dots + A_n |t''_n - t'_n|^{\mu_n}, \quad (2.1.4)$$

где $A_i \geq 0$, $0 < \mu_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Из (2.1.4) следует, что если функция $\varphi(t_1, \dots, t_n) \in H$, то она принадлежит классу $H(\mu_k)$ по переменной t_k , $k = 1, \dots, n$, равномерно* относительно остальных переменных. Верно и обратное.

В дальнейшем, говоря, что функция $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет условию H по каждой переменной в отдельности, будем предполагать, что это условие удовлетворяется равномерно относительно остальных переменных.

Гладкая разомкнутая кривая L называется *кривой Ляпунова*, если производная $t'(s)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на $[s_a, s_b]$. В этом случае, как показано в [98], отношение $\frac{t - t_0}{s - s_0} = \frac{t(s) - t(s_0)}{s - s_0}$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ по обоим переменным s и s_0 и не обращается в нуль на $[s_a, s_b]$. Последнее вытекает из следующей леммы, доказанной там же

Лемма 2.1.1. Пусть функция $f(s)$ действительного переменного S , заданная на отрезке $[s_a, s_b]$, имеет непрерывную на этом отрезке n -ю производную $f^{(n)}(s)$. Тогда функция

$$\begin{cases} F(s_0, s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}, & s, s_0 \in [s_a, s_b], \\ F(s, s) = \frac{df(s)}{ds} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

* Т. е. $|\varphi(t_1, \dots, t''_k, \dots, t_n) - \varphi(t_1, \dots, t'_k, \dots, t_n)| < A|t''_k - t'_k|^{\mu_k}$, где константа A не зависит от t_1, \dots, t_n

имеет непрерывными все частные производные $(n-1)$ -го порядка, т.е.

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l}, \quad k+l=n-1;$$

если $f^{(n)}(s) \in H(\mu)$ на $[s_a, s_b]$, то предыдущие частные производные принадлежат классу $H(\mu)$ по обем переменным, и имеет место представление

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \frac{k(s_0, s)}{|s_0 - s|^l}, \quad k+l=n, \quad (2.1.6)$$

где $1-\mu < \lambda = \text{const} < 1$, $k(s_0, s) \in H$, λ произвольно взято из указанного промежутка.

Доказательство. Справедливость первого пункта вытекает из следующих формул:

$$f(s) - f(s_0) = \int_{s_0}^s f'(\sigma) d\sigma = (s-s_0) \int_0^1 f'[s_0 + u(s-s_0)] du, \quad (2.1.7)$$

т.е.

$$F(s_0, s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} = \int_0^1 f'[s_0 + u(s-s_0)] du,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \int_0^1 u^k (1-u)^l f^{(n)}[s_0 + u(s-s_0)] du, \quad (2.1.8)$$

где $k+l=n-1$.

Для доказательства второго пункта вернемся в (2.1.8) к переменной σ , получим (заменяя k на $k-1$)

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0 - s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \frac{1}{(s-s_0)^n} \int_{s_0}^s (\sigma - s_0)^{k-1} (s-\sigma)^l f^{(n)}(\sigma) d\sigma,$$

где $k-1+l=n-1$, т.е. $k+l=n$.

Дифференцируя обе части по s , полагая $l \geq 1$ и снова возвращаясь к переменной интегрирования u , получаем

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l} = \frac{1}{s-s_0} \int_0^1 u^{k-1} (1-u)^{l-1} (nu-k) f^{(n)}[s_0 + u(s-s_0)] du. \quad (2.1.9)$$

Обозначая через $\varphi(s_0, s)$ множитель при $\frac{1}{s-s_0}$ в (2.1.9), получаем, что $\varphi(s_0, s) \in H(\mu)$ (так как $f^{(n)}(s) \in H(\mu)$) и

$$\varphi(s_0, s_0) = -f^{(n)}(s_0) \int_0^1 d[u^k (1-u)^l] = 0.$$

Из последнего равенства следует формула (2.1.6). Аналогично рассматриваются случаи $k=n, l=0$ или $k=0, l=n$.

Кривую L будем называть кусочно-ляпуновской, если все ее гладкие части являются кривыми Ляпунова.

Определение 2.1.2. Функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $H^*(\varphi(t) \in H^*)$ на кусочно-гладкой кривой L , если она может быть представлена в виде

$$\varphi(t) = \varphi^*(t) / \prod_{k=1}^p |t - c_k|^{p_k} = \varphi^*(t) / P_L^p(t), \quad (2.1.10)$$

где $\varphi^*(t) \in H_0$ на L (H_0 – это класс функций, принадлежащих классу H на каждой гладкой части кривой L); $\nu_k = \alpha_k + i\beta_k$, $0 \leq \alpha_k < 1$; c_k ($k = 1, \dots, p$) – все узлы кривой L .

Если же хотя бы для одного k будет выполняться неравенство $\alpha_k \geq 1$, то будем писать $\varphi(t) \in H^{**}$. Без уменьшения общности можно считать, что $\varphi^*(t) \in H$ на L .

Напомним теперь определение сингулярного интеграла типа Коши на кусочно-гладкой кривой.

Определение 2.1.3. Пусть точка t_0 не совпадает ни с одним узлом кривой L , т.е. является внутренней точкой. Опишем из t_0 как из центра окружность настолько малого радиуса $\varepsilon > 0$, чтобы она пересекала L ровно в двух точках t' и t'' , и обозначим через l дугу $t't''$. Рассмотрим интеграл $\int_{L \setminus l} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}$. Если при $\varepsilon \rightarrow 0$ этот интеграл стремится к определенному пределу, то этот предел и называется главным значением интеграла по Коши:

$$\Phi(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus l} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in L. \quad (2.1.11)$$

В [98] доказано, что класс H^* функций на кусочно-гладкой кривой L инвариантен относительно операции взятия интеграла в смысле главного значения Коши (сингулярного интеграла), т.е. если $\varphi(t) \in H^*$ на L , то $\Phi(t_0) \in H^*$ на L .

Иногда в данной задаче целесообразно заменить кривую интегрирования L другой кривой Λ (сделать замену переменных в сингулярном интеграле). При этом предполагается, что между точками t гладких частей кривой L и точками τ гладких частей кривой Λ можно установить взаимно однозначное соответствие $t = t(\tau)$ такое, что существует производная $t'(\tau) = \frac{dt}{d\tau}$, отличная от нуля и принадлежащая классу H_0 на Λ .

Пусть далее плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0 (отличной от узлов) и интегрируема на L . Тогда справедлива формула [98]

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = \int_\Lambda \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0}, \quad (2.1.12)$$

где $\psi(\tau) = \frac{(\tau - \tau_0)t'(\tau)}{t(\tau) - t(\tau_0)} \varphi(t(\tau))$; $t_0 = t(\tau_0)$; τ_0 – точка линии Λ .

2.2. Сингулярный интеграл по замкнутому контуру

Вначале рассмотрим сингулярный интеграл

$$I(t_0) = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \quad (2.2.1)$$

по окружности L единичного радиуса с центром в начале координат; $\varphi(t)$ – функция класса H на L .

Удобнее начать с интеграла

$$I_0(t_0) = \int_L \frac{dt}{t - t_0},$$

для которого известно [98], что

$$I_0(t_0) = \pi i. \quad (2.2.2)$$

Выберем на L два множества узлов: $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k}, k=1, \dots, n\}$, таких, что точки $t_k, k=1, \dots, n$, разбивают окружность на n равных частей, а точка t_{0k} является серединой дуги $t_k t_{k+1}$, где полагаем $t_{n+1} = t_1$. В дальнейшем выбранные таким образом множества E и E_0 точек окружности будем называть *каноническим разбиением окружности L* .

Лемма 2.2.1. Для любой точки $t_{0j} \in E_0$ выполняется неравенство

$$\left| \int_L \frac{dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.2.3)$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k=1, \dots, n$. Через $O(1/n)$ ($O_\delta(1/n)$) обозначаем величину одного порядка малости с $1/n$, т.е. в этом случае справа в неравенстве надо подразумевать величину вида B/n (B_δ/n), где константа B (B_δ) не зависит от n . Константа B_δ зависит от параметра δ .

Доказательство. Так как L – единичная окружность с центром в начале координат, то можно записать

$$t_k = e^{i\theta_k}, \quad t_{0k} = e^{i\theta_{0k}},$$

где θ_k и θ_{0k} – полярные углы точек t_k и t_{0k} , $k=1, \dots, n$.

Учитывая периодичность функции $e^{i\theta}$ и обозначая $\eta_m = 2\pi m/n - \pi/n$, $m=1, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} &= - \sum_{k=1}^n \frac{e^{i\eta_{m+1}} - e^{i\eta_m}}{1 - e^{i\eta_m}} = \\ &= \sum_{m=1}^n \left[\operatorname{ctg} \frac{\eta_m}{2} \cos \frac{\Delta \eta_m}{2} - \sin \frac{\Delta \eta_m}{2} + i \left(\cos \frac{\Delta \eta_m}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\eta_m}{2} \sin \frac{\Delta \eta_m}{2} \right) \right] \sin \frac{\Delta \eta_m}{2}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где $\Delta \eta_m = \eta_{m+1} - \eta_m = 2\pi/n$, $m=1, \dots, n$.

Заметим, что числа $\eta_m/2$, $m=1, \dots, n$, расположены симметрично относительно $\pi/2$, поэтому

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\eta_m}{2} = 0. \quad (2.2.5)$$

Из равенств (2.2.4) и (2.2.5) следует

$$\sum_{m=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = -n \sin^2 \frac{\pi}{n} + i \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = i\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.2.6)$$

что вместе с формулой (2.2.2) показывает справедливость неравенства (2.2.3).

Замечание 2.2.1. Выполняется следующая оценка:

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta t_k|}{|t_{0j} - t_k|} \leq O(\ln n), \quad j=1, \dots, n. \quad (2.2.7)$$

Действительно, заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = \sum_{m=1}^n \left[\cos \frac{\eta_{m+1}}{2} + i \sin \frac{\eta_{m+1}}{2} \right] \frac{\sin \Delta \eta_m / 2}{\sin \eta_m / 2},$$

поэтому будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \frac{|\Delta t_k|}{|t_k - t_{0j}|} = \sum_{m=1}^n \frac{|\sin \Delta \eta_m / 2|}{|\sin \eta_m / 2|} \leq C \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \frac{\Delta \eta_m}{2} \frac{2}{\eta_m} = O(\ln n), \quad (2.2.8)$$

где $[x]$ - целая часть от числа x .

Займемся теперь изучением аналогичной квадратурной суммы для интеграла (2.2.1). Пусть множества точек E и E_0 образуют каноническое разбиение окружности L . Обозначим

$$S_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j=1, \dots, n. \quad (2.2.9)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.1. Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на L . Тогда выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| &\leq \theta(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n, \\ \theta(t_{0j}) &= O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln n\right) + |\varphi(t_{0j})| O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Доказательство. Для удобства полагаем $t_{0j} = 1$. В этом случае

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq I_1 + I_2,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t-1} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(1)}{t_k - 1} \Delta t_k \right|, \\ I_2 &= |\varphi(1)| \left| \int_L \frac{dt}{t-1} - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta t_k}{t_k - 1} \right|. \end{aligned}$$

Неравенство (2.2.3) дает оценку для I_2 . Выражение для I_1 преобразуем следующим образом:

$$I_1 \leq I'_1 + I''_1 + I'''_1,$$

где

$$\begin{aligned} I'_1 &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{I_k}^{I_{k+1}} \left[\frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t-1} - \frac{\varphi(t_k) - \varphi(1)}{t_k - 1} \right] dt \right|, \\ I''_1 &= \left| \int_{I_n}^{I_1} \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{t-1} dt \right|, \quad I'''_1 = \left| \frac{\varphi(t_n) - \varphi(1)}{t_n - 1} \right| \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на L , то

$$I''_1 \leq \int_{I_n}^{I_1} \frac{|\varphi(t) - \varphi(1)|}{|t-1|} |dt| \leq A \int_{I_n}^{I_1} |t-1|^{-1+\alpha} |dt|.$$

Для единичной окружности $|dt| = d\theta$ и

$$|t-1| = |e^{i\theta} - 1| = |(\cos \theta - 1) + i \sin \theta| = 2|\sin \theta/2|.$$

Поэтому

$$I''_1 \leq A 2^\alpha \int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1+\alpha} d\theta \leq c_1 \int_0^{\pi/n} \theta^{-1+\alpha} d\theta = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Для I'''_1 получим

$$I_1''' \leq A |t_n - 1|^{-1+\alpha} \frac{2\pi}{n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Для оценки I_1' потребуется преобразование, которое далее неоднократно будем применять:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_k)}{t - t_{0j}} + \frac{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})](t_k - t)}{(t - t_{0j})(t_k - t_{0j})}. \quad (2.2.11)$$

В силу формулы (2.2.11) имеем

$$I_1' \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_k)|}{|t-1|} |dt| + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(1)|}{|t_k - 1|} \frac{|t_k - t|}{|t-1|} |dt| = S_1 + S_2.$$

Так как $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на L и $t = e^{i\theta}$, то

$$S_1 \leq A \left(\frac{2\pi}{n}\right)^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|dt|}{|t-1|} \leq C_2 \frac{1}{n^\alpha} \int_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta} = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Наконец, для суммы S_2 получаем

$$S_2 \leq A \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|t_k - 1|^{1-\alpha}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|dt|}{|t-1|} \leq C_3 \frac{\pi}{n} \int_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta^{2-\alpha}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Подставляя оценки для S_1 и S_2 в неравенство для I_1' , а оценки для I_1' , I_1'' и I_1''' в неравенство для I_1 , видим, что

$$I_1 \leq O(n^{-\alpha} \ln n).$$

Таким образом, теорема 2.2.1 доказана.

Определение 2.2.1. Функция $\varphi(t)$ принадлежит классу П функций на L , если она имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{q-t},$$

где $\psi(t) \in H$ на L , а q – некоторая фиксированная точка на L . Заметим, что можно записать

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \frac{1}{q-t_0} \left[\int_L \frac{\psi(t) dt}{t-t_0} - \int_L \frac{\psi(t) dt}{t-q} \right].$$

Последняя формула показывает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.2.2. Пусть $\varphi(t)$ принадлежит классу П на окружности L , а множества E и E_0 образуют каноническое разбиение L , причем $q \in E_0$ при $j = j_q$. Тогда справедливо неравенство

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq \theta(t_{0j}), \quad j \neq j_q, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.2.12)$$

где величина $\theta(t_{0j})$ имеет вид

$$\theta(t_{0j}) = \frac{1}{|t_{0j} - q|} O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln n\right), \quad j \neq j_q.$$

Несложно заметить, что величина $\theta(t_{0j})$ удовлетворяет неравенствам

$$\theta(t_{0j}) \leq O_l\left(\frac{1}{n^{\lambda_1}}\right), \quad \lambda_1 > 0, \quad (2.2.13)$$

для всех $t_{0j} \in L \setminus l$, где l – сколь угодно малая окрестность точки q , и

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O\left(\frac{1}{n^{\lambda_2}}\right), \quad \lambda_2 > 0. \quad (2.2.14)$$

Очевидно, что в неравенстве (2.2.13) точнее можно написать $O_j(n^{-\alpha} \ln^2 n)$, а в неравенстве (2.2.14) – $O(n^{-\alpha} \ln n)$.

Замечание 2.2.2. Неравенство (2.2.10) остается справедливым и для интеграла $\int_L \frac{\varphi(t, t_0)}{t - t_0} dt$, если $\varphi(t, t_0) \in H(\alpha)$ на L , т.е.

$$\left| \int_L \frac{\varphi(t, t_0) dt}{t - t_0} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k, t_0) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right). \quad (2.2.15)$$

Замечание 2.2.3. Пусть теперь L_1 является замкнутым контуром Ляпунова. Тогда между точками τ этой кривой и точками t стандартной (единичной, с центром в начале координат) окружности L существует взаимно однозначное соответствие $\tau = \tau(t)$, такое, что производная $\tau'(t) = d\tau/dt$ принадлежит классу $H(\beta)$ и не обращается в нуль на L . Если теперь $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ на L_1 , то в силу формулы замены переменной в сингулярных интегралах (2.1.12) получим

$$\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} = \int_L \frac{\psi(t, t_0) dt}{t - t_0}, \quad \psi(t, t_0) = \frac{t - t_0}{\tau(t) - \tau(t_0)} \tau'(t) \varphi(\tau(t)).$$

Рассмотрим теперь на окружности L каноническое разбиение, образованное множествами E и E_0 . Множества точек $\tau_k = \tau(t_k), t_k \in E$, и $\tau_{0k} = \tau(t_{0k}), t_{0k} \in E_0$, назовем *каноническим разбиением* кривой L_1 . Возьмем сумму

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau(t_k))(t_k - t_{0j})}{\tau(t_k) - \tau(t_{0j})} \frac{\Delta \tau_k}{\Delta t_k} \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}}.$$

Так как

$$\frac{\Delta \tau_k}{\Delta t_k} = \frac{\tau(t_{k+1}) - \tau(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \tau'(\tilde{t}_k), \quad \tilde{t}_k \in t_k t_{k+1},$$

а $\tau'(t) \in H(\beta)$ на L , то $|\tau'(\tilde{t}_k) - \tau'(t_k)| \leq A |\tilde{t}_k - t_k|^\beta$, т.е. $\tau'(\tilde{t}_k) = \tau'(t_k) + O(|\tilde{t}_k - t_k|^\beta)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau(t_k))(t_k - t_{0j})}{\tau(t_k) - \tau(t_{0j})} \frac{\tau'(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau(t_k))(t_k - t_{0j})}{\tau(t_k) - \tau(t_{0j})} O(|\tilde{t}_k - t_k|^\beta) \frac{\Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = S_j^1 + S_j^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство (2.2.7), несложно заметить, что

$$|S_j^2| \leq O(n^{-\beta} \ln n).$$

Поэтому из неравенства (2.2.15) и оценки для S_j^2 получаем справедливость соотношения

$$\left| \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}} \right| \leq O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad \lambda > 0. \quad (2.2.16)$$

Пусть теперь кривая L является совокупностью p штук непересекающихся замкнутых кривых Ляпунова L_1, \dots, L_p и множества $E_m = \{\tau_k, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$ и

$E_{0m} = \{\tau_{0k}, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$ образуют каноническое $N_m = n_m - n_{m-1}$ разбиение кривой $L_m, m = 1, \dots, p; n_0 = 0$. Обозначим

$$N = \min_{m=1, \dots, p} N_m$$

и будем в дальнейшем предполагать, что $N_m/N \leq R < +\infty$. Обозначим еще

$$S_{n_p}(\tau_{0j}) = \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n_p,$$

где $\Delta \tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k, k = 1, \dots, n_p, k \neq n_1, \dots, n_p; \Delta \tau_{n_m} = \tau_{n_{m+1}} - \tau_{n_m}, m = 1, \dots, p$.

Оказывается справедливой такая теорема.

Теорема 2.2.3. Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на кривой L . Тогда

для любой точки $\tau_{0j} \in \bigcup_{m=1}^p E_{0m}$ выполняется неравенство

$$\left| I(\tau_{0j}) - S_{n_p}(\tau_{0j}) \right| \leq O(1/N^\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (2.2.17)$$

Замечание 2.2.4. В приложениях для вычисления интеграла (2.2.1) чаще используется квадратурная формула вида

$$S_n^*(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.2.18)$$

где $\Gamma_k = \int_{t_{0k-1}}^{t_{0k}} \varphi(t) dt$.

Для модуля $\left| I(t_{0j}) - S_n^*(t_{0j}) \right|$ справедливы те же оценки, что и для модуля $\left| I(t_{0j}) - S_n(t_{0j}) \right|$.

2.3. Сингулярный интеграл по отрезку

Будем считать, что в сингулярном интеграле (2.2.1) $L = [a, b]$ на действительной оси, а функция $\varphi(t) \in H^*$ на L , т.е. имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu},$$

где $\psi(t) \in H(\alpha)$ на $[a, b], 0 \leq \nu, \mu < 1$.

В этом случае определение (2.1.11) имеет вид

$$\Phi(t_0) = \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{t_0 - \varepsilon} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} - \int_{t_0 + \varepsilon}^b \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \right).$$

Пусть точки $t_0 = a, t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = b$ разбивают отрезок $[a, b]$ на $n+1$ равных частей длины $h = (b-a)/(n+1)$, а точка t_{0j} является серединой отрезка $[t_j, t_{j+1}], j = 0, 1, \dots, n$. Будем говорить, что точки множеств $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[a, b]$ с шагом h .

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3.1. Для любой точки $t_{0j} \in E_0$ выполняется неравенство

$$\left| \int_a^b \frac{dt}{t-t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k-t_{0j}} \right| \leq \frac{hB}{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})}, \quad (2.3.1)$$

где B - некоторая константа.

Отметим здесь же, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{h}{|t_k-t_{0j}|} \leq O(|\ln h|) \quad (2.3.2)$$

Лемма 2.3.2. Пусть теперь функция $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $t_{0j} \in E_0$ справедливо неравенство

$$I_1 \equiv \left| \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t-t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k-t_{0j}} h \right| \leq O(h^\alpha |\ln h|). \quad (2.3.3)$$

Доказательство. Сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} I_1 \leq & \left| \int_a^{t_j} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t-t_{0j}} dt \right| + \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t-t_{0j}} - \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k-t_{0j}} \right) dt \right| + \\ & \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t-t_{0j}} dt \right| + \left| \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{0j})}{t_j-t_{0j}} \right| h = I_1^1 + I_1^2 + I_1^3 + I_1^4. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Так как $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$, то

$$I_1^1 = O(h^\alpha), \quad I_1^3 = O(h^\alpha), \quad I_1^4 = O(h^\alpha).$$

Теперь, используя формулу (2.2.11), получаем

$$I_1^2 \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_k)|}{|t-t_{0j}|} dt + \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|t_k-t|}{|t-t_{0j}|} \frac{|\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})|}{|t_k-t_{0j}|} dt = S_1 + S_2.$$

Для S_1 получаем оценку

$$S_1 \leq Ah^\alpha \left(\int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{t_{0j}-t} + \int_{t_{j+1}}^b \frac{dt}{t-t_{0j}} \right) = O(h^\alpha |\ln h|).$$

Так как для любых k и j имеем неравенство

$$\frac{h}{|t_k-t_{0j}|} \leq 2, \quad (2.3.5)$$

то

$$S_2 \leq Ah \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{|t-t_{0j}| |t_k-t_{0j}|^{1-\alpha}} \leq Ch^\alpha \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{|t-t_{0j}|} = O(h^\alpha |\ln h|).$$

Подставляя теперь оценки для S_1 и S_2 в формулу для I_1^2 , а оценки для I_1^1, \dots, I_1^4 в формулу для I_1 , получаем справедливость леммы 2.3.2.

Из неравенств (2.3.1) и (2.3.3) следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.3.1. Пусть функция $\varphi(t) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$ и множества E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда для любой точки $t_{0j} \in E_0$ имеем

$$|I(t_{0j}) - S_n(t_{0j})| \leq O\left(\frac{h^\alpha |\ln h| + |\varphi(t_{0j})|h}{(t_{0j} - a)(b - t_{0j})}\right), \text{ где } S_n(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)h}{t_k - t_{0j}}. \quad (2.3.6)$$

Наконец, докажем следующую теорему.

Теорема 2.3.2. Пусть $\varphi(t) \in H^*$ на отрезке $[a, b]$. Пусть множества точек E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда справедливо неравенство

$$I \equiv \left| \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k)h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.3.7)$$

где величина $\theta(t_{0j})$ удовлетворяет неравенствам:

а) для всех точек $t_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$, где $\delta > 0$ – сколь угодно малое число:

$$\theta(t_{0j}) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \quad (2.3.8)$$

б) для всех точек $t_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=0}^n \theta(t_{0j}) |\Delta t_{0j}| \leq O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1, \quad (2.3.9)$$

где $|\Delta t_{0j}| = h, \quad j = 0, 1, \dots, n.$

Доказательство. Можем записать

$$I \leq \left| \int_a^b \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{0j})}{t - t_{0j}} dt - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{0j})}{t_k - t_{0j}} h \right| + \\ + |\varphi(t_{0j})| \left| \int_a^b \frac{dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{h}{t_k - t_{0j}} \right| = I_1 + I_2.$$

Оценка для I_2 получается с помощью неравенства (2.3.1). Чтобы дать оценку для I_1 , заметим вначале, что если $\varphi(t) \in H^*$ на $[a, b]$, то

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A \left[\frac{|t_2 - t_1|^\alpha}{(t_2 - a)^\nu (b - t_2)^\mu} + \frac{|\psi(t_1)| |t_2 - t_1|^\nu}{(t_2 - a)^\nu (b - t_2)^\mu (t_1 - a)^\nu} + \right. \\ \left. + \frac{|\psi(t_1)| |t_2 - t_1|^\mu}{(b - t_2)^\mu (b - t_1)^\mu (t_1 - a)^\nu} \right]. \quad (2.3.10)$$

Если теперь I_1 представить так же, как в неравенстве (2.3.4), то для I_1^4 получим

$$I_1^4 \leq A_1 \left[\frac{h^\alpha}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\psi(t_{0j})| h^\nu}{(t_{0j} - a)^{2\nu} (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\psi(t_{0j})| h^\mu}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^{2\mu}} \right],$$

так как для любого $j = 1, \dots, n$ имеем

$$\frac{1}{2} \leq \frac{t_j - a}{t_{0j} - a}, \quad \frac{t_j - b}{t_{0j} - b} \leq 2. \quad (2.3.11)$$

Для I_1^3 имеем

$$I_1^3 \leq A \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{h^\alpha dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|^{1-\alpha}} + \frac{|\psi(t_{0j})|}{(t_{0j}-a)^\nu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{h^\nu dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|^{1-\nu}} + \right. \\ \left. + \frac{|\psi(t_{0j})|}{(b-t_{0j})^\mu (t_{0j}-a)^\nu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{h^\mu dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|^{1-\mu}} \right].$$

В [118] доказана теорема о среднем значении для несобственного интеграла, которая формулируется так. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, причем $f(x)$ ограничена, т.е. $-\infty < m \leq f(x) \leq M < +\infty$, а $g(x)$ не меняет знака. Тогда функция $f(x)g(x)$ интегрируема и

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \quad m \leq \mu \leq M.$$

Применяя сформулированную теорему о среднем значении для всех $j=1, \dots, n-1$, получаем

$$I_1^3 \leq A \left[\frac{1}{(\xi_j^1 - a)^\nu (b - \xi_j^1)^\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|^{1-\alpha}} + \frac{|\psi(t_{0j})|}{(t_{0j} - a)^\nu (\xi_j^2 - a)^\nu (b - \xi_j^2)^\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|^{1-\nu}} + \right. \\ \left. + \frac{|\psi(t_{0j})|}{(b - t_{0j})^\mu (t_{0j} - a)^\nu (b - \xi_j^3)^\mu} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{|t - t_{0j}|^{1-\mu}} \right] \leq \\ \leq A_2 \left[\frac{h^\alpha}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\psi(t_{0j})| h^\nu}{(t_{0j} - a)^{2\nu} (b - t_{0j})^\mu} + \frac{|\psi(t_{0j})| h^\mu}{(t_{0j} - a)^\nu (b - t_{0j})^{2\mu}} \right],$$

так как $\xi_j^k \in [t_j, t_{j+1}]$, $k=1,2,3$, и поэтому отношения $(\xi_j^k - a)/(t_{0j} - a)$ и $(\xi_j^k - b)/(t_{0j} - b)$ являются величинами, ограниченными для $j=1, \dots, n-1$. Для $j=n$ в I_1^3 опять применим сформулированную теорему о среднем значении, но предварительно разбив участок интегрирования на два отрезка $- [t_n, t_n + 3h/4]$ и $[t_n + 3h/4, b]$. В результате получим, что I_1^3 имеет ту же оценку и при $j=n$. Аналогично можно показать, что такая же оценка верна и для I_1^1 при $j=0, 1, \dots, n$.

Наконец, рассмотрим I_1^2 . Как и в доказательстве неравенства (2.3.3), для I_1^2 напишем

$$I_1^2 \leq S_1 + S_2.$$

Воспользовавшись формулой (2.3.10), для S_1 получим

$$S_1 \leq A \left[h^\alpha \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \right. \\ \left. + h^\nu \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{|\psi(t_k)|}{(t_k - a)^\nu} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + h^\mu \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{|\psi(t_k)|}{(t_k - a)^\nu (b-t_k)^\mu} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} \right] \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq A_3 \left[h^\alpha \frac{1}{(b-t_j)^\mu} \int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{(t-a)^\nu |t-t_{0j}|} + h^\alpha \frac{1}{(t_{j+1}-a)^\nu} \int_{t_{j+1}}^b \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^\nu}{(b-t_j)^\mu} \left(\frac{1}{(t_1-a)^\nu} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t-a)^\nu |t-t_{0j}|} + \int_{t_2}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^{2\nu} |t-t_{0j}|} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^\nu}{(t_{j+1}-a)^{2\nu}} \int_{t_{j+1}}^b \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} + \frac{h^\mu}{(b-t_j)^{2\mu}} \int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^\nu |t-t_{0j}|} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^\mu}{(t_{j+1}-a)^\nu} \left(\int_{t_{j+1}}^{b-h} \frac{dt}{(b-t)^{2\mu} |t-t_{0j}|} + \frac{1}{(b-t_n)^\mu} \int_{t_n}^b \frac{dt}{(b-t)^\mu |t-t_{0j}|} \right) \right].
\end{aligned}$$

так как $|\psi(t_k)|$ – ограниченная величина на $[a, b]$.

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_j} \frac{dt}{(t-a)^\nu |t-t_{0j}|} &= \int_{t_1}^{(t_j+t_1)/2} \frac{dt}{(t-a)^\nu (t_{0j}-t)} + \int_{(t_j+t_1)/2}^{t_j} \frac{dt}{(t-a)^\nu (t_{0j}-t)} \leq \\
&\leq \frac{2}{(1-\nu)(t_{0j}-t_1+t_{0j}-t_j)} \left[\left(\frac{t_j+t_1}{2} - a \right)^{1-\nu} - (t_1-a)^{1-\nu} \right] + \\
&\quad + \frac{2^\nu}{(t_j-a+t_1-a)^\nu} \ln \frac{t_{0j}-t_j+t_{0j}-t_1}{2(t_{0j}-t_j)} \leq \\
&\leq \frac{A_4}{(t_{0j}-t_1)^\nu} + \frac{O(\ln h)}{(t_j-a)^\nu} = \frac{O(\ln h)}{(t_{0j}-a)^\nu}, \quad j=1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Аналогично рассматривая интеграл

$$\int_{t_2}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^{2\nu} |t-t_{0j}|},$$

будем иметь: если $2\nu \leq 1$, то справедлива оценка вида (2.3.12), а если $2\nu > 1$, то в силу условия $1-2\nu < 0$ формула (2.3.12) приобретает вид

$$\int_{t_2}^{t_j} \frac{dt}{(t-h-a)^{2\nu} |t-t_{0j}|} \leq \left[\frac{h^{1-2\nu}}{t_{0j}-a} + \frac{1}{(t_{0j}-a)^{2\nu}} \right] O(\ln h). \tag{2.3.13}$$

Для остальных интегралов в неравенстве для S_1 верна оценка вида (2.3.12) или (2.3.13) с соответствующими заменами ν на μ и a на b . Поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq \left[\frac{h^\alpha}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^\nu}{(t_{0j}-a)^{2\nu} (b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^\mu}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})^{2\mu}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^{1-\nu}}{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})^\mu} + \frac{h^{1-\mu}}{(t_{0j}-a)^\nu (b-t_{0j})} \right] O(\ln h).
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь S_2 . Применяя формулу (2.3.10), получаем

$$\begin{aligned}
S_2 \leq & A_4 h \left[\frac{1}{(t_{0j} - a)^v (b - t_{0j})^\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{|t_k - t_{0j}|^{1-\alpha} |t - t_{0j}|} + \right. \\
& + \frac{1}{(t_{0j} - a)^v (b - t_{0j})^\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t_k - a)^v |t_k - t_{0j}|^{1-\nu} |t - t_{0j}|} + \\
& \left. + \frac{1}{(b - t_{0j})^\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t_k - a)^v (b - t_k)^\mu |t_k - t_{0j}|^{1-\mu} |t - t_{0j}|} \right].
\end{aligned}$$

Пользуясь теперь опять тем, что $h/|t_i - t_{0j}| \leq 2$, $j = 1, \dots, n$, и для любого i , и оценками вида (2.3.12), получаем

$$S_2 \leq \left[\frac{h^\alpha}{(t_{0j} - a)^v (b - t_{0j})^\mu} + \frac{h^\nu}{(t_{0j} - a)^{2\nu} (b - t_{0j})^\mu} + \frac{h^\mu}{(t_{0j} - a)^v (b - t_{0j})^{2\mu}} \right] O(|\ln h|).$$

Вводя теперь обозначение $\eta(t_{0j}, \alpha, \beta) = (t_{0j} - a)^{-\alpha} (b - t_{0j})^{-\beta}$, оценку для I запишем в виде

$$I \leq \theta(t_{0j}) = \theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, \mu) O(|\ln h|), \quad (2.3.14)$$

где

$$\begin{aligned}
\theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, \mu) = & \eta(t_{0j}, \nu, \mu) h^\alpha + \eta(t_{0j}, 2\nu, \mu) h^\nu + \eta(t_{0j}, \nu, 2\mu) h^\mu + \\
& + \eta(t_{0j}, 1, \mu) h^{1-\nu} + \eta(t_{0j}, \nu, 1) h^{1-\mu} + \eta(t_{0j}, 1 + \nu, 1 + \mu) h, \quad 0 < \nu, \mu < 1.
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что величина $\theta(t_{0j})$ в неравенстве (2.3.14) удовлетворяет условиям (2.3.8) и (2.3.9).

Замечание 2.3.1. Фактически доказательство неравенства (2.3.7) проводилось при условии $0 < \nu, \mu < 1$. Однако из проведенных рассуждений можно получить следующие утверждения:

1) если $\nu \neq 0$, $\mu = 0$, то выражение для $\theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, 0)$ будет иметь вид

$$\theta_0(t_{0j}, \alpha, \nu, 0) = \eta(t_{0j}, \nu, 0) h^\alpha + \eta(t_{0j}, 2\nu, 0) h^\nu + \eta(t_{0j}, 1, 0) h^{1-\nu} + \eta(t_{0j}, 1 + \nu, 1) h; \quad (2.3.15)$$

2) если $\nu = \mu = 0$, то величина $\theta(t_{0j})$ будет иметь вид правой части неравенства (2.3.6).

Отметим здесь еще следующее. Если функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{(b-t)^\mu}{(t-a)^\nu} \psi(t),$$

где $0 < \nu < 1$, $0 < \mu$, $\psi(t)$ принадлежит классу H на отрезке $[a, b]$, то неравенство (2.3.8) выполняется для всех точек $t_{0j} \in [a + \delta, b]$.

Замечание 2.3.2. В аэродинамике (см., например, [14, 77]) часто используется следующий выбор точек t_k и t_{0j} . Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины h , которые обозначим Δ_k , $k = 1, \dots, n$. Точку, отстоящую от левого конца отрезка Δ_k на $h/4$ и лежащую на нем, обозначим t_k , а точку этого отрезка, отстоящую на $3h/4$ от левого конца, обозначим t_{0k} , $k = 1, \dots, n$. Для описанного разбиения справедливы [77] все утверждения, приведенные выше для сингулярного интеграла на отрезке

$[a, b]$. Расчеты показывают [14], что последняя схема дает лучшие результаты для модельных примеров, чем каноническое разбиение.

Справедливо и более общее утверждение. Неравенства (2.3.1), (2.3.3), (2.3.6) и (2.3.7) верны и в том случае, когда точки множеств $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j=0, 1, \dots, n\}$ не образуют канонического разбиения отрезка, а удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} |t_{k+1} - t_k| &= h, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ |t_{0j+1} - t_{0j}| &= h, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \\ t_1 - t_{00} &= \frac{h}{2}, \quad t_{0n} = t_n + \frac{h}{2}, \quad k = 1, \dots, n, \\ t_{00} - a &= hq_h^a, \quad b - t_{0n} = hq_h^b, \quad 0 < p_1 \leq q_h^a, \quad q_h^b \leq p_2 < +\infty, \end{aligned}$$

где p_1 и p_2 – заданные числа.

Такое положение возникает в том случае [72], когда требуется, чтобы какая-то фиксированная точка $q \in (a, b)$ находилась в заданном положении по отношению к точкам разбиения, например, чтобы точка q принадлежала множеству E или E_0 при любом n .

Покажем, как сделать, чтобы $q \in E_0$ при любом n . Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n+2$ равные части точками $t'_k, k=1, \dots, n+1, t'_0 = a, t'_{n+2} = b, t'_{0k}$ – середина отрезка $[t'_k, t'_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, n+1$. Пусть точка q лежит на отрезке $[t'_{0j_q}, t'_{0j_q+1}]$. Произведем сдвиг множества точек $\{t'_k, k=1, \dots, n+1\} \cup \{t_{0j}, j=0, 1, \dots, n+1\}$ как жесткого целого так, чтобы ближайший к точке q конец отрезка $[t'_{0j_q}, t'_{0j_q+1}]$ совпал с точкой q . Выбросим крайние точки из множества $\{t'_k, k=1, \dots, n+1\}$ и $\{t'_{0j}, j=0, 1, \dots, n+1\}$ с того края, в сторону которого произошел сдвиг. Оставшиеся точки из сдвинутых множеств обозначим $t_k, k=1, \dots, n$, и $t_{0j}, j=0, 1, \dots, n$. Если изначально точка q совпала с одной из точек t'_{0j} , то исходные множества обозначаем E и E_0 .

Аналогично строятся точки t_k и t_{0j} и в том случае, когда требуется, чтобы точка $q \in E$.

При рассмотрении задачи обтекания профиля с закрылком множества E и E_0 выбираются так, чтобы точка q лежала при любом n точно посередине между ближайшими к ней точками из E и E_0 . Сделать это можно так. Пусть $h = (b-a)/(n+1)$. Точку, отстоящую на $h/4$ вправо от точки q , отнесем к множеству E_0 , а отстоящую на $h/4$ влево – к множеству E , остальные точки множеств E и E_0 выбираются с шагом h от выбранных. Это же можно сделать и описанным выше сдвигом точек канонического разбиения с указанным шагом, причем сдвиг произойдет на величину, не более чем $h/4$.

Сформулированные выше результаты для сингулярного интеграла на отрезке останутся верными и в том случае, если поменять местами точки множеств E и E_0 , т.е. подынтегральную функцию брать в точках множества E_0 , а вычислять интеграл в точках множества E .

Замечание 2.3.3. Все результаты справедливы и для функции

$$\varphi(t, \tau) = \frac{\psi(t, \tau)}{(t-a)^{\nu}(b-t)^{\mu}}, \quad (2.3.16)$$

если $\psi(t, \tau) \in H$ на отрезке $[a, b]$ по обоим переменным, а также когда для построения суммы используются только точки множеств E или E_0 . Например, если обозначить

$$S'_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\varphi(t_k)h}{t_k - t_j}, \quad (2.3.17)$$

$$I'_j = \int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t - t_j}, \quad (2.3.18)$$

то для модуля разности $I'_j - S'_j$ справедливо неравенство вида (2.3.7)

Для окружности в параграфе 2.2 введен класс функций П. Аналогичный класс функций на отрезке $[a, b]$ определяется следующим образом [72].

Определение 2.3.1. Функция $\varphi(t)$ принадлежит классу П на отрезке $[a, b]$, если она имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{q - t}, \quad (2.3.19)$$

где $\psi(t) \in H^*$ на отрезке $[a, b]$, а $q \in (a, b)$ – фиксированная точка.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.3. Пусть $\varphi(t) \in \Pi$ на отрезке $[a, b]$ и множества E и E_0 выбираются так, что точка q принадлежит множеству E_0 при любом n , $q = t_{0_j}$. Тогда

$$|I(t_{0_j}) - S_n(t_{0_j})| \leq \theta_q(t_{0_j}), \quad j \neq j_q, \quad (2.3.20)$$

где $\theta_q(t_{0_j}) = |q - t_{0_j}|^{-1} \theta(t_{0_j})$, а величина $\theta(t_{0_j})$ имеет такие же свойства, как и в неравенстве (2.3.7). Поэтому для величины $\theta_q(t_{0_j})$ неравенство (2.3.8) выполняется для всех точек t_{0_j} , лежащих в множестве $[a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta]$, и выполняется неравенство (2.3.9), в котором суммирование слева надо вести по всем $j \neq j_q$.

Замечание 2.3.4. Как и в замечании 2.2.4, отметим, что в приложениях [14, 21] часто вместо суммы $S_n(t_{0_j})$ в (2.3.6) рассматривают сумму

$$S_n^*(t_{0_j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{t_k - t_{0_j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.3.21)$$

где полагают

$$\Gamma_k = \int_{t_{0_{k-1}}}^{t_k} \varphi(t) dt, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для модуля $|I(t_{0_j}) - S_n^*(t_{0_j})|$ справедливы те же оценки, что и для модуля $|I(t_{0_j}) - S_n(t_{0_j})|$ (см. теорему 2.3.2).

Однако в нестационарных задачах [132] удобно, чтобы дискретные вихри располагались и на концах отрезка. Поэтому в этих задачах рассматривают квадратурные суммы вида

$$S_n^{**}(t_{0j}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\Gamma_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.3.22)$$

где (рис. 2.3.1)

$$\Gamma_0 = \int_a^{t_{00}} \varphi(t) dt, \quad \Gamma_{n+1} = \int_{t_{0n}}^b \varphi(t) dt,$$

$$\Gamma_k = \int_{t_{0k-1}}^{t_k} \varphi(t) dt, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для модуля $|I(t_{0j}) - S_n^{**}(t_{0j})|$, $j = 1, \dots, n$, выполняются те же оценки при $\varphi(t) \in H^*$ на $[a, b]$.

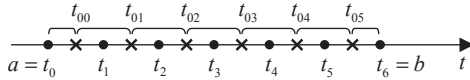


Рис. 2.3.1

Замечание 2.3.5. До сих пор мы рассматривали вычисление сингулярного интеграла $I(t_0)$ в том случае, когда точка t_0 принадлежит кривой интегрирования. Однако в приложениях приходится рассматривать и случаи, когда точка t_0 не лежит на кривой L . Например, в аэродинамике – вычисление поля скоростей в жидкости, в теории упругости – вычисление поля напряжений не в граничных точках, в электродинамике – вычисление отраженного электромагнитного поля в задачах дифракции и т.д.

Чтобы лучше понять особенности указанного вычисления интеграла $I(t_0)$, рассмотрим следующий модельный пример. Пусть $[a, b]$ – отрезок $[-1, 1]$ на оси OX , а $\gamma(t) \equiv 1$ на $[-1, 1]$. В этом случае переменную $t \in [-1, 1]$ будем обозначать x , а $t_0 = x_0 + iy_0$, где i – мнимая единица. Тогда выражение для $I(t_0)$ получит вид

$$\begin{aligned} I(t_0) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{x - t_0} = \int_{-1}^1 \frac{(x - x_0) + iy_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx + i \int_{-1}^1 \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx = \operatorname{Re} I(t_0) + i \operatorname{Im} I(t_0), \quad y_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Пусть точка t_0 лежит на оси OY . Тогда получим:

$$\operatorname{Re} I(t_0) = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + y_0^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + y_0^2| \Big|_{-1}^1 = 0 \quad (2.3.24)$$

для любого y_0 ;

$$\operatorname{Im} I(t_0) = \int_{-1}^1 \frac{y_0 dx}{x^2 + y_0^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} \Big|_{-1}^1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{y_0} \quad (2.3.25)$$

для любого $y_0 \neq 0$.

Из (2.3.25) видно, что

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0+0} \operatorname{Im} I(t_0) = \pi; \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0-0} \operatorname{Im} I(t_0) = -\pi. \quad (2.3.26)$$

Возьмем теперь на $[-1,1]$ систему точек $x_k = -1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)h$, $k = 1, \dots, 2m$, $h = 1/m$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} S_{2m}(t_0) &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{h}{x_k - t_0} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{x_k h}{x_k^2 + y_0^2} + i \sum_{k=1}^{2m} \frac{y_0 h}{x_k^2 + y_0^2} = \\ &= \operatorname{Re} S_{2m}(t_0) + i \operatorname{Im} S_{2m}(t_0). \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Так как точки x_k , $k = 1, 2, \dots, 2m$, расположены симметрично относительно начала координат, то $\operatorname{Re} S_{2m}(t_0) = 0$, т.е. действительная часть интеграла $I(t_0)$ точно вычисляется.

Для суммы $\operatorname{Im} S_{2m}(t_0)$ отметим, что если h фиксировано (т.е. и m фиксировано), а $y \rightarrow 0$, то получаем

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \operatorname{Im} S_{2m}(t_0) = 0, \quad (2.3.28)$$

так как при $y_0 \rightarrow 0+0$ имеем

$$0 \leq \operatorname{Im} S_{2m}(t_0) \leq 2y_0 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{1-h/2} \right), \quad (2.3.29)$$

Для погрешности вычисления $\operatorname{Im} I(t_0)$ можно получить следующую оценку

$$\begin{aligned} 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{hy_0}{2(y_0^2 + 1 - h/2)} - \operatorname{arctg} \frac{h}{2y_0} \right) &\leq \operatorname{Im} I(t_0) - \operatorname{Im} S_{2m}(t_0) \leq \\ &\leq 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{hy_0}{2(y_0^2 + 1 - h/2)} + \operatorname{arctg} \frac{h}{2y_0} \right). \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Из формулы (2.3.30) получаем, что

$$|\operatorname{Im} I(t_0) - \operatorname{Im} S_{2m}(t_0)| \leq 4 \operatorname{arctg} \frac{h}{2y_0}. \quad (2.3.31)$$

Таким образом, при фиксированном шаге дискретизации отрезка интегрирования в $I(t_0)$ при вычислении $\operatorname{Im} S_{2m}(t_0)$ получаем тем большую ошибку относительно $\operatorname{Im} I(t_0)$, чем ближе точка t_0 к отрезку интегрирования.

2.4. Сингулярный интеграл по кусочно-гладкой кривой

1°. Пусть L является разомкнутой кривой Ляпунова, т.е. между точками τ кривой L и точками t отрезка $[a, b]$ существует взаимно однозначное соответствие $\tau = \tau(t)$, такое, что производная $\tau'(t) = d\tau/dt$ принадлежит классу $H(\beta)$ на $[a, b]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. В этом случае, как было отмечено выше, функция

$$\omega(t, t_0) = \frac{t - t_0}{\tau(t) - \tau(t_0)}$$

принадлежит классу $H(\beta)$ по обоим переменным на $[a, b]$ и не обращается в нуль на этом отрезке.

Возьмем на отрезке $[a, b]$ множества $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k}, k = 0, 1, \dots, n\}$, образующие каноническое разбиение этого отрезка с шагом h . Тогда скажем, что множества $\tilde{E} = \{\tau_k = \tau(t_k), k = 1, \dots, n\}$ и $\tilde{E}_0 = \{\tau_{0k} = \tau(t_{0k}), k = 0, 1, \dots, n\}$ образуют канониче-

ское разбиение кривой L с шагом h . Введем еще обозначения $\bar{a} = \tau(a)$, $\bar{b} = \tau(b)$ и

$S_n(\tau_{0_j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0_j}}$, где $\Delta \tau_k = \tau(\tau_{k+1}) - \tau(\tau_k)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на разомкнутой кривой Ляпунова L и множества $\tilde{E} = \{\tau_k, k = 1, \dots, n\}$ и $\tilde{E}_0 = \{\tau_{0k}, k = 0, 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение этой кривой с шагом h . Тогда выполняется неравенство

$$|I(\tau_{0_j}) - S_n(\tau_{0_j})| \leq \theta(\tau_{0_j}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.4.1)$$

где величина $\theta(\tau_{0_j})$ удовлетворяет неравенствам (2.3.8) и (2.3.9). При этом величина $\theta(\tau_{0_j})$ определяется формулой (2.3.14), если в ней заменить $\eta(t_{0_j}, \nu, \mu)$ на функцию

$$\eta(\tau_{0_j}, \nu, \mu) = |\tau_{0_j} - \bar{a}|^{-\nu} |\bar{b} - \tau_{0_j}|^{-\mu} \text{ и } \alpha - \text{на число } \lambda = \min(\alpha, \nu\beta, \mu\beta).$$

Доказательство следует из формулы замены переменной в сингулярном интеграле и суперпозиции функций класса H [98].

Если $\nu = 0$ или $\mu = 0$, то для величины $\theta(\tau_{0_j})$ в неравенстве (2.4.1) надо произвести те же изменения, которые были указаны в замечании 2.3.1 для величины $\theta(t_{0_j})$ в неравенстве (2.3.14).

При рассмотрении только точек τ_{0_j} , лежащих в окрестности, скажем, конца \bar{a} кривой L , неравенство (2.4.1) можно уточнить следующим образом

$$\begin{aligned} \left| \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_{0_j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0_j}} \right| &\leq \left[\frac{h^\lambda}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|^\nu} + \frac{h^\nu}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|^{2\nu}} + \right. \\ &\left. + \frac{h^{1-\nu}}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|} + \frac{h}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|^{1+\nu}} \right] O(|\ln h|). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

2°. Пусть теперь кривая L является кусочно-ляпуновской кривой, имеющей только угловые узлы, и состоит из l кривых Ляпунова L_1, \dots, L_l . На каждом из отрезков $[a_m, b_m]$, отображающемся на кривую L_m , $m = 1, \dots, l$, возьмем каноническое разбиение с шагом h_m , образованное множествами $E_m = \{t_k, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$ и $E_{0m} = \{t_{0j}, j = n_{m-1} + 0, n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$, $n_0 = 0^*$. Обозначим

$$h = \max h_m$$

и будем в дальнейшем предполагать, что $h/h_m \leq R < +\infty$. В этом случае и величина h_p/h_m при любых $m, p = 1, \dots, l$, остается ограниченной при $h \rightarrow 0$. Обозначим теперь

$$S(\tau_{0_j}) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0_j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n_1, n_1 + 0, \dots, n_2, \dots, n_l, \quad (2.4.3)$$

* Это означает, что индекс j , нумерующий точки множества E_{0m} на кривой L_m , пробегает значения $0, 1, \dots, n_m - n_{m-1}$.

$$\begin{aligned}\Delta \tau_k &= \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k = 1, \dots, n_l, \quad k \neq n_1, \dots, n_l, \\ \Delta \tau_m &= \bar{b} - \tau_{n_m}, \quad m = 1, \dots, l; \quad \tau_k = \tau_m(t_k), \\ k &= n_{m-1} + 1, \dots, n_m, \quad \tau_{0_j} = \tau_m(t_{0_j}), \quad j = n_{m-1} + 0, \dots, n_m,\end{aligned}$$

где $\tau_m(t)$ – отображение отрезка $[a_m, \bar{b}_m]$ на кривую $L_m = \bar{a}_m \bar{b}_m$.

При описанных предположениях справедлива такая теорема.

Теорема 2.4.2. Пусть функция $\varphi(\tau) \in H^*$ на кривой L . Тогда

$$|I(\tau_{0_j}) - S(\tau_{0_j})| \leq \theta(\tau_{0_j}), \quad j = 0, 1, \dots, n_1, n_1 + 0, \dots, n_l, \quad (2.4.4)$$

где величина $\theta(\tau_{0_j})$ удовлетворяет неравенствам:

1) для всех точек τ_{0_j} , принадлежащих кривой L' , являющейся частью L , не содержащей ее узлов вместе с некоторой их окрестностью,

$$\theta(\tau_{0_j}) \leq O(h^{\lambda_1}), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \quad (2.4.5)$$

2) для всех точек τ_{0_j} , лежащих в окрестности узла \bar{a}

$$\theta(\tau_{0_j}) \leq \left[\frac{h^{\lambda_2}}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|^{\nu}} + \frac{h^{\nu}}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|^{2\nu}} + \frac{h^{1-\nu}}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|} \right] O(|\ln h|), \quad (2.4.6)$$

если функция $\varphi(\tau)$ имеет в этой окрестности вид

$$\varphi(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{|\tau - \bar{a}|^{\nu}}, \quad (2.4.7)$$

где $\psi(\tau) \in H(\beta)$, $0 < \nu < 1$.

Если $\nu = 0$, то правая часть формулы (2.4.6) принимает вид

$$\left(h^{\lambda_2} + \frac{h}{|\tau_{0_j} - \bar{a}|} \right) O(|\ln h|).$$

Наконец, отметим, что из (2.4.5) и (2.4.6) следует справедливость неравенства

$$\sum_{j=0}^{n_l} \theta(\tau_{0_j}) |\Delta \tau_{0_j}| \leq O(h^{\lambda_3}), \quad 0 < \lambda_3 \leq 1. \quad (2.4.8)$$

Доказательство. Можно записать

$$|I(\tau_{0_j}) - S(\tau_{0_j})| \leq \sum_{m=1}^l |I_m(\tau_{0_j}) - S_m(\tau_{0_j})|,$$

где

$$I_m(\tau_{0_j}) = \int_{L_m} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_{0_j}}, \quad S_m(\tau_{0_j}) = \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} \frac{\varphi(\tau_k) \Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0_j}}.$$

Пусть точка $\tau_{0_j} \in L_p \cap L'$. Тогда к модулю $|I_m(\tau_{0_j}) - S_m(\tau_{0_j})|$ при $m = p$ можно применить неравенство (2.4.1), а для $m \neq p$ можно использовать обычную формулу прямоугольников. Отсюда следует справедливость неравенства (2.4.5). Докажем теперь справедливость неравенства (2.4.6). Пусть \bar{a} является общим концом гладких кривых L_1, \dots, L_l , $l_1 \leq l$. Для точек τ_{0_j} из окрестности узла \bar{a} можно записать

$$|I(\tau_{0_j}) - S(\tau_{0_j})| \leq \sum_{m=1}^{l_1} |I_m(\tau_{0_j}) - S_m(\tau_{0_j})| + O(h^{\lambda_2}), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1.$$

Так как все кривые L_1, \dots, L_{l_1} являются кривыми Ляпунова, то для модуля $|I_p(\tau_{0_j}) - S_p(\tau_{0_j})|$ при $\tau_{0_j} \in L_p, 1 \leq p \leq l_1$, справедливо неравенство (2.4.2). Поэтому надо рассмотреть теперь $|I_m(\tau_{0_j}) - S_m(\tau_{0_j})|$ при $m = 1, \dots, l_1, m \neq p$. Имеем

$$\begin{aligned} |I_m(\tau_{0_j}) - S_m(\tau_{0_j})| \leq & \left| \int_{\bar{\alpha}}^{\bar{b}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\tau_{0_j})}{\tau - \tau_{0_j}} d\tau - \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} \frac{\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{0_j})}{\tau_k - \tau_{0_j}} \Delta \tau_k \right| + \\ & + \left| \varphi(\tau_{0_j}) \left[\int_{\bar{\alpha}}^{\bar{b}} \frac{d\tau}{\tau - \tau_{0_j}} - \sum_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} \frac{\Delta \tau_k}{\tau_k - \tau_{0_j}} \right] \right|, \end{aligned}$$

где через \bar{b} обозначен другой конец кривой L_m и имеется в виду, что нумерацию точек τ_k на этой кривой можно выбрать так, чтобы точка $\bar{\alpha}$ являлась начальной (по направлению счета) на кривой L_m .

В [98] показано, что если функция $\psi(\tau)$ однозначно определена на L и принадлежит классу $H(\mu)$ на каждой из гладких дуг, сходящихся в конце $\bar{\alpha}$, то эта функция принадлежит классу $H(\mu)$ на L во всей окрестности точки $\bar{\alpha}$, если узел $\bar{\alpha}$ является угловым для кривой L . Отсюда получаем, что функция $|\bar{\alpha} - \tau|^\nu, 0 < \nu \leq 1$, принадлежит классу $H(\nu)$ на всей рассматриваемой кривой. Учитывая неравенство (2.1.2), сводим оценку для модуля $|I_m(\tau_{0_j}) - S_m(\tau_{0_j})|, m \neq p$, к оценкам интегралов вида

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-t_{0_j})} \quad (2.4.9)$$

при $t_{0_j} < a < b$. После того как оценим эти интегралы, возвращение к переменной τ произведем по тому же неравенству (2.1.2).

В [37] показано, что для функции

$$K(x, a) = \frac{(b-x)^{1-\mu}}{\pi} \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^{1-\mu} (t-a)^\mu (t-x)} \quad (2.4.10)$$

при $x < a$ и $0 < \mu < 1$ справедливо представление

$$K(x, a) = \frac{1}{(a-x)^\mu \sin \mu\pi}, \quad (2.4.11)$$

откуда

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\nu (t-t_{0_j})} \leq O\left(\frac{1}{|t_{0_j} - a|^\nu}\right) \quad (2.4.12)$$

при $t_{0_j} < a, 0 < \nu < 1$ и

$$\int_{a+h}^b \frac{dt}{(t-a)^{2\nu} (t-t_{0_j})} \leq \begin{cases} O\left(\frac{|\ln h|}{a-t_{0_j}}\right), & 2\nu = 1, \\ O\left(\frac{h^{1-2\nu}}{a-t_{0_j}}\right), & 1 < 2\nu < 2. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

Неравенства (2.4.12), (2.4.13), а также рассуждения, проведенные при доказательстве неравенства (2.3.7), показывают справедливость неравенства (2.4.4).

Заметим, что для функции $\varphi(\tau)$, принадлежащей классу H^* на L , т.е. функции вида

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) / P_L'(\tau)$$

(см. (2.1.5)), всегда можно считать, что $\psi(\tau)$ обращается в нуль в узлах кривой L и принадлежит классу H в окрестностях узлов.

Отметим также, что все дополнения, сформулированные после доказательства теоремы 2.3.2 относительно выбора сеток E и E_0 и функции $\varphi(t, \tau)$, зависящей от параметра (см. (2.3.16)), естественным образом обобщаются на рассматриваемый случай.

Выделим теперь два частных случая теоремы 2.4.2, которые потребуются в дальнейшем.

Теорема 2.4.3. Пусть кривая L является объединением отрезков $[a, q]$ и $[q, b]$, а $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на L ($a < q < b$). Множества $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k}, k=0, 1, \dots, n\}$, образующие разбиение отрезка $[a, b]$ с шагом h , выберем так, чтобы точка q лежала посередине между ближайшими к ней точками из множеств E и E_0 . Тогда

$$\left| \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где величина $\theta(t_{0j})$ удовлетворяет неравенствам:

$$1) \theta(t_{0j}) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), 0 < \lambda_1 \leq 1, \text{ для всех точек } t_{0j} \in [a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta];$$

$$2) \sum_{j=0}^n \theta(t_{0j}) h \leq O(h^{\lambda_2}), 0 < \lambda_2 \leq 1.$$

Теорема 2.4.4. Пусть L является или объединением непересекающихся отрезков $[a_m, b_m], m=1, \dots, l$, или объединением отрезков $[a_m, q_m], [q_m, b_m], q_m \in (a_m, b_m), m=1, \dots, l$. Если выполняется первая возможность, то множества $E_m = \{t_k, k=n_{m-1}+1, \dots, n_m\}$ и $E_{0m} = \{t_{0k}, k=n_{m-1}+0, \dots, n_m\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[a_m, b_m]$ с шагом $h_m, m=1, \dots, l, n_0=0$; если же выполняется вторая возможность, то эти множества выбираются так, чтобы $q_m \in E_{0m}$. Тогда

$$\left| \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t - t_{0j}} - \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\varphi(t_k) h}{t_k - t_{0j}} \right| \leq \theta(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n_l, n_l + 0, \dots, n_l.$$

где $\Delta_k = h_m, k=n_{m-1}+1, \dots, n_m, m=1, \dots, l$, и величина $\theta(t_{0j})$ удовлетворяет неравенствам:

$$1) \theta(t_{0j}) \leq O(h^{\lambda_1}), 0 < \lambda_1 \leq 1, \text{ для всех точек } t_{0j} \in \bigcup_{m=1}^l [a_m + \delta, b_m - \delta], \text{ если выполняется}$$

первая возможность для L , и $t_{0j} \in \bigcup_{m=1}^l ([a_m + \delta, q_m - \delta] \cup [q_m + \delta, b_m - \delta])$, если выполняется вторая возможность;

$$2) \sum_{j=0}^{n_l} \theta(t_{0j}) \Delta t_{0j} \leq O(h^{\lambda_2}), 0 < \lambda_2 \leq 1, \text{ где } \Delta t_{0j} = h_m, j = n_{m-1} + 0, \dots, n_m, h = \max_{m=1, \dots, l} h_m \text{ и}$$

предполагаем $h/h_m \leq R < +\infty$.

Замечание 2.4.1. Как и в замечаниях 2.2.4 и 2.3.4 целесообразно отметить, что во многих задачах аэродинамики для кривых с углами [132, 70], т.е. для кусочно-липуновской кривой лучше бывает вместо суммы (2.4.3) брать сумму

$$S^*(t_{0j}) = \sum_{k=0}^{n_j} \frac{\Gamma_k}{\tau_k - \tau_{0j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n_1, n_1 + 0, n_1 + 1, \dots, n_2, \dots, n_l, \quad (2.4.14)$$

где суммирование ведется по всем точкам τ_k , как не лежащим в узлах кривой, так и лежащим. При этом, если τ_k лежит на гладкой части, то

$$\Gamma_k = \int_{\tau_{0k-1}}^{\tau_{0k}} \varphi(\tau) d\tau, \quad (2.4.15)$$

а если τ_k является узлом кривой, то интегрирование в Γ_k идет по всем дугам, соединяющим точку τ_k с ближайшими к ней расчетными точками (рис. 2.4.1).

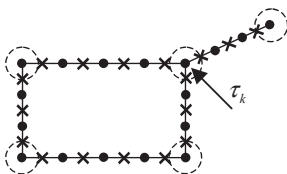


Рис. 2.4.1

2.5. Сингулярный интеграл с ядром Гильберта

Рассмотрим интеграл

$$I(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \varphi_1(\theta) d\theta, \quad (2.5.1)$$

где $\varphi_1(\theta)$ – функция с периодом 2π .

Хорошо известно [98] равенство

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \varphi_1(\theta) d\theta + \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) d\theta, \quad (2.5.2)$$

где L – окружность радиуса единица с центром в начале координат, $t = e^{i\theta}$, $t_0 = e^{i\theta_0}$, $\varphi_1(\theta) = \varphi(e^{i\theta})$.

Пусть функция $\varphi(t)$ принадлежит классу H на L и множества $E = \{t_k = e^{i\theta_k}, k = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k} = e^{i\theta_{0k}}, k = 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение L . Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(e^{i\theta_k}) e^{i\theta_k} (e^{i\Delta\theta_k} - 1)}{e^{i\theta_k} - e^{i\theta_{0j}}} = \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_1(\theta_k) e^{i(\theta_k - \theta_{0j})/2}}{e^{i(\theta_k - \theta_{0j})/2} - e^{-i(\theta_k - \theta_{0j})/2}} \left(-2 \sin^2 \frac{\Delta\theta_k}{2} + i \sin \Delta\theta_k \right) = \\
&= \sum_{k=1}^n \varphi_1(\theta_k) \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0j}}{2} + i \right) \left(i \sin^2 \frac{\Delta\theta_k}{2} + \frac{1}{2} \sin \Delta\theta_k \right),
\end{aligned}$$

где $\Delta\theta_k = 2\pi/n$.

Из формулы Тейлора имеем

$$\sin \Delta\theta_k = \Delta\theta_k + O((\Delta\theta_k)^3).$$

Следовательно, получим равенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) \Delta t_k}{t_k - t_{0j}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_1(\theta_k) \Delta\theta_k}{\operatorname{tg}(\theta_k - \theta_{0j})/2} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_1(\theta_k) \Delta\theta_k + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.5.3)$$

Так как левая часть равенства (2.5.3) хорошо приближает левую часть равенства (2.5.2), а $\sum_{k=1}^n \varphi_1(\theta_k) \Delta\theta_k$ хорошо приближает интеграл $\int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) d\theta$, то получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.5.1. Пусть функция $\varphi_1(\theta) \in H$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и имеет период 2π . Пусть точки $E = \{\theta_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{\theta_{0k}, k=1, \dots, n\}$ выбраны на $[0, 2\pi]$ следующим образом: $\theta_{k+1} - \theta_k = 2\pi/n = h, k=1, \dots, n-1, \quad \theta_1 + 2\pi - \theta_n = h,$
 $\theta_{0k} = \theta_k + h/2, k=1, \dots, n$, т.е. точки $t_k = e^{i\theta_k}$ и $t_{0k} = e^{i\theta_{0k}}, k=1, \dots, n$, образуют каноническое разбиение L . Тогда справедливо неравенство

$$|I(\theta_{0j}) - S_n(\theta_{0j})| \leq O(n^{-\lambda} \ln n), \quad (2.5.4)$$

$$\text{где } S_n(\theta_{0j}) = \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0j}}{2} \varphi_1(\theta_k) \Delta\theta_k.$$

Отметим, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi_1(\theta)$ принадлежат одному классу $H(\lambda)$ каждая на своем множестве.

2.6. Квадратурные формулы для сингулярного интеграла с ядром Гильберта

Для построения квадратурных формул для интеграла

$$I(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \gamma(\theta) d\theta, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (2.6.1)$$

приведем известные соотношения [70, 82]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \sin n\theta d\theta = \cos n\theta_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6.2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \cos n\theta d\theta = -\sin n\theta_0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6.3)$$

элементарное доказательство которых дадим, следуя [34].

Вначале заметим, что в силу равенства

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta = 0, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (2.6.4)$$

верно следующее равенство:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \gamma(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} [\gamma(\theta) - \gamma(\theta_0)] d\theta, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (2.6.5)$$

Из известных равенств Эйлера [69]

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} (e^{ik\theta} - e^{ik\theta_0}) &= i \frac{e^{\frac{i(\theta - \theta_0)}{2}} + e^{-\frac{i(\theta - \theta_0)}{2}}}{e^{\frac{i(\theta - \theta_0)}{2}} - e^{-\frac{i(\theta - \theta_0)}{2}}} \left((e^{i\theta})^k - (e^{i\theta_0})^k \right) = \\ &= i \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta_0}}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} \left(e^{i(k-1)\theta} + e^{i(k-2)\theta} e^{i\theta_0} + \dots + e^{i\theta} e^{i(k-2)\theta_0} + e^{i(k-1)\theta_0} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} (e^{ik\theta} - e^{ik\theta_0}) &= \\ &= i \left(e^{i\theta} + e^{i\theta_0} \right) \left(e^{i(k-1)\theta} + e^{i(k-2)\theta} e^{i\theta_0} + \dots + e^{i\theta} e^{i(k-2)\theta_0} + e^{i(k-1)\theta_0} \right) = \\ &= i \left(e^{ik\theta} + 2e^{i(k-1)\theta} e^{i\theta_0} + \dots + 2e^{i\theta} e^{i(k-1)\theta_0} + e^{ik\theta_0} \right). \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Интегрируя почленно (2.6.7) на $[0, 2\pi]$ и учитывая формулу (2.6.5), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} e^{ik\theta} d\theta = i e^{ik\theta_0}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (2.6.8)$$

Переходя в (2.6.7) к комплексно сопряженным величинам и опять интегрируя по отрезку $[0, 2\pi]$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} e^{-ik\theta} d\theta = -ie^{-ik\theta_0}, \quad k=1,2,\dots, \quad \theta_0 \in [0,2\pi]. \quad (2.6.9)$$

Используя опять формулы (2.6.6), получаем справедливость формул (2.6.2) и (2.6.3).

В тригонометрии известна формула [99]

$$\frac{\sin(2n+1)(\theta - \theta_k)/2}{2 \sin(\theta - \theta_k)/2} = \frac{1}{2} + \cos(\theta - \theta_k) + \dots + \cos n(\theta - \theta_k), \quad (2.6.10)$$

поэтому для любой периодической функции $\gamma(\theta)$ тригонометрический полином степени n

$$\gamma_n(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2n+1} \gamma(\theta_k) \frac{\sin(2n+1)(\theta - \theta_k)/2}{\sin(\theta - \theta_k)/2} \quad (2.6.11)$$

удовлетворяет условию

$$\gamma_n(\theta_k) = \gamma(\theta_k), \quad k=0,1,\dots,2n, \quad (2.6.12)$$

если

$$\theta_k = \beta + \frac{2k}{2n+1}\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{2\pi}{2n+1}, \quad k=0,1,\dots,2n.$$

Для этого достаточно заметить, что $\sin \frac{2n+1}{2}\alpha = 0$ при

$$\alpha = \frac{2k}{2n+1}\pi, \quad k=0,1,\dots,2n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(2n+1)\alpha/2}{\sin \alpha/2} = 2n+1.$$

Если теперь в (2.6.1) вместо функции $\gamma(\theta)$ подставить полином $\gamma_n(\theta)$ и полученную функцию обозначить $S(\theta_0)$, то, воспользовавшись равенствами (2.6.2), (2.6.3), (2.6.11) и равенством

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos \theta + \dots + \cos n\theta + i[\sin \theta + \dots + \sin n\theta] &= \frac{1}{2} + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \\ &= \frac{\sin(2n+1)\theta/2}{2 \sin \theta/2} + \frac{i}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos(2n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} \right], \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

получим для $S(\theta_0)$ формулу

$$\begin{aligned} S(\theta_0) &= \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \gamma_n(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \gamma(\theta_k) \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_0}{2} - \frac{\cos(2n+1)(\theta_k - \theta_0)/2}{\sin(\theta_k - \theta_0)/2} \right] \frac{2\pi}{2n+1}. \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Отметим, что квадратурная формула (2.6.14) точна для любого тригонометрического полинома степени n , так как в этом случае $\gamma_n(\theta) \equiv \gamma(\theta)$, и формула (2.6.14) дает точное значение интеграла $I(\theta_0)$.

Пусть теперь функция $\gamma(\theta)$ периодическая с периодом 2π и принадлежит пространству L_2 , т.е. интегрируема на $[0,2\pi]$ с квадратом. Представим ее рядом Фурье

$$\gamma(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Тогда функция $I(\theta_0)$ имеет следующее разложение в ряд Фурье (см. [82]):

$$I(\theta_0) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos k\theta_0 - a_k \sin k\theta_0). \quad (2.6.15)$$

Отметим сразу, что из (2.6.15) следует

$$\left\| \frac{1}{2\pi} I(\theta_0) \right\|_{L_2} \leq \| \gamma \|_{L_2}. \quad (2.6.16)$$

Обозначим $\Phi_n(\theta)$ – сумму первых n членов ряда Фурье для функции $\gamma(\theta)$, а $\Phi_n(I(\theta_0))$ – соответствующую сумму для $I(\theta_0)$. Так как сингулярный интеграл по окружности сохраняет гладкость своей плотности [37], то в силу (2.5.2) интеграл $I(\theta_0)$ обладает теми же свойствами гладкости, что и функция $\gamma(\theta)$. Следовательно, если $\gamma(\theta) \in H_r(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$, т.е. $\gamma^{(r)}(\theta) \in H(\alpha)$, то $I(\theta_0) \in H_r(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$.

Оценим точность квадратурной формулы (2.6.14). Имеем

$$\begin{aligned} I(\theta_0) - S(\theta_0) &= \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} [(\gamma(\theta) - \Phi_n(\theta)) + (\Phi_n(\theta) - \gamma_n(\theta))] d\theta = \\ &= I(\theta_0) - \Phi_n(I(\theta_0)) + \sum_{k=0}^{2n} [\Phi_n(\theta) - \gamma(\theta_k)] \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_0}{2} - \frac{\cos(2n+1)(\theta_k - \theta_0)/2}{\sin(\theta_k - \theta_0)/2} \right]. \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

В [24, 99] показано, что в нашем случае

$$|\gamma(\theta) - \Phi_n(\theta)| \leq (3 + \ln n) E_n \quad (2.6.18)$$

для любого θ из $[0, 2\pi]$, где E_n – наилучшее приближение функции $\gamma(\theta)$ полиномами степени n , т.е. $E_n = \inf_{P_n(\theta)} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\gamma(\theta) - P_n(\theta)|$, где $P_n(\theta)$ – произвольный многочлен степени n , и

$$E_n \leq \frac{12^{r+1} M}{n^{r+\alpha}}, \quad (2.6.19)$$

где M – константа в условии Гёльдера для функции $\gamma^{(r)}(\theta)$. Для $|I(\theta_0) - \Phi_n(I(\theta_0))|$ выполняется неравенство вида (2.6.18), так как $I(\theta_0) \in H_r(\alpha)$.

Таким образом, из формул (2.6.13), (2.6.17)–(2.6.19) получаем

$$|I(\theta_0) - S(\theta_0)| \leq O\left(\frac{3 + \ln n + n}{n^{r+\alpha}}\right) \quad (2.6.20)$$

для любого $\theta_0 \in [0, 2\pi]$.

Рассмотрим теперь формулу (2.6.14) в точках

$$\theta_{0k} = \begin{cases} \theta_k + \frac{\pi}{2n+1}, & k = 0, 1, \dots, 2n, \text{ если } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2n+1}, \\ \theta_k - \frac{\pi}{2n+1}, & k = 0, 1, \dots, 2n, \text{ если } \frac{\pi}{2n+1} \leq \beta \leq \frac{2\pi}{2n+1}. \end{cases} \quad (2.6.21)$$

В этом случае точки θ_{0m} , $m = 0, 1, \dots, 2n$, являются корнями функции $\cos \frac{2n+1}{2}(\theta_k - \theta_0)$, так как

$$\cos \frac{2n+1}{2}(\theta_k - \theta_{0m}) = \cos \left[\frac{2n+1}{2} \frac{(2(k-m) \pm 1)}{2n+1} \pi \right] = 0.$$

Отметим, что

$$\sin \frac{1}{2}(\theta_k - \theta_{0m}) = \sin \frac{2(k-m) \pm 1}{2(2n+1)} \pi \neq 0 \quad (2.6.22)$$

для любых $k, m = 0, 1, \dots, 2n$. Таким образом, в точках θ_{0m}

$$S(\theta_{0m}) = \sum_{k=0}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} \gamma(\theta_k) \frac{2\pi}{2n+1}. \quad (2.6.23)$$

В этом случае формула (2.6.20) принимает вид

$$|I(\theta_{0m}) - S(\theta_{0m})| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{\nu+\alpha}}\right), \quad (2.6.24)$$

ибо, как несложно показать

$$\sum_{k=0}^{2n} \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \right| \frac{2\pi}{2n+1} = O(\ln n)$$

при $m = 0, 1, \dots, 2n$.

Замечание 2.6.1. Из формул (2.6.2), (2.6.3) следует, что оператор, ставящий в соответствие функции $\gamma(\theta)$ функцию $I(\theta_0)$ с помощью интеграла Гильберта (2.6.1): $\Gamma: \gamma(\theta) \rightarrow I(\theta_0)$, что будем записывать в виде $I(\theta_0) = \Gamma(\gamma(\theta))$, обладает следующим свойством: четные функции $\gamma(\theta)$ переводятся этим оператором Γ в нечетные и наоборот. Оказывается, что справедливы следующие соотношения: если $\gamma(\theta)$ является нечетной функцией, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \gamma(\theta) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}, \quad (2.6.25)$$

а если $\gamma(\theta)$ является четной функцией, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \gamma(\theta) d\theta = 2 \sin \theta_0 \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\theta) d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} \quad (2.6.26)$$

для любого $\theta_0 \in [0, 2\pi]$.

Используя опять формулы (2.6.2), (2.6.3), получаем соотношения ($\theta_0 \in [0, 2\pi]$)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} = -\frac{\sin n\theta_0}{\sin \theta_0}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6.27)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta \sin \theta d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} = \cos n\theta_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.28)$$

Сделаем теперь в равенствах (2.6.27), (2.6.28) замену переменной $\cos \theta = x$, $\cos \theta_0 = x_0$, $\theta, \theta_0 \in [0, \pi]$, $x, x_0 \in [-1, 1]$. Тогда получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)} = -\frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6.29)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} \sin(n \arccos x)}{x_0-x} dx = \cos(n \arccos x_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6.30)$$

Как известно [10], функция

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6.31)$$

является многочленом степени n и называется многочленом Чебышева первого рода, а функция

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad n = 1, \dots, \quad (2.6.32)$$

является многочленом степени $n-1$ и называется многочленом Чебышева второго рода. Поэтому соотношения (2.6.29), (2.6.30) можно записать так

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)} = -U_{n-1}(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6.33)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x) dx}{x_0-x} = T_n(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad n = 1, \dots \quad (2.6.34)$$

То, что $T_n(x)$ и $U_{n-1}(x)$ являются многочленами степени n и $n-1$, соответственно, можно показать следующим образом [34]. Обозначим $\arccos x = \theta$ и напомним, что

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \\ &= \cos^n \theta + i C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta - i C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем тождества

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta (1 - \cos^2 \theta) + \dots, \quad (2.6.36)$$

$$\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = C_n^1 \cos^{n-1} \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta (1 - \cos^2 \theta) + \dots \quad (2.6.37)$$

2.7. Квадратурные формулы для сингулярного интеграла на окружности

Пусть функция $\gamma(t)$ принадлежит классу $H_r(\alpha)$ на окружности L радиуса единицы с центром в начале координат. Рассмотрим для нее следующий многочлен:

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \gamma(t_k) \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t-t_k)t^n t_k^n}, \quad (2.7.1)$$

где точки t_k разбивают окружность L на $2n+1$ равных частей. С помощью деления многочлена на многочлен несложно показать, что

$$\gamma_n(t_k) = \gamma(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2n, \quad (2.7.2)$$

так как

$$\frac{1}{2n+1} \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t-t_k)t^n t_k^n} = \begin{cases} 1, & t = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n, \\ 0, & t = t_m, \quad m \neq k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Последнее равенство следует также из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} &= 1 + 2(\cos \theta + \dots + \cos n\theta) = \\ &= e^{-in\theta} + e^{-i(n-1)\theta} + \dots + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{t^{-n} - t^{n+1}}{1-t}, \quad t = e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

и формулы (2.6.21).

Из формулы (2.7.4) получаем

$$\frac{\sin(2n+1)(\theta - \theta_k)/2}{\sin(\theta - \theta_k)/2} = \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t-t_k)t^n t_k^n}, \quad t_k = e^{i\theta_k}. \quad (2.7.5)$$

Рассмотрим теперь сингулярный интеграл

$$I(t_0) = \int_L \frac{\gamma(t) dt}{t - t_0}, \quad (2.7.6)$$

где $\gamma(t) \in H_r(\alpha)$ на окружности L . Обозначим $S(t_0)$ – функцию, получаемую из (2.7.6), если вместо $\gamma(t)$ в нее подставить многочлен $\gamma_n(t)$. Тогда, воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t^n dt}{t - t_0} = \begin{cases} t_0^n, & n \geq 0, \\ -t_0^n, & n < 0, \end{cases} \quad t = e^{i\theta}, t_0 = e^{i\theta_0}, \quad (2.7.7)$$

и

$$\frac{1}{(t - t_k)(t - t_0)} = \frac{1}{t_0 - t_k} \left(\frac{1}{t - t_0} - \frac{1}{t - t_k} \right), \quad (2.7.8)$$

можно записать

$$\begin{aligned} S(t_0) &= \int_L \frac{\gamma_n(t) dt}{t - t_0} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \gamma(t_k) \int_L \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k) t^n t_k^n} \frac{dt}{t - t_0} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\gamma(t_k)}{t_k - t_0} \frac{\pi i}{2n+1} \left[2t_k - \frac{t_0^{2n+1} + t_k^{2n+1}}{t_0^n t_k^n} \right]. \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Заметим теперь, что если $\gamma(t) \in H_r(\alpha)$ на L , то функция $\gamma_1(\theta) = \gamma(e^{i\theta})$ также принадлежит классу $H_r(\alpha)$. Далее из формулы (2.7.4) и (2.7.5) получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)(\theta - \theta_k)/2}{\sin(\theta - \theta_k)/2} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos(\theta - \theta_k) + \dots + 2 \cos n(\theta - \theta_k)) d\theta = 2\pi. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Поэтому

$$\left| \int_0^{2\pi} \gamma_1(\theta) d\theta - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_1(\theta_k) \frac{2\pi}{2n+1} \right| \leq O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (2.7.11)$$

Используя теперь формулы (2.2.5), (2.6.20) и (2.7.11), получаем справедливость неравенства

$$|I(t_0) - S(t_0)| \leq O\left(\frac{\ln n + n}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (2.7.12)$$

Найдем теперь корни функции $(t_0^{2n+1} + t_k^{2n+1}) / (t_0^n t_k^n (t_0 - t_k))$, для чего запишем

$$\frac{(t_0^{2n+1} + t_k^{2n+1})}{t_0^n t_k^n (t_0 - t_k)} = i \frac{\cos(2n+1)(\theta_0 - \theta_k)/2}{\sin(\theta_0 - \theta_k)/2}. \quad (2.7.13)$$

Следовательно, корнями рассматриваемой функции будут точки $t_{0m} = \exp\left\{\theta_m + \frac{\pi}{2n+1}\right\}$, $m = 0, 1, \dots, 2n$, т.е. t_{0k} делит пополам дугу $\overline{t_k t_{k+1}}$. Поэтому для выбранных точек t_{0m} имеем

$$S(t_{0m}) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\gamma(t_k)}{t_k - t_m} \frac{2\pi i t_k}{2n+1}, \quad m = 0, 1, \dots, 2n. \quad (2.7.14)$$

Теперь, используя тождество

$$\frac{it_k}{t_k - t_{0m}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} + \frac{1}{2} i, \quad (2.7.15)$$

записываем

$$S(t_{0m}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} \gamma_1(\theta_k) + i \sum_{k=0}^{2n} \gamma_1(\theta_k) \right] \frac{2\pi}{2n+1}. \quad (2.7.16)$$

Окончательно, из формул (2.2.5), (2.7.11) и (2.6.24) получаем

$$|I(t_{0m}) - S(t_{0m})| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad m = 0, 1, \dots, 2n. \quad (2.7.17)$$

2.8. Квадратурные формулы для сингулярного интеграла на отрезке

Обратимся теперь к интегралу

$$I(\omega, \psi, t_0) = \int_L \frac{\omega(t)\psi(t)dt}{t-t_0}$$

по кусочно-гладкой кривой L . Наиболее часто этот интеграл встречается в случае, когда кривая L является отрезком $[-1, 1]$ и $\omega(t) = (1+t)^{\nu}(1-t)^{\mu}$, $0 < |\nu|, |\mu| < 1$, $\psi(t) \in H(\alpha)$. Одним из наиболее часто встречающихся способов построения квадратурных формул для $I(\omega, \psi, t_0)$ является замена функции $\psi(t)$ на интерполяционный полином $\psi_n(t)$ по системе многочленов $P_n(t)$ ($n = 0, 1, \dots$), ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\omega(t)$. Обозначим $t_k, k = 1, \dots, n$ – корни многочлена $P_n(t)$ (которые попарно различны и лежат на $(-1, 1)$), а $\psi_n(t)$ – многочлен

$$\psi_n(t) = \sum_{k=1}^n \psi(t_k) \frac{P_n(t)}{(t-t_k)P_n'(t_k)}, \quad (2.8.1)$$

который, очевидно, удовлетворяет условию

$$\psi_n(t_k) = \psi(t_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.8.2)$$

так как

$$\lim_{t \rightarrow t_k} \frac{P_n(t)}{(t-t_k)P_n'(t_k)} = 1.$$

Обозначим $S(t_0)$ – функцию $I(\omega, \psi_n, t_0)$, тогда получим

$$S(t_0) = \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)\psi_n(t)dt}{t-t_0} = \sum_{k=1}^n \frac{\psi(t_k)}{t_k - t_0} \left[\frac{Q_n(t_k)}{P_n'(t_k)} - \frac{Q_n(t_0)}{P_n'(t_k)} \right], \quad (2.8.3)$$

где введено обозначение

$$Q_n(t_0) = \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)P_n(t)dt}{t-t_0}. \quad (2.8.4)$$

Пусть теперь t_{0j} ($j = 1, \dots, R$) – корни функции $Q_n(t_0)$. Тогда формула (2.8.3) для $S(t_0)$ в этих точках запишется в виде

$$S(t_{0j}) = \sum_{k=1}^n \frac{\psi(t_k)a_k}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 1, \dots, R, \quad (2.8.5)$$

$$a_k = \frac{Q_n(t_k)}{P_n'(t_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В работе [66] доказано неравенство

$$|I(\omega, \psi, t_{0j}) - S(t_{0j})| \leq \frac{2}{\pi} E_{n-1} \alpha(1), \quad (2.8.6)$$

где $\alpha(t) = \int_{-1}^t \omega(\tau) d\tau$, а E_{n-1} – наилучшее приближение функции $\psi'(t)$ многочленами степени $n-1$. Поэтому, если функция $\psi(t) \in H_r(\alpha)$ на отрезке $[-1,1]$, то $E_{n-1} \leq O(n^{-r-\alpha+1})$, причем в [64, 99] указаны точные константы в неравенстве для E_{n-1} . В работе [111] показано, что $S(t_{0m}) = I(\omega, \psi, t_{0m})$, когда $\psi(t)$ является многочленом степени не более $2n$.

В последнее время получены более точные оценки для этих квадратурных сумм. Так, в работе [96] показано, что если $\psi(t) \in H_r(\alpha)$, то при $t_0 \in (-1,1)$ и достаточно больших n справедлива оценка

$$|I(\omega, \psi, t_0) - S(t_0)| = \omega^*(t_0) O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad (2.8.7)$$

где $\omega^*(t_0) = \omega_\mu(t_0)$ при $t_0 \in [0,1)$, $\omega^*(t_0) = \omega_\nu(t_0)$ при $t_0 \in (-1,0]$ и

$$\omega_\mu(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu \geq 1/2, \\ (1-t_0)^{\frac{2\mu-1}{4}} & \text{при } -1/2 < \mu < 1/2, \\ (1-t_0)^\mu & \text{при } -1 < \mu \leq -1/2, \end{cases}$$

$$\omega_\nu(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu \geq 1/2, \\ (1+t_0)^{\frac{2\nu-1}{4}} & \text{при } -1/2 < \nu < 1/2, \\ (1+t_0)^\nu & \text{при } -1 < \nu \leq -1/2. \end{cases}$$

Ранее [129] были получены для этой квадратурной суммы другие оценки: если $-1 < \nu, \mu < 0$, то для всех $t_0 \in (-1,1)$ имеем

$$|I(\omega, \psi, t_0) - S(t_0)| = \omega(t_0) \begin{cases} O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\gamma-1/2}}\right), & \gamma > -\frac{1}{2}, \\ O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}}\right), & \gamma \leq -\frac{1}{2}, \\ & r + \alpha - \gamma - \frac{1}{2} > 0, \end{cases} \quad (2.8.8)$$

где $\gamma = \max(\nu, \mu)$; если же $0 < \nu, \mu$, то для всех $t_0 \in [-1,1]$ имеет место также формула (2.8.8), только в правой части нет множителя $\omega(t_0)$.

Если в качестве узлов взяты точки $t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ ($k=1,2,\dots,n$) или $t_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ ($k=0,1,\dots,n$), то получается следующая оценка:

$$|I(\omega, \psi, t_0) - S(t_0)| = \begin{cases} \omega(t_0) O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}}\right), & -1 < \nu, \mu < 0, \\ O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha}}\right), & 0 < \nu, \mu. \end{cases} \quad (2.8.9)$$

Отметим, что формула (2.8.7) более удобна по сравнению с (2.8.8) тем, что не требует, чтобы ν и μ были одновременно либо отрицательны, либо положительны.

При $-1 < \nu, \mu \leq -1/2$ формула (2.8.7) дает более точную оценку. Однако, если $0 > \nu, \mu > -1/2$, то формула (2.8.8) более удобна, так как во многих задачах желательно, чтобы при этом функция $\omega^{-1}(t_0) |I(\omega, \psi, t_0) - S(t_0)|$ имела равномерную на $[-1, 1]$ оценку. Формула (2.8.8) дает такую оценку при соответствующем α , а (2.8.7) – нет. Действительно, пусть $\nu = \mu = -1/4$. Тогда в (2.8.7) получаем, что умножение на $\omega^{-1}(t_0)$ дает оценку

$$(1+t_0)^{(-1-2\nu)/4} (1-t)^{(-1-2\mu)/4} O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right),$$

которая не ограничена на $[-1, 1]$. При $\nu, \mu \geq 1/2$ преимущество имеет формула (2.8.7).

Отдельно остановимся на случаях, когда $\nu, \mu = \pm 1/2$, так как они довольно часто встречаются в приложениях.

1. Пусть $\nu, \mu = -1/2$, т.е.

$$\omega(t) = (1-t^2)^{-1/2}. \quad (2.8.10)$$

Многочленами, ортогональными с этим весом на $[-1, 1]$, будут многочлены Чебышева первого рода $T_n(t)$ (см. (2.6.31)), а функциями $Q_n(t)$ будут многочлены Чебышева второго рода, т.е. в этом случае

$$\begin{aligned} P_n(t) &= T_n(t), \\ Q_n(t) &= \pi U_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

(см. (2.6.29)). При этом в формуле (2.8.5) имеем

$$\begin{aligned} t_k &= \cos \frac{2k-1}{n} \pi, \quad k = 1, \dots, n; \\ t_{0j} &= \cos \frac{j}{n} \pi, \quad j = 1, \dots, n-1; \\ a_k &= \frac{\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

2. Пусть $\nu = \mu = 1/2$, т.е.

$$\omega(t) = \sqrt{1-t^2}. \quad (2.8.13)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} P_n(t) &= U_n(t), \\ Q_n(t) &= \pi T_{n+1}(t) \end{aligned}$$

(см. (2.6.34)),

$$\begin{aligned} t_k &= \cos \frac{k}{n+1} \pi, \quad a_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n, \\ t_{0j} &= \cos \frac{2j-1}{2(n+1)} \pi, \quad j = 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

3. Пусть $\nu = -1/2, \mu = 1/2$, т.е.

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}. \quad (2.8.15)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
 P_n(t) &= \frac{T_{n+1}(t) - T_n(t)}{1-t}, \\
 Q_n(t) &= \pi[U_n(t) - U_{n-1}(t)], \\
 t_k &= \cos \frac{2k}{2n+1} \pi, \quad a_k = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{k}{2n+1} \pi, \quad k=1, \dots, n, \\
 t_{0j} &= \cos \frac{2j-1}{2(n+1)} \pi, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.8.16}$$

Отметим, что для случая **1** в работе [106] для интеграла $I(\omega, \psi, t_0)$ предложена квадратурная сумма

$$S(t_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sqrt{1-(t_k)^2} U_{n-1}(t_0) - 1}{t_0 - t_k} \gamma(t_k) \tag{2.8.17}$$

и получена удобная оценка для всех $t_0 \in [-1, 1]$

$$|I(\omega, \psi, t_0) - S(t_0)| = O\left(\frac{\ln n}{(\sqrt{1-\eta^2} + t_0/n)n^{r+\alpha}}\right), \quad \eta = \frac{1+|t_0|}{2}. \tag{2.8.18}$$

Глава 3. Элементы теории потенциала

Теория потенциала для уравнений Лапласа и Гельмгольца находит все более широкое применение при сведении краевых задач для этих уравнений к краевым интегральным уравнениям. Поэтому, в данной главе будут приведены основные элементы теории потенциала.

3.1. Функция источника и протекание жидкости через точки кривой. Плоский случай

Пусть в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ плоскости OXY помещен источник мощности Q . Этот источник создает векторное поле (рис. 7.1.1) по формуле

$$V_0(M) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\vec{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^2}, \quad (3.1.1)$$

где $\vec{r}_{MM_0} = \overline{MM_0} = (x_0 - x)\vec{i} + (y_0 - y)\vec{j}$, а $r_{MM_0}^2 = |\vec{r}_{MM_0}|^2$.

Будем интерпретировать векторное поле $V_0(M)$ как поле скоростей течения идеальной несжимаемой жидкости.

Пусть теперь L некоторая кривая на плоскости OXY (будем обозначать ее R^2) и она задана параметрически $x = x(t), y = y(t)$, где t – длина дуги этой кривой. Орт нормали \vec{n}_M в точке $M \in L$ выберем так, чтобы он вместе с ортом касательной $\vec{\tau}_M$ в этой точке образовывал правую систему координат (см. рис. 7.1.2).

Ту сторону кривой L , куда направлен вектор \vec{n}_M будем называть “левой” и обозначать символом “+” или L^+ , а противоположную сторону будем называть “правой” и обозначать символом “-” или L^- . Если кривая L разбивает плоскость R^2 на две непересекающиеся области (например, если L есть прямая или простая замкнутая кривая), то область, куда направлен вектор \vec{n}_M , будем обозначать D^+ , а другую D^- (см. рис. 7.1.2). При этом если L является замкнутой простой, то через D^+ обозначается внешняя область (см. рис. 7.1.3). Если в некоторой точке M кривой L существует орт касательной $\vec{\tau}_M = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$, т.е. функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в этой точке и $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, то в силу выбора вектора \vec{n}_M получим, что $\vec{n}_M = -y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}$, т.е. если кривая L является замкнутой, то обход на ней задается по часовой стрелке. Если кривая не замкнутая, то для любой ее точки M , не являющейся ее концом, существует окрестность $O(M)$, такая, что она разбивается кривой L на две части и ту

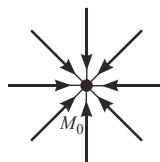


Рис. 3.1.1

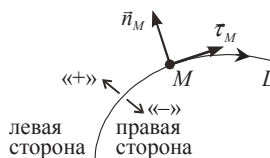


Рис. 3.1.2

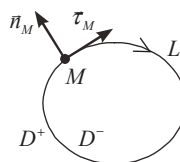


Рис. 3.1.3

часть, которая прилегает к L^+ , обозначим $O^+(M)$, а другую – $O^-(M)$ (назовем такую окрестность допустимой).

Рассмотрим теперь в точках кривой L функцию

$$\nabla_0(M) \cdot \pi_M = \frac{Q}{2\pi} \frac{(r_{MM_0}, \pi_M)}{r_{MM_0}^2} = Q\omega_1(M, M_0). \quad (3.1.2)$$

Функция $\omega_1(M, M_0)$ имеет физический смысл плотности протекания жидкости через точки кривой L от единичного источника в точке M_0 .

3.1.1. Пусть вначале кривая L является замкнутой кусочно-гладкой. Если точка M_0 принадлежит области D^+ , то физически ясно, что количество жидкости, проходящей через точки кривой L равно нулю, т.е.

$$\int_L \omega_1(M, M_0) dt = 0, \quad M_0 \in D^+. \quad (3.1.3)$$

Действительно, каждая частица жидкости движется по лучу, входящему в точку M_0 , и она по этому лучу входит в кривую L , а потом выходит (рис. 3.1.4). Это физическое доказательство равенства (3.1.3).

Для математического доказательства равенства (3.1.3) напомним формулу Грина [119]

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.1.4)$$

где L является границей области D , а функции $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны на $D \cup L$.

Теперь получаем

$$\begin{aligned} \int_L \omega_1(M, M_0) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) n_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) n_y \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) y'(t) dt + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) x'(t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Обозначая теперь $P = \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right)$, $Q = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right)$, получаем в силу формулы (3.1.4)

$$\int_L \omega_1(M, M_0) dt = \frac{1}{2\pi} \iint_D \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right] dx dy = 0, \quad (3.1.6)$$

так как во всех точках плоскости $M \neq M_0$ выполняется тождество

$$\Delta_M \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = 0. \quad (3.1.7)$$

Если теперь точка $M_0 \in D^-$, т.е. лежит внутри кривой L , то из представления движения жидкости в источник сразу видим (рис. 3.1.5), что

$$\int_L \omega_1(M, M_0) dt = -1. \quad (3.1.8)$$

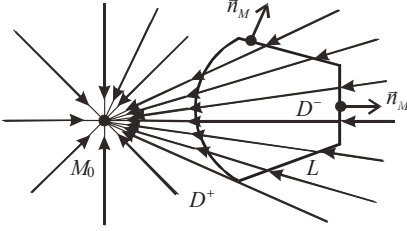


Рис. 3.1.4

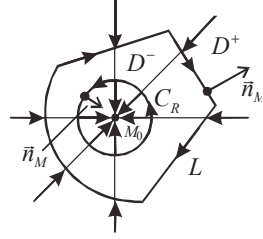


Рис. 3.1.5

Для математического доказательства равенства (3.1.8) возьмем вначале внутри области D^- окружность C_r радиуса r с центром в точке M_0 . Обход на ней выберем против движения часовой стрелки и будем обозначать ее в этом случае \tilde{C}_r . Тогда область между L и \tilde{C}_r при движении по \tilde{C}_r остается справа, т.е. для точек на \tilde{C}_r получим $x_0 - x = -r \cos \varphi$, $y_0 - y = -r \sin \varphi$, $\vec{n}_M = -\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}$, т.е.

$$\int_{C_r} \omega_1(M, M_0) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2} r d\varphi = 1. \quad (3.1.9)$$

Теперь опять применяя формулу Грина к области между \tilde{C}_r и L и учитывая направления обхода на них, получаем

$$\int_L \omega_1(M, M_0) dt = - \int_{\tilde{C}_r} \omega_1(M, M_0) dt = -1.$$

3.1.2. Пусть теперь L является окружностью \tilde{C}_r с центром в точке M_0 . Обозначим $C_{r,\theta}$ – часть окружности, опирающейся на центральный угол раствора θ . Тогда из рис. 3.1.5 и формулы (3.1.9) следует, что

$$\int_{C_{r,\theta}} \omega_1(M, M_0) dt = -\frac{\theta}{2\pi}. \quad (3.1.10)$$

3.1.3. Рассмотрим более подробно функцию $\omega_1(M, M_0)$. Пусть теперь кривая L кусочно-гладкая и точка M_0 лежит на кривой. По определению,

$$\begin{aligned} \omega_1(M, M_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{-y'(t)(x(t_0) - x(t)) + x'(t)(y(t_0) - y(t))}{(x(t_0) - x(t))^2 + (y(t_0) - y(t))^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{-y'(t)x_2(t, t_0) + x'(t)y_2(t, t_0)}{(t_0 - t)[x_2^2(t, t_0) + y_2^2(t, t_0)]}, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

где $x_2(t, t_0) = \frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t}$, $y_2(t, t_0) = \frac{y(t_0) - y(t)}{t_0 - t}$. Теперь запишем $\omega_1(M, M_0)$ в виде

$$\omega_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{-y'(t)x_3(t, t_0) + x'(t)y_3(t, t_0)}{x_2^2(t, t_0) + y_2^2(t, t_0)}, \quad (3.1.12)$$

где $x_3(t, t_0) = \frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t} - x'(t)$, $y_3(t, t_0) = \frac{y(t_0) - y(t)}{t_0 - t} - y'(t)$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3.1.1. Пусть функции $x(t), y(t)$ определены на $[0, t]$ и такие, что $x''(t), y''(t) \in H_r(\alpha)$ на $[0, t]$, т.е. производные $x^{r+r}(t), y^{r+r}(t) \in H(\alpha)$ на $[0, t]$, $r = 0, 1, \dots$. Тогда функции $x_3(t, t_0), y_3(t, t_0)$ также принадлежат пространству $H_r(\alpha)$, а $x_2(t, t_0), y_2(t, t_0) \in H_{r+1}(\alpha)$, равномерно по обеим координатам, на $[0, t]$.

Доказательство. Так как функция $x(t)$ имеет непрерывную производную, то

$$x(t_0) - x(t) = \int_t^{t_0} x'(\sigma) d\sigma. \quad (3.1.13)$$

Сделаем замену переменной в этом интеграле: $\delta = t + u(t_0 - t), d\delta = (t_0 - t)du, u_a = 0; u_b = 1$. Тогда получим

$$x(t_0) - x(t) = (t_0 - t) \int_0^1 x'(t + u(t_0 - t)) du$$

или

$$x_2(t, t_0) = \frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t} = \int_0^1 x'(t + u(t_0 - t)) du. \quad (3.1.14)$$

Из формулы (3.1.14) следует утверждение теоремы относительно функций $x_2(t, t_0)$ и $y_2(t, t_0)$, причем $x_2(t, t_0)|_{t=t_0} = x'(t_0) = x_2(t_0, t_0)$. Аналогично получим для $y_2(t, t_0)$.

Исходя из формулы (3.1.14), находим

$$x_3(t, t_0) = \frac{\frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t} - x'(t)}{t_0 - t} = \int_0^1 \frac{x'(t + u(t_0 - t)) - x'(t)}{t_0 - t} du. \quad (3.1.15)$$

Проинтегрируем интеграл в (3.1.15) по частям, полагая $\tilde{v} = \frac{x'(t + u(t_0 - t)) - x'(t)}{t_0 - t}, d\tilde{v} = du$. Тогда $d\tilde{u} = \tilde{u}'_u du = x''(t + u(t_0 - t)) du, \tilde{v} = u$. Поэтому

$$\begin{aligned} x_3(t, t_0) &= u \frac{x'(t + u(t_0 - t)) - x'(t)}{t_0 - t} \Big|_{u=0}^1 - \int_0^1 u \cdot x''(t + u(t_0 - t)) du = \\ &= \frac{x'(t_0) - x'(t)}{t_0 - t} - \int_0^1 u \cdot x''(t + u(t_0 - t)) du. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

По аналогии с формулой (3.1.14) получим, что

$$\frac{x'(t_0) - x'(t)}{t_0 - t} = \int_0^1 x''(t + u(t_0 - t)) du. \quad (3.1.17)$$

Из формул (3.1.16) и (3.1.17) следует, что

$$x_3(t, t_0) = \int_0^1 (1 - u) x''(t(1 - u) + t_0 u) du. \quad (3.1.18)$$

Из формулы (3.1.18) следует утверждение теоремы относительно функций $x_3(t, t_0)$ и $y_3(t, t_0)$. При этом получаем

$$x_3(t_0, t_0) = \frac{1}{2}x''(t_0); y_3(t_0, t_0) = \frac{1}{2}y''(t_0). \quad (3.1.19)$$

Следствие 3.1.1. Пусть L является гладкой простой кривой, т.е. $x'^2(t) + y'^2(t) \equiv 1, t \in [0, l]$ (если L замкнутая, то функции $x(t), y(t)$ и все их требуемые производные периодические с периодом l). Тогда, если $x''(t), y''(t) \in H_r(\alpha)$ на $[0, l]$, то и функция $\omega_1(M, M_0) = \omega_1(t, t_0)$ принадлежит этому классу на $[0, l] \times [0, l]$. Это следует из того, что в формуле (3.1.12) для функции $\omega_1(M, M_0)$ знаменатель при этих условиях является непрерывной функцией на $[0, l] \times [0, l]$ и не обращается в нуль.

Следствие 3.1.2. Пусть теперь кривая L является кусочно-гладкой, т.е. имеется конечное число точек на этой кривой, в которых нет касательной, но в них существуют односторонние орты касательных и нормалей и вторые производные $x''(t), y''(t) \in H_r(\alpha)$. Тогда из формул (3.1.12), (3.1.14) и (3.1.18) следует, что функция $\omega_1(M, M_0) = \omega_1(t, t_0)$ также является кусочно-гладкой на этой кривой и поэтому интегрируемой. Причем, если \tilde{L} – часть кривой L , такая, что ее длина равна $\lambda(\tilde{L})$, то существует такое число $M > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\int_{\tilde{L}} |\omega_1(M, M_0)| dt \leq M\lambda(\tilde{L}). \quad (3.1.20)$$

3.1.4. Вычислим теперь значение интеграла от функции $\omega_1(M, M_0)$ по кривой L , т.е. найдем число

$$V_L(M_0) = \int_L \omega_1(M, M_0) dt, \quad (3.1.21)$$

когда точка $M_0 \in L$.

В 3.1.1 было показано, что если кривая L замкнутая кусочно-гладкая и $M_0 \notin L$, то $V_L(M_0) = 0, M_0 \in D^+$ и $V_L(M_0) = -1, M_0 \in D^-$.

Пусть теперь точка M_0 лежит на кривой L . Вначале предположим, что она лежит на гладкой части этой кривой (рис. 3.1.6). Из физического смысла функции $\omega_1(M, M_0)$ как плотности протекания жидкости через точки M кривой $L, M \neq M_0$, получаем следующее. Проведем в точке M_0 касательную прямую P . Тогда ясно, что частицы жидкости, двигаясь по лучам, входящим в точку M_0 справа от прямой P , пересекают точки кривой L . Таким образом, все количество жидкости, входящее в точку M_0 справа от прямой P , проходит через точки $M \neq M_0$ кривой L . Это количество жидкости равно $-1/2$. Поэтому, если точка M_0 лежит на гладкой части кривой L , то

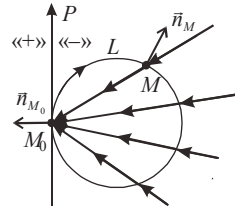


Рис. 3.1.6

$$V_L(M_0) = \int_L \omega_1(M, M_0) dt = -1/2. \quad (3.1.22)$$

Таким образом, дано физическое доказательство равенства (3.1.22).

Дадим теперь математическое доказательство равенства (3.1.22). Возьмем окружность C_ε радиуса ε с центром в точке M_0 и обозначим $L_{M_0,\varepsilon}$ – часть кривой L , заключенной внутри окружности C_ε , а C_ε^- – часть окружности C_ε лежащей в D^- , т.е. лежащей правее кривой L (см. рис. 3.1.7). Ясно, что длина кривой $L_{M_0,\varepsilon} - \lambda(L_{M_0,\varepsilon}) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее, раствор окружности C_ε^- равен $\pi + O(\varepsilon)$, так как в точке M_0 имеется касательная. Теперь запишем, что

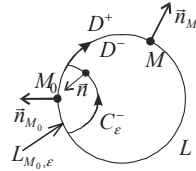


Рис. 3.1.7

$$\begin{aligned} V_L(M_0) &= \int_L \omega_1(M, M_0) dt = \int_{L_{M_0,\varepsilon}} \omega_1(M, M_0) dt + \\ &+ \int_{L \setminus L_{M_0,\varepsilon}} \omega_1(M, M_0) dt = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Из формулы (3.1.20) следует, что $|I_1| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для вычисления I_2 рассмотрим интеграл от функции $\omega_1(M, M_0)$ по кривой $\tilde{L} = (L \setminus L_{M_0,\varepsilon}) \cup C_\varepsilon^-$, выбирая на C_ε^- направление движения, согласованное с движением на $L \setminus L_{M_0,\varepsilon}$. Теперь точка M_0 лежит во внешней области для замкнутой кусочно-гладкой кривой \tilde{L} и согласно формуле (3.1.3) получаем, что

$$\int_{\tilde{L}} \omega_1(M, M_0) dt = 0 = \int_{C_\varepsilon^-} \omega_1(M, M_0) dt + \int_{L \setminus L_{M_0,\varepsilon}} \omega_1(M, M_0) dt. \quad (3.1.24)$$

Но согласно формуле (3.1.10) получаем

$$\int_{C_\varepsilon^-} \omega_1(M, M_0) dt = \frac{\pi + O(\varepsilon)}{2\pi} \quad (3.1.25)$$

в силу направления движения на C_ε^- и выбора на ней нормали. Из формул (3.1.24), (3.1.25) теперь следует, что

$$\int_{L \setminus L_{M_0,\varepsilon}} \omega_1(M, M_0) dt = -\frac{1}{2} + \frac{O(\varepsilon)}{2\pi}. \quad (3.1.26)$$

Теперь из формул (3.1.23), (3.1.26) следует, что

$$\int_L \omega_1(M, M_0) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus L_{M_0,\varepsilon}} \omega_1(M, M_0) dt = -\frac{1}{2}. \quad (3.1.27)$$

Таким образом, дано математическое доказательство равенства (3.1.22).

Пусть теперь точка M_0 не является точкой гладкости кусочно-гладкой замкнутой кривой L , т.е. односторонние орты касательных $\tau_{M_0}^+$ и $\tau_{M_0}^-$ не совпадают (рис. 3.1.8).

Пусть угол между векторами $\tau_{M_0}^+$ и $-\tau_{M_0}^-$, на который надо повернуть вектор $-\tau_{M_0}^-$, проходя через область D^- до совпадения с вектором $\tau_{M_0}^+$, будет θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Если $\theta = \pi$, то точка M_0 является точкой гладкости. В этом случае

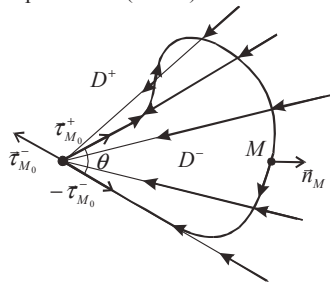


Рис. 3.1.8

частицы жидкости, которые движутся по лучам, заключенным между векторами $\tau_{M_0}^+$ и $-\tau_{M_0}^-$ (т.е. лучи находятся в угле θ), входят через кривую L в область D^- и там остаются. Пусть частица движется по лучу точке M_0 , который находится вне указанного угла, но пересекает кривую L . Тогда этот луч пересекает эту кривую первый раз в точке $M_1 \neq M_0$ и последний раз в точке $M_2 \neq M_0$ и поэтому эту частицу можно не учитывать. Таким образом, количество жидкости, проходящей через точки кривой L , отличных от точки M_0 , будет равно количеству жидкости, входящей в точку M_0 через угол между векторами $\tau_{M_0}^+$ и $-\tau_{M_0}^-$, т.е.

$$V_L(M_0) = \int_L \omega_1(M, M_0) dt = -\frac{\theta}{2\pi}. \quad (3.1.28)$$

Формула (3.1.22), очевидно, является частным случаем формулы (3.1.28).

Математическое доказательство равенства (3.1.28) аналогично доказательству равенства (3.1.22).

3.1.5. Рассмотрим функцию $\omega_1(M, \tilde{M}_0)$ на кривой L , т.е. точки $M \in L$, а точка \tilde{M}_0 – произвольная точка плоскости R^2 . Значение функции $\omega_1(M, M_0)$, когда и точка $M_0 \in L$, назовем прямым значением этой функции на кривой L . В 3.1.3 было доказано, что если кривая L является кусочно-гладкой и такой, что $x''(t)$, $y''(t)$ на участках гладкости принадлежат $H_r(\alpha)$, т.е. в точках нарушения гладкости кривой L эти вторые производные имеют разрывы первого рода, то функция $\omega_1(M, M_0)$ также является кусочно-гладкой на $[0, l] \times [0, l]$ и интегрируемой на кривой L по каждой из переменных, причем для $\omega_1(M, M_0)$ выполняется соотношение (3.1.20).

Обозначим теперь $\omega_{1, M_0}^\pm(M, M_0)$ – предельные значения функции $\omega_1(M, \tilde{M}_0)$ при стремлении точки $M_0 \notin L$ к точке $M_0 \in L$ слева или справа соответственно (см. рис. 3.1.9), т.е.

$$\omega_{1, M_0}^\pm(M, M_0) = \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \omega_1(M, \tilde{M}_0). \quad (3.1.29)$$

Попробуем рассмотреть, как значения функций $\omega_{1, M_0}^\pm(M, M_0)$ связаны со значениями функции $\omega_1(M, M_0)$. Предположим вначале, что точка M_0 лежит на участке гладкости кривой L . Тогда функция $\omega_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{MM_0}, \pi_M)}{r_{MM_0}^2}$ является также гладкой по M на этом участке и определено значение функции $\omega_1(M, M_0)$. Функция $\omega_1(M, \tilde{M}_0)$, когда $\tilde{M}_0 \notin L$, также является гладкой на этом участке и кусочно-непрерывной на всей кривой L .

Рассмотрим теперь функцию

$$W(M, M_0, \tilde{M}_0) = \omega_1(M, \tilde{M}_0) - \omega_1(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \pi_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} - \frac{(r_{MM_0}, \pi_M)}{r_{MM_0}^2} \right], \quad (3.1.30)$$

где $M \in L$.

Если точка M кривой L фиксирована и $M \neq M_0$, то при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm$ получаем, что $r_{M\tilde{M}_0} \rightarrow r_{MM_0}$ и поэтому

$$W(M, M_0, M_0^\pm) = \omega_{1, M_0}^\pm(M, M_0) - \omega_1(M, M_0) = 0, \quad (3.1.31)$$

$$M, M_0 \in L, \quad M \neq M_0.$$

Теперь рассмотрим значение $W(M_0, M_0, M_0^\pm)$. Для этого запишем функцию $W(M, M_0, \tilde{M}_0)$ в виде

$$W(M, M_0, \tilde{M}_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0} - r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} + \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} - \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} \right] = \quad (3.1.32)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} + \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} - \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} \right].$$

Пусть $M_0 \notin L$, а точка M сдвинется в точку M_0 . Число $r_{M_0\tilde{M}_0}^2 \neq 0$, $r_{M_0M_0} = 0$ и поэтому

$$W(M_0, M_0, \tilde{M}_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(r_{M_0\tilde{M}_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{M_0\tilde{M}_0}^2} - \frac{(r_{M_0M_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{M_0M_0}^2} \right]. \quad (3.1.33)$$

Как было указано выше, значение $\omega_1(M_0, M_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{M_0M_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{M_0M_0}^2}$ является некоторым

определенным числом, если точка M_0 лежит на участке гладкости кривой L . Наконец, первое слагаемое в квадратных скобках в (3.1.33) запишем в виде

$$\psi(M_0, \tilde{M}_0) = \frac{(r_{M_0\tilde{M}_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{M_0\tilde{M}_0}^2} = \frac{(r_{M_0\tilde{M}_0}^0, \bar{n}_{M_0})}{r_{M_0\tilde{M}_0}}. \quad (3.1.34)$$

Будем рассматривать только такое стремление \tilde{M}_0 к точке M_0 , что она не выходит из угла с вершиной в точке M_0 , у которого раствор 2θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, и биссектриса которого направлена по вектору \bar{n}_{M_0} (см. рис. 3.1.10).

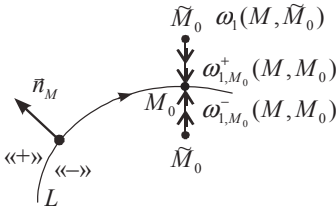


Рис. 3.1.9

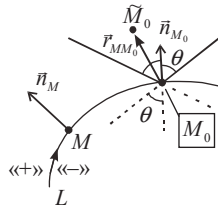


Рис. 3.1.10

Тогда получаем, что справедливы неравенства

$$1 \geq (r_{M_0\tilde{M}_0}^0, \bar{n}_{M_0}) \geq \cos \theta > 0, \quad (3.1.35)$$

если точка \tilde{M}_0 слева от L , и

$$-1 \leq (r_{M_0\tilde{M}_0}^0, \bar{n}_{M_0}) \leq -\cos \theta < 0, \quad (3.1.36)$$

если точка \tilde{M}_0 находится справа от L .

Таким образом, в последнем представлении функции $\psi(M_0, \tilde{M}_0)$ в формуле (3.1.34) числитель в нуль не обращается, а знаменатель является положительной величиной, стремящейся к нулю при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0$, т. е. получаем

$$\psi(M_0, M_0^\pm) = \pm\infty. \quad (3.1.37)$$

Из формул (3.1.31)–(3.1.37) получаем справедливость соотношений для точек M и M_0 на кривой L :

$$W(M, M_0, M_0^\pm) = \omega_{1, M_0}^\pm(M, M_0) - \omega_1(M, M_0) = \begin{cases} 0, & M \neq M_0, \\ \pm\infty, & M = M_0, \end{cases} \quad (3.1.38)$$

т. е. получается δ -функция в точке M_0 с некоторым коэффициентом. Чтобы определить этот коэффициент, надо вычислить интеграл от левой части в формуле (3.1.38) по сколь угодно малой окрестности точки M_0 на кривой L . Действительно, можно написать

$$\begin{aligned} & \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_L W(M, M_0, \tilde{M}_0) dt = \\ & = \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_{L \setminus L_{M_0, \varepsilon}} W(M, M_0, \tilde{M}_0) dt + \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_{L_{M_0, \varepsilon}} W(M, M_0, \tilde{M}_0) dt = \\ & = I_1(M_0, M_0^\pm) + I_2(M_0, M_0^\pm), \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

где $L_{M_0, \varepsilon}$ — часть кривой L , указанной на рис. 3.1.7.

Так как на кривой $L \setminus L_{M_0, \varepsilon}$ функция $W(M, M_0, \tilde{M}_0)$ кусочно-непрерывна, то знак предела и знак интеграла можно поменять местами и получить

$$I_1(M_0, M_0^\pm) = \int_{L \setminus L_{M_0, \varepsilon}} W(M, M_0, M_0^\pm) dt = \int_{L \setminus L_{M_0, \varepsilon}} 0 \cdot dt = 0. \quad (3.1.40)$$

Займемся теперь вычислением $I_2(M_0, M_0^\pm)$. Предположим вначале, что $L_{M_0, \varepsilon}$ является интервалом на некоторой прямой P . Тогда на $L_{M_0, \varepsilon}$ имеем $\omega(M, M_0) \equiv 0$. Таким образом, в этом случае

$$I_2(M_0, M_0^\pm) = \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_{L_{M_0, \varepsilon}} \omega_1(M, \tilde{M}_0) dt. \quad (3.1.41)$$

Выберем теперь на плоскости R^2 систему координат OXY , взяв в качестве оси OX прямую P с заданным на ней направлением, начало координат поместим в точку M_0 , а ось OY направим по вектору π_{M_0} (см. рис. 3.1.11). Тогда для интеграла в (3.1.41) получим следующее представление ($|x_0| < \varepsilon$):

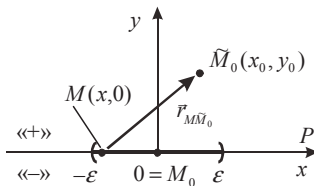


Рис. 3.1.11

$$\int_{L_{M_0, \varepsilon}} \omega_1(M, \bar{M}_0) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{y_0 dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{y_0} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon-x_0}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon+x_0}{y_0} \right). \quad (3.1.42)$$

Так как $|x_0| < \varepsilon$, то числа $\varepsilon - x_0$ и $\varepsilon + x_0$ оба положительные и при $\bar{M}_0 \rightarrow M_0^{\pm}$ можно полагать, что эти числа больше $\varepsilon/2$. Если теперь $\bar{M}_0 \rightarrow M_0^+$, т. е. $y_0 \rightarrow 0+$, то сумма в круглых скобках в (3.1.42) стремится к π , а если $\bar{M}_0 \rightarrow M_0^-$, т. е. $y_0 \rightarrow 0-$, то к $-\pi$. Итак, получаем

$$I_2(M_0, M_0^{\pm}) = \lim_{\bar{M}_0 \rightarrow M_0^{\pm}} \int_{L_{M_0, \varepsilon}} \omega_1(M, \bar{M}_0) dt = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.1.43)$$

Теперь с помощью формул (3.1.38), (3.1.39), (3.1.40), (3.1.43) можно написать

$$\omega_{1, M_0}^{\pm}(M, M_0) = \omega_1(M, M_0) \pm \frac{1}{2} \delta(M - M_0), \quad (3.1.44)$$

где $\delta(M - M_0)$ – дельта-функция (обобщенная функция), удовлетворяющая условиям $(M, M_0 \in L)$

$$\delta(M - M_0) = \begin{cases} 0, & M \neq M_0, \\ +\infty, & M = M_0, \end{cases} \quad (3.1.45)$$

$$\int_L \delta(M - M_0) dt = 1. \quad (3.1.46)$$

Дадим теперь *физическое доказательство равенства* (3.1.43). Так как функция $\omega_1(M, \bar{M}_0)$ дает распределенное значение плотности протекания жидкости через отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$ оси OX (в примере, рассмотренном выше) или просто через некоторый отрезок I от источника плотности 1 в точке \bar{M}_0 , то ясно (см. рис. 3.1.12), что количество жидкости, протекаемое через этот отрезок (см. рис. 3.1.5 и формулу (3.1.10)) равно $\pm \theta/2\pi$, где θ равно величине угла, под которым виден из точки \bar{M}_0 отрезок, и \pm соответствует тому, слева или справа от отрезка расположен источник, т. е.

$$\int_I \omega_1(M, \bar{M}_0) dt = \pm \frac{\theta}{2\pi}. \quad (3.1.47)$$

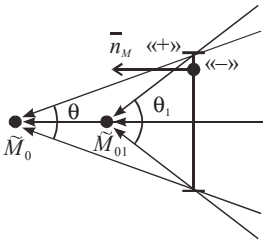


Рис. 3.1.12

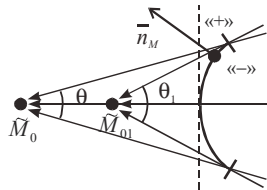


Рис. 3.1.13

Из рис. 3.1.12 видно, что если $\tilde{M}_0 \rightarrow I$, то $\theta \rightarrow \pi$, т. е.

$$\lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_I \omega_1(M, \tilde{M}_0) dt = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.1.48)$$

Эти физические рассуждения показывают (рис. 3.1.13), что равенства (3.1.47) и (3.1.48) сохраняются с точностью до ε , если вместо интеграла по отрезку в них будет стоять интеграл по гладкой части $L_{M_0, \varepsilon}$ кривой L , содержащей точку M_0 , т. е. равенство (3.1.43) будет верно в этом случае с точностью до ε и поэтому верно равенство (3.1.44).

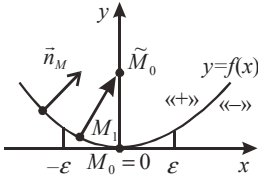


Рис. 3.1.14

Докажем теперь последние рассуждения математически. Пусть часть $L_{M_0, \varepsilon}$ кривой L не является отрезком, но является гладкой кривой. Возьмем на плоскости координаты OXY так, что начало координат находится в точке M_0 , ось OX направлена по касательной к кривой $L_{M_0, \varepsilon}$ в точке M_0 и ось OY направлена влево от этой кривой. Тогда уравнение этой кривой можно записать в виде $y = f(x)$, $y(0) = f(0) = 0$, $y'(0) = f'(0) = 0$ (см. рис. 7.1.14). В этом случае $\vec{n}_M = -f'(x)\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_{MM_0} = (0-x)\vec{i} + (y_0-y)\vec{j} = -x\vec{i} + (y_0-f(x))\vec{j}$.

Поэтому

$$\omega_1(M_0, \tilde{M}_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{r}_{M_0, \tilde{M}_0}, \vec{n}_{M_0})}{r_{M_0, \tilde{M}_0}^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{-xf'(x) + y_0 - f(x)}{x^2 + (y_0 - f(x))^2}. \quad (3.1.49)$$

В силу описанных выше условий на функцию $y = f(x)$ получаем, что

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(\theta_1)(x-x_0)^2 = \\ &= \{x_0 = 0\} = \frac{1}{2} f''(\theta_1)x^2, \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

$$y'(x) = f'(x) = f''(\theta_2)x, \quad \theta_1, \theta_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

С учетом равенств (3.1.50) формулу (3.1.49) запишем в виде

$$\omega_1(M_0, \tilde{M}_0) = \frac{-f''(\theta_2)x^2 + y_0 - \frac{1}{2}f''(\theta_1)x^2}{x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2}f''(\theta_1)x^2\right)^2}. \quad (3.1.51)$$

Предполагаем, что для кривой $L_{M_0, \varepsilon}$ $|f''(x)| \leq C, \forall M \in L_{M_0, \varepsilon}$ и поэтому для любого y_0 и любого $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ будет верно неравенство

$$\left| \frac{-x^2 \left(\frac{1}{2} f''(\theta_1) + f''(\theta_2) \right)}{x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2} \right| \leq \frac{3}{2} C. \quad (3.1.52)$$

Поэтому

$$\left| \int_{-x^2}^{\varepsilon - x^2} \frac{\left(\frac{1}{2} f''(\theta_1) + f''(\theta_2) \right)}{\left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2} dx \right| \leq 3C\varepsilon. \quad (3.1.53)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2} &= \frac{y_0}{x^2 + y_0^2 - y_0 f''(\theta_1) x^2 + \frac{1}{4} f''^2(\theta_1) x^4} - \\ &= \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} + \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} = \frac{-y_0(-y_0 f''(\theta_1) x^2 + \frac{1}{4} f''^2(\theta_1) x^4)}{\left(x^2 + y_0^2 \right) \left(x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2 \right)} + \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} = \\ &= \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} + \frac{y_0^2 x^2 f''(\theta_1) - \frac{1}{4} f''^2(\theta_1) x^4}{\left(x^2 + y_0^2 \right) \left(x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2 \right)}. \end{aligned} \quad (3.1.54)$$

Опять замечаем, что

$$\frac{\left| y_0^2 x^2 f''(\theta_1) - \frac{1}{4} f''^2(\theta_1) x^4 \right|}{\left(x^2 + y_0^2 \right) \left(x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2 \right)} \leq C + \frac{1}{4} C^2 \leq C_1, \quad (3.1.55)$$

т. е.

$$\left| \int_{-x^2}^{\varepsilon} \frac{y_0^2 x^2 f''(\theta_1) - \frac{1}{4} f''^2(\theta_1) x^4}{\left(x^2 + y_0^2 \right) \left(x^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2} f''(\theta_1) x^2 \right)^2 \right)} dx \right| \leq 2C_1 \varepsilon. \quad (3.1.56)$$

Теперь с учетом равенства (3.1.43) и неравенств (3.1.53), (3.1.56) получаем

$$\lim_{M_0 \rightarrow M_0^{\pm}} \int_{L_{M_0, \varepsilon}} \omega_1(M, \bar{M}_0) dt = \pm \frac{1}{2} + O(\varepsilon). \quad (3.1.57)$$

Следовательно,

$$\lim_{M_0 \rightarrow M_0^{\pm}} \int_L W(M, M_0, \bar{M}_0) dt = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.1.58)$$

Вывод 3.1.1. Если $M_0 \in L$ лежит на гладкой части L , то

$$\omega_{1, M_0}^{\pm}(M, M_0) = \omega_1(M, M_0) \pm \frac{1}{2} \delta(M - M_0) \quad (3.1.59)$$

$$\int_L \omega_{1, M_0}^{\pm}(M, M_0) dt = \int_L \omega_1(M, M_0) dt \pm \frac{1}{2}. \quad (3.1.60)$$

Пусть теперь точка M_0 является угловой точкой кривой L (рис. 3.1.8). Таким образом, в точке M_0 имеются односторонние орты касательных $\tau_{M_0}^+$ и $\tau_{M_0}^-$ и угол между векто-

рами $\tau_{M_0}^+$ и $-\tau_{M_0}^-$ равен θ . Пусть теперь в точке \tilde{M}_0 размещен источник интенсивности 1 и точка \tilde{M}_0 движется к точке M_0 по пути, лежащем в углу между лучами λ_1 и λ_2 , (рис. 3.1.15) и не касающемся их (будем писать $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^+$).

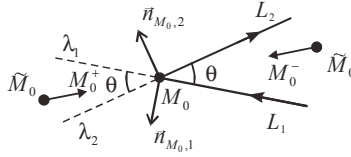


Рис. 3.1.15

Тогда количество жидкости, проходящее через угол $L_1 \cup L_2$ (независимо от длины L_1 и L_2), при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^+$ в пределе будет равно $\frac{\theta}{2\pi}$, а при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^-$ в пределе равно $-\frac{2\pi - \theta}{2\pi}$, т. е.

$$\int_{L_1 \cup L_2} \omega_{1, M_0}^{\pm}(M, M_0) dt = \int_{L_1 \cup L_2} \omega_1(M, M_0) dt + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi}, & \text{"+"}, \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi}, & \text{"-"}, \end{cases} \quad (3.1.61)$$

и

$$\omega_{1, M_0}^{\pm}(M, M_0) = \omega_1(M, M_0) + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \delta(M - M_0), & \text{"+"}, \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \delta(M - M_0), & \text{"-"}. \end{cases} \quad (3.1.62)$$

Докажем теперь формулы (3.1.61), (3.1.62) математически. Пусть L_1 это отрезок $[-\varepsilon, 0]$ оси OX , а L_2 - часть прямой $y = kx$, $k = \operatorname{tg} \varphi$, при $x \in [0, \varepsilon]$. Тогда $\bar{n}_{M,1} = \bar{j}$, $\bar{r}_{MM_0} = -x\bar{i} + y_0\bar{j}$, при $x \in [-\varepsilon, 0]$ и $\bar{n}_{M,2} = \frac{-k\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{1+k^2}}$, $\bar{r}_{MM_0} = (-x)\bar{i} + (y_0 - kx)\bar{j}$, при $x \in [0, \varepsilon]$.

Поэтому (дифференциал длины дуги на L_2 есть $dt = \sqrt{1+k^2} dx$)

$$\begin{aligned} \int_L \omega_1(M, \tilde{M}_0) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^0 \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{kx + y_0 - kx}{\sqrt{1+k^2} (x^2 + (y_0 - kx)^2)} \sqrt{1+k^2} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{y_0} \Big|_{-\varepsilon}^0 + \int_0^{\varepsilon} \frac{y_0 dx}{x^2 + k^2 x^2 - 2ky_0 x + y_0^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{y_0} + \int_0^{\varepsilon} \frac{y_0 dx}{x^2 (1+k^2) - 2ky_0 x + y_0^2} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{y_0} + \int_0^\varepsilon \frac{y_0 dx}{\left[x\sqrt{1+k^2} - \frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}} \right]^2} + \left[y_0^2 - \frac{y_0^2 k^2}{1+k^2} \right] \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{y_0} + \int_0^\varepsilon \frac{y_0 dx}{\left[x\sqrt{1+k^2} - \frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}} \right]^2} + \frac{y_0^2}{1+k^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{y_0} + \int_0^\varepsilon \frac{\frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}} d \left(x\sqrt{1+k^2} - \frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}} \right)}{\left[x\sqrt{1+k^2} - \frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}} \right]^2} + \frac{y_0^2}{1+k^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{1+k^2} - \frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}}}{\frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}}} \right] = \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{y_0} + \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon\sqrt{1+k^2} - \frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}}}{\frac{y_0 k}{\sqrt{1+k^2}}} - \underbrace{\operatorname{arctg} k}_\varphi \right]. \tag{3.1.63}
\end{aligned}$$

Теперь видно, что при $y_0 \rightarrow 0 \pm$ получаем

$$\int_L \omega_1(M, \bar{M}_0) dt \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi - \varphi}{2\pi}, & "+", \\ -\frac{\pi - \varphi}{2\pi}, & "-". \end{cases} \tag{3.1.64}$$

Если теперь обозначить $\pi - \varphi = \theta$, то получим

$$\lim_{\bar{M}_0 \rightarrow \bar{M}_0^\pm} \int_L \omega_1(M, \bar{M}_0) dt = \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi}, & "+", \\ -\frac{\theta}{2\pi}, & "-". \end{cases} \tag{3.1.65}$$

Теперь ясно, что как выше мы заменили отрезок I на гладкую кривую (см. рис. 3.1.14), так в данном случае можем заменить каждый из отрезков L_1 и L_2 на гладкие кривые L_1 и L_2 , такие, что в точке M_0 они образуют угол θ в описанном выше смысле. Получим формулу (3.1.61).

Равенства (3.1.62) доказываются теперь с помощью представления (3.1.32) и учетом, что точка M_0 угловая.

3.2. Потенциал двойного слоя и его свойства. Плоский случай

Потенциалом двойного слоя (п.д.с.) с плотностью $g(M) = g(t)$ на кусочно-гладкой кривой L называется функция

$$\begin{aligned}\Phi(M_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) dt = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(r_{MM_0}^2, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} g(M) dt = \\ &= \int_L \omega_1(M, M_0) g(M) dt, \quad M_0 \notin L.\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Как было показано в параграфе 3.1, если L кусочно-гладкая и $M_0 \in L$, то функция $\omega_1(M, M_0)$, $M, M_0 \in L$, является кусочно-гладкой на $L \times L$. Поэтому назовем

$$\Phi(M_0) = \int_L \omega_1(M, M_0) g(M) dt, \quad M_0 \in L. \quad (3.2.2)$$

прямым значением п.д.с. на кривой L . Легко проверяется, что

$$\Delta \Phi(M_0) = 0, \quad M_0 \notin L, \quad (3.2.3)$$

т. е. функция $\Phi(M_0)$ гармоническая вне L .

Рассмотрим предельные значения функции $\Phi(M_0)$. Обозначим

$$\Phi^\pm(M_0) = \lim_{M_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_L \omega_1(M, \tilde{M}_0) g(M) dt. \quad (3.2.4)$$

Из формулы (3.1.61) следует, что

$$\omega_1^\pm(M, M_0) g(M) = \omega_1(M, M_0) g(M) + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \delta(M - M_0) g(M), & "+", \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \delta(M - M_0) g(M), & "-". \end{cases} \quad (3.2.5)$$

из которой следует, что

$$\begin{aligned}\Phi^\pm(M_0) &= \int_L \left[\omega_1(M, M_0) g(M) + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \delta(M - M_0) g(M) \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \delta(M - M_0) g(M) \end{cases} \right] dt = \\ &= \int_L \omega_1(M, M_0) g(M) dt + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} g(M_0), & "+", \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} g(M_0), & "-". \end{cases}\end{aligned}\quad (3.2.6)$$

где $M_0 \in L$.

Вывод 3.2.1. 1) Для точек M_0 гладкости кривой L получаем

$$\Phi^\pm(M_0) = \int_L \omega_1(M, M_0) g(M) dt \pm \frac{1}{2} g(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (3.2.7)$$

2) Для угловых точек верна формула (3.2.6)

Вывод 3.2.2. 1) Для точек гладкости справедливы формулы типа Сохоцкого–Племеля

$$\frac{1}{2} [\Phi^+(M_0) + \Phi^-(M_0)] = \int_L \omega_1(M, M_0) g(M) dt, \quad (3.2.8)$$

$$\Phi^+(M_0) - \Phi^-(M_0) = g(M_0). \quad (3.2.9)$$

2) Для угловых точек

$$\Phi^+(M_0) + \Phi^-(M_0) = 2 \int_L \omega_1(M, M_0) g(M) dt - \frac{\pi - \theta}{\pi} g(M_0), \quad (3.2.10)$$

$$\Phi^+(M_0) - \Phi^-(M_0) = g(M_0) \quad (3.2.11)$$

3.3. Потенциал двойного слоя и его производные Плоский случай

Вначале рассмотрим нормальную производную потенциала двойного слоя. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi^\pm(M_0) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0 L}} \int \omega_1(M, M_0) g(M) dt, \quad M_0 \in L, \quad (3.3.1)$$

так как функция $g(M)$ определена только на кривой L и при сдвиге по нормали значение $g(M_0)$ не меняется.

Для касательной производной примет

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \Phi^\pm(M_0) &= \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0 L}} \int \omega_1(M, M_0) g(M) dt + \\ &+ \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0), \text{ "+"} , \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0), \text{ "-"}, \end{cases} \quad M_0 \in L. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Для точек на гладких частях формула (3.3.2) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \Phi^\pm(M_0) = \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0 L}} \int \omega_1(M, M_0) g(M) dt \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0). \quad (3.3.3)$$

Так как значение градиента функции не зависит от системы координат, в которой рассматривается данная функция, то можно написать

$$\begin{aligned} \text{grad} \Phi^\pm(M_0) &= \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi^\pm(M_0) \bar{n}_{M_0} + \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \Phi^\pm(M_0) \tau_{M_0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi(M_0) \bar{n}_{M_0} + \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \Phi(M_0) \tau_{M_0} + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0) \tau_{M_0}, \text{ "+"} \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0) \tau_{M_0}, \text{ "-"} \end{cases} = (3.3.4) \\ &= \text{grad} \Phi(M_0) + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0) \tau_{M_0}, \text{ "+"} , \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0) \tau_{M_0}, \text{ "-"} . \end{cases} \end{aligned}$$

Чтобы записать формулу (3.3.4) в бескоординатной форме (как $\text{grad}()$), вводится понятие касательной составляющей градиента функции на кривой

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} g(M_0) \tau_{M_0} = \text{Grad} g(M_0). \quad (3.3.5)$$

Теперь формула (3.3.4) принимает вид

$$\text{grad } \Phi^\pm(M_0) = \text{grad } \Phi(M_0) + \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} \text{Grad } g(M_0), & "+" \\ -\frac{2\pi - \theta}{2\pi} \text{Grad } g(M_0), & "-" \end{cases}, \quad (3.3.6)$$

а для точек гладкости

$$\text{grad } \Phi^\pm(M_0) = \text{grad } \Phi(M_0) \pm \frac{1}{2} \text{Grad } g(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (3.3.7)$$

Таким образом, получилась известная формула для градиента потенциала двойного слоя.

3.4. Потенциал простого слоя и его производные. Плоский случай

Потенциалом простого слоя на кривой L называется функция

$$\Phi_s(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \mu(M) dt, \quad (3.4.1)$$

где $\mu(M) = \mu(t)$ называется плотностью этого потенциала.

Если $M_0 \notin L$, то это гармоническая функция, т. е.

$$\Delta \Phi_s(M_0) = 0, \quad M_0 \notin L. \quad (3.4.2)$$

Так как ядро этого интеграла имеет только логарифмическую особенность, когда $M_0 \in L$, то функция $\Phi_s(M_0)$ непрерывно продолжается на L и непрерывна при переходе через эту кривую.

Теперь посмотрим, как ведут себя производные этой функции.

Если $M_0 \notin L$, то эта функция гармоническая в окрестности точки M_0 (достаточно малой) и поэтому бесконечно дифференцируемая при $\mu(t) \in L_2$ на L .

Рассмотрим вначале нормальную производную этой функции в точке $\bar{M}_0 \notin L$, но находящейся близко от нее:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi_s(\bar{M}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \left(\ln \frac{1}{r_{M\bar{M}_0}} \right) \mu(M) dt, \quad (3.4.3)$$

где M_0 – точка на кривой L к которой потом устремим точку \bar{M}_0 (см. рис. 3.1.9).

По определению производной по направлению, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \left(\ln \frac{1}{r_{M\bar{M}_0}} \right) = \frac{1}{2\pi} \nabla_{\bar{n}_{M_0}} \ln \frac{1}{r_{M\bar{M}_0}} \bar{n}_{M_0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(r_{M\bar{M}_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{M\bar{M}_0}^2} = \omega_{1,s}(M, \bar{M}_0). \quad (3.4.4)$$

Назовем значение

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi_1(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \left(\ln \frac{1}{r_{M\bar{M}_0}} \right) \mu(M) dt = \int_L \omega_{1,1}(M_0, M) \mu(M) dt, \quad (3.4.5)$$

прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя. Посмотрим теперь, как связаны с этим прямым значением предельные значения нормальной производной, т. е. (см. рис. 3.1.9)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi_s^\pm(M_0) = \lim_{\bar{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_L \omega_{1,s}(M, \bar{M}_0) \mu(M) dt. \quad (3.4.6)$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}\omega_{1,s}(M, \tilde{M}_0) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{M\tilde{M}_0}^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} + \frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} \right] = -\omega_1(M, \tilde{M}_0) + \lambda(M, M_0, \tilde{M}_0),\end{aligned}\quad (3.4.7)$$

где функция $\omega_1(M, M_0)$ определена в 0 (см. также (3.1.30)).

Рассмотрим вначале функцию $\lambda(M, M_0, \tilde{M}_0)$. Предположим, что кривая L кучно-ляпуновская, т. е. на гладких ее частях выполняется неравенство

$$|\bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M| \leq Ar_{MM_0}. \quad (3.4.8)$$

Для выполнения неравенства (3.4.8) достаточно предположить, что на гладких частях $x''(t)$, $y''(t)$ удовлетворяют условию Липшица.

Далее

$$\begin{aligned}\lambda(M, M_0, \tilde{M}_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{M\tilde{M}_0} - r_{MM_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)(r_{MM_0}^2 - r_{M\tilde{M}_0}^2)}{r_{M\tilde{M}_0}^2 r_{MM_0}^2} = \\ &= \lambda_1(M, M_0, \tilde{M}_0) + \lambda_2(M, M_0) + \lambda_3(M, M_0, \tilde{M}_0).\end{aligned}\quad (3.4.9)$$

Рассмотрим в отдельности каждое слагаемое в (3.4.9).

Для $\lambda_1(M, M_0, \tilde{M}_0)$ имеем

$$\lambda_1(M, M_0, \tilde{M}_0) \xrightarrow{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0} \begin{cases} 0, & M \neq M_0, \\ 0, & M = M_0, \end{cases} \quad (3.4.10)$$

так как

$$\lambda_1(M_0, M_0, \tilde{M}_0) = \frac{(r_{M\tilde{M}_0}, 0)}{r_{M\tilde{M}_0}^2} = 0, \quad (3.4.11)$$

при любом $\tilde{M}_0 \neq M_0$ и

$$\lambda_1(M, M_0, M_0) = \frac{(r_{M_0M_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} = 0 \quad (3.4.12)$$

при $M \neq M_0$.

Для $\lambda_2(M, M_0)$ в силу (3.4.8) имеем

$$|\lambda_2(M, M_0)| \leq A \text{ и } \lambda_2(M_0, M_0) = 0, \quad (3.4.13)$$

для любых $M, M_0 \in L$.

Для $\lambda_3(M, M_0, \tilde{M}_0)$ имеем

$$\begin{aligned}\lambda_3(M, M_0, \tilde{M}_0) &= \frac{(r_{M_0M_0}, \bar{n}_{M_0} - \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} \cdot \frac{(r_{M_0M_0}, r_{M_0M_0}) - (r_{M_0\tilde{M}_0}, r_{M_0\tilde{M}_0})}{r_{M\tilde{M}_0}^2} = \\ &= \lambda_2(M, M_0) \frac{(r_{MM_0}, r_{M_0M_0}) + (r_{M_0M_0}, r_{M\tilde{M}_0})}{r_{M\tilde{M}_0}^2} = \lambda_2(M, M_0) \cdot \lambda_{3,1}(M, M_0, \tilde{M}_0).\end{aligned}\quad (3.4.14)$$

Для $\lambda_{3,1}(M, M_0, \tilde{M}_0)$ имеем

$$\lambda_{3,1}(M, M_0, \tilde{M}_0) \xrightarrow{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0} \begin{cases} 0, & M \neq M_0, \\ -1, & M = M_0, \end{cases} \quad (3.4.15)$$

Таким образом, функция $\lambda(M, M_0, \tilde{M}_0)$ непрерывна по \tilde{M}_0 на всей плоскости.

Теперь из свойств функции $\omega_1(M, \tilde{M}_0)$ (см. (3.2.5)) получаем

$$\omega_{1,s}^{\pm}(M, M_0)\mu(M) = \omega_{1,s}(M, M_0)\mu(M) + \begin{cases} -\frac{\theta}{2\pi}\delta(M - M_0)\mu(M), & "+" \\ \frac{2\pi - \theta}{2\pi}\delta(M - M_0)\mu(M), & "-" \end{cases} \quad (3.4.16)$$

Вывод 3.4.1. Для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi_s^{\pm}(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \mu(M) dt + \begin{cases} -\frac{\theta}{2\pi} \mu(M_0), & "+" \\ \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \mu(M_0), & "-" \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Следовательно, для точек гладкости

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi_{1,s}^{\pm}(M_0) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \Phi(M_0) \pm \frac{1}{2} \mu(M_0). \quad (3.4.18)$$

Рассмотрим теперь касательную производную потенциала простого слоя

$$\frac{\partial \Phi_s(\tilde{M}_0)}{\partial \tau_{M_0}} = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \left(\ln \frac{1}{r_{M\tilde{M}_0}} \right) \mu(M) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_L \left(\frac{r_{M\tilde{M}_0}, \tau_{M_0}}{r_{M\tilde{M}_0}^2} \right) \mu(M) dt, \quad (3.4.19)$$

где $\tilde{M}_0 \notin L$.

Прямым значением этой производной назовем значение интеграла в (3.4.19) при $\tilde{M}_0 = M_0, M_0 \in L$. Рассмотрим вначале функцию

$$\omega_{1,\tau}(M, M_0) = \omega_{1,\tau}(t, t_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(r_{MM_0}, \tau_{M_0})}{r_{MM_0}^2} = \quad (3.4.20)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{x'(t_0)(x(t_0) - x(t)) + y'(t_0)(y(t_0) - y(t))}{(x(t_0) - x(t))^2 + (y(t_0) - y(t))^2} = \quad (3.4.21)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{x'(t_0)x_2(t, t_0) + y'(t_0)y_2(t, t_0)}{(t_0 - t)[x_2^2(t, t_0) + y_2^2(t, t_0)]} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_0 - t} K(t, t_0),$$

где $x_2(t, t_0)$ и $y_2(t, t_0)$ определены в (3.1.11). Там же доказано, что если на гладкой части $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$ и $x'(t), y'(t) \in H(\alpha)$, то функция $K(t, t_0)$ тоже принадлежит $H(\alpha)$ по каждой координате равномерно относительно другой и $K(t, t_0) = 1$. Теперь запишем

$$\frac{1}{t_0 - t} K(t, t_0) = \frac{1}{t_0 - t} + \frac{x_2(t, t_0)\tilde{x}_3(t, t_0) + y_2(t, t_0)\tilde{y}_3(t, t_0)}{x_2^2(t, t_0) + y_2^2(t, t_0)} = \frac{1}{t_0 - t} - K_1(t, t_0), \quad (3.4.22)$$

где $\tilde{x}_3(t, t_0) = \frac{x'(t_0) - x_2(t, t_0)}{t - t_0}$, $\tilde{y}_3(t, t_0) = \frac{y'(t_0) - y_2(t, t_0)}{t - t_0}$.

Теперь так же, как и в теореме 3.1.1, можно доказать, что если $x''(t), y''(t) \in H_r(\alpha)$, то $\tilde{x}_3(t, t_0), \tilde{y}_3(t, t_0) \in H_r(\alpha)$. Таким образом, на гладкой части L в окрестности точки $M_0 = M(t_0)$ получаем, что

$$\omega_{1,\tau}(M, M_0) = \omega_{1,\tau}(t, t_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{t_0 - t} - \frac{1}{2\pi} K_1(t, t_0), \quad (3.4.23)$$

где функция $K_1(t, t_0) \in H(\alpha)$, если в этой окрестности $x''(t), y''(t) \in H(\alpha)$. В угловых точках кривой L функция $K_1(t, t_0)$ имеет односторонние пределы $\lim_{t_0 \rightarrow t_0^-} \lim_{t \rightarrow t_0} K_1(t, t_0)$, где \hat{l}_0 – длина дуги точки, в которой имеется угол или она является концевой.

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega_{1,r}(M, \tilde{M}_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{r}_{M\tilde{M}_0}, \vec{\tau}_{M_0})}{r_{M\tilde{M}_0}^2}, \quad M, M_0 \in L, \quad \tilde{M}_0 \notin L, \quad (3.4.24)$$

и ее предельные значения при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm$ (см. рис. 3.1.9). Видно, что

$$\omega_{1,r}^\pm(M, M_0) = \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \omega_{1,r}(M, \tilde{M}_0) = \omega_{1,r}(M, M_0), \quad (3.4.25)$$

если $M \neq M_0, M, M_0 \in L$. Если же $M = M_0$, то указанные пределы не существуют, так как

$$\omega_{1,r}(M, \tilde{M}_0) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(\vec{r}_{M\tilde{M}_0}, \vec{\tau}_{M_0})}{r_{M\tilde{M}_0}^2}, \quad (3.4.26)$$

и поэтому, если вектор $\vec{r}_{M_0\tilde{M}_0}$ параллелен \vec{n}_{M_0} , то $\omega_{1,r}^\pm(M_0, M_0) = 0$. Если же точка \tilde{M}_0 движется к точке M_0 по лучу, то есть $(\vec{r}_{M_0\tilde{M}_0}, \vec{n}_{M_0}) = \theta$ (рис. 3.4.1), то $(\vec{r}_{M_0\tilde{M}_0}^0, \vec{\tau}_{M_0}) = \pm \sin \theta$

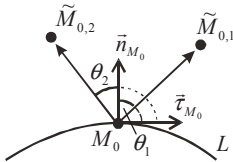


Рис. 3.4.1

. Поэтому в этом случае (см. рис. 3.1.7)

$$\omega_{1,r}^\pm(M_0, \tilde{M}_0) = \pm \infty,$$

так как

$$(\vec{r}_{M_0\tilde{M}_0,1}^0, \vec{\tau}_{M_0}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \theta_1\right) = \pm \sin \theta_1,$$

$$(\vec{r}_{M_0\tilde{M}_0,2}^0, \vec{\tau}_{M_0}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) = -\sin \theta_2.$$

Приведенные рассуждения показывают, что в точке M_0 функции $\omega_{1,r}^\pm(M, M_0)$ не должны иметь δ -функцию в точке M_0 , а имеют в ней особенность типа $\frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

Таким образом, формула (3.4.25) показывает справедливость равенства

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \Phi_s^\pm(M_0) = \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} \Phi_s(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{\tau}_{M_0})}{r_{MM_0}^2} \mu(M) dt, \quad (3.4.27)$$

где $M_0 \in L$ и является точкой гладкости.

Вывод 3.4.2. Из формул (3.4.18) и (3.4.27) получаем, что для точек гладкости кривой L справедливо равенство

$$\text{grad } \Phi_s^\pm(M_0) = \text{grad } \Phi_s(M_0) \mp \frac{1}{2} \vec{n}_{M_0} \mu(M_0), \quad (3.4.28)$$

3.5. Функция источника и потенциалы. Пространственный случай

Пусть в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пространства $OXYZ$ помещен источник мощности Q . Этот источник создает векторное поле по формуле

$$\vec{r}_0(M) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\vec{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3}, \quad (3.5.1)$$

где $r_{MM_0} = (x_0 - x)\vec{i} + (y_0 - y)\vec{j} + (z_0 - z)\vec{k}$, $r_{MM_0}^2 = |r_{MM_0}|^2$.

Будем интерпретировать опять векторное поле $V_0(M)$ как поле скоростей течения идеальной жидкости.

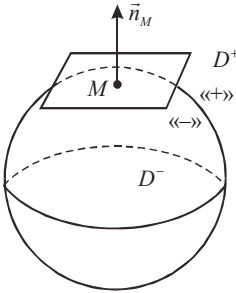


Рис. 3.5.1

Пусть теперь σ – некоторая поверхность в пространстве $OXYZ$ (будем обозначать его R^3) и она задана параметрически $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где (u, v) является точкой области D на декартовой плоскости O^*UV . Будем полагать поверхность σ простой кусочно-гладкой, т. е. в каждой точке M этой поверхности (за исключением, быть может, точек некоторых кривых на ней) имеется касательная плоскость и поэтому имеется орт нормали \vec{n}_M . Векторы \vec{n}_M направлены все в одну сторону от поверхности, причем, если поверхность σ замкнутая, то вектор \vec{n}_M направлен во внешнюю область, которую будем обозначать D^+ .

Внутреннюю область будем обозначать D^- (см. рис. 3.5.1). Сторону поверхности, куда направлен вектор \vec{n}_M будем обозначать знаком "+" или σ^+ , а противоположную – знаком "-" или σ^- . Будем полагать, что для каждой точки M гладкости поверхности σ существует такая окрестность $O(M)$ и такое ее параметрическое представление, что касательные вектора $\tau_{1,M} = x'_u\vec{i} + y'_u\vec{j} + z'_u\vec{k}$ и $\tau_{2,M} = x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j} + z'_v\vec{k}$ не коллинеарны в любой точке этой окрестности. Тогда для вектора \vec{n}_M получаем формулу

$$\vec{n}_M = \frac{\tau_{1,M} \times \tau_{2,M}}{|\tau_{1,M} \times \tau_{2,M}|} = \frac{|\tau_{1,M}, \tau_{2,M}|}{\|\tau_{1,M}, \tau_{2,M}\|}. \quad (3.5.2)$$

Рассмотрим теперь в точках поверхности σ функцию

$$V_0(M) \cdot \vec{n}_M = \frac{Q}{4\pi} \frac{(r_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^3} = Q \cdot \omega_1^{(2)}(M, M_0). \quad (3.5.3)$$

Функция $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$ имеет физический смысл плотности протекания жидкости через точки поверхности σ от единичного источника в точке M_0 .

3.5.1. Пусть вначале поверхность σ является замкнутой кусочно-гладкой. Если точка M_0 принадлежит области D^+ , то физически ясно, что количество жидкости проходящей через точки поверхности σ , равно нулю, т. е.

$$\int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = 0, \quad (3.5.4)$$

где $d\sigma_M$ – дифференциал площади поверхности σ . Это физически показывается так же, как и в плоском случае. Для математического доказательства равенства (3.5.4) напомним формулу Остроградского [119]

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

или ее лучше записать в виде

$$\iint_{\sigma} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (3.5.5)$$

где $\vec{n}_M = \cos \lambda \cdot \vec{i} + \cos \mu \cdot \vec{j} + \cos \nu \cdot \vec{k}$.

Поэтому можно написать, что

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M &= \iint_{\sigma} \frac{1}{4\pi} \frac{(r_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^3} d\sigma_M = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) d\sigma_M = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \nabla_M \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \cdot \vec{n}_M d\sigma_M = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \cos \lambda}_P + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \cos \mu}_Q + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \cos \nu}_R \right] dV = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right) dV = \frac{1}{4\pi} \iiint_V 0 dV = 0,
 \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

так как функция $r_{MM_0}^{-1}$ гармоническая на любой области, не содержащей точки M_0 .

Пусть теперь $M_0 \in D^-$ и предположим, что поверхность σ – это сфера S_R радиуса R с центром в точке M_0 (см. рис. 3.1.5 по аналогии). Физически видно, что

$$\int_{S_R} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = -1. \tag{3.5.7}$$

Для математического доказательства равенства (3.5.7) перейдем в интеграле слева к сферическим координатам $x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$, где $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Как известно [119], $d\sigma_M = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, тогда получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{S_R} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(r_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^3} R^2 \sin \theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R \cdot R^2}{R^3} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi (-\cos \theta \Big|_0^{\pi}) = -1.
 \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Замечание 3.5.1. Если вектор \vec{n}_M направить внутрь сферы, то получим

$$\int_{S_R} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = 1. \tag{3.5.9}$$

Пусть теперь поверхность σ кусочно-гладкая замкнутая и точка M_0 лежит внутри. Возьмем сферу S_{ε} радиуса ε с центром в точке M_0 и лежащую внутри σ . Тогда, чтобы область, лежащая между поверхностями σ и S_{ε} , была внутренней для поверхности $\sigma \cup S_{\varepsilon}$, надо направить нормали на S_{ε} внутрь. Применяя формулу Остроградского (которая справедлива для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности), получаем

$$\int_{\sigma \cup S_{\varepsilon}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d(\sigma \cup S_{\varepsilon})_M = \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M + \int_{S_{\varepsilon}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) dS_{\varepsilon} = 0. \tag{3.5.10}$$

Из формул (3.5.9) и (3.5.10) получаем

$$\int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = -1 \tag{3.5.11}$$

Замечание 3.5.2. Пусть теперь $S_{R,\theta}$ – часть сферы, вырезанной конусом, с вершиной в точке M_0 и раствора θ угла при вершине (см. рис. 3.5.2). Обозначим $K_{K,\theta}$ – поверхность, состоящую из $S_{R,\theta}$ и части конуса, на которую опирается $S_{R,\theta}$. Тогда

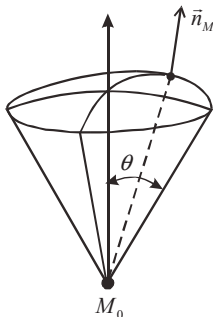


Рис. 3.5.2

$$\int_{S_{R,\theta}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = \int_{K_{K,\theta}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = \frac{-\theta}{\pi}, \quad (3.5.12)$$

$$\int_{S \setminus S_{R,\theta}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = -\frac{\pi - \theta}{\pi}.$$

Если обозначить $S_{R,\varphi}$ – часть сферы, вырезанной двугранным углом раствора φ , ребро которого проходит через точку M_0 (см. рис. 3.5.3), то

$$\int_{S_{R,\varphi}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = \frac{-\varphi}{2\pi}. \quad (3.5.13)$$

Наконец, интересно еще отметить такой случай. Пусть $S_{R,\theta,\varphi}$ – часть сферы, вырезанной двумя двугранными углами растворов θ и φ с взаимно перпендикулярными ребрами (см. рис. 3.5.4). Тогда

$$\int_{S_{R,\theta,\varphi}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = -\frac{\varphi \cdot \theta}{2\pi^2}. \quad (3.5.14)$$

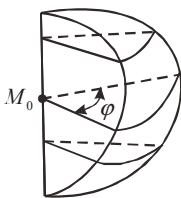


Рис. 3.5.3

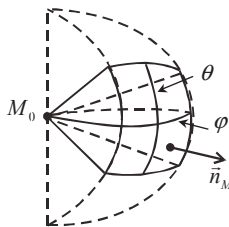


Рис. 3.5.4

3.5.2. Пусть теперь поверхность σ кусочно-гладкая и точка M_0 лежит на поверхности. По определению

$$\omega_1^{(2)}(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{(r_{MM_0}^n, \pi_M)}{r_{MM_0}^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{(x_0 - x)[\tau_{1,M}, \tau_{2,M}]_x + (y_0 - y)[\tau_{1,M}, \tau_{2,M}]_y + (z_0 - z)[\tau_{1,M}, \tau_{2,M}]_z}{\left[\tau_{1,M}, \tau_{2,M} \right] \left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{3/2}}, \quad (3.5.15)$$

где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Будем обозначать точки плоскости O^eUV буквой m , т. е. $m = m(u, v)$ – это точка с координатами u, v , $m_0 = m(u_0, v_0)$, а $\rho_{mm_0}^2 = mm_0^2 = (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2$.

Рассмотрим отдельно отношение

$$\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} = \frac{x(u_0, v_0) - x(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} + \frac{x(u, v_0) - x(u_0, v_0)}{\rho_{mm_0}}. \quad (3.5.16)$$

Теперь формулы (3.1.13)–(3.1.18) трансформируем следующим образом. Имеем

$$x(u_0, v_0) - x(u, v_0) = \int_u^{u_0} x'_u(\xi, v_0) d\xi. \quad (3.5.17)$$

Произведя замену переменной интегрирования как в (3.1.13), получим

$$x(u_0, v_0) - x(u, v_0) = (u_0 - u) \int_0^1 x'_u(u + \alpha(u_0 - u), v_0) d\alpha,$$

или

$$x_{2,u}(u, u_0, v_0) = \frac{x(u_0, v_0) - x(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} = \frac{(u_0 - u)}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 x'_u(u + \alpha(u_0 - u), v_0) d\alpha \quad (3.5.18)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} x_{3,u}(u; u_0, v_0) &= \frac{\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} - x'_u(u, v_0) \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}}}{\rho_{mm_0}} = \\ &= \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 \frac{x'_u(u + \alpha(u_0 - u), v_0) - x'_u(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} d\alpha \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Проинтегрировав последний интеграл по частям, получим

$$x_{3,u}(u; u_0, v_0) = \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} \left[\frac{x'_u(u_0, v_0) - x'_u(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} - \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 \alpha x''_{uu}(u + \alpha(u_0 - u), v_0) d\alpha \right]. \quad (3.5.20)$$

Применив формулу (3.5.18) к внеинтегральному члену в квадратных скобках в (3.5.20), будем иметь

$$x_{3,u}(u; u_0, v_0) = \left(\frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} \right)^2 \int_0^1 (1 - \alpha) x''_{uu}(u + \alpha(u_0 - u), v_0) d\alpha, \quad (3.5.21)$$

Аналогичные рассуждения показывают справедливость формул

$$x_{2,v}(u, v; v_0) = \frac{x(u, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} = \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 x'_v(u, v + \beta(v_0 - v)) d\beta, \quad (3.5.22)$$

$$x_{3,v}(u, v; v_0) = \frac{\frac{x(u, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} - x'_v(u, v) \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}}}{\rho_{mm_0}} =$$

$$= \left(\frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \right)^2 \int_0^1 (1 - \beta) x''_{vv}(u, v + \beta(v_0 - v)) d\beta. \quad (3.5.23)$$

Рассмотрим теперь более внимательно произведение (r_{MM_0}, \bar{n}_M) . По свойству смешанного произведения трех векторов получим

$$\begin{aligned}
(\bar{F}_{MM_0}, \bar{n}_M) &= \frac{(\bar{F}_{MM_0}, \bar{\tau}_{1,M} \times \bar{\tau}_{2,M})}{|\bar{\tau}_{1,M} \times \bar{\tau}_{2,M}|} = \frac{(\bar{F}_{MM_0}, \bar{\tau}_{1,M}, \bar{\tau}_{2,M})}{|\bar{\tau}_{1,M} \times \bar{\tau}_{2,M}|} = \\
&= \frac{1}{|\bar{\tau}_{1,M} \times \bar{\tau}_{2,M}|} \begin{vmatrix} x_0 - x & y_0 - y & z_0 - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{|\bar{\tau}_{1,M} \times \bar{\tau}_{2,M}|} [x'_v((y_0 - y)z'_u - (z_0 - z)y'_u) + \\
&+ y'_v((z_0 - z)x'_u - (x_0 - x)z'_u) + z'_v((x_0 - x)y'_u - (y_0 - y)x'_u)].
\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Преобразуем формулу (3.5.15) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^{(2)}(M, M_0) = \\
&= \frac{1}{4\pi} (\bar{F}_{MM_0}, \bar{n}_M) \\
&= \frac{\rho_{mm_0}^3 \left[\left(\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} \right)^2 + \left(\frac{y(u_0, v_0) - y(u, v)}{\rho_{mm_0}} \right)^2 + \left(\frac{z(u_0, v_0) - z(u, v)}{\rho_{mm_0}} \right)^2 \right]^{3/2}}{4\pi}. \tag{3.5.25}
\end{aligned}$$

Из формул (3.5.18), (3.5.22) получаем для квадратов в знаменателе формулы (3.5.25):

$$\begin{aligned}
\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} &= \frac{x(u_0, v_0) - x(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} + \frac{x(u, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} = \\
&= \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 x'_u(u + \alpha(u_0 - u), v_0) d\alpha + \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 x'_v(u, v + \alpha(v_0 - v)) d\alpha.
\end{aligned} \tag{3.5.26}$$

Аналогичные формулы получаются для $\frac{y(u_0, v_0) - y(u, v)}{\rho_{mm_0}}$ и $\frac{z(u_0, v_0) - z(u, v)}{\rho_{mm_0}}$.

Из формулы (3.5.26) видно, что в полярных координатах на плоскости O^*UV с центром в точке (u_0, v_0) выражение в квадратных скобках в знаменателе формулы (3.5.25) является непрерывной функцией и более того гольдеровской, если частные производные по u и v от x, y, z являются гольдеровскими. Будем предполагать теперь, что эта квадратная скобка не обращается в нуль на всей области определения функций x, y, z , т. е. на всей поверхности σ , или поверхность может быть разбита на конечное число частей (пересекающихся только по границам), на каждой из которых выполняется это условие. Множество поверхностей, на которых это условие выполняется, достаточно широкое. Действительно, например, если поверхность является графиком функции $z = f(x, y)$, где f'_x и f'_y являются гольдеровскими на области определения. Тогда параметрическое представление этой поверхности будет таким:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x, y). \end{cases} \tag{3.5.27}$$

Если обозначить $x = u$, $y = v$, то получим

$$\frac{x_0 - x}{\rho_{mm_0}} = -\cos \varphi, \quad \frac{y_0 - y}{\rho_{mm_0}} = -\sin \varphi, \quad (3.5.28)$$

$$\frac{z_0 - z}{\rho_{mm_0}} = -\cos \varphi \int_0^1 f'_x(x + \alpha(x_0 - x), y_0) d\alpha - \cos \varphi \int_0^1 f'_y(x, y + \alpha(y_0 - y)) d\alpha.$$

Из формул (3.5.28) получаем, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_0 - x}{\rho_{mm_0}} \right)^2 + \left(\frac{y_0 - y}{\rho_{mm_0}} \right)^2 + \left(\frac{z_0 - z}{\rho_{mm_0}} \right)^2 = \\ & = 1 + \left(\cos \varphi \int_0^1 f'_x(x + \alpha(x_0 - x), y_0) d\alpha + \sin \varphi \int_0^1 f'_y(x, y + \alpha(y_0 - y)) d\alpha \right)^2. \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

Далее будем предполагать, что все вторые частные производные функции x, y, z являются гельдеровскими на области определения и величина $|\tau_{1,M} \times \tau_{2,M}|$ не обращается в нуль на этой области.

Рассмотрим теперь отношения

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{F}_{MM_0}, \tau_{1,M}, \tau_{2,M})}{\rho_{mm_0}^2} = \\ & = \frac{1}{\rho_{mm_0}} \left[x'_v \left(\frac{y(u_0, v_0) - y(u, v)}{\rho_{mm_0}} z'_u(u, v) - \frac{z(u_0, v_0) - z(u, v)}{\rho_{mm_0}} y'_u(u, v) \right) + \right. \\ & \quad + y'_v \left(\frac{z(u_0, v_0) - z(u, v)}{\rho_{mm_0}} x'_u(u, v) - \frac{x(u_0, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} z'_u(u, v) \right) + \\ & \quad \left. + z'_v \left(\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} y'_u(u, v) - \frac{y(u_0, v_0) - y(u, v)}{\rho_{mm_0}} x'_u(u, v) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

Преобразуем выражение для последнего слагаемого в квадратных скобках в (3.5.30) (остальные будут преобразованы по аналогии):

$$\begin{aligned} & z'_v(u, v) \left(\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} y'_u(u, v) - \frac{y(u_0, v_0) - y(u, v)}{\rho_{mm_0}} x'_u(u, v) \right) = \\ & = z'_v(u, v) \left[\underbrace{\left(\frac{x(u_0, v_0) - x(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} - x'_u(u, v_0) \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} \right)}_{(1)_{x,u}} + \right. \\ & \quad + \underbrace{\left(\frac{x(u, v_0) - x(u, v)}{\rho_{mm_0}} - x'_v(u, v) \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \right)}_{(1)_{x,v}} + \\ & \quad \left. + x'_u(u, v_0) \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} + x'_v(u, v) \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \right] y'_u(u, v) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\underbrace{\frac{y(u_0, v_0) - y(u, v_0)}{\rho_{mm_0}} - y'_u(u, v_0) \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}}}_{(1)_{y,u}} + \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\frac{y(u, v_0) - y(u, v)}{\rho_{mm_0}} - y'_v(u, v) \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}}}_{(1)_{y,v}} + \right. \\
& \quad \left. + y'_u(u, v_0) \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} + y'_v(u, v) \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \right] x'_u(u, v) = \\
& = z'_v(u, v) \left\{ (1)_{x,u} \cdot y'_u(u, v) + (1)_{x,v} \cdot y'_v(u, v) - (1)_{y,u} \cdot x'_u(u, v) - (1)_{y,v} \cdot x'_u(u, v) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} [x'_u(u, v_0) y'_u(u, v) - y'_u(u, v_0) x'_u(u, v)] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} [x'_v(u, v) y'_v(u, v) - y'_v(u, v) x'_v(u, v)] \right\}. \tag{3.5.31}
\end{aligned}$$

Сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
& \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} [x'_u(u, v_0) y'_u(u, v) - y'_u(u, v_0) x'_u(u, v)] = \\
& = \frac{u_0 - u}{\rho_{mm_0}} [(x'_u(u, v_0) - x'_u(u, v)) y'_u(u, v) - x'_u(u, v) (y'_u(u, v_0) - y'_u(u, v))] \tag{3.5.32}
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\frac{x'_u(u, v_0) - x'_u(u, v)}{\rho_{mm_0}} = \frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} \int_0^1 x''_{uv}(u, v + \alpha(v_0 - v)) d\alpha. \tag{3.5.33}$$

Теперь из формул (3.5.19), (3.5.23) и (3.5.33) получаем, что все слагаемые в (3.5.31) имеют малость порядка ρ_{mm_0} , кроме

$$\frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} [z'_v x'_v y'_u - z'_v y'_v x'_u]. \tag{3.5.34}$$

Таким образом, в выражении для $\frac{(r_{MM_0}, \tau_{1,M}, \tau_{2,M})}{\rho_{mm_0}^2}$ все слагаемые будут непрерывны в полярных координатах, кроме

$$\frac{v_0 - v}{\rho_{mm_0}} [z'_v x'_v y'_u - z'_v y'_v x'_u + y'_v z'_v x'_u - y'_v x'_v z'_u + x'_v y'_v z'_u - x'_v z'_v y'_u] \tag{3.5.35}$$

Но это последнее выражение является тождественным нулем.

Вывод 3.5.1. Если все вторые частные производные функций x, y, z являются гельдеровскими на областях определения этих функций, то функция $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$ в полярных координатах на области определения с центром в точке (u_0, v_0) представляется в виде отношения

$$\omega_1^{(2)}(M, M_0) = \frac{\lambda_1^{(2)}(M, M_0)}{\rho_{mm_0}}, \tag{3.5.36}$$

где $\lambda_1^{(2)}(M, M_0)$ – гельдеровская функция в указанных полярных координатах.

Если поверхность σ является кусочно-гладкой, но такой, что все вторые производные функций x, y, z являются гельдеровскими и ограниченными на гладких частях, то функция $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$ при фиксированной точке M_0 является такой же.

3.5.3. Вычислим теперь значение интеграла от функции $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$ по поверхности σ , т. е. найдем число

$$V_L^{(2)}(M_0) = \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma, \quad (3.5.37)$$

когда точка $M_0 \in \sigma$.

В 7.5.1 было показано, что если поверхность σ является замкнутой кусочно-гладкой и $M_0 \notin \sigma$, то $V_L^{(2)}(M_0) = 0$, $M_0 \in D^+$, и $V_L^{(2)}(M_0) = -1$, $M_0 \in D^-$.

Пусть теперь точка M_0 на поверхности σ . Вначале предположим, что она лежит на гладкой части этой поверхности (см. рис. 3.1.6). Из физического смысла функции $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$ как плотности протекания жидкости через точки M поверхности σ , $M \neq M_0$, вытекает следующее. Проведем в точке M_0 касательную плоскость P . Тогда ясно, что частицы жидкости, двигаясь по лучам, входящим в точку M_0 справа от плоскости P , пересекают точки поверхности σ . Таким образом, все количество жидкости, входящее в точку M_0 справа от плоскости P , проходит через точки $M \neq M_0$ поверхности σ . Это количество жидкости равно $-1/2$. Поэтому, если точка M_0 лежит на гладкой части поверхности σ , то

$$V_L^{(2)}(M_0) = \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M = -1/2. \quad (3.5.38)$$

Таким образом, дано физическое доказательство равенства (3.5.38).

Математическое доказательство практически ничем не отличается от соответствующего доказательства, аналогичного равенства в плоском случае (см. рис. 3.1.7).

Пусть *теперь* точка M_0 не является точкой гладкости кусочно-гладкой замкнутой поверхности σ , т. е. будем предполагать, что в окрестности точки M_0 поверхность σ имеет одну из форм, описанных в замечании 3.5.2. Тогда значение интеграла в (3.5.37) будет иметь одно из значений, указанных в формулах (3.5.12) – (3.5.14).

3.5.4. Рассмотрим функцию $\omega_1^{(2)}(M, \bar{M}_0)$ на поверхности σ , т. е. $M \in \sigma$, а точка \bar{M}_0 – произвольная точка пространства R^3 . Значение функции $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$, $M_0 \in \sigma$, назовем прямым значением этой функции на поверхности σ . Так как в полярных координатах на области определения (когда все вторые производные от x, y, z принадлежат $H(\alpha)$ на гладких частях) функция $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$ имеет вид (3.5.36), то верно следующее утверждение. Если σ – часть поверхности σ и через $s(\sigma)$ обозначить площадь части области определения функций x, y, z , соответствующей σ , то

$$\left| \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M \right| \leq M \cdot s(\sigma). \quad (3.5.39)$$

Обозначим теперь $\omega_{1, M_0}^{(2)\pm}(M, M_0)$ – предельные значения функции $\omega_1^{(2)}(M, \bar{M}_0)$ при стремлении точки $M_0 \notin \sigma$ к точке $M_0 \in \sigma$ слева или справа соответственно (см. рис. 3.1.9), т. е.

$$\omega_{1, M_0}^{(2)\pm}(M, M_0) = \lim_{M_0 \rightarrow M_0^{\pm}} \omega_1^{(2)}(M, \bar{M}_0). \quad (3.5.40)$$

Попробуем установить, как значения функций $\omega_{1,M_0}^{(2)\pm}(M, M_0)$ связаны со значениями функции $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$.

Предположим вначале, что точка M_0 лежит на участке гладкости поверхности σ . Тогда функция $\lambda_1^{(2)}(M, M_0)$ в формуле (3.5.36) является также гладкой в полярных координатах на этом участке и определено значение $\lambda_1^{(2)}(M_0, M_0)$ в этих координатах. Функция $\omega_1^{(2)}(M, \tilde{M}_0)$, когда $\tilde{M}_0 \notin \sigma$, также является гладкой на этом участке и кусочно-непрерывной на всей поверхности σ .

Рассмотрим теперь функцию

$$\begin{aligned} W^{(2)}(M, M_0, \tilde{M}_0) &= \omega_1^{(2)}(M, \tilde{M}_0) - \omega_1^{(2)}(M, M_0) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^3} - \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

Если точка M поверхности σ фиксирована и $M \neq M_0$, то при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm$ получаем, что $r_{M\tilde{M}_0} \rightarrow r_{MM_0}$ и поэтому

$$\begin{aligned} W^{(2)}(M, M_0, M_0^\pm) &= \omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) - \omega_1^{(2)}(M, M_0) = \\ &= \omega_1^{(2)}(M, M_0) - \omega_1^{(2)}(M, M_0) = 0, \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

где $M, M_0 \in \sigma, M \neq M_0$.

Теперь рассмотрим значение $W^{(2)}(M_0, M_0, M_0^\pm)$. Для этого запишем функцию $W^{(2)}(M, M_0, \tilde{M}_0)$ в виде

$$\begin{aligned} W^{(2)}(M, M_0, \tilde{M}_0) &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M) - (r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^3} + \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^3} - \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^3} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^3} + \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^3} - \frac{\lambda_1^{(2)}(M, M_0)}{\rho_{mm_0}} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M)}{\rho_{mm_0}^3 \left(\frac{r_{M\tilde{M}_0}}{\rho_{mm_0}} \right)^3} + \left[\frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{\rho_{mm_0}^2} - \frac{\lambda_1^{(2)}(M, M_0)}{\rho_{mm_0}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

При $M \neq M_0$ и $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm$ разность в квадратных скобках обращается в нуль (надо вспомнить определение $\lambda_1^{(2)}(M, M_0)$). Поэтому видно, что при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm$, а потом при $M \rightarrow M_0$ функция $W^{(2)}(M_0, M_0, M_0^\pm)$ обращается в $\pm\infty$. Напомним, что точка \tilde{M}_0 движется к точке M_0 , оставаясь в круговом конусе (угол в плоском случае – см. рис. 7.1.10) раствора 2θ с вершиной в точке M_0 и осью симметрии, направленной по вектору \bar{n}_{M_0} . Поэтому $(r_{M\tilde{M}_0}, \bar{n}_M) \geq \delta > 0$ при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^-$.

Таким образом, получаем справедливость соотношений для точек M и M_0 на поверхности σ :

$$W(M, M_0, M_0^\pm) = \omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) - \omega_1^{(2)}(M, M_0) = \begin{cases} 0, & M \neq M_0, \\ \pm\infty, & M = M_0, \end{cases} \quad (3.5.44)$$

т. е. получается δ -функция в точке M_0 с некоторым коэффициентом. Чтобы определить этот коэффициент, надо вычислить интеграл от левой части в формуле (3.5.44) по сколь угодно малой окрестности точки M_0 на поверхности σ , которую обозначим $\sigma_{M_0, \varepsilon}$. Предположим вначале, что $\sigma_{M_0, \varepsilon}$ является кругом радиуса ε с центром в точке M_0 на некоторой плоскости P . Тогда на $\sigma_{M_0, \varepsilon}$ получаем, что $\omega_1^{(2)}(M, M_0) \equiv 0$ и поэтому надо вычислить только интеграл

$$I(M_0, M_0^\pm) = \lim_{\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_{\sigma_{M_0, \varepsilon}} \omega_1^{(2)}(M, \tilde{M}_0) d\sigma_M. \quad (3.5.45)$$

Возьмем в пространстве R^3 систему координат $OXYZ$ так, чтобы плоскость OXY совпала с плоскостью P , а ось OZ направим по вектору \vec{n}_{M_0} , точку O поместим в точку M_0 (рис. 3.5.5) и точку \tilde{M}_0 возьмем на оси OZ .

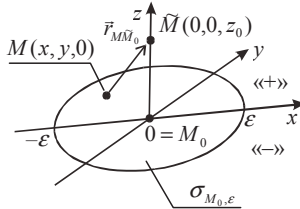


Рис. 3.5.5

Тогда получим $\vec{n}_M = \vec{n}_{M_0} = \vec{k}$, $\vec{r}_{M\tilde{M}_0} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z_0\vec{k}$ и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{M_0, \varepsilon}} \omega_1^{(2)}(M, \tilde{M}_0) d\sigma_M &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_{M_0, \varepsilon}} \frac{(\vec{r}_{M\tilde{M}_0}, \vec{n}_M)}{r_{M\tilde{M}_0}^3} d\sigma_M = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_{M_0, \varepsilon}} \frac{z_0 dx dy}{[x^2 + y^2 + z_0^2]^{3/2}} d\sigma_M. \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

Введем на плоскости OXY полярные координаты, тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{M_0, \varepsilon}} \omega_1^{(2)}(M, \tilde{M}_0) d\sigma_M &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\varepsilon \frac{z_0 \rho d\rho}{[\rho^2 + z_0^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(-z_0 \frac{1}{(\rho^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_0^\varepsilon \right) = \frac{1}{2} \left(-z_0 \frac{1}{(\varepsilon^2 + z_0^2)^{1/2}} + z_0 \frac{1}{|z_0|} \right). \end{aligned} \quad (3.5.47)$$

Из формул (3.5.45) и (3.5.47) видно, что

$$I(M_0, M_0^\pm) = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.5.48)$$

Таким образом, формулы (3.5.45) и (3.5.48) показывают, что

$$\omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) = \omega_1^{(2)}(M, M_0) \pm \frac{1}{2} \delta(M - M_0), \quad (3.5.49)$$

где $\delta(M - M_0)$ является двумерной δ -функцией (обобщенной функцией), удовлетворяющей условиям $(M, M_0 \in L)$

$$\delta(M - M_0) = \begin{cases} 0, & M \neq M_0, \\ +\infty, & M = M_0, \end{cases} \quad (3.5.50)$$

$$\int_{\sigma} \delta(M - M_0) d\sigma_M = 1. \quad (3.5.51)$$

Как и в плоском случае, можно дать физическое доказательство равенства (3.5.48), когда $\sigma_{M_0, \varepsilon}$ – часть плоскости, а также физическое и математическое доказательства, когда $\sigma_{M_0, \varepsilon}$ – гладкая часть поверхности σ . В последнем случае равенство (3.5.48) будет верно с точностью до ε и поэтому верно равенство (3.5.49). Дадим только рисунки в пространственном случае (рис. 3.5.6 и 3.5.6), аналогичные рис. 3.1.12 и 3.1.13.

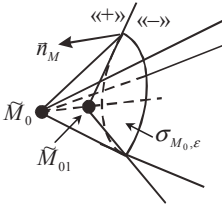


Рис. 3.5.6

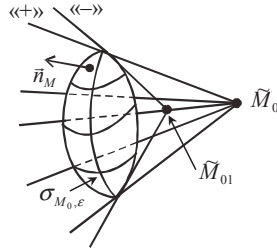


Рис. 3.5.7

Вывод 3.5.2. Формула (3.5.49) верна, если точка $M_0 \in \sigma$ лежит на гладкой части σ .

Пусть теперь точка M_0 не является точкой гладкости. Будем предполагать, что в точке M_0 имеется особенность геометрии поверхности σ одного из указанных в замечании 3.5.2 типов.

Пусть вначале точка M_0 является вершиной конуса K_θ раствора θ угла при вершине (см. рис. 3.5.2). Тогда, используя рис. 3.1.15 и рис. 3.5.2 (как и в плоском случае) видим, что при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^+$ и когда точка \tilde{M}_0 остается внутри продолжения конуса, в пределе получаем, что количество жидкости, проходящее через конус в источник, будет равно $\frac{\theta}{\pi}$, а при $\tilde{M}_0 \rightarrow M_0^-$ в пределе равно $-\frac{\pi - \theta}{\pi}$, т. е.

$$\int_{K_\theta} \omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) d\sigma_M = \int_{K_\theta} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M + \begin{cases} \frac{\theta}{\pi}, & "+", \\ -\frac{\pi - \theta}{\pi}, & "-". \end{cases} \quad (3.5.52)$$

и

$$\omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) = \omega_1^{(2)}(M, M_0) + \begin{cases} \frac{\theta}{\pi} \delta(M - M_0), & "+", \\ -\frac{\pi - \theta}{\pi} \delta(M - M_0), & "-". \end{cases} \quad (3.5.53)$$

Пусть теперь точка M_0 лежит на ребре двугранного угла D_φ раствора φ (см. рис. 3.5.3). Тогда, представляя рис. 3.1.15 как разрез этого двугранного угла плоско-

стью, перпендикулярной ребру двугранного угла, и проходящей через точку M_0 , получаем

$$\int_{D_\varphi} \omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) d\sigma_M = \int_{D_\varphi} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M + \begin{cases} \frac{\varphi}{2\pi}, & "+", \\ -\frac{2\pi - \varphi}{2\pi}, & "-". \end{cases} \quad (3.5.54)$$

и

$$\omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) = \omega_1^{(2)}(M, M_0) + \begin{cases} \frac{\varphi}{2\pi} \delta(M - M_0), & "+", \\ -\frac{2\pi - \varphi}{2\pi} \delta(M - M_0), & "-". \end{cases} \quad (3.5.55)$$

Наконец, пусть точка M_0 является вершиной сферического прямоугольного конуса $K_{\varphi, \theta}$ раствора φ на θ при вершине (см. рис. 3.5.4). Тогда

$$\int_{K_{\varphi, \theta}} \omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) d\sigma_M = \int_{K_{\varphi, \theta}} \omega_1^{(2)}(M, M_0) d\sigma_M + \begin{cases} \frac{\varphi\theta}{2\pi^2}, & "+", \\ -\frac{2\pi^2 - \varphi\theta}{2\pi^2}, & "-". \end{cases} \quad (3.5.56)$$

и

$$\omega_1^{(2)\pm}(M, M_0) = \omega_1^{(2)}(M, M_0) + \begin{cases} \frac{\varphi\theta}{2\pi^2} \delta(M - M_0), & "+", \\ -\frac{2\pi^2 - \varphi\theta}{2\pi^2} \delta(M - M_0), & "-". \end{cases} \quad (3.5.57)$$

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя и его свойства.

Потенциалом двойного слоя (п.д.с.) с плотностью $g(M)$ на кусочно-гладкой поверхности σ называется функция

$$\begin{aligned} \Phi(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^3} g(M) d\sigma_M = \\ &= \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) g(M) d\sigma_M, \quad M_0 \notin \sigma. \end{aligned} \quad (3.5.58)$$

Как было показано выше в данном параграфе, если σ является кусочно-гладкой и $M_0 \in \sigma$, то функция $\omega_1^{(2)}(M, M_0)$, $M, M_0 \in \sigma$, представляется в виде (3.5.36) и поэтому абсолютно интегрируемая на этой поверхности. Поэтому назовем функцию

$$\Phi(M_0) = \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, M_0) g(M) d\sigma_M, \quad M_0 \in \sigma. \quad (3.5.59)$$

прямым значением потенциала двойного слоя (п. д. с.) на поверхности σ .

Легко проверяется, что

$$\Delta \Phi(M_0) = 0, \quad M_0 \notin \sigma, \quad (3.5.60)$$

т. е. функция $\Phi(M_0)$ гармоническая вне σ .

Рассмотрим предельные значения п. д. с. Обозначим

$$\Phi^\pm(M_0) = \lim_{M_0 \rightarrow M_0^\pm} \Phi(\bar{M}_0) = \lim_{M_0 \rightarrow M_0^\pm} \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, \bar{M}_0) g(M) d\sigma_M. \quad (3.5.61)$$

Из формулы (3.5.54) при $\theta = \pi$ и (3.5.59) следует, что для точек M_0 гладкости поверхности σ справедливы равенства

$$\Phi^\pm(M_0) = \Phi(M_0) \pm \frac{1}{2}g(M_0), \quad M_0 \in \sigma. \quad (3.5.62)$$

Для точек M_0 поверхности σ , не являющихся точками гладкости в одном из указанных выше типов (см. рис. 3.5.2–3.5.4), будут справедливы формулы типа (3.5.52), (3.5.54) и (3.5.56) соответственно.

Вывод 3.5.3. Для точек гладкости поверхности σ справедливы формулы типа Сохоцкого–Племеля для сингулярного интеграла [98]:

$$\frac{1}{2}[\Phi^+(M_0) + \Phi^-(M_0)] = \int_{\sigma} \omega_1^{(2)}(M, \bar{M}_0) g(M) d\sigma_M, \quad (3.5.63)$$

$$\Phi^+(M_0) - \Phi^-(M_0) = g(M_0). \quad (3.5.64)$$

Теперь рассмотрим производные потенциала двойного слоя. Причем, как и в плоском случае, вначале рассмотрим нормальную производную в точках гладкости. Опять получим:

$$\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \Phi^\pm(M_0) = \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \Phi(M_0). \quad (3.5.65)$$

Для касательной составляющей Grad градиента функции $\Phi^\pm(M_0)$ получим

$$\text{Grad } \Phi^\pm(M_0) = \text{Grad } \Phi(M_0) \pm \frac{1}{2} \text{Grad } g(M_0). \quad (3.5.66)$$

Вывод 3.5.4. Для точек гладкости поверхности σ для потенциала двойного слоя в R^3 справедлива формула

$$\text{grad } \Phi^\pm(M_0) = \text{grad } \Phi(M_0) \pm \frac{1}{2} \text{Grad } g(M_0), \quad (3.5.67)$$

а в случае, когда σ – часть плоскости, имеем:

$$\text{grad } \Phi^\pm(M_0) = \pm \frac{1}{2} \text{Grad } g(M_0), \quad M_0 \in \sigma. \quad (3.5.68)$$

Наконец, рассмотрим потенциал простого слоя и его производные.

Потенциалом простого слоя на поверхности σ называется функция

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r_{MM_0}} \mu(M) d\sigma_M, \quad (3.5.69)$$

где $\mu(M)$ – плотность этого потенциала.

Если $M_0 \notin \sigma$, то это – гармоническая функция, т. е. верно равенство (3.5.60) для функции $\varphi(M_0)$.

Так как ядро этого интеграла имеет только слабую особенность $\frac{1}{r_{MM_0}}$ при $M_0 \in \sigma$, то функция $\varphi(M_0)$ непрерывно продолжается на σ и непрерывна при переходе через эту поверхность.

Пусть теперь $M_0 \notin \sigma$, но находится близко к точке $M_0 \in \sigma$. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \varphi(\bar{M}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{(r_{M\bar{M}_0}^2 - n_{M_0}^2)}{r_{M\bar{M}_0}^3} \mu(M) d\sigma_M = \int_{\sigma} \omega_{1,1}^{(2)}(M, \bar{M}_0) \mu(M) d\sigma_M, \quad M_0 \in \sigma. \quad (3.5.70)$$

Аналогично формуле (3.4.7), функцию $\omega_{1,1}^{(2)}(M, \tilde{M}_0)$ можно представить в виде суммы функции $-\omega_{1,1}^{(2)}(M, \tilde{M}_0)$ и функции $\mathcal{L}^{(2)}(M, M_0, \tilde{M}_0)$. Эта функция непрерывна по \tilde{M}_0 во всем пространстве R^3 . Поэтому из свойств потенциала двойного слоя для нормальной производной потенциала простого слоя имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \pi_{M_0}} \varphi^\pm(M_0) = \frac{\partial}{\partial \pi_{M_0}} \varphi(M_0) \pm \frac{1}{2} \mu(M_0), \quad (3.5.71)$$

если точка M_0 есть точка гладкости поверхности σ .

Рассмотрим теперь касательную производную потенциала простого слоя

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{M}_0)}{\partial \tau_{M_0}} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{(r_{M\tilde{M}_0}, \tau_{M_0})}{r_{M\tilde{M}_0}^3} \mu(M) d\sigma_M, \quad \tilde{M}_0 \notin \sigma. \quad (3.5.72)$$

Рассуждения, аналогичные рассуждениям в одномерном случае, показывают, что для точек M_0 гладкости поверхности σ имеем

$$\frac{\partial \varphi^\pm(M_0)}{\partial \tau_{M_0}} = \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial \tau_{M_0}}. \quad (3.5.73)$$

Итак, опять получаем известную [65, 113] формулу для градиента потенциала простого слоя в точках гладкости поверхности σ :

$$\text{grad } \varphi^\pm(M_0) = \text{grad } \varphi(M_0) \mp \frac{1}{2} \pi_{M_0} \mu(M_0). \quad (3.5.74)$$

Глава 4. Краевые задачи и вычисление одномерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов

4.1. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию $v_0(M) \in C^2(D^{(-)}) \cap C(\bar{D}^{(-)})$, т.е. дважды непрерывно дифференцируемую в $D^{(-)}$ и непрерывную на $\bar{D}^{(-)}$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в $D^{(-)}$, т.е. уравнению

$$\Delta v_0(M) = \frac{\partial^2 v_0(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0(M)}{\partial y^2} = 0, \quad M \in D^{(-)}, \quad (4.1.1)$$

и граничному условию

$$v_0|_L = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.1.2)$$

где f – заданная непрерывная функция, а область $D^{(-)}$ и граница L определены в 4.5.

Внешняя задача Дирихле. Найти функцию $v_0(M) \in C^2(R^2 \setminus D^{(-)}) \cap C(R^2 \setminus \bar{D}^{(-)})$, ограниченную на бесконечности, удовлетворяющую уравнению Лапласа в $R^2 \setminus \bar{D}^{(-)}$ и граничному условию (4.1.2) на кривой L .

Как показано в [30, 113], обе эти задачи имеют единственное решение. При сведении этих задач к интегральным уравнениям обычно использовали [30, 113] потенциал двойного слоя, чтобы получить интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В [65] показано, что эти задачи и аналогичные для уравнения Гельмгольца, так же, как и задачи Неймана, можно свести к интегральным уравнениям первого рода, но делается замечание, что эти уравнения, как правило, не используются в силу своей некорректности. Однако в связи с численными методами в аэродинамике (метод дискретных вихрей) рассмотрим соответствующие интегральные уравнения первого рода и в последующих главах дадим устойчивые методы их численного решения, а в данном параграфе рассмотрим квадратурные формулы для интегралов в этих уравнениях. Итак, будем искать решение задач Дирихле в виде потенциала простого слоя

$$v_0(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \psi_0(M) ds_M, \quad M_0 \notin L. \quad (4.1.3)$$

Функция $v_0(M_0)$ будет решением этих задач, если функция $\psi_0(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$-\frac{1}{2\pi} \int_L (\ln r_{MM_0}) \psi_0(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.1.4)$$

которое получается в силу утверждения [113] о непрерывности потенциала простого слоя на всей плоскости.

Рассмотрим частный случай, когда L является окружностью Γ_R радиуса R с центром в начале координат. В этом случае (так как $\bar{\tau}_M$ и \bar{n}_M должны составлять правую систему, а \bar{n}_M должна быть направлена во внешнюю сторону, то ориентация L идет по движению часовой стрелки) уравнение (4.1.4) примет вид $(ds_M = R d\theta)$

$$\frac{R}{2\pi} \int_0^{-2\pi} \ln \left| 2R \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \psi_0(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, -2\pi]. \quad (4.1.5)$$

Так как определенный интеграл от периодической функции не изменяется при сдвиге отрезка интегрирования на период, то уравнение (4.1.5) можно записать следующим образом:

$$-\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| 2R \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \psi_0(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.1.6)$$

Запишем теперь уравнение Лапласа в полярных координатах

$$\Delta v_0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.1.7)$$

Применив метод разделения переменных в полярных координатах [113], получим, что частными решениями для уравнения Лапласа в круге D_R радиуса R будут функции

$$v_{0n}(\rho, \theta) = \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad \rho \leq R; \quad (4.1.8)$$

вне круга D_R – функции

$$v_{0n}(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad \rho \leq R, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.9)$$

Теперь решение внутренней задачи Дирихле на круге, в которой функцию $f(M_0)$ представим рядом Фурье

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

будет иметь вид

$$v_0(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.1.11)$$

а решение внешней задачи Дирихле для круга – вид

$$v_0(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho} \right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (4.1.12)$$

В формуле скачка нормальной производной для потенциала простого слоя [113] для окружности Γ_R дифференцирование по нормали будет дифференцированием по ρ , т.е. эта формула в данном случае примет вид

$$\left. \frac{\partial v_0^+(\rho, \theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_0^-(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = -\psi_0(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (4.1.13)$$

Следовательно, единственным решением уравнения (4.1.6) при выполнении условий

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \psi_0(\theta) d\theta = 0, \quad (4.1.14)$$

является функция

$$\psi_0(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{R} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (4.1.15)$$

Полагая в (4.1.6) $f(\theta_0) = a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0$, $n = 1, 2, \dots$, получаем

$$\psi_0(\theta) = \frac{2n}{R}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Таким образом, возвращаясь к (4.1.6), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| 2R \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = \\ & = -\frac{1}{n} (a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Если теперь продифференцировать соотношение (4.1.16), то получим соотношение, эквивалентное совокупности равенств (2.6.2) и (2.6.3):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = \\ & = a_n \sin n\theta_0 - b_n \cos n\theta_0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Из приведенных выше в настоящем параграфе рассуждений следует, что если в уравнении (4.1.6) функция $f(\theta) = \frac{a_0}{2}$ будет константой, то и $\psi(\theta)$ (если существует) также будет константой. Из выполнения равенств [103, 118]

$$\int_0^{\pi/2} \ln |\sin x| dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2, \quad \int_0^{2\pi} \ln \left| 2R \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| d\theta = 2\pi \ln R \quad (4.1.18)$$

получаем, что при $R \neq 1$

$$\psi(\theta) = \frac{-a_0}{R \ln R}. \quad (4.1.19)$$

Если $R = 1$, а $f(\theta)$ – константа, $a \neq 0$, то решения уравнения (4.1.6) не существует. Если же $f(\theta) \equiv 0$, то при $R = 1$ решением этого уравнения будет произвольная константа.

Вернемся теперь к общему уравнению (4.1.4). В силу формулы для скачка нормальной производной потенциала простого слоя получаем: если для функции $f(M_0)$ и $\psi_0(M)$ интегралы по контуру L равны нулю, то решение уравнения (4.1.4) (если оно существует) единственно.

Замечание 4.1.1. Если L – гладкая разомкнутая кривая и на ней задана функция $f(M_0)$, то можно поставить задачу о нахождении гармонической вне L функции $u_0(M)$, удовлетворяющей на кривой L условию (4.1.2). Если искать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя на кривой L , то выполняя граничные условия (4.1.2), придем опять к уравнению (4.1.4).

В частности, если L является отрезком $[-1, 1]$ оси OX , то уравнение (4.1.4) примет вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln |x_0 - x| \psi_0(x) dx = f(x_0), \quad x_0 \in [-1, 1]. \quad (4.1.20)$$

Рассмотрим теперь некоторые способы вычисления интегралов с логарифмической особенностью на отрезке (4.1.20) и на окружности (4.1.6).

Возьмем на $[-1, 1]$ точки $x_k = -1 + kh$, $h = 2/n$, $k = 0, 1, \dots, n$, и точки $x_{0k} = x_k + h/2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Теперь интеграл

$$I(x_0) = \int_{-1}^1 \ln |x_0 - x| \psi_0(x) dx$$

в точке x_{0_j} заменим суммой

$$S_n(x_{0_j}) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln|x_{0_j} - x_i| \psi_0(x_i) h, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.1.21)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1.1. Пусть $\psi_0(x) \in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда справедлива оценка

$$\theta(x_{0_j}) = |I(x_{0_j}) - S_n(x_{0_j})| = O(h^\alpha |\ln h|), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.1.22)$$

Доказательство. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \theta(x_{0_j}) &\leq \left| \int_{-1}^{x_1} \ln|x_{0_j} - x| \psi_0(x) dx \right| + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\ln|x_{0_j} - x| \psi_0(x) - \ln|x_{0_j} - x_i| \psi_0(x)| dx = \\ &= I_1(x_{0_j}) + I_2(x_{0_j}). \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Напомним формулу

$$\int \ln|x| dx = x \ln|x| - x + C. \quad (4.1.24)$$

Учитывая структуру графика функции $y = |\ln|x_{0_j} - x||$, получаем, что

$$I_1(x_{0_j}) \leq M \int_{-1}^{x_1} |\ln|x_{0_j} - x|| dx = M \theta_1(x_{0_j}), \quad (4.1.25)$$

где $M = \max_{x \in [-1, 1]} |\psi_0(x)|$, $\theta_1(x_{0_j}) \leq \left| \ln \frac{h}{2} \right| h$, $j = 1, \dots, n$, а если $j = 0$, то

$$\int_{-1}^{x_1} |\ln|x_{0_0} - x|| dx = 2 \int_{-1}^{x_{0_0}} \ln(x_{0_0} - x) d(x_{0_0} - x),$$

и требуемая оценка следует из формулы (4.1.24).

Для $I_2(x_{0_j})$ получим

$$\begin{aligned} I_2(x_{0_j}) &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\ln|x_{0_j} - x| - \ln|x_{0_j} - x_i| \psi_0(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\ln|x_{0_j} - x_i| \psi_0(x) - \psi_0(x_i)| dx = \\ &= I_2^1(x_{0_j}) + I_2^2(x_{0_j}), \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Для достаточно малых h для $I_2^2(x_{0_j})$ имеем

$$I_2^2(x_{0_j}) \leq Ah^\alpha \ln \frac{h}{2}, \quad (4.1.27)$$

где A – константа в условии Гельдера для функции $\psi_0(x)$.

С использованием формулы (4.1.24) и неравенства

$$\ln(1 + \alpha) < \alpha, \quad \alpha > 0, \quad (4.1.28)$$

для $I_2^1(x_{0_j})$ получаем оценку вида (4.1.25), что и доказывает теорему.

Для того чтобы получить интерполяционные формулы для интеграла на отрезке с логарифмической особенностью, получим одно спектральное соотношение для этого интеграла.

Будем предполагать, что в интеграле в (4.1.20) функция $\psi_0(x)$ представима в виде

$$\psi_0(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (4.1.29)$$

где $\psi(x)$ – функция достаточное число раз дифференцируемая.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1.1. *Справедливо спектральное соотношение*

$$\int_{-1}^1 \ln|x-x_0| \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{n} T_n(x_0), \quad n=0,1,\dots, \quad x_0 \in [-1,1], \quad (4.1.30)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – многочлен Чебышева первого рода степени n .

Доказательство. Делая в интеграле в (4.1.30) замену переменной $x = \cos \varphi$, интегрируя по частям и используя формулу (2.6.28), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \ln|x-x_0| \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \ln|\cos \varphi - \cos \varphi_0| \cos n\varphi d\varphi = \\ & = \frac{1}{n} \sin n\varphi \ln|\cos \varphi - \cos \varphi_0| \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\sin n\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \varphi_0} d\varphi = \\ & = -\frac{\pi}{n} \cos n\varphi_0 = -\frac{\pi}{n} \cos(n \arccos x_0) = -\frac{\pi}{n} T_n(x_0). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь используя соотношение (4.1.30), приближение функции $\psi(x)$ интерполяционным полиномом (2.8.1), где $P_n(x) = T_n(x)$, и разложение многочлена $\frac{T_n(x)}{(x-x_k)}$, где x_k – корень многочлена $T_n(x)$, по многочленам $T_0(x), T_1(x), \dots, T_{n-1}(x)$, следуя [34], получаем интерполяционную формулу

$$\int_{-1}^1 \ln|x-x_0| \frac{\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \cong -\sum_{k=1}^n \psi(t_k) \left[\ln 2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i(x_0) \frac{T_i(x_k)}{i} \right] \frac{\pi}{n}, \quad x_0 \in [-1,1], \quad (4.1.31)$$

где $T_i(x) = \cos(i \arccos x)$, $x_k = \cos \frac{2k-1}{n} \pi$, $i, k = 1, \dots, n$.

Формула (4.1.31) является точным равенством, если $\psi(x)$ является многочленом степени не более $(n-1)$.

Для вычисления интеграла

$$I(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| \psi_0(\theta) d\theta \quad (4.1.32)$$

можно предложить, по аналогии с интегралом в (4.1.20), следующие квадратурные формулы.

Пусть на отрезке $[0, 2\pi]$ даны точки $\theta_k = (k-1)h$, $k = 1, \dots, n+1$, $h = \frac{2\pi}{n}$, и точки $\theta_{0k} = \theta_k + \frac{h}{2}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда для интеграла (4.1.32) возьмем квадратурную формулу вида (4.1.21)

$$S_n(\theta_{0j}) = \sum_{i=1}^n \ln \left| \sin \frac{\theta_i - \theta_{0j}}{2} \right| \psi_0(\theta_i) h, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.1.33)$$

Аналогично теореме 4.1.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1.2. Пусть $\psi_0(\theta) \in H(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, на $[0, 2\pi]$ и является периодической. Тогда справедлива оценка

$$\lambda(\theta_{0j}) = |I(\theta_{0j}) - S_n(\theta_{0j})| = O(h^\alpha |\ln h|), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.1.34)$$

Чтобы получить для интеграла (4.1.32) квадратурную формулу интерполяционного типа, поступим следующим образом. Как и в (2.6), возьмём на $[0, 2\pi]$ точки $\theta_k = \frac{2k}{2n+1}\pi$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, а для функции $\psi_0(\theta)$ – интерполяционный тригонометрический полином $\psi_{0n}(\theta)$ вида (2.6.11). Тогда, если воспользоваться равенствами (2.6.10), (4.1.16) и (4.1.18), то получим

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \psi_{0n}(\theta) d\theta = - \sum_{k=0}^{2n} \psi(\theta_k) \frac{2}{2n+1} \left(\ln 2 + \sum_{i=1}^n \frac{\cos i(\theta_0 - \theta_k)}{i} \right), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.1.35)$$

Если $\psi_0(\theta)$ является тригонометрическим полиномом степени n , то $\psi_{0n}(\theta) \equiv \psi_0(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, и поэтому формула (4.1.35) дает точное значение интеграла (4.1.32).

Пусть теперь L – такая кривая, что ее параметрическое представление $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s – параметр длины дуги этой кривой и $s \in [0, l]$, l – длина кривой, производные $x'(s)$ и $y'(s)$ принадлежат классу $H(\alpha)$ на $[0, l]$. Будем в этом случае говорить, что $L \in H_1(\alpha)$. Если L – разомкнутая кривая, то уравнение (4.1.4) можно записать в виде

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \ln |s_0 - s| \psi_0(s) ds - \int_0^l K(s, s_0) \psi_0(s) ds = f(s_0), \quad s_0 \in [0, l], \quad (4.1.36)$$

где

$$K(s, s_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r_1(s, s_0), \quad r_1^2(s, s_0) = x_1^2(s, s_0) + y_1^2(s, s_0),$$

$$x_1(s, s_0) = \frac{x(s_0) - x(s)}{s_0 - s}, \quad y_1(s, s_0) = \frac{y(s_0) - y(s)}{s_0 - s}.$$

В силу леммы 2.1.1 функции $x_1(s, s_0)$ и $y_1(s, s_0)$, а вместе с ними и $r_1(s, s_0)$, принадлежат классу $H(\alpha)$ на $[0, l] \times [0, l]$, причем $r_1(s, s_0) \neq 0$ для любых $s, s_0 \in [0, l]$. Поэтому, если $0 < \alpha < 1$, то функция $K(s, s_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r_1(s, s_0)$ также принадлежит классу $H(\alpha)$ на $[0, l] \times [0, l]$.

Если теперь L – замкнутая кривая, то $x(s)$, $y(s)$ и их производные являются периодическими функциями с периодом l . Поэтому $x_1(s_0 + l, s_0) = y_1(s_0 + l, s_0) = r_1(s_0 + l, s_0) = 0$, и, следовательно, функция $\ln r_1(s, s_0)$ будет иметь особенность. В силу этого представим теперь уравнение (4.1.4) следующим образом:

$$-\frac{l}{2\pi} \int_0^l \ln \left| 2 \frac{l}{2\pi} \sin \frac{s_0 - s}{2} \frac{2\pi}{l} \tilde{r}_1(s, s_0) \right| \psi_0(s) ds = f(s_0), \quad s_0 \in [0, l], \quad (4.1.37)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{r}_1^2(s, s_0) &= \tilde{x}_1^2(s, s_0) + \tilde{y}_1^2(s, s_0), \\ \tilde{x}_1(s, s_0) &= \frac{x(s_0) - x(s)}{2 \frac{l}{2\pi} \sin\left(\frac{s_0 - s}{2} \frac{2\pi}{l}\right)}, \\ \tilde{y}_1(s, s_0) &= \frac{y(s_0) - y(s)}{2 \frac{l}{2\pi} \sin\left(\frac{s_0 - s}{2} \frac{2\pi}{l}\right)}.\end{aligned}$$

Отметим, что $\tilde{x}_1(s, s_0) \rightarrow x'(s_0)$, $\tilde{y}_1(s, s_0) \rightarrow y'(s_0)$ при $s \rightarrow s_0$ и $\tilde{x}_1(s, s_0) \rightarrow -x'(s_0)$, $\tilde{y}_1(s, s_0) \rightarrow -y'(s_0)$ при $s \rightarrow s_0 + l$. Поэтому функция $\tilde{r}_1(s, s_0)$ принадлежит классу $H(\alpha)$ на $[0, l] \times [0, l]$ и не обращается в нуль. Делая теперь в уравнении (4.1.37) замену переменной $s = \theta \frac{l}{2\pi}$, $s_0 = \theta_0 \frac{l}{2\pi}$ и обозначая $\frac{l}{2\pi} = R$, видим, что уравнение (4.1.37) можно записать следующим образом:

$$-\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| 2R \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| \psi_0(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} K(\theta, \theta_0) \psi_0(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (4.1.38)$$

где функция $K(\theta, \theta_0) = \frac{R}{2\pi} \ln \tilde{r}_1\left(\theta \frac{l}{2\pi}, \theta_0 \frac{l}{2\pi}\right)$ принадлежит $H(\alpha)$ на $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и является периодической.

Из формул (4.1.36) и (4.1.38) видно, что для интеграла в (4.1.4) можно брать квадратурные формулы типа прямоугольников, аналогичные формулам (4.1.21) и (4.1.33), следующим образом.

4.1.1. Если L является замкнутой кривой, то представим ее образом отрезка $[0, 2\pi]$. На отрезке $[0, 2\pi]$ возьмем множества точек $E = \{\theta_k, k = 1, \dots, n+1\}$ и $E_0 = \{\theta_{0k}, k = 1, \dots, n\}$, как это сделано для суммы $S_n(\theta_{0j})$ в (4.1.33). Образы множеств точек E и E_0 на кривой L обозначим соответственно $E^* = \{M_k, k = 1, \dots, n\}$ (так как $M_1 = M_{n+1}$) и $E_0^* = \{M_{0k}, k = 1, \dots, n\}$. Теперь для интеграла (4.1.4) возьмем сумму

$$S_n(M_{0j}) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (\ln r_{M_k M_{0j}}) \psi_0(M_k) \Delta s_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1.39)$$

где Δs_k – длина дуги кривой L между точками M_k и M_{k+1} .

4.1.2. Если L – разомкнутая кривая, то ее надо представить образом отрезка $[-1, 1]$ и на нем взять множества точек E и E_0 как для суммы в (4.1.21). Образы множеств точек E и E_0 на кривой L обозначим соответственно E^* и E_0^* и возьмем сумму вида (4.1.39), заменяя n на $n-1$. При этом можно считать, что функция $\psi_0(M)$ имеет вид

$$\psi_0(M) = \frac{\psi(M)}{\sqrt{\rho(M, A)\rho(M, B)}}, \quad (4.1.40)$$

где $\psi(M) \in H(\alpha)$ на L , а $\rho(M, A)$ и $\rho(M, B)$ – расстояния от точки M до концов кривой L .

Если мы желаем взять квадратурные формулы интерполяционного типа для интеграла (4.1.4), то его надо представить в виде (4.1.36) или (4.1.38) и воспользоваться, соответственно, формулами (4.1.31) или (4.1.35).

4.2. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца

Обратимся теперь к уравнению Гельмгольца

$$\Delta v(M) + k^2 v(M) = 0. \quad (4.2.1)$$

Внутренняя задача Дирихле: найти функцию $v(M) \in C^2(D^{(-)}) \cap C(\bar{D}^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению (4.2.1) для любой точки $M \in D^{(-)}$ и граничному условию (4.1.2) на $L = \bar{D}^{(-)} \setminus D^{(-)}$.

Внешняя задача Дирихле: найти функцию $v(M) \in C^2(R^2 \setminus \bar{D}^{(-)}) \cap C(R^2 \setminus D^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению (4.2.1) для любой точки $M \notin \bar{D}^{(-)}$, граничному условию (4.1.2) на $L = \bar{D}^{(-)} \setminus D^{(-)}$, условию на бесконечности (условию излучения)

$$\left(\frac{\bar{r}_M}{r_M}, \text{grad } v(M) \right) - ik v(M) = O\left(\frac{1}{r_M^{1/2}} \right), \quad r_M \rightarrow \infty, \quad (4.2.2)$$

или

$$\left(\frac{\bar{r}_M}{r_M}, \text{grad } v(M) \right) + ik v(M) = O\left(\frac{1}{r_M^{1/2}} \right), \quad r_M \rightarrow \infty \quad (4.2.3)$$

Оказывается [113], что фундаментальные решения уравнения Гельмгольца

$$U(M, M_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_{MM_0}), \quad (4.2.4)$$

$$U(M, M_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) \quad (4.2.5)$$

удовлетворяют на бесконечности условиям (4.2.2), (4.2.3).

Здесь $H_0^{(1)}(kz)$ и $H_0^{(2)}(kz)$ – функции Ханкеля нулевого порядка. Напомним [103], что

$$H_0^{(1/2)}(z) = J_0(z) \pm iY_0(z), \quad (4.2.6)$$

где $J_0(z)$ ($Y_0(z)$) – функция нулевого порядка Бесселя (Неймана) и

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2}, \quad (4.2.7)$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(k+1)}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k},$$

$$\Psi(n+1) = -C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \Psi(1) = -C, \quad (4.2.8)$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772156649\dots,$$

где C – константа Эйлера и $\Psi(z)$ – пси-функция.

В [65] показано, что если $\text{Im } k > 0$, то внутренняя задача Дирихле имеет единственное решение. Для вещественных k внутренние задачи разрешимы, вообще говоря, не единственным образом – такие k , для которых решение не единственно, называют собственными.

Внешняя задача Дирихле имеет [65] не более одного решения.

Будем искать решение задач Дирихле в виде потенциала простого слоя

$$v(M_0) = -\frac{i}{4} \int_L H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) \psi(M) ds_M. \quad (4.2.9)$$

Функция $v(M_0)$ будет решением этих задач (на бесконечности она удовлетворяет условию (4.2.3)), если функция $\psi(M)$ является решением интегрального уравнения

$$-\frac{i}{4} \int_L H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) \psi(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.2.10)$$

которое получается в силу непрерывности потенциала простого слоя на всей плоскости.

Рассмотрим опять частный случай, когда $L = \Gamma_R$. Тогда уравнение (4.2.10) примет вид

$$-\frac{iR}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}\left(2R \left| \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \right) \psi(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.2.11)$$

Запишем уравнение Гельмгольца (4.2.1) в полярных координатах

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k^2 v = 0. \quad (4.2.12)$$

Применив метод разделения переменных в полярных координатах [113], получим, что частными решениями для уравнения Гельмгольца в круге D_R будут функции

$$v_n(\rho, \theta) = J_n(k\rho)(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad \rho \leq R; \quad (4.2.13)$$

вне круга D_R – функции (удовлетворяющие условию (4.2.3) на бесконечности)

$$v_n(\rho, \theta) = H_n^{(2)}(k\rho)(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad \rho \geq R, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.14)$$

Следовательно, если функция $f(M_0)$ на окружности Γ_R представлена рядом Фурье (4.1.10), то решение внутренней задачи Дирихле для круга D_R (предполагается, что число k не является собственным) будет иметь вид

$$v(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} \frac{J_0(k\rho)}{J_0(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(k\rho)}{J_n(kR)} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.2.15)$$

а решение для внешней задачи Дирихле для D_R при выполнении условия (4.2.3) на бесконечности – вид

$$v(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} \frac{H_0^{(2)}(k\rho)}{H_0^{(2)}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(k\rho)}{H_n^{(2)}(kR)} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (4.2.16)$$

Так как в рассматриваемом случае дифференцирование по нормали является дифференцированием по ρ , то для функции (4.2.9) также справедлива формула вида (4.1.13), и поэтому единственным решением уравнения (4.2.11) для заданной функции $f(\theta_0)$, представленной рядом Фурье (4.1.10), будет функция

$$\psi(\theta) = -\left[\frac{a_0}{2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right], \quad (4.2.17)$$

$$B_n = k \left(\frac{H_n^{(2)}(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} - \frac{J_n'(kR)}{J_n(kR)} \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, как и в случае уравнения (4.1.6), теперь получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{iR}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}\left(k2R \left| \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \right) (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = \\ = B_n^{-1} (a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Отметим, что в формулах (4.2.15)–(4.2.17) предполагается, что число kR не является нулем одной из функций $J_n(z)$ или $H_n(z)$, $n = 0, 1, \dots$

Если воспользоваться соотношениями [103]

$$H_n^{(1/2)}(z) = J_n(z) \pm iY_n(z), \quad (4.2.19)$$

где $J_n(z)Y_n(z)$ – функции Бесселя (Неймана) порядка n , $n = 0, 1, \dots$, и

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}, \\ Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} [\Psi(n+k+1) + \Psi(k+1)] \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

где $\Psi(n+1)$ дано в (4.2.8), то несложно показать, что при $k \rightarrow 0$ получаем $B_n \rightarrow \frac{-2n}{R}$, $n = 1, 2, \dots$

Замечание 4.2.1. Как и в замечании 4.1.1, можно рассмотреть задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае, когда L – гладкая разомкнутая дуга. При решении этой задачи с помощью потенциала простого слоя опять приходим к уравнению (4.2.10). Это уравнение в данном случае может быть записано в виде (4.1.36), а когда L замкнутая кривая, то в виде (4.1.38) с заменой в первом интеграле в этих уравнениях $-\frac{1}{2\pi} \ln|s_0 - s|$ на $-\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|s_0 - s|)$ и $-\frac{1}{2\pi} \ln \left| 2R \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right|$ на $-\frac{i}{4} H_0^{(2)} \left(k 2R \left| \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \right)$, соответственно. В общем, уравнение (4.2.10) может быть записано прямо в виде (4.1.36) или (4.1.38), которые теперь будут иметь единственное решение для соответствующих k .

Замечание 4.2.2. Продифференцировав по θ_0 равенство (4.2.18), получим

$$\begin{aligned} &-\frac{iR}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1^{(2)} \left(k 2R \left| \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| \right) k 2R \frac{\sin \frac{\theta_0 - \theta}{2}}{\left| \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right|} \times \\ &\times \cos \frac{\theta_0 - \theta}{2} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = \\ &= B_n^{-1} (-na_n \sin n\theta_0 + nb_n \cos n\theta_0), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Если теперь k устремить к нулю, то равенство (4.2.21) перейдет в равенство (4.1.17).

Формулы (4.2.6)–(4.2.8) показывают, что интеграл в (4.2.10) имеет логарифмическую особенность на диагонали $M = M_0$, $M, M_0 \in L$. Поэтому для вычисления его с помощью квадратурных формул типа прямоугольников надо воспользоваться формулой вида (4.1.39) с соответствующим выбором множеств точек E и E_0 и заменой n на $n-1$.

Для получения интерполяционных квадратурных формул можно предложить следующую процедуру для интегралов в (4.1.4) и в (4.2.10).

Если контур L является замкнутым, то надо представить эти интегралы в виде суммы интегралов, как в (4.1.38). После этого, для известных функций $\psi_0(M)$ и $\psi(M)$

надо взять усеченную сумму ряда Фурье по функциям $1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots$ и воспользоваться спектральными соотношениями (4.1.16) для интеграла с логарифмической особенностью.

4.3. Задача Неймана для уравнения Лапласа

Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi_0(M) \in C^2(D^{(-)}) \cap C(\bar{D}^{(-)})$, имеющую на границе L области $D^{(-)}$ нормальную производную (в смысле равномерной сходимости), т.е. $\Phi_0(M) \in R(D^{(-)})$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в $D^{(-)}$ и граничному условию на кривой L

$$\left. \frac{\partial \Phi_0(M_0)}{\partial \bar{n}_{M_0}} \right|_L = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.3.1)$$

где f – заданная функция; \bar{n}_{M_0} – орт внешней нормали к кривой L в точке M_0 .

Внешняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi_0(M) \in R(R^2 \setminus D^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в $R^2 \setminus D^{(-)}$, граничному условию (4.3.1) на кривой L и условию на бесконечности

$$|\Phi_0(M)| \rightarrow 0, \quad \text{при } M \rightarrow \infty. \quad (4.3.2)$$

Как показано в [30], необходимым условием разрешимости задач Неймана является выполнение равенства

$$\int_L f(M) ds_M = 0. \quad (4.3.3)$$

Там же показано, что если L – достаточно гладкая кривая, то решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной постоянной при условии выполнения равенства (4.3.3), а решение внешней задачи Неймана при условии (4.3.2) – единственно.

Решение задач Неймана будем искать в виде потенциала двойного слоя:

$$\begin{aligned} \Phi_0(M_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{R_{MM_0}} \right) g(M) ds_M = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(r_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} g_0(M) ds_M, \quad M_0 \in L. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Функция $\Phi_0(M)$ будет решением этих задач (на бесконечности эта функция обращается в нуль), если функция $g_0(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (4.3.5)$$

Так как в силу свойства потенциала двойного слоя [113]

$$\Phi_0^+(M_0) - \Phi_0^-(M_0) = g_0(M_0), \quad (4.3.6)$$

то решение интегрального уравнения (4.3.5) существует с точностью до константы.

Теперь в зависимости от решаемой физической задачи уравнение (4.3.5) удобно бывает записать в одном из следующих двух видов.

Например, в плоских стационарных задачах аэродинамики достаточно знать производную по длине дуги от плотности потенциала двойного слоя (интенсивность вихревого слоя), и поэтому уравнение (4.3.5) запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\tau_M, \pi_{M_0})(r_{MM_0}, \pi_M) - (\pi_M, \pi_{M_0})(r_{MM_0}, \tau_M)}{r_{MM_0}^2} g'(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.3.7)$$

где τ_M – орт касательного вектора к кривой L в точке M .

Если кривая L задана параметрически: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, l]$, то уравнение (4.3.7) принимает более простой вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{y'_{0s}(y_0 - y) + x'_{0s}(x_0 - x)}{r_{MM_0}^2} g'_{0s}(s) ds = f(s_0), \quad s_0 \in [0, l]. \quad (4.3.8)$$

В плоских задачах дифракции электромагнитных волн, где $g_0(M)$ интерпретируется как плотность наведенных токов, а также в нестационарных задачах аэродинамики [76] удобно получить уравнение относительно $g_0(M)$. Для этого воспользуемся утверждением о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя и внесем в уравнении (4.3.5) знак нормальной производной под знак интеграла. Получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{r_{MM_0}^2 (\pi_M, \pi_{M_0}) - 2(r_{MM_0}, \pi_{M_0})(r_{MM_0}, \pi_M)}{r_{MM_0}^4} g(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (4.3.9)$$

Интеграл в уравнении (4.3.9) имеет в точке M_0 сильную особенность вида $\frac{1}{x^2}$, и поэтому его надо понимать в смысле конечного значения по Адамару [1].

Замечание 4.3.1. Пусть L – гладкая разомкнутая кривая. Найти функцию $\Phi_0(M)$, гармоническую вне L , стремящуюся к нулю на бесконечности, имеющую равномерно непрерывные предельные значения $\Phi_0^+(M_0)$ и $\Phi_0^-(M_0)$ в точках кривой L и удовлетворяющую граничному условию (4.3.1) на L . Имеется в виду, что в точках M_0 кривой L выбран орт π_{M_0} нормали, который непрерывно меняется при движении точки M_0 по кривой.

Если искать решение сформулированной задачи в виде потенциала двойного слоя, то опять приходим к уравнению (4.3.5), (соответственно, к уравнениям (4.3.7)–(4.3.9)). Однако теперь уравнение (4.3.9) имеет единственное решение, обращающееся в нуль на концах кривой L (что следует из формулы (4.3.6)), а уравнения (4.3.7), (4.3.8) эквивалентны уравнению (4.3.9) только при условии

$$\int_L g'_{0s}(s) ds = 0.$$

Рассмотрим частные случаи.

4.3.1. Пусть L – отрезок $[-1, 1]$ оси OX плоскости OXY . Тогда $r_{MM_0} = (x_0 - x)\vec{i}$, $\pi_M = \pi_{M_0} = \vec{j}$, $ds = dx$, и уравнения (4.3.7), (4.3.8) примут вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g'_0(x) dx}{x_0 - x} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad (4.3.10)$$

а уравнение (4.3.9) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_0(x) dx}{(x_0 - x)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (4.3.11)$$

4.3.2. Пусть L – окружность радиуса R с центром в начале координат. Тогда $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $\pi_M = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, $ds = -R d\theta$, $\theta \in [0, -2\pi]$ (напомним, что π_M должна быть направлена во внешнюю область, а τ_M и $\bar{\pi}_M$ должны составлять правый

декартовый базис, поэтому Γ_R пробегаем по часовой стрелке, и уравнения (4.3.7), (4.3.9) примут вид

$$-\frac{1}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} g'_0(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad (4.3.12)$$

$$\frac{1}{8\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{g_0(\theta)}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.3.13)$$

Если функция $f(\theta_0)$ представлена рядом Фурье (4.1.10), то применив опять метод разделения переменных в полярных координатах, получим, что решением с точностью до константы внутренней задачи Неймана в круге D_R будет функция

$$\Phi_0(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\rho^n}{R^{n-1}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.3.14)$$

а решением внешней задачи Неймана для круга D_R будет функция

$$\Phi_0(\rho, \theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{R^{n+1}}{\rho^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (4.3.15)$$

Поэтому, используя формулу (4.3.6), получаем, что решением с точностью до константы интегрального уравнения (4.3.13) является функция

$$g_0(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R}{n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (4.3.16)$$

Полагая теперь в (4.3.13) $f(\theta_0) = a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0$, получаем справедливость соотношения

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = -n(a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0). \quad (4.3.17)$$

Замечание 4.3.2. Соотношение (4.3.17) получается формальным дифференцированием по θ_0 соотношения (4.1.17).

Замечание 4.3.3. Пусть L – гладкая разомкнутая кривая, заданная параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [-1, 1]$, т.е. функция $r'_M = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ непрерывна на $[-1, 1]$ и не обращается в нуль. В этом случае уравнение (4.3.8) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi r'_{M_0}} \int_{-1}^1 \frac{K(t_0, t)}{t_0 - t} g'_{0r}(t) dt = -f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1) \quad (4.3.18)$$

$$K(t_0, t) = \frac{x'(t_0)x_2(t_0, t) + y'(t_0)y_2(t_0, t)}{r_{2, MM_0}^2},$$

$$x_2(t_0, t) = \frac{x_1(t_0, t)}{t_0 - t}, \quad y_2(t_0, t) = \frac{y_1(t_0, t)}{t_0 - t},$$

$$x_1(t_0, t) = x(t_0) - x(t), \quad y_1(t_0, t) = y(t_0) - y(t),$$

$$r_{2, MM_0}^2 = x_2^2(t_0, t) + y_2^2(t_0, t).$$

Естественно функции $x_2(t_0, t)$, $y_2(t_0, t)$ доопределить как $x_2(t_0, t_0) = x'(t_0)$, $y_2(t_0, t_0) = y'(t_0)$ и поэтому $K(t_0, t_0) = 1$, $t_0 \in [-1, 1]$. Теперь уравнение (4.3.18) можно представить в виде [80]

$$\frac{1}{2\pi r'_{M_0}} \int_{-1}^1 \frac{g'_{0t}(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K_1(t_0, t) g'_{0t}(t) dt = -f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad (4.3.19)$$

$$K_1(t_0, t) = \frac{1}{2\pi r'_{M_0}} \frac{K(t_0, t) - 1}{t_0 - t} = \frac{1}{2\pi r'_{M_0}} \frac{K_2(t_0, t)}{r_{2, MM_0}^2},$$

$$K_2(t_0, t) = -x_2(t_0, t)x_3(t_0, t) - y_2(t_0, t)y_3(t_0, t),$$

$$x_3(t_0, t) = \frac{x_2(t_0, t) - x'(t_0)}{t_0 - t}, \quad y_3(t_0, t) = \frac{y_2(t_0, t) - y'(t_0)}{t_0 - t}.$$

Покажем теперь, что если функции $x(t)$ и $y(t)$ достаточно гладкие, то ядро $K_1(t_0, t)$ также достаточно гладкое. Действительно, как было показано в лемме 2.1.1,

$$x_2(t_0, t) = \frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t} = \int_0^1 x'(t + u(t_0 - t)) du, \quad (4.3.20)$$

поэтому

$$x_3(t_0, t) = \frac{x_2(t_0, t) - x'(t_0)}{t_0 - t} = \int_0^1 \frac{x'(t + u(t_0 - t)) - x'(t_0)}{t_0 - t} du. \quad (4.3.21)$$

Проинтегрируем интеграл в (4.3.21) по частям, полагая: $\tilde{u} = [x'(t + u(t_0 - t)) - x'(t_0)] / (t_0 - t)$, $d\tilde{v} = du$. Тогда получим

$$x_3(t_0, t) = - \int_0^1 u x''(t + u(t_0 - t)) du. \quad (4.3.22)$$

Из формул (4.3.20) и (4.3.22) следует, что если $x''(t)$ – гельдеровская функция, то функции $x_2(t_0, t)$ и $x_3(t_0, t)$ также гельдеровские и, следовательно, функции $K_2(t_0, t)$ и r_{2, MM_0}^2 являются гельдеровскими, причем $r_{2, MM_0}^2 \neq 0$ для любых t_0 и $t \in [-1, 1]$, причем

$$x_3(t_0, t_0) = -\frac{1}{2} x''(t_0), \quad y_3(t_0, t_0) = -\frac{1}{2} y''(t_0).$$

Теперь для интеграла $I(M_0) = I(s_0)$ в левой части (4.3.8), следуя параграфу 2.4, можно предложить следующую квадратурную формулу метода дискретных вихрей:

$$S_n(M_{0j}) = S_n(s_{0j}) = - \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_{k,j}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (4.3.23)$$

где

$$\Gamma_k = g'_{0s}(s_k) \Delta s_k, \\ \omega_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \frac{x'_s(s_{0j}) [x(s_{0j}) - x(s_k)] + y'_s(s_{0j}) [y(s_{0j}) - y(s_k)]}{r_{M_k M_{0j}}^2},$$

и Δs_k – длина кривой L между точками M_{0k-1} и M_{0k} .

Точки M_k и M_{0j} можно выбирать либо равномерно по длине дуги, и тогда $\Delta s_k = h$, $k = 1, \dots, n$ (рис. 4.3.1), либо как образы точек t_k и t_{0j} , образующих каноническое разбиение (см. 2.3) параметрического отрезка.

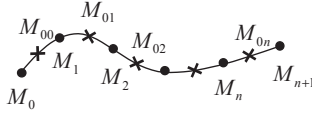


Рис. 4.3.1

Замечание 4.3.4. Пусть теперь кривая L является простой замкнутой гладкой. Будем полагать, что параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$. Переобозначая $g'_{0s}(s) = \gamma(s) = \gamma(t)$, видим, что функция γ и ядро в интеграле в (4.3.8) будут периодическими функциями и поэтому выделять в ядре надо периодическую сингулярность, т.е. функцию $\operatorname{ctg} \frac{t_0 - t}{2}$. Поэтому в данном случае уравнение (4.3.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}} \gamma(t) dt &= f(t_0), \quad t_0 \in [0, 2\pi], \\ K(t_0, t) &= \frac{x'(t_0) \bar{x}_2(t_0, t) + y'(t_0) \bar{y}_2(t_0, t)}{\bar{r}_{2, MM_0}^2 r'_{M_0}}, \\ \bar{x}_2(t_0, t) &= \frac{x(t_0) - x(t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \quad \bar{y}_2(t_0, t) = \frac{y(t_0) - y(t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \\ \bar{r}_{2, MM_0}^2 &= \bar{x}_2^2(t_0, t) + \bar{y}_2^2(t_0, t). \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Функции $\bar{x}_2(t_0, t)$ и $\bar{y}_2(t_0, t)$ терпят разрывы первого рода, так как $\bar{x}_2(t_0, t) \rightarrow 2x'(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ и $\bar{x}_2(t_0, t) \rightarrow -2x'(t_0)$ при $t \rightarrow t_0 + 2\pi$, но функция \bar{r}_{2, MM_0}^2 непрерывна в точке t_0 и не обращается в нуль на $[0, 2\pi]$, если $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на $[0, 2\pi]$ и $r'_M \neq 0$ на $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} x_3(t_0, t) &= \bar{x}_2(t_0, t) - 2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0), \\ y_3(t_0, t) &= \bar{y}_2(t_0, t) - 2 \cos \frac{t_0 - t}{2} y'(t_0). \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

Так как $2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0) \rightarrow 2x'(t_0)$ для $t \rightarrow t_0$ и $2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0) \rightarrow -2x'(t_0)$ для $t \rightarrow t_0 + 2\pi$, то функции $x_3(t_0, t)$ и $y_3(t_0, t)$ непрерывны в точке t_0 . Таким образом, уравнение (4.3.24), а следовательно, и (4.3.8) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} ctg \frac{t_0-t}{2} \gamma(t) dt + \int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(t_0, t) \gamma(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in [0, 2\pi], \\
& \tilde{K}_1(t_0, t) = \frac{1}{2\pi} \left[A(t_0, t) - \frac{1}{2} \right] ctg \frac{t_0-t}{2} + B(t_0, t), \\
& A(t_0, t) = \frac{2r'_{M_0} r'_M}{\tilde{r}_{2, MM_0}^2}, \\
& B(t_0, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{y'(t_0) \tilde{y}_3(t_0, t) + x'(t_0) \tilde{x}_3(t_0, t)}{\tilde{r}_{2, MM_0}^2 r'_{M_0}} r'_M, \\
& \tilde{x}_3(t_0, t) = \frac{x_3(t_0, t)}{\sin \frac{t_0-t}{2}}, \quad \tilde{y}_3(t_0, t) = \frac{y_3(t_0, t)}{\sin \frac{t_0-t}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

Так как функции $\tilde{x}_2(t_0, t)$, $\tilde{y}_2(t_0, t)$ и $\tilde{x}_3(t_0, t)$, $\tilde{y}_3(t_0, t)$ периодические, то можно считать, что точка t_0 лежит в интервале $(0, 2\pi)$ и поэтому в малой окрестности t_0 эти функции можно представить в виде (4.3.21) и (4.3.22). Отсюда получаем, что если $x''(t), y''(t) \in H$ на $[0, 2\pi]$, то $\tilde{K}_1(t_0, t) \in H$ на $[0, 2\pi]$.

Квадратурную формулу метода дискретных вихрей для интеграла (4.3.8) надо брать также в виде (4.3.23).

Замечание 4.3.5. В замечании 4.3.1 было показано, что уравнение (4.3.9) в случае, когда L является отрезком, приводится к виду (4.3.11), а когда L является окружностью, то – к виду (4.3.13).

Используя рассуждения, аналогичные проведенным в замечаниях 4.3.3 и 4.3.4, покажем теперь следующее.

Пусть кривая L принадлежит классу $H_3(\alpha)$, т.е. $x'''(t)$ и $y'''(t)$ принадлежат $H(\alpha)$ на $[-1, 1]$, если L является разомкнутой, и на $[0, 2\pi]$ являются периодическими, если L – замкнута. Тогда уравнение (4.3.9) может быть приведено соответственно к виду

$$\frac{1}{2\pi r'_{M_0}} \int_{-1}^1 \frac{g_0(t) dt}{(t_0-t)^2} + \int_{-1}^1 K(t_0, t) g_0(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1), \tag{4.3.27}$$

или

$$\frac{1}{8\pi r'_{M_0}} \int_0^{2\pi} \frac{g_0(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0-\theta}{2}} + \int_0^{2\pi} K(\theta_0, \theta) g_0(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \tag{4.3.28}$$

где регулярные ядра принадлежат классу $H(\alpha)$ на соответствующем множестве.

Заметим, что представление уравнение (4.3.9) в виде (4.3.27) или (4.3.28) удобно для теоретических исследований этого уравнения (структуры решения, вопросов сходимости численных методов и т.д.). Для проведения практических вычислений для интеграла $I(M_0)$ в (4.3.9) в аэродинамике используют [19, 70] квадратурную формулу метода дискретных вихревых пар

$$S_n(M_{0j}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{0k}^* \omega_{k,j}^*, \quad j = 1, \dots, n, \tag{4.3.29}$$

где

$$\Gamma_{0k}^* = g_0(M_{0k}), \quad k=1, \dots, n,$$

$$\omega_{k,j}^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0j}} \right) ds_M = \omega_{k+1,j} - \omega_{k,j}, \quad k=1, \dots, n,$$

где $\omega_{k,j}$ определены в формуле (4.3.23), а точки $M_k, k=1, \dots, n+1$, и $M_0, j=1, \dots, n$, выбраны как на рис. 4.3.1, только нумерацию надо начинать с единицы, а не с нуля, а $L_{M_k, M_{k+1}}$ – часть кривой L между точками M_k и M_{k+1} .

Докажем формулу для $\omega_{k,j}^*$ следующим образом. Напомним [117], что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} F(M) &= \text{grad } F(M) \bar{n}_M, \\ \text{grad } F(M) &= \frac{\partial}{\partial x} F(M) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} F(M) \vec{j}, \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

для функции двух переменных. Далее, когда точка $M_0 \notin L$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) ds_M &= \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) ds_M = \\ &= - \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) ds_M = - \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) y'_s - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) x'_s \right] ds_M. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $\ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ гармоническая, т.е. $\Delta \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \equiv 0, M \neq M_0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) ds_M &= \\ &= \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) y'_s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) x'_s \right] ds_M = \\ &= \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} d \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{M_{k+1}M_0}} - \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{M_k M_0}} = \frac{y_0 - y_{k+1}}{r_{M_{k+1}M_0}^2} - \frac{y_0 - y_k}{r_{M_k M_0}^2}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

В формуле (4.3.31) предполагалось, что $\bar{n}_M = y'_s \vec{i} - x'_s \vec{j}$. Проводя аналогичные рассуждения для частной производной по y_0 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) ds_M &= - \int_{L_{M_k, M_{k+1}}} d \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r_{M_{k+1}M_0}} + \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r_{M_k M_0}} = - \frac{x_0 - x_{k+1}}{r_{M_{k+1}M_0}^2} + \frac{x_0 - x_k}{r_{M_k M_0}^2}. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

В силу непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя [113] получаем для произвольной точки M_0 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_{L_{M_k M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} ds_M = \\ & = \frac{y'_{0s}(y_0 - y_{k+1}) + x'_{0s}(x_0 - x_{k+1})}{r_{M_{k+1}M_0}^2} - \frac{y'_{0s}(y_0 - y_k) + x'_{0s}(x_0 - x_k)}{r_{M_k M_0}^2}, \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

откуда следует справедливость формулы.

Так же формула (4.3.29) применяется и в случае замкнутого контура L .

4.4. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца

Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi(M) \in R(D^{(-)})$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца (4.2.1) в $D^{(-)}$ и граничному условию

$$\left. \frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial \bar{n}_{M_0}} \right|_L = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.4.1)$$

где $f(M_0)$ – заданная непрерывная функция.

Внешняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi(M) \in R(R^2 \setminus \bar{D}^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^2 \setminus \bar{D}^{(-)}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности (4.2.2) или (4.2.3) и граничному условию (4.4.1).

Как показано в [65], если k не является собственным значением однородной внутренней задачи Неймана, то внутренняя задача Неймана (4.2.1), (4.4.1) однозначно разрешима для любой непрерывной функции $f(M)$. Внешняя задача Неймана однозначно разрешима при любом k и любой правой части.

Решение задачи Неймана будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$\begin{aligned} \Phi(M_0) &= -\frac{i}{4} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} (H_0^{(2)}(kr_{MM_0})) g(M) ds_M = \\ &= -\frac{i}{4} \int_L H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) \frac{(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}} g(M) ds_M, \quad M_0 \notin L, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

который на бесконечности удовлетворяет условию (4.2.3).

Функция $\Phi(M)$ будет решением обеих задач Неймана для уравнения Гельмгольца, если функция $g(M)$ будет решением интегрального уравнения (в силу непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя)

$$-\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) g(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (4.4.3)$$

Если k не является собственным значением внутренней задачи Неймана, то уравнение (4.4.3) имеет единственное решение.

Если воспользоваться формулой нормальной производной потенциала двойного слоя, то уравнение (4.4.3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{k^2 i}{4} \int_L H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) g(M) ds_M - \\ & - \frac{ki}{4} \int_L H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) \frac{(\bar{n}_M, \bar{r}_M)(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) - (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{r}_M)}{r_{MM_0}} \times \\ & \times g'_s(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

или, если известно параметрическое представление кривой L , в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{k^2 i}{4} \int_L H_0^{(2)}(kr_{MM_0})(y'_s y'_{0s} + x'_s x'_{0s}) g(M) ds_M + \\ & + \frac{ki}{4} \int_L H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) \frac{y'_{0s}(y_0 - y) + x'_{0s}(x_0 - x)}{r_{MM_0}} g'_s(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Уравнения (4.4.4), (4.4.5) являются интегро-дифференциальными. Если же в задаче надо знать только $g(M)$, то бывает удобнее от уравнения (4.4.3) не переходить к этим уравнениям, а, воспользовавшись непрерывностью нормальной производной потенциала двойного слоя, внести знак нормальной производной под знак интеграла и перейти к уравнению

$$-\frac{i}{4} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} (H_0^{(2)}(kr_{MM_0})) g(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (4.4.6)$$

Если в последнем уравнении выполнить операции взятия нормальных производных, то получим уравнение

$$-\frac{i}{4} \int_L K_{N,k}(M_0, M) g(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.4.7)$$

где

$$\begin{aligned} K_{N,k}(M_0, M) = k^2 & \left[H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) - \frac{1}{kr_{MM_0}} H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) \right] \frac{(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{MM_0}^2} + \\ & + H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) k \frac{(\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) r_{MM_0}^2 - (\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0})}{r_{MM_0}^3}. \end{aligned}$$

Интегралы в уравнениях (4.4.6), (4.4.7) надо понимать в смысле конечного значения по Адамару [1], так как их ядра имеют особенность вида $r_{MM_0}^{-2}$.

Замечание 4.4.1. Если L – гладкая разомкнутая кривая, то можно сформулировать следующую краевую задачу Неймана для уравнения Гельмгольца. Найти функцию $\Phi(M)$: удовлетворяющую уравнению Гельмгольца вне L ; условию излучения на бесконечности (4.2.2) или (4.2.3); имеющую равномерно непрерывные предельные значения $\Phi^+(M_0)$ и $\Phi^-(M_0)$ в точках кривой L ; удовлетворяющую на L граничному условию (4.4.1).

При решении сформулированной задачи с помощью потенциала двойного слоя опять приходим к уравнениям (4.4.4), (4.4.5) или (4.4.7), причем в этом случае в уравнениях (4.4.4), (4.4.5) интеграл, содержащий g'_s может быть приведен к виду (4.3.19), если L – разомкнутая кривая, или к виду (4.3.26), если L – замкнутая кривая. Уравнение же (4.4.7) в указанных случаях может быть приведено к виду (4.3.27) или (4.3.28), соответственно.

Пусть теперь $L = \Gamma_R$. Записав уравнение Гельмгольца в полярных координатах и применив метод разделения переменных, получим, что если функция $f(M_0)$ на Γ_R представлена рядом Фурье (4.1.10), то решение внутренней задачи Неймана для круга D_R будет иметь вид

$$\Phi(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} \frac{J_0(k\rho)}{kJ'_0(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(k\rho)}{kJ'_n(kR)} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.4.8)$$

а решение для внешней задачи Неймана для D_R , удовлетворяющее условию излучения (4.2.3) на бесконечности, будет иметь вид

$$\Phi(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} \frac{H_0^{(2)}(k\rho)}{kH_0^{(2)}(kR)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(k\rho)}{kH_n^{(2)}(kR)} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (4.4.9)$$

Поэтому, опять используя формулу (4.3.6), получим, что единственным решением уравнения (4.4.6) (или (4.4.7)) в случае $L = \Gamma_R$ для заданной функции $f(\theta_0)$, представленной рядом Фурье (4.1.10), будет функция

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

$$A_n = \frac{1}{k} \left[\frac{H_n^{(2)}(kR)}{H_n^{(2)}(kR)} - \frac{J_n(kR)}{J_n'(kR)} \right], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.4.10)$$

Теперь, как и в случае (4.3.17), получаем справедливость соотношения

$$-\frac{iR}{4} \int_0^{2\pi} K_{N,k}(\theta_0, \theta) (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = \quad (4.4.11)$$

$$= A_n^{-1} (a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$-\frac{iR}{4} \int_0^{2\pi} K_{N,k}(\theta_0, \theta) \frac{a_0}{2} d\theta = A_0^{-1} \frac{a_0}{2}. \quad (4.4.12)$$

Если опять воспользоваться формулами (4.2.19) и (4.2.20), то можно показать, что при $k \rightarrow 0$ получаем $A_n^{-1} \rightarrow -\frac{2R}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Замечание 4.4.2. Если кривая L является разомкнутой, то, учитывая формулу (4.3.6) связи плотности потенциала двойного слоя со скачком граничных значений потенциала, получаем, что значения функции $g(M)$ в (4.4.3) обращаются в нуль на концах кривой L . В силу этого, интегрируя по частям в первом интеграле в (4.4.5), видим, что уравнение (4.4.5) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{k^2 i}{4} \int_L \left[k \left(\int_0^s H_0^{(2)}(kr_{MM_0}) (y'(\tau) y'(s_0) + x'(\tau) x'(s_0)) d\tau \right) - \right. \\ & \left. - H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) \frac{x'(s_0)(x(s_0) - x(s)) + y'(s_0)(y(s_0) - y(s))}{r_{MM_0}} \right] \times \\ & \times g'_s(M) ds = f(M_0), \quad M_0 \in L. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.13)$$

Теперь для вычисления интеграла $I(M_0)$, аналогично формуле (4.3.23), можно предложить квадратурную формулу типа метода дискретных вихрей

$$S_n(M_{0j}) = -\sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_k \tilde{\omega}_{k,j}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (4.4.14)$$

$$\tilde{\Gamma}_k = g'_s(s_k) \Delta s_k,$$

$$\tilde{\omega}_{k,j} = \frac{k^2 i}{4} \int_0^{s_k} H_0^{(2)}(kr_{M_k M_{0j}}) (y'(\tau) y'(s_{0j}) + x'(\tau) x'(s_{0j})) d\tau -$$

$$-\frac{ki}{4} H_1^{(2)}(kr_{M_k M_{0j}}) \frac{x'(s_{0j})(x(s_{0j}) - x(s_k)) + y'(s_{0j})(y(s_{0j}) - y(s_k))}{r_{M_k M_{0j}}}.$$

Замечание 4.4.3. Для интеграла $I(M_0)$ в (4.4.3), а следовательно, и для интеграла в (4.4.6) и (4.4.7), в случае, когда кривая L является гладкой разомкнутой или

замкнутой, можно предложить квадратурную формулу типа метода дискретных вихревых пар (аналогичную формуле (4.3.29))

$$\begin{aligned}
 S_n(M_{0j}) &= \sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{0k}^* \tilde{\omega}_{k,j}^*, \quad j = 1, \dots, n, \\
 \tilde{\Gamma}_{0k}^* &= g(M_{0k}), \quad k = 1, \dots, n, \\
 \tilde{\omega}_{k,j}^* &= -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) ds_M = \\
 &= \frac{i}{4} (\eta_{k+1,j} - \eta_{k,j}) - \frac{k^2 i}{4} \int_L H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_{0j}}) ds_M, \\
 \eta_{k,j} &= k H_1^{(2)}(kr_{M_k M_{0j}}) \frac{x'(s_{0j})(x(s_{0j}) - x(s_k)) + y'(s_{0j})(y(s_{0j}) - y(s_k))}{r_{M_k M_{0j}}}.
 \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

Формула для $\tilde{\omega}_{k,j}^*$ получается аналогично формуле для $\omega_{k,j}^*$ в (4.3.29). Действительно, с учетом того, что функция $H_0^{(2)}(kr_{MM_0})$ является решением уравнения Гельмгольца, получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x_0} \int_{L_{M_k M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) ds = \\
 &= \int_{L_{M_k M_{k+1}}} d \left(\frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) \right) ds + \int_{L_{M_k M_{k+1}}} H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) y'_s(s) ds = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kr_{M_{k+1} M_{0j}}) - \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kr_{M_k M_{0j}}) + \int_{L_{M_k M_{k+1}}} H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) y'_s(s) ds.
 \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Аналогичная формула получается для $\frac{\partial}{\partial y_0} \int_{L_{M_k M_{k+1}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} H_0^{(2)}(kr_{MM_{0j}}) ds$ и после этого использование формулы (4.3.30) показывает справедливость формулы для $\tilde{\omega}_{k,j}^*$.

4.5. Задача Неймана для уравнения Лапласа в плоском случае. Сведение ее к гиперсингулярному интегральному уравнению

Пусть $D^{(-)}$ – ограниченная открытая область в R^2 , границу которой обозначим L (рис. 4.1.1). Будем предполагать, что L – простая замкнутая кривая, принадлежащая классу C^2 , т.е. функции $x(t)$ и $y(t)$, дающие параметрическое представление этой кривой, имеют непрерывные вторые производные и $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$ для всех точек кривой. Внешнюю к L область обозначим $D^{(+)}$.

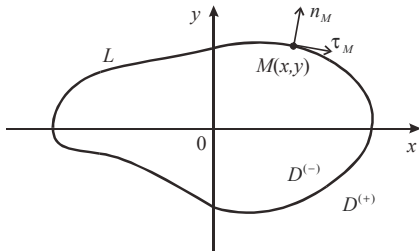


Рис. 4.5.1

Сформулируем задачу Неймана для уравнения Лапласа применительно к внешней области $D^{(+)}$.

Внешняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi(M) \in C^2(D^{(+)}) \cap C(\overline{D^{(+)}})$, имеющую на границе L нормальную производную (в смысле равномерной сходимости), которая удовлетворяет:

1) уравнению Лапласа в $D^{(+)}$

$$\Delta \Phi(M) \equiv \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad M(x, y) \in D^{(+)}; \quad (4.5.1)$$

2) граничному условию на кривой L

$$\left. \frac{\partial \Phi(M_0)}{\partial n_{M_0}} \right|_L = f(M_0), \quad M_0(x_0, y_0) \in L, \quad (4.5.2)$$

где f – заданная функция; n_{M_0} – орг внешней нормали к кривой L в точке M_0 , $C^2(D^+)$ – множества функций на D^+ все вторые частные производные которых непрерывны на D^+ , $C(\overline{D^{(+)}})$ – функции, непрерывные на $\overline{D^{(+)}}$;

3) условию на бесконечности

$$|\Phi(M)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty. \quad (4.5.3)$$

Как показано в [25, 113], необходимым условием разрешимости задачи Неймана является выполнение равенства

$$\int_L f(M) dl_M = 0. \quad (4.5.4)$$

Обычно при сведении этих задач к интегральным уравнениям используют потенциал простого слоя, чтобы получить интегральное уравнение Фредгольма второго рода. В работе [65] показано, что эти задачи можно свести к интегральным уравнениям первого рода, но делается замечание, что эти уравнения, как правило, не используются в силу своей некорректности. Однако в связи с развитием численных методов решения указанных уравнений (метод дискретных вихрей) будем рассматривать соответствующие интегральные уравнения первого рода и в последующих разделах дадим устойчивые методы их численного решения применительно к некоторым классам кривых.

Итак, будем искать решение задачи Неймана в виде потенциала двойного слоя

$$W(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) dl_M, \quad M_0 \notin L, \quad (4.5.5)$$

где $M(x, y) \in L$ – точка интегрирования на кривой L ; \bar{n}_M – орт внешней нормали к L в точке M ; $r_{MM_0} = |\bar{r}_{MM_0}| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}$ – расстояние между точками M и M_0 ; $g(M)$ – неизвестная функция, называемая плотностью потенциала двойного слоя, подлежащая определению.

Известно [113], что потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне кривой L , поэтому функция $W(M_0)$ будет решением задачи Неймана (внешней или внутренней), если плотность $g(M)$ будет решением следующего интегрального уравнения:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_L \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.5.6)$$

которое получается путем подстановки функции $W(M_0)$ в граничное условие (4.5.2). При написании уравнения (4.5.6) также учитывался факт непрерывности производной по нормали потенциала двойного слоя на границе [113].

Необходимо отметить, что решение интегрального уравнения (4.5.6) существует с точностью до константы [70]. Поэтому в прикладных задачах для выделения единственного решения обычно используется дополнительная информация об искомой функции. Это может быть либо интегральная характеристика (значение интеграла на кривой L), либо конкретное значение искомой функции в некоторой точке. Данные значения можно получить путем теоретических рассуждений, отталкиваясь от физической сущности исходной задачи, или в результате проведения экспериментальных исследований.

Теперь в зависимости от решаемой задачи уравнение (4.5.6) удобно записать в одном из следующих двух видов.

Например, в плоских стационарных задачах аэродинамики достаточно знать производную по дуге дуги от плотности потенциала двойного слоя (интенсивность вихревого слоя), и поэтому уравнение (4.5.6) запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\bar{\tau}_M, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) - (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{\tau}_M)}{r_{MM_0}^2} g'(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (4.5.7)$$

где $\bar{\tau}_M$ – орт касательного вектора к кривой L в точке M .

При желании получить в плоских задачах аэродинамики численные методы, аналогичные численным методам в пространственных задачах, удобнее записать уравнение (4.5.6) относительно $g(M)$. Для этого воспользуемся утверждением о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя [65, 113] и внесем в уравнении (4.5.6) знак нормальной производной под знак интеграла. Получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{r_{MM_0}^2 (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) - 2(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^4} g(M) dl_M = f(M_0), \quad M_0 \in L. \quad (4.5.8)$$

Интеграл в левой части (4.5.8) имеет сильную особенность в точке M_0 и называется гиперсингулярным интегралом. Различные определения гиперсингулярных интегралов на плоскости и в пространстве приведены в работах [63, 154].

Замечание 4.5.1. Пусть L – гладкая разомкнутая кривая (рис. 4.1.2). В этом случае, вся плоскость oXY , за исключением кривой L , является внешней областью $D^{(+)}$ к кривой L . Тогда можно сформулировать следующую краевую задачу Неймана: найти функцию $\Phi(M) \in C^2(D^{(+)}) \cap C(\bar{D}^{(+)})$, гармоническую вне L , исчезающую на бесконечности, имеющую равномерно непрерывные предельные значения $\Phi^+(M_0)$ и $\Phi^-(M_0)$ в точках кривой L

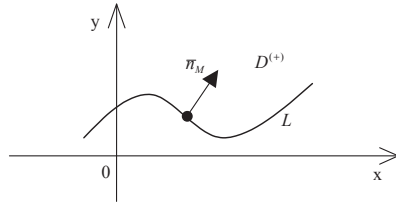


Рис. 4.5.2

и удовлетворяющую условию на ребре [70] и граничному условию (4.5.2) на L . Имеется в виду, что в точках M_0 кривой L выбран орт \bar{n}_{M_0} нормали, который непрерывно меняется при движении точки M_0 по кривой. Если искать решение сформулированной задачи в виде потенциала двойного слоя, то опять придем к уравнению (4.5.6) (соответственно, к уравнениям (4.5.7) – (4.5.8)).

В дальнейшем ходе изложения данной главы, будем рассматривать только последнюю форму записи уравнения (4.5.8). В частности, необходимо ответить на следующие вопросы: в каком смысле понимать интеграл, стоящий в левой части уравнения (4.5.8), в зависимости от выбора кривой L ; каковы свойства данного интеграла; какие численные методы можно предложить для его приближенного вычисления.

4.6. Гиперсингулярный интеграл на отрезке

Пусть L – отрезок $[a, b]$ оси OX плоскости OXY (рис. 4.2.1).

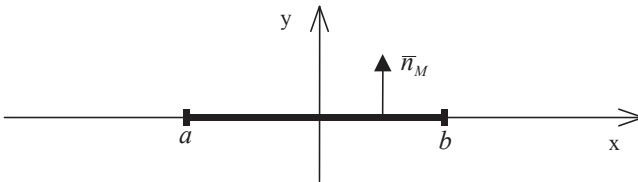


Рис. 4.6.1

В этом случае $\bar{r}_{MM_0} = (x_0 - x)\bar{i}$, $\bar{n}_M = \bar{n}_{M_0} = \bar{j}$, $dl = dx$, и уравнение (4.5.8) запишется в виде

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b). \quad (4.6.1)$$

Рассмотрим вначале следующий интеграл:

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{dx}{(x_0 - x)^2}, \quad x_0 \in (a, b). \quad (4.6.2)$$

Если определить его по аналогии с интегралом Коши, то получится (при $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned}
I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{dx}{(x_0 - x)^2} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x_0 - x} \Big|_a^{x_0 - \varepsilon} + \frac{1}{x_0 - x} \Big|_{x_0 + \varepsilon}^b \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x_0 - a} + \frac{1}{x_0 - b} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a} \right). \tag{4.6.3}
\end{aligned}$$

Из формулы (4.6.3) видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ этот предел не существует и равняется $+\infty$.

Поэтому, используя идею Адамара [1, 70] о понятии интеграла в смысле конечной части, определим интеграл (4.6.2) следующим образом:

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a}, \tag{4.6.4}$$

где обозначено $O(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon) = [a, x_0 - \varepsilon] \cup [x_0 + \varepsilon, b]$.

Определение 4.6.1. Интеграл $I(x_0)$ в формуле (4.6.2) определим по формуле (4.6.4) и будем называть гиперсингулярным интегралом на отрезке.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2}, \quad x_0 \in (a, b), \tag{4.6.5}$$

где функция $g(x)$ определена на $[a, b]$.

Определение 4.6.2. Интеграл (4.6.5) будем понимать в смысле равенства

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) \tag{4.6.6}$$

и называть гиперсингулярным интегралом на отрезке.

Докажем несколько несложных теорем.

Теорема 4.6.1 [70]. *Интеграл (4.6.6) существует для любой функции $g(x) \in H_1(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $g'(x) \in H(\alpha)$ – классу Гёльдера степени α на $[a, b]$.*

Доказательство. Преобразуем формулу (4.6.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)dx}{(x - x_0)^2} + \right. \\
&+ g(x_0) \int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x - x_0)^2} - g'(x_0) \int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{x_0 - x} - \left. \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)dx}{(x - x_0)^2} \right] + \\
&+ g(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x - x_0)^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right] - g'(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[a, b] \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{x_0 - x} \right] = \\
&= I_1(x_0) + g(x_0)I_2(x_0) - g'(x_0)I_3(x_0). \tag{4.6.7}
\end{aligned}$$

В формуле (4.6.7) интеграл $I_1(x_0)$ существует как несобственный интеграл, так как $g'(x) \in H(\alpha)$, и поэтому

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \leq A|x - x_0|^{1+\alpha}. \quad (4.6.8)$$

Интеграл $I_2(x_0)$ существует в смысле определения 4.6.1, а интеграл $I_3(x_0)$ существует в смысле главного значения по Коши [37, 98]. Теорема 4.6.1 доказана.

Теорема 4.6.2. Пусть функция $g(x) \in H_1(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для интеграла (4.6.5) справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2} = \frac{g(b)}{x_0-b} - \frac{g(a)}{x_0-a} - \int_a^b \frac{g'(x)dx}{x_0-x}. \quad (4.6.9)$$

Доказательство. Выполнив в формуле (4.6.6) интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)}{x_0-x} \Big|_a^{x_0-\varepsilon} + \frac{g(x)}{x_0-x} \Big|_{x_0+\varepsilon}^b - \int_{[a,b] \setminus O(x_0,\varepsilon)} \frac{g'(x)dx}{x_0-x} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) = \\ &= \frac{g(b)}{x_0-b} - \frac{g(a)}{x_0-a} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{g(x_0+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) - \\ &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{[a,b] \setminus O(x_0,\varepsilon)} \frac{g'(x)dx}{x_0-x} \right) = \frac{g(b)}{x_0-b} - \frac{g(a)}{x_0-a} + I_4(x_0) - I_5(x_0). \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Интеграл $I_5(x_0)$ существует в смысле главного значения по Коши. Так как $g(x) \in H_1(\alpha)$, то

$$\begin{aligned} &|g(x_0+\varepsilon) + g(x_0-\varepsilon) - 2g(x_0)| = \\ &= \left| [g(x_0+\varepsilon) - g(x_0)] - [g(x_0) - g(x_0-\varepsilon)] \right| \leq 2A\varepsilon^{1+\alpha} \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

и поэтому предел $I_4(x_0)$ равен нулю для любого $x_0 \in (a, b)$. Теорема 4.6.2 доказана.

Замечание 4.6.1. Если $g(a) = g(b) = 0$ и $g(x) \in H_1(\alpha)$ на $[a, b]$, то формула (4.6.9) получает вид:

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2} = - \int_a^b \frac{g'(x)dx}{x_0-x}, \quad x_0 \in (a, b). \quad (4.6.12)$$

Замечание 4.6.2. Формула (4.6.12) справедлива и в том случае, если $g(a) = g(b) = 0$, а $g(x) \in H_1^*(\alpha)$ на $[a, b]$, т.е. производная $g'(x) \in H^*(\alpha)$ на $[a, b]$, что означает [98]:

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^\nu(b-x)^\mu}, \quad (4.6.13)$$

где $\psi(x) \in H$ на $[a, b]$, т.е. является функцией Гёльдера на $[a, b]$ некоторой степени, а $\nu, \mu < 1$.

Если функция $g(x)$ удовлетворяет требованиям, указанным в замечании 4.6.2, то будем говорить, что $g(x) \in H_1^{(0,0)*}$ на $[a, b]$.

Рассмотрим теперь для гиперсингулярного интеграла (4.6.5) на $[a, b]$ следующую квадратурную сумму. Возьмем на $[a, b]$ точки $x_k = a + (k-1)h$, $h = \frac{b-a}{n}$,

$k=1, \dots, n+1$, которые разбивают отрезок $[a, b]$ на n штук равных отрезков $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k=1, \dots, n$, и точки $x_{0k} = x_k + \frac{h}{2}$, $k=1, \dots, n$. Будем говорить, что множества $E = \{x_k, k=1, \dots, n+1\}$ и $E_0 = \{x_{0k}, k=1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[a, b]$ (рис. 4.6.2).

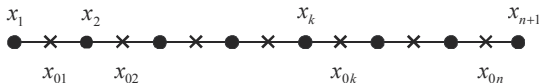


Рис. 4.6.2

Заменяем теперь интеграл (4.6.5) в точке $x_{0j} \in E_0$ следующей суммой:

$$S_n(x_{0j}) = \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \int_{I_k} \frac{dx}{(x_{0j} - x)^2} = \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \left(\frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right). \quad (4.6.14)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6.3. Пусть функция $g(x) \in H_1^*(\alpha)$ на $[a, b]$. Пусть множества точек E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} I_n(x_{0j}) &= |I(x_{0j}) - S_n(x_{0j})| = \\ &= \left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x_{0j} - x)^2} - \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \left(\frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right) \right| \leq \Theta(x_{0j}), \quad j=1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.6.15)$$

где величина $\Theta(x_{0j})$ удовлетворяет неравенствам:

а) для всех точек $x_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$

$$\Theta(x_{0j}) \leq C_\delta h^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1, \quad (4.6.16)$$

где $\delta > 0$ — сколь угодно малое число;

б) для всех точек $x_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=1}^n \Theta(x_{0j}) h \leq Ch^{\lambda_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad (4.6.17)$$

где C_δ, C — некоторые константы, не зависящие от n .

Доказательство. Интеграл $I(x_{0j})$ представим по формуле (4.6.9), а сумму $S_n(x_{0j})$ запишем в виде

$$S_n(x_{0j}) = -\frac{g(x_{01})}{x_{0j} - a} - \sum_{k=2}^n \frac{g(x_{0k}) - g(x_{0k-1})}{h} \frac{h}{x_{0j} - x_k} + \frac{g(x_{0n})}{x_{0j} - b}. \quad (4.6.18)$$

Тогда для $I_n(x_{0j})$ можно записать

$$\begin{aligned}
I_n(x_{0j}) &\leq \left| \frac{g(b) - g(x_{0n})}{x_{0j} - b} \right| + \left| \frac{g(x_{01}) - g(a)}{x_{0j} - b} \right| + \\
&+ \left| \int_a^b \frac{g'(x) dx}{x_{0j} - x} - \sum_{k=2}^n \frac{g(x_{0k}) - g(x_{0k-1})}{h} \frac{h}{x_{0j} - x_k} \right| = \\
&= I_{1,n}(x_{0j}) + I_{2,n}(x_{0j}) + I_{3,n}(x_{0j}).
\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

Теперь непосредственно видно, что $I_{1,n}(x_{0j}) \leq \Theta_1(x_{0j})$, $I_{2,n}(x_{0j}) \leq \Theta_2(x_{0j})$, а из результатов [70] следует, что $I_{3,n}(x_{0j}) \leq \Theta_3(x_{0j})$, где каждая из величин $\Theta_p(x_{0j})$, $p=1,2,3$, удовлетворяет неравенствам (4.6.16) и (4.6.17). Следовательно, сумма величин $\Theta_p(x_{0j})$, $p=1,2,3$, также удовлетворяет этим неравенствам. Теорема 4.6.3 доказана.

Замечание 4.6.3. Таким образом, квадратурная сумма $S_n(x_{0j})$ сходится к значению интеграла $I(x_{0j})$ следующим образом. Эта сходимость равномерна по точкам x_{0j} вне фиксированных окрестностей концов отрезка $[a, b]$, при подходе точки x_{0j} к одному из концов эта погрешность портится и даже может стремиться к ∞ при $n \rightarrow \infty$, но в целом имеется интегральная сходимость, т.е. выполняется неравенство (4.6.17).

Приведем некоторые примеры численных расчетов по вычислению гиперсингулярного интеграла (4.6.5). Для этого покажем, что для интеграла (4.6.5) выполняется следующее спектральное соотношение.

Теорема 4.6.4. *Справедливо следующее спектральное соотношение:*

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_0)^2} = -\pi(n+1) U_n(x_0), \quad x \in (-1, 1), \tag{4.6.20}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \tag{4.6.21}$$

где $U_n(x)$ – полином Чебышева второго рода.

Доказательство. Используя представление $U_n(x)$ и равенство $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, записываем:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_0)^2} = \int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1) \arccos x) dx}{(x-x_0)^2}. \tag{4.6.22}$$

Теперь в силу формулы интегрирования по частям (4.6.9), так как $\sin((n+1) \arccos(1)) = \sin((n+1) \arccos(-1)) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1) \arccos x) dx}{(x-x_0)^2} = (n+1) \int_{-1}^1 \frac{\cos((n+1) \arccos x) dx}{\sqrt{1-x^2} (x-x_0)} = \\
&= (n+1) \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(x) dx}{\sqrt{1-x^2} (x-x_0)} = -\pi(n+1) U_n(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1).
\end{aligned} \tag{4.6.23}$$

Последнее равенство справедливо в силу соответствующего спектрального соотношения для сингулярного интеграла на отрезке [10, 70]. Теорема 4.6.4 доказана.

Отметим, что соотношение (4.6.20) другим способом доказано также в [34].

Будем использовать соотношение (4.6.20) для сравнения численных результатов с точными значениями. Методика проведения вычислений следующая. Задаем индекс полинома Чебышева. Берем каноническое разбиение отрезка $[-1,1]$ на N частей (см. рис. 4.6.2). Обозначим точное значение интеграла $I(x_0)$, приближенное значение $S_N(x_0)$, а $\Theta(x_0) = |I(x_0) - S_N(x_0)|$ – погрешность вычисления. Для нас представляет интерес рассмотреть характер поведения максимума погрешности $\max_k \Theta(x_{0k})$ и интегральной погрешности $\sum_{k=1}^N \Theta(x_{0k})h$. Также интересно посмотреть динамику изменения погрешности вычисления от числа разбиения N .

На рис. 4.6.3, 4.6.4 представлены результаты численных расчетов для квадратных сумм при $n = 2$ в (4.6.20).

Как показали расчеты, поточечная погрешность вычисления интеграла равномерно стремится к нулю вне окрестностей концов отрезка и имеется интегральная сходимость погрешности по всем расчетным точкам.

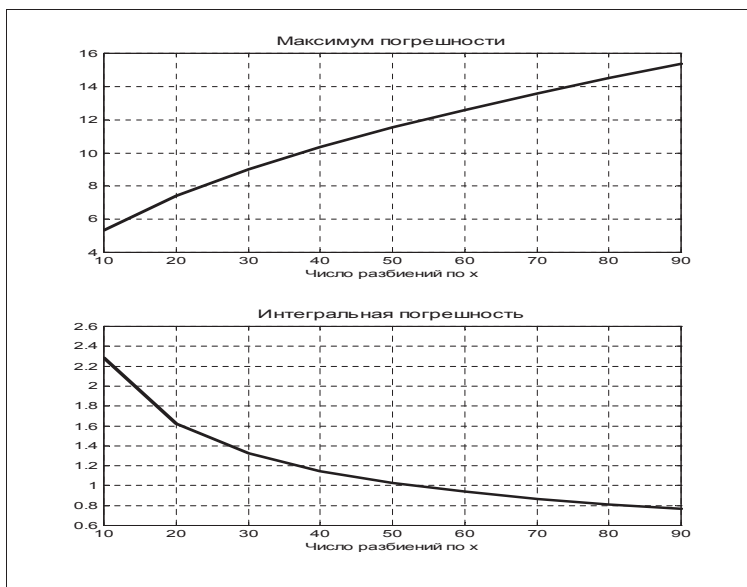


Рис. 4.6.3

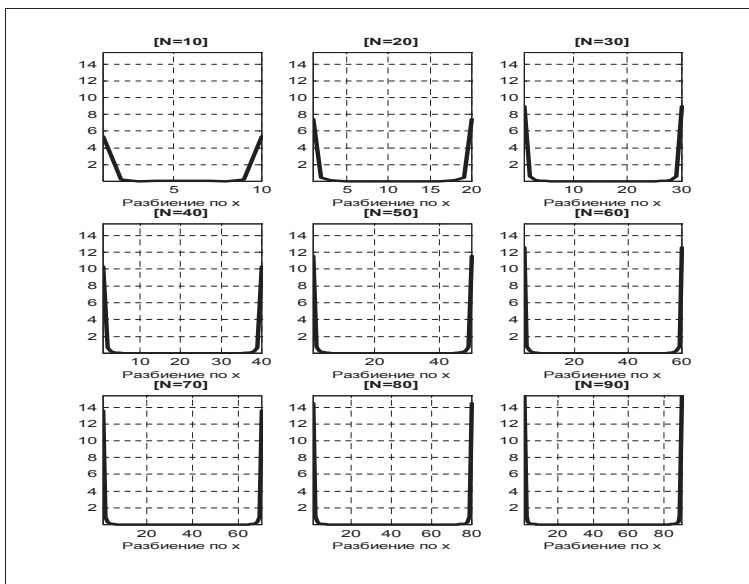


Рис. 4.6.4

4.7. Гиперсингулярный интеграл от периодических функций

Пусть L – окружность радиуса R с центром в начале координат (рис. 4.7.1). В этом случае $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $n_M = \cos \theta i + \sin \theta j$, $dl = R d\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$ и уравнение (4.5.8) получает вид

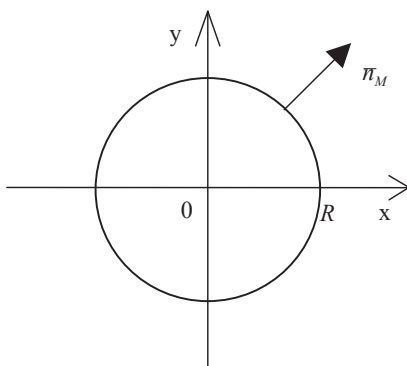


Рис. 4.7.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = f(\theta_0), \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (4.7.1)$$

где плотность $g(\theta) - 2\pi$ -периодическая функция.

Рассмотрим интеграл в левой части выражения (4.7.1)

$$I_r(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}}, \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (4.7.2)$$

Будем называть его гиперсингулярным интегралом типа Гильберта или, если надо подчеркнуть геометрическую сущность этого интеграла, гиперсингулярным интегралом на окружности.

Как и для гиперсингулярного интеграла на отрезке, рассмотрим вначале случай $g(\theta) \equiv 1$ на $[0, 2\pi]$. Тогда в соответствии с формулами (4.6.3) и (4.6.4) дадим следующее определение.

Определение 4.7.1. Интеграл $I_r(\theta_0)$ при $g(\theta) \equiv 1$ на $[0, 2\pi]$ будем понимать в следующем смысле:

$$\begin{aligned} I_r(\theta_0) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[0, 2\pi] \setminus O(\theta_0, \varepsilon)} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} - 4 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - 2\pi}{2} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - 4 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right] = \\ &= 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_0}{2} - \pi \right) - 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Теперь для интеграла (4.7.2) по определению будем полагать

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[0, 2\pi] \setminus O(\theta_0, \varepsilon)} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} - 4g(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right]. \quad (4.7.4)$$

Аналогично теоремам 4.6.1 и 4.6.2 доказываются следующие теоремы.

Теорема 4.7.1. Интеграл (4.7.4) существует для любой периодической функции $g(\theta)$, принадлежащей классу $H_1(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$.

Теорема 4.7.2. Пусть функция $g(\theta) - 2\pi$ -периодическая и принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$. Тогда для интеграла (4.7.2) справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = -2 \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\theta. \quad (4.7.5)$$

Обратимся теперь к рассмотрению квадратурных формул для интеграла (4.7.2). По аналогии с квадратурной формулой для гиперсингулярного интеграла на отрезке поступим следующим образом. Пусть множества $E = \{\theta_k, k = 1, \dots, n+1\}$ и $E_0 = \{\theta_{0k}, k = 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ (рис. 4.7.2).

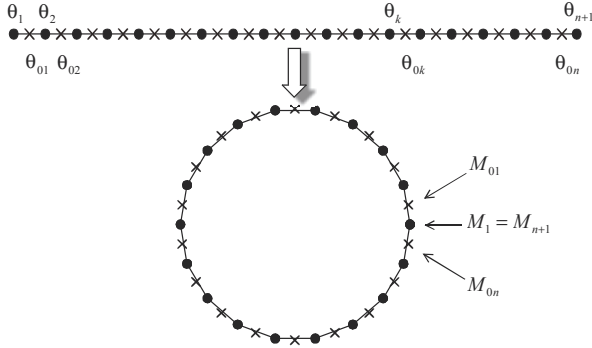


Рис. 4.7.2

Тогда заменим интеграл (4.7.2) в точке $\theta_{0j} \in E_0$ следующей суммой:

$$\begin{aligned}
 S_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) &= \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_{0j} - \theta}{2}} = \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right], \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.7.6)
 \end{aligned}$$

Теорема 4.7.3. Пусть функция $g(\theta)$ – 2π -периодическая и принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$. Пусть множества точек E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) &= |I_{\Gamma}(\theta_{0j}) - S_{\Gamma,n}(\theta_{0j})| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_{0j} - \theta}{2}} - \right. \\
 &\left. - 2 \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right] \right| \leq C \frac{\ln n}{n^\alpha}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.7.7)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Интеграл $I_{\Gamma}(\theta_{0j})$ представим по формуле (4.7.5), а сумму $S_{\Gamma,n}(\theta_{0j})$ запишем в виде

$$S_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{g(\theta_{0k}) - g(\theta_{0k-1})}{h} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.7.8)$$

где $g(\theta_{00}) = g(\theta_{0n})$.

Тогда для $I_{\Gamma,n}(\theta_{0j})$ можно записать

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) &\leq 2 \left| \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta}{2} d\theta - \sum_{k=1}^n g'(\theta_k) \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h \right| + \\
 &+ C_1 h^\alpha \sum_{k=1}^n \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right| h, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.7.9)
 \end{aligned}$$

Теперь из результатов [70] для квадратурных формул типа метода дискретных вихрей для интеграла с ядром Гильберта следует оценка (4.7.7). Теорема 4.7.3 доказана.

Приведем некоторые примеры численных расчетов по вычислению гиперсингулярного интеграла (4.7.2). Для этого воспользуемся следующим спектральным соотношением [70]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) d\theta = -4\pi i (a_n \cos n\theta_0 + b_n \sin n\theta_0), n=0,1,2,\dots, \theta_0 \in [0,2\pi], \quad (4.7.10)$$

где a_n и b_n – произвольные действительные числа.

Соотношение (4.7.10) получается из формул (2.6.2), (2.6.3) и (4.7.5).

Методика проведения расчетов полностью совпадает с методикой проведения расчетов на отрезке, кроме задания отрезка разбиения и параметров спектрального соотношения.

На рис. 4.7.3, 4.7.4 приведены результаты численных расчетов для квадратурных сумм при $n=2$, $a_n=1$, $b_n=1$ в формуле (4.7.10).

Как показали расчеты, поточечная погрешность вычисления интеграла равномерно стремится к нулю по всем расчетным точкам.

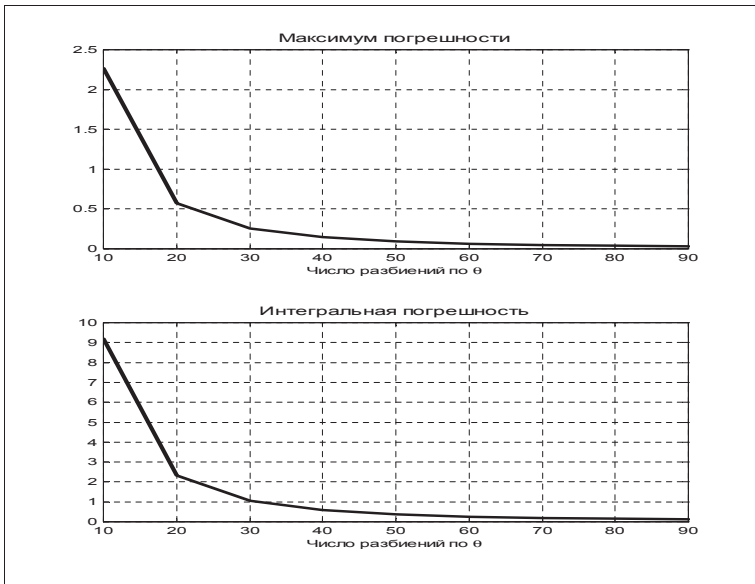


Рис. 4.7.3

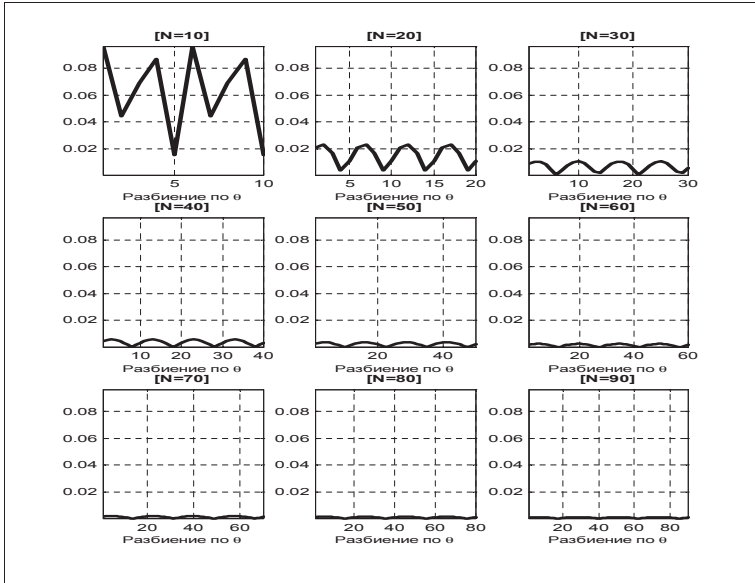


Рис. 4.7.4

4.8. Гиперсингулярный интеграл на отрезке. Интерполяционный метод

Используя спектральное соотношение (4.6.20) для чебышевских полиномов второго рода для гиперсингулярного интеграла на отрезке с весовой функцией $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$, построим интерполяционную квадратурную формулу для вычисления гиперсингулярного интеграла (4.6.5) на отрезке, в котором функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \psi(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (4.8.1)$$

Для этого заменим функцию $\psi(x)$ в (4.8.1) интерполяционным многочленом Лагранжа $\psi_n(x)$ по корням $U_n(x)$, т.е. возьмем

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \psi(x_k) \frac{U_n(x)}{(x-x_k)U_n'(x_k)}, \quad (4.8.2)$$

$$x_k = \cos \frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.8.3)$$

где x_k – корни полинома $U_n(x)$.

Тогда получаем

$$A(U_n(x), x_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi(x_k)}{U_n'(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_k)(x_0-x)^2}. \quad (4.8.4)$$

Используя разложение правильной рациональной дроби на элементарные [117] и формулу (2.6.34), в которой заменим $n-1$ на n , т.е. формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{x_0 - x} = \pi T_{n+1}(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad (4.8.5)$$

получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_k)(x_0-x)^2} = \frac{T_{n+1}(x_0) - T_{n+1}(x_k)}{(x_0-x_k)^2} - \frac{(n+1)U_n(x_0)}{x_0-x_k}, \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (4.8.6)$$

Таким образом, используя формулы (4.8.4) и (4.8.6), получаем представление $A(\psi_n(x), x_0)$ в виде комбинации известных функций, являющихся полиномами степени $n-1$. Достаточно удобное представление выражение $A(\psi_n(x), x_0)$ принимает в точках $x_{0j} = \cos \frac{\pi(j-0,5)}{n+1}$, являющихся корнями полинома $T_{n+1}(x_0)$:

$$A(U_n(x), x_{0j}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(x_k) a_{k,0j}}{(x_{0j} - x_k)^2}, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad (4.8.7)$$

$$a_{k,0j} = (n+1)(x_{0j} - x_k)U_n(x_{0j}) - T_{n+1}(x_k).$$

Для исследования интегральных уравнений с логарифмической особенностью на отрезке могут потребоваться первообразные полиномов Чебышева первого и второго родов, которые обозначим как $F_n^T(x)$ и $F_n^U(x)$, соответственно. Тогда из формулы

$$T_n'(x) = (\cos(n \arccos x))' = \sin(n \arccos x) n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = nU_{n-1}(x) \quad (4.8.8)$$

получаем, что

$$F_n^U(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}. \quad (4.8.9)$$

Из формулы для разности синусов следует, что

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) - U_{n-2}(x)). \quad (4.8.10)$$

Теперь из формул (4.8.9) и (4.8.10) следует равенство

$$F_n^T(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right). \quad (4.8.11)$$

4.9. Гиперсингулярный интеграл от периодических функций. Интерполяционный метод

Рассмотрим формулу (4.7.4), дающую определение гиперсингулярного интеграла от периодических функций, более подробно:

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\theta_0 - \varepsilon} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} + \int_{\theta_0 + \varepsilon}^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} - 4g(\theta_0) \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right]. \quad (4.9.1)$$

Теперь используя формулу дифференцирования определенного интеграла по параметру [118], получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-2 \frac{d}{d\theta_0} \int_0^{\theta_0 - \varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} g(\theta) d\theta - 2 \frac{d}{d\theta_0} \int_{\theta_0 + \varepsilon}^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} g(\theta) d\theta + \right. \\
&\quad \left. + 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} g(\theta_0 - \varepsilon) + 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} g(\theta_0 + \varepsilon) - 4 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} g(\theta_0) \right] = \\
&= -2 \frac{d}{d\theta_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\theta_0 - \varepsilon} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} g(\theta) d\theta + \int_{\theta_0 + \varepsilon}^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} g(\theta) d\theta \right) + \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} [g(\theta_0 - \varepsilon) + g(\theta_0 + \varepsilon) - 2g(\theta_0)] \right).
\end{aligned}$$

Из определения сингулярного интеграла с учетом (4.6.11), если $g(\theta) \in H_1(\alpha)$, находим

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = -2 \frac{d}{d\theta_0} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} g(\theta) d\theta. \quad (4.9.2)$$

Заменим теперь функцию $g(\theta)$ интерполяционным тригонометрическим полиномом $g_n(\theta)$, получаемым по формуле (2.6.11). Теперь из формул (2.6.14) и (4.9.2) имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{g_n(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} &= \sum_{k=0}^{2n} g(\theta_k) \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k - \theta_0}{2}} - 2 \frac{\frac{2n+1}{2} \sin \frac{2n+1}{2} (\theta_k - \theta_0) \sin \frac{\theta_k - \theta_0}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_k - \theta_0}{2}} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{2n+1}{2} (\theta_k - \theta_0) \cos \frac{\theta_k - \theta_0}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_k - \theta_0}{2}} \right] \frac{2\pi}{2n+1}, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi],
\end{aligned} \quad (4.9.3)$$

где $\theta_k = \frac{2k}{2n+1}\pi$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, являются корнями функции $\sin \frac{2n+1}{2} \theta$.

Более удобно формула (4.9.3) выгидит в точках $\theta_{0j} = \theta_j + \frac{\pi}{2n+1}$, являющихся

корнями функции $\cos \frac{2n+1}{2} \theta_0$. Тогда

$$\cos \frac{2n+1}{2} (\theta_k - \theta_{0j}) = 0, \quad k, j = 0, 1, \dots, 2\pi,$$

$$\sin \frac{2n+1}{2} (\theta_k - \theta_{0j}) = -1$$

и формула (4.9.3) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \frac{g_n(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_{0j} - \theta}{2}} = \sum_{k=0}^{2n} g(\theta_k) \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_k - \theta_{0j}}{2}} + \frac{(2n+1)}{\sin \frac{\theta_k - \theta_{0j}}{2}} \right] \frac{2\pi}{2n+1}. \quad (4.9.4)$$

Формула (4.9.4) является аналогом формулы (2.6.23), а оценки сходимости полученных квадратурных формул к точному значению интеграла будут иметь вид (2.6.20) и (2.6.24) с заменой r на $r-1$.

Глава 5. Квадратурные формулы для двумерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов

5.1. Квадратурные формулы для двумерного сингулярного интеграла

Рассмотрим двумерный интеграл вида

$$I(M_0) = \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) d\sigma_M, \quad (5.1.1)$$

где D – область в плоскости OXY ; φ – полярный угол точки M относительно точки M_0 ; $f(M_0, \varphi)$ – функция, ограниченная на $D \times D$, т.е. как функция точек M и M_0 из области D , непрерывная в $D \setminus M_0$ и являющаяся достаточно гладкой функцией в полярных координатах с центром в точке M_0 на плоскости OXY ; функция $g(M) \in H(\alpha)$ – плотность интеграла $I(M_0)$, и $d\sigma_M = dxdy$ в данном случае.

Пусть D является прямоугольником и интеграл $I(M_0)$ понимается в некотором смысле, обобщающем понятие несобственного двумерного интеграла. Зададим на D каноническое разбиение на прямоугольники $D_{i,k}$, $i=1, \dots, n_1$, $k=1, \dots, n_2$, с центрами в точках $M_{0i,0k}$ и со сторонами h_1 и h_2 – такими, что $0 < q_1 \leq \frac{h_1}{h_2}$, $\frac{h_2}{h_1} \leq q_2 < +\infty$, где q_1 и q_2 – некоторые данные числа и $h = \min(h_1, h_2)$.

Возьмем теперь для интеграла $I(M_0)$ квадратурную сумму

$$S_h(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} g(M_{0i,0k}) \int_{D_{i,k}} \frac{f(M_{0j,0m}, \varphi_{0j,0m})}{r_{MM_{0j,0m}}^2} d\sigma_M, \quad j=1, \dots, n_1, \quad m=1, \dots, n_2, \quad (5.1.2)$$

где $\varphi_{0j,0m}$ – полярный угол точки M интегрирования относительно точки $M_{0j,0m}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1.1. Пусть функция $g(M)$ принадлежит $H(\alpha)$ на D , $0 < \alpha \leq 1$.

Тогда справедливо неравенство

$$\left| I(M_{0j,0m}) - S_h(M_{0j,0m}) \right| \leq Ch^\alpha |\ln h| \quad (5.1.3)$$

для всех точек $M_{0j,0m}$.

Доказательство. Используя формулы (5.1.1) и (5.1.2), можно написать

$$\begin{aligned} & \left| I(M_{0j,0m}) - S_h(M_{0j,0m}) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{D_{i,k}} \frac{f(M_{0j,0m}, \varphi_{0j,0m}) [g(M) - g(M_{0i,0k})]}{r_{MM_{0j,0m}}^2} dxdy \right| \leq \\ & \leq BA \int_{D_{j,m}} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j,0m}}^{2-\alpha}} + BAA_1^\alpha \frac{h^\alpha}{(\sqrt{2})^\alpha} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{D_{i,k}} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j,0m}}^2} = \\ & = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

где $B = \sup_{M_0, M \in D} |f(M_0, \varphi)|$; A – константа в условии Гельдера для функции $g(M)$; $A_1 > 0$ –

такое число, что $h_1, h_2 \leq A_1 h$ при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$.

Для оценки слагаемых I_1 и I_2 в формуле (5.1.4) введем на плоскости OXY полярные координаты с центром в точке $M_{0j,0m}$. Получим

$$I_1 \leq C_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \frac{dr}{r^{1-\alpha}} = C_1 2\pi h^\alpha, \quad (5.1.5)$$

где $C_1 = BA$.

Далее

$$I_2 \leq C_2 h^\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h/2}^R \frac{dr}{r} = C_2 2\pi h^\alpha \left(\ln R - \ln \frac{h}{2} \right) \leq C_3 h^\alpha |\ln h|, \quad (5.1.6)$$

где $C_2 = C_1 \left(\frac{A_1}{\sqrt{2}} \right)^\alpha$; $C_3 = 4\pi C_2$; R – радиус круга с центром в точке $M_{0j,0m}$, содержащем область D . Теорема 5.1.1 доказана.

Теперь выясним, в каком едином смысле можно понимать интегралы вида (5.1.1). Для этого рассмотрим вначале конкретные примеры.

Рассмотрим двумерный интеграл

$$I(M_0) = \int_D \frac{1}{r_{MM_0}^2} \frac{x-x_0}{r_{MM_0}} dx dy, \quad (5.1.7)$$

где D – некоторая ограниченная односвязная область; $M_0 \in D$.

Видно, что подинтегральная функция в интеграле (5.1.7) неограниченна в точке M_0 и в обычном смысле он не существует. По аналогии с одномерным сингулярным интегралом было предложено поступить следующим образом. Вырезать ε – окрестность $O(M_0, \varepsilon)$ точки M_0 и взять интеграл (5.1.7) по оставшемуся множеству $D \setminus O(M_0, \varepsilon)$. Затем устремить ε к нулю и, если предел существует, обозначить его $I(M_0)$, т. е. определить этот интеграл по формуле

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{1}{r_{MM_0}^2} \frac{x-x_0}{r_{MM_0}} dx dy, \quad (5.1.8)$$

где $M_0 \in D$.

Переходя к полярным координатам с центром в точке M_0 на плоскости OXY , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{1}{r_{MM_0}^2} \frac{x-x_0}{r_{MM_0}} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^{\rho(M_0, \varphi)} \frac{1}{r^2} \cos \varphi r dr = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi (\ln \rho(M_0, \varphi) - \ln \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (5.1.10)$$

а функция $r = \rho(M_0, \varphi)$ описывает границу области D в выбранной системе координат.

Таким образом, интеграл $I(M_0)$, понимаемый в смысле равенства (5.1.8), имеет значение

$$I(M_0) = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi. \quad (5.1.11)$$

Аналогично можно определить интеграл вида

$$I(M_0) = \int_D \frac{1}{r_{MM_0}^2} f(M_0, \varphi) dx dy, \quad (5.1.12)$$

где φ – полярный угол точки M по отношению к точке M_0 , а функция $f(M_0, \varphi)$ такая, как указано в (5.1.1). Как известно [91], интеграл (5.1.12) в смысле (5.1.8) существует тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi = 0, \quad (5.1.13)$$

где $M_0 \in D$. Если же равенство (5.1.13) не выполняется для некоторой точки $M_0 \in D$, то говорят [91], что интеграл (5.1.12) не существует.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I^*(M_0) = \int_D \frac{\sin \varphi}{r_{MM_0}^2} dx dy. \quad (5.1.14)$$

Для характеристики этого интеграла выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4. \quad (5.1.15)$$

Следовательно, интеграл $I^*(M_0)$ не существует в обычном смысле [91] сингулярного двумерного интеграла.

С другой стороны, как было показано в теореме 5.1.1, квадратурные формулы (исследованные там) сходятся к точному значению интеграла $I(M_0)$, не обязательно понимаемому в смысле выполнения равенства (5.1.13). Поэтому имеет смысл ввести следующее определение.

Определение 5.1.1. Пусть характеристика $f(M_0, \varphi)$ такая, как это указано в (5.1.1). Будем полагать

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} dx dy + \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right], \quad (5.1.16)$$

если предел существует, и по-прежнему будем обозначать его в виде (5.1.12).

Сразу отметим, что если равенство (5.1.13) выполняется, то интеграл $I(M_0)$, понимаемый в смысле (5.1.16), является двумерным сингулярным интегралом в обычном смысле [91].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1.2. Если характеристика в интеграле (5.1.1) удовлетворяет сформулированным там условиям, то интеграл $I(M_0)$, понимаемый в смысле равенства (5.1.16), существует.

Доказательство. Перейдем в (5.1.16) к полярным координатам с центром в точке M_0 , получим

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \int_{\varepsilon}^{\rho(M_0, \varphi)} \frac{dr}{r} + \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi, \quad (5.1.17)$$

где $r = \rho(M_0, \varphi)$ – уравнение границы области D в выбранных полярных координатах. Теорема 5.1.2 доказана.

Вернувшись к рассмотренному выше примеру (5.1.14), видим, что теперь этот интеграл существует в смысле равенства (5.1.16).

Теперь рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$I(M_0) = \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) dx dy, \quad (5.1.18)$$

где функция $g(M)$ называется плотностью этого интеграла, функция $f(M_0, \varphi)$ – характеристикой.

Определение 5.1.2. Интеграл (5.1.18) будем называть сингулярным интегралом и понимать его в следующем смысле:

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) dx dy + g(M_0) \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right]. \quad (5.1.19)$$

Опять можно заметить, что если выполняется равенство (5.1.13), то интеграл (5.1.19) будет сингулярным интегралом в обычном смысле [91].

Теперь несложно доказать теорему.

Теорема 5.1.3. Пусть функция $g(M) \in H(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, на области D , а характеристика $f(M_0, \varphi)$ удовлетворяет условиям, указанным в (5.1.1). Тогда интеграл (5.1.19) существует для любой точки M_0 из области D .

Доказательство. Преобразуем формулу (5.1.19) следующим образом:

$$\begin{aligned} I(M_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} [g(M) - g(M_0)] dx dy \right) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(g(M_0) \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} dx dy + g(M_0) \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right) = \\ &= I_1(M_0) + I_2(M_0). \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

В формуле (5.1.20) для интеграла $I_2(M_0)$ с использованием (5.1.17) получаем

$$I_2(M_0) = g(M_0) \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi. \quad (5.1.21)$$

Интеграл $I_1(M_0)$ является абсолютно сходящимся, так как $g(M) \in H(\alpha)$ на D . Теорема 5.1.3 доказана.

Замечание 5.1.1. Теорема 5.1.1 справедлива для интеграла (5.1.1), понимаемого в смысле (5.1.19).

Замечание 5.1.2. Интеграл (5.1.1), понимаемый в смысле (5.1.19), обладает свойством линейности на множестве функций из $H(\alpha)$ на D , т.е. если $g(M)$ и $\eta(M)$ принадлежат $H(\alpha)$ на D , то

$$\begin{aligned} &\int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} [Ag(M) + B\eta(M)] dx dy = \\ &= A \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) dx dy + B \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} \eta(M) dx dy. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

В предыдущих главах для одномерных сингулярных интегралов были рассмотрены квадратурные формулы метода дискретных вихрей, которые получили большое значение в задачах аэродинамики [70]. Теперь для двумерных сингулярных интегралов тоже построим квадратурные формулы типа метода дискретных вихрей.

Рассмотрение таких квадратурных формул для интеграла (5.1.18) начнем со случая, когда D – прямоугольник $[a^1, b^1] \times [a^2, b^2] = I^2$. Пусть точки $x_0^k = a^k, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k, x_{n_k+1}^k = b^k$ и точки $x_{00}^k, x_{01}^k, \dots, x_{0n_k}^k$ образуют каноническое разбиение отрезка $[a^k, b^k]$, причем $h/h_k \leq R < +\infty$ при $h \rightarrow 0$, где $h = \max\{h_1, h_2\}$, $h_k = (b^k - a^k)/(n_k + 1)$, $k = 1, 2$.

Для интеграла (5.1.18) рассмотрим следующую квадратурную сумму:

$$S(x_{0k}^1, x_{0m}^2) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} g(x_i^1, x_j^2) h_1 h_2, \quad (5.1.23)$$

$$f_{ij}^{km} = f(x_{0k}^1, x_{0m}^2, \theta_{ij}^{km}), \quad \theta_{ij}^{km} = \frac{(x_i^1 - x_{0k}^1) \vec{i}_1 + (x_j^2 - x_{0m}^2) \vec{i}_2}{r_{ij}^{km}},$$

где

$$r_{ij}^{km} = \sqrt{(x_i^1 - x_{0k}^1)^2 + (x_j^2 - x_{0m}^2)^2},$$

и \vec{i}_1 и \vec{i}_2 – орты осей OX^1 и OX^2 , соответственно.

Определение 5.1.3. Характеристика $f(x_0, \theta)$ обладает свойством l , если она нечетна относительно оси OX_0^1 или OX_0^2 , где OX_0^k задается уравнением $x^k = x_0^k$, $k = 1, 2$, т.е. если точки (x_1^1, x_1^2) и (x_2^1, x_2^2) симметричны относительно одной из этих осей, то

$$f(x_0, \theta_1) = -f(x_0, \theta_2), \quad (5.1.24)$$

где $\theta_i = (x_0 - x_i)/|x_0 - x_i|$, $|x_0 - x_i| = \sqrt{(x_0^1 - x_i^1)^2 + (x_0^2 - x_i^2)^2}$, $i = 1, 2$, или $f(x_0, \theta)$ нечетна относительно точки $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1.4. Пусть в интеграле (5.1.18) характеристика $f(x_0, \theta)$ обладает свойством l и непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точек x_0 и θ , а функция $g(x)$ принадлежит $H(\alpha)$ на I^2 . Тогда справедливо неравенство

$$|I(x_{0k}^1, x_{0m}^2) - S(x_{0k}^1, x_{0m}^2)| \leq \Theta(x_{0k}^1, x_{0m}^2), \quad (5.1.25)$$

где величина $\Theta(x_{0k}^1, x_{0m}^2)$ удовлетворяет соотношению

$$\Theta(x_{0k}^1, x_{0m}^2) = O_F(h^\alpha |\ln h|) \quad (5.1.26)$$

для всех точек x_{0k}^1 , x_{0m}^2 , принадлежащих замкнутому множеству F , лежащему внутри прямоугольника I^2 на ненулевом расстоянии от его границы.

Доказательство. Рассмотрим модуль разности

$$P_{km} = |I(x_{0k}^1, x_{0m}^2) - S(x_{0k}^1, x_{0m}^2)| = \left| \iint_{I^2} \frac{f^{km}}{(r^{km})^2} g(x^1, x^2) dx^1 dx^2 - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} g(x_i^1, x_j^2) h_1 h_2 \right| \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \left| \iint_{I^2} \frac{f^{km}}{(r^{km})^2} (g - g_{km}) dx^1 dx^2 - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} (g_{ij} - g_{km}) h_1 h_2 \right| + \\ & + |g_{km}| \left| \iint_{I^2} \frac{f^{km}}{(r^{km})^2} dx^1 dx^2 - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} h_1 h_2 \right| = P_1 + P_2, \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

где

$$\begin{aligned} g &= g(x^1, x^2), \quad g_{km} = g(x_{0k}^1, x_{0m}^2), \quad g_{ij} = g(x_i^1, x_j^2), \\ r^{km} &= \sqrt{(x^1 - x_{0k}^1)^2 + (x^2 - x_{0m}^2)^2}, \quad f^{km} = f(x_{0k}^1, x_{0m}^2, \theta^{km}). \end{aligned}$$

Выражение для P_1 преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1 & \leq \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{|f_{ij}^{km}| |g - g_{ij}|}{(r_{ij}^{km})^2} dx^1 dx^2 + \\ & + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{|g - g_{km}| |f^{km}| \left| (r_{ij}^{km})^2 - (r^{km})^2 \right|}{(r^{km})^2 (r_{ij}^{km})^2} dx^1 dx^2 + \\ & + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{|g - g_{km}| |f^{km} - f_{ij}^{km}|}{(r_{ij}^{km})^2} dx^1 dx^2 = P_{11} + P_{12} + P_{13}, \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

где Π_{ij} – частичный прямоугольник из разбиения I^2 , имеющий своим нижним левым углом точку $M_{ij} = (x_i^1, x_j^2)$.

Произведем теперь оценку каждой из сумм $P_{1\lambda}$, $\lambda = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} P_{11} & \leq A\sqrt{2}h^\alpha \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{dx^1 dx^2}{(r_{ij}^{km})^2} = \\ & = A\sqrt{2}h^\alpha \left[8 \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n_1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m+1}}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{dx^1 dx^2}{(r_{ij}^{km})^2} \right] \leq \\ & \leq A\sqrt{2}h^\alpha \left[64 + 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h/\sqrt{2}}^{\Delta} \frac{dr}{r} \right] = \\ & = A\sqrt{2}h^\alpha \left[64 + 8\pi \left(\ln \Delta - \ln \frac{h}{\sqrt{2}} \right) \right] = O(h^\alpha |\ln h|), \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

где $|g - g_{ij}| \leq A\sqrt{2}h^\alpha$; Δ – диаметр области интегрирования.

Потом получим

$$\begin{aligned} P_{12} & \leq AB \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{(r^{km})^\alpha (r_{ij}^{km} - r^{km})(r_{ij}^{km} + r^{km})}{(r^{km})^2 (r_{ij}^{km})^2} dx^1 dx^2 \leq \\ & \leq ABC\sqrt{2}h \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{dx^1 dx^2}{(r^{km})^{2-\alpha} r_{ij}^{km}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\pi h A_1 \left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \int_0^{3h} \frac{dr}{r^{1-\alpha}} + 2 \int_{h/\sqrt{2}}^{\Delta} \frac{dr}{(r)^{2-\alpha}} \right) = \\
&= 2\pi h A_1 \left(\frac{2}{\alpha} \frac{3^\alpha h^\alpha}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \frac{4}{1-\alpha} \left(\frac{-1}{\Delta^{1-\alpha}} + \frac{2^{1-\alpha} h^\alpha}{h} \right) \right) = O(h^\alpha), \tag{5.1.30}
\end{aligned}$$

где $|r_{ij}^{km} - r^{km}| < Cr_{ij} = C\sqrt{(x^1 - x_i^1)^2 + (x^2 - x_j^2)^2} \leq C\sqrt{2}h$, $r^{km} / r_{ij}^{km} \leq (r_{ij}^{km} + h\sqrt{2}) / r_{ij}^{km} \leq 3$ при любых k, m, i, j .

Наконец, для P_{13} имеем

$$P_{13} \leq A_2 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\Pi_{ij}} \frac{h dx^1 dx^2}{(r_{ij}^{km})^{2-\alpha}} \leq O(h). \tag{5.1.31}$$

Для исследования поведения разности P_2 заметим, что расположение точек $M(x_i^1, x_j^2)$ по отношению к каждой из точек $M_{0km}(x_{0k}^1, x_{0m}^2)$ обладает следующим свойством: если считать точку M_{0km} началом координат и мысленно провести через эту точку оси, параллельные исходным осям координат, то для любой точки M_{ij} , лежащей в окрестности точки M_{0km} , существуют точки $M_{i'j'}$ в этой же окрестности, симметричные точке M_{ij} относительно точки M_{0km} , а также относительно каждой из осей. Так как функция $f(x_0, \theta)$ обладает свойством L , то она принимает в точках M_1 и M_2 , симметричных либо относительно осей OX_0^1 или OX_0^2 , либо относительно точки M_0 , значения, равные по абсолютной величине, но разные по знаку. Итак, в рассматриваемом случае получаем

$$P_2 \leq \left| U_{km} \left| \iint_{I^2 \setminus O(\delta, M_{0km})} \frac{f^{km}}{(r^{km})^2} dx^1 dx^2 - \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} h_1 h_2 \right| \right|, \tag{5.1.32}$$

где F_{km}^δ – множество всех частичных прямоугольников, таких, что они лежат в δ -окрестности $O(\delta, M_{0km})$ точки M_{0km} и их левые нижние концы образуют множество, симметричное относительно самой этой точки и осей OX_{0k}^1 или OX_{0m}^2 . Поэтому

$$\begin{aligned}
P_2 \leq L \left| \iint_{\Phi_{km}^\delta} \frac{f^{km}}{(r^{km})^2} dx^1 dx^2 - \sum_{\substack{i=0 \\ \Pi_{ij} \in I^2 \setminus O(\delta, M_{0km})}}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} h_1 h_2 + \right. \\
\left. + \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \iint_{\substack{\Pi_{ij} \in I^2 \setminus [O(\delta, M_{0km}) \cup \Phi_{km}^\delta]}} \left[\frac{f^{km}}{(r^{km})^2} - \frac{f_{ij}^{km}}{(r_{ij}^{km})^2} \right] dx^1 dx^2 \right|, \tag{5.1.33}
\end{aligned}$$

В силу свойств функции $f(x_0, \theta)$ получим

$$P_2 \leq LC_1 \left[\frac{1}{\delta} \pi \cdot 4\sqrt{2}h \frac{\delta}{(\delta - \sqrt{2}h)^2} \pi \cdot 4\sqrt{2}h + O(h) \right] = O(h), \tag{5.1.34}$$

так как, проводя над последней суммой в формуле (5.1.33) рассуждения, аналогичные рассуждениям при вычислении P_{12} и P_{13} , имеем, что эта сумма имеет порядок h . Из

полученных оценок для P_i , $i=1,2,3$, и для P_2 вытекает справедливость неравенства (5.1.25).

Отметим, что неравенство (5.1.25) остается в силе, если вместо прямоугольника I^2 брать любую замкнутую ограниченную (можно и неограниченную, но тогда надо оговаривать условие поведения функции g на бесконечности) область D на плоскости с границей, имеющей двумерную жорданову меру, равную нулю. При этом квадратурную сумму надо составлять следующим образом. Возьмем прямоугольник Π , содержащий область D , и разобьем его параллельными осям координат прямыми с расстоянием h между соседними по i -й, $i=1,2$, координате на прямоугольники. Те прямоугольники, которые полностью вошли в область D , перенумеруем и обозначим Π_i , $i=1, \dots, n$. Через x_{0i} обозначим центр прямоугольника Π_i , а через x_i – левый нижний угол этого прямоугольника. По этим выбранным точкам и строится квадратура.

Оказывается, если характеристика $f(x_0, \theta)$ не обладает свойством l , то неравенство (5.1.25) может не выполняться при произвольном соотношении между h_1 и h_2 . Например, функция $f(x_0, \theta) = \cos 2\varphi$ (где φ – полярный угол точки x относительно точки x_0) справедливо только при $h_1 = h_2$. Действительно,

$$\cos 2(\varphi + \pi/2) = \cos(2\varphi + \pi) = -\cos 2\varphi.$$

С другой стороны, все точки M_{ij} , лежащие в круге с центром в точке M_{0km} , можно разбить на пары, в которых одна точка будет получаться из другой поворотом на $\pi/2$ вокруг точки M_{0km} .

Для функции $f(x_0, \theta) = \cos 4\varphi$, по-видимому, неравенство (5.1.25) не будет выполняться и при $h_1 = h_2 = h$.

Действительно

$$\int_K \frac{\cos 4\varphi}{r^2} dx^1 dx^2 = 0, \quad (5.1.35)$$

где K – круг радиуса R с центром в начале координат. Возьмем квадрат I^2 , описанный вокруг K , со сторонами, параллельными осям координат. Будем брать разбиение I^2 на квадратики со стороной h указанным выше способом так, что начало координат будет центром квадрата, его содержащего. Полагаем

$$V_h \approx \sum_{i=1}^n \frac{\cos 4\varphi}{r_i^2} h^2.$$

Расчеты показали, что при $h_1 = R/5$ и при $h_2 = R/10$ имеем

$$V_{h_1} = -8 + 0,552, \quad V_{h_2} = -8 + 0,486.$$

Замечание 5.1.3. За точки x_i необязательно брать левые нижние углы прямоугольника Π_i или какой-нибудь другой угол. Можно за x_i брать середину одной из сторон в прямоугольнике Π_i , но одноименной для всех. Важно, чтобы точки x_i обладали одним из свойств симметрии относительно каждой из точек x_{0j} , указанных в свойстве l для характеристик.

5.2. Квадратурные формулы для интеграла задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца

Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию $v_0(M) \in C^2(D^{(-)}) \cap C(\overline{D}^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в $D^{(-)}$, т.е. уравнению

$$\Delta v_0(M) = \frac{\partial^2 v_0(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0(M)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0(M)}{\partial z^2} = 0, \quad M \in D^{(-)}, \quad (5.2.1)$$

и граничному условию

$$v_0(M)|_{\sigma} = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma, \quad (5.2.2)$$

где σ – граница области $D^{(-)}$; f – заданная непрерывная на σ функция.

Внешняя задача Дирихле. Найти функцию $v_0(M) \in C^2(R^2 \setminus D^{(-)}) \cap C(R^2 \setminus \overline{D}^{(-)})$, обращающуюся в нуль на бесконечности, удовлетворяющую уравнению Лапласа (5.2.1) в $R^2 \setminus \overline{D}^{(-)}$ и граничному условию (5.2.2) на поверхности σ .

Как показано в [30, 113], обе эти задачи имеют единственное решение.

Будем искать решение задач Дирихле в виде потенциала простого слоя

$$v_0(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r_{MM_0}} \psi_0(M) d\sigma_M, \quad M_0 \notin \sigma, \quad (5.2.3)$$

который будет решением этих задач, если функция $\psi_0(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r_{MM_0}} \psi_0(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma. \quad (5.2.4)$$

Запишем теперь уравнение Лапласа (5.2.1) в сферических координатах (ρ, θ, φ) : $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \theta$, $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Получим [30, 113]

$$\Delta v_0(M) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.2.5)$$

Применив метод разделения переменных в сферических координатах [113], получим, что частными решениями для уравнения Лапласа в шаре D_R радиуса R будут функции

$$v_{0n}(\rho, \theta, \varphi) = \rho^n Y_n(\theta, \varphi), \quad \rho \leq R, \quad (5.2.6)$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \quad (5.2.7)$$

есть сферические функции порядка n ; A_{nm}, B_{nm} – произвольные числа, а

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} P_n^{(m)}(\mu), \quad n = 0, 1, \dots; \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (5.2.8)$$

присоединенные функции Лежандра,

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.2.9)$$

полиномы Лежандра степени n , а вне шара D_R частными решениями будут функции

$$v_{0n}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi), \quad \rho \geq R, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2.10)$$

Теперь решение внутренней задачи Дирихле на шаре, в которой функцию $f(M_0)$ представим рядом по сферическим функциям

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.2.11)$$

где

$$A_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \cos m \varphi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\|Y_n^m\|^2},$$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin m \varphi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\|Y_n^m\|^2},$$

$$\|Y_n^m\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_m (n+m)!}{2n+1 (n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2, & m=0, \\ 1, & m>1, \end{cases}$$

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n^m(\cos \theta) \cos m \varphi, & m=0, 1, \dots, n, \\ P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin |m| \varphi, & m=-1, -2, \dots, -n, \end{cases}$$

будет иметь вид

$$v_0(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.2.12)$$

а решение внешней задачи Дирихле для шара –

$$v_0(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi). \quad (5.2.13)$$

В формуле [30, 113] скачка нормальной производной для потенциала простого слоя в случае для сферы σ_R дифференцирование по нормали будет дифференцированием по ρ , т.е. эта формула в данном случае примет вид

$$\left. \frac{\partial v_0^+(\rho, \theta, \varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_0^-(\rho, \theta, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = -\psi_0(\theta, \varphi), \quad (5.2.14)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Следовательно, единственным решением уравнения (5.2.4) является функция

$$\psi_0(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{R} Y_n(\theta, \varphi). \quad (5.2.15)$$

Полагая в (5.2.4) $f(\theta_0, \varphi_0) = Y_n(\theta_0, \varphi_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, получим $\psi_0(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{R} Y_n(\theta, \varphi)$. Таким образом, возвращаясь к (5.2.4), получаем соотношение [110]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_R} \frac{Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_{RM}}{r_{MM_0}} = \frac{R}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2.16)$$

Замечание 5.2.1. Из формулы (5.2.14) для скачка нормальной производной потенциала простого слоя получаем, что если замкнутая поверхность σ такая, что для заданной на ней функции $f(M)$ внешняя и внутренняя задачи Дирихле имеют единственное решение, то и уравнение (5.2.4) имеет единственное решение.

Замечание 5.2.2. Если σ -гладкая разомкнутая поверхность и на ней задана функция $f(M_0)$, то можно поставить задачу о нахождении гармонической вне σ функции $v_0(M)$, удовлетворяющей на поверхности σ условию (5.2.2). Если искать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя на поверхности σ , то, выполняя граничные условия (5.2.2), приходим опять к уравнению (5.2.4).

Замечание 5.2.3. Формула (5.2.16) может служить для приближенного вычисления интеграла в (5.2.4) на сфере.

Обратимся теперь к уравнению Гельмгольца

$$\Delta v(M) + k^2 v(M) = 0. \quad (5.2.17)$$

Внутренняя задача Дирихле для этого уравнения: найти функцию $v(M) \in C^2(\overline{D^{(-)}}) \cap C(\overline{D^{(-)}})$, удовлетворяющую уравнению (5.2.17) для любой точки $M \in D^{(-)}$ и удовлетворяющую граничному условию (5.2.2) на $\sigma = \overline{D^{(-)}} \setminus D^{(-)}$.

Внешняя задача Дирихле: найти функцию $v(M) \in C^2(R^3 \setminus \overline{D^{(-)}}) \cap C(R^3 \setminus D^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению (5.2.17) для любой точки $M \notin \overline{D^{(-)}}$, условию на бесконечности (условию излучения)

$$\left(\frac{\bar{r}_M}{r_M}, \text{grad } v(M) \right) - ikv(M) = O\left(\frac{1}{r_M} \right), \quad r_M \rightarrow \infty, \quad (5.2.18)$$

где

$$r_M = |\bar{r}_M| = |\bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

или

$$\left(\frac{\bar{r}_M}{r_M}, \text{grad } v(M) \right) + ikv(M) = O\left(\frac{1}{r_M} \right), \quad r_M \rightarrow \infty \quad (5.2.19)$$

и граничному условию (5.2.2) на $\sigma = \overline{D^{(-)}} \setminus D^{(-)}$.

Оказывается, что фундаментальное решение $U(M, M_0) = e^{ikr_{MM_0}} / (4\pi r_{MM_0})$ уравнения Гельмгольца как функция точки M_0 удовлетворяет на бесконечности условию (5.2.18), а если в показателе экспоненты взять минус, то полученная функция по координатам той же точки M_0 будет удовлетворять условию (5.2.19).

В [65] показано, что внутренняя задача Дирихле при $\text{Im } k > 0$, а внешняя задача Дирихле для любого k имеют единственное решение.

Будем искать решение задач Дирихле в виде потенциала простого слоя

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \psi(M) d\sigma_M. \quad (5.2.20)$$

Функция $v(M_0)$ будет решением этих задач (на бесконечности она удовлетворяет условию (5.2.19)), если функция $\psi(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \psi(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma, \quad (5.2.21)$$

которое получается в силу непрерывности потенциала простого слоя во всем пространстве R^3 .

Запишем теперь уравнение Гельмгольца (5.2.17) в сферических координатах. Получим

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 v = 0. \quad (5.2.22)$$

Применив метод разделения переменных в сферических координатах [113], получим, что частными решениями для уравнения Гельмгольца в шаре D_R радиуса R будут функции

$$v_n(\rho, \theta, \varphi) = \eta_n(k\rho) Y_n(\theta, \varphi), \quad \rho \leq R, \quad (5.2.23)$$

где $Y_n(\theta, \varphi)$ – сферическая функция порядка n (см. (5.2.7)), а функция $\eta_n(k\rho)$ – определяется равенством

$$\eta_n(k\rho) = \frac{1}{\sqrt{k\rho}} J_{n+1/2}(k\rho), \quad (5.2.24)$$

где $J_{n+1/2}(k\rho)$ – функция Бесселя, а вне шара D_R решениями, удовлетворяющими условию (5.2.19) на бесконечности, будут функции

$$v_n(\rho, \theta, \varphi) = \xi_n^{(2)}(k\rho) Y_n(\theta, \varphi), \quad \rho \geq R, \quad (5.2.25)$$

где

$$\xi_n^{(2)}(k\rho) = \frac{1}{\sqrt{k\rho}} H_{n+1/2}^{(2)}(k\rho), \quad (5.2.26)$$

и $H_{n+1/2}^{(2)}(k\rho)$ – функция Ханкеля второго рода.

Теперь решение внутренней задачи Дирихле на шаре D_R , в которой функцию $f(M_0)$ представим рядом (5.2.11) по сферическим функциям, будет иметь вид

$$v(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n(k\rho)}{\eta_n(kR)} Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.2.27)$$

а решение внешней задачи Дирихле для шара D_R , которое удовлетворяет условию (5.2.19) на бесконечности, будет иметь вид

$$v(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_n^{(2)}(k\rho)}{\xi_n^{(2)}(kR)} Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.2.28)$$

где сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$ имеют коэффициенты A_{nm} , B_{nm} , определенные в формуле (5.2.11).

Используя опять формулу для скачка нормальной производной потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца на сфере σ_R в виде (5.2.14), получим, что единственным решением уравнения (5.2.21) на сфере σ_R будет функция

$$\psi(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.2.29)$$

$$B_n = k \left[\frac{\eta_n'(kR)}{\eta_n(kR)} - \frac{\xi_n^{(2)'}(kR)}{\xi_n^{(2)}(kR)} \right].$$

Полагая в (5.2.21) $f(\theta, \varphi) = Y_n(\theta_0, \varphi_0)$, $n = 0, 1, \dots$, получим $\psi(\theta, \varphi) = B_n Y_n(\theta, \varphi)$. Таким образом, возвращаясь к (5.2.21), получаем соотношение

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_{RM} = B_n^{-1} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.2.30)$$

Можно показать, что при $k \rightarrow 0$ получаем $B_n \rightarrow \frac{2n+1}{R}$.

Замечание 5.2.4. Для задач Дирихле для уравнения Гельмгольца справедливы замечания, аналогичные замечаниям 5.2.1 и 5.2.2 для задач Дирихле для уравнения Лапласа.

Замечание 5.2.5. Формула (5.2.30) может служить для приближенного вычисления интеграла в (5.2.20) на сфере. Действительно, в этом случае достаточно функцию $\psi(M)$ на сфере разложить в ряд по сферическим функциям. Взять конечную сумму и воспользоваться формулами (5.2.30). Задача вычисления сведется к вычислению коэффициентов разложения, которые выражаются обычными интегралами аналогичными интегралам в (5.2.11).

Замечание 5.2.6. В общем случае интегралы в (5.2.4) и (5.2.20) можно вычислять с помощью квадратурных формул типа прямоугольников, аналогичных формулам (4.1.39).

5.3. Квадратурные формулы для интеграла задачи Неймана для уравнения Лапласа и Гельмгольца

Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi_0(M) \in C^2(D^{(-)}) \cap C(D^{(-)})$, имеющую на границе σ области $D^{(-)}$ нормальную производную (в смысле равномерной сходимости), т.е. $\Phi_0(M) \in R(D^{(-)})$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа (5.2.1) в $D^{(-)}$ и граничному условию

$$\left. \frac{\partial \Phi_0(M_0)}{\partial \bar{n}_{M_0}} \right|_{\sigma} = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma, \quad (5.3.1)$$

где f – заданная непрерывная функция.

Внешняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi_0(M) \in R(R^3 \setminus D^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в $R^3 \setminus D^{(-)}$, обращаящуюся в нуль на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию (5.3.1) на поверхности σ .

Будем предполагать еще, что

$$\int_{\sigma} f(M) d\sigma_M = 0. \quad (5.3.2)$$

В [30, 113] показано, что при условии (5.3.2) внешняя задача имеет единственное решение, а внутренняя – решение с точностью до константы.

Решение задач Неймана будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$\begin{aligned} \Phi_0(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g_0(M) d\sigma_M = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^3} g_0(M) d\sigma_M, \quad M_0 \notin \sigma. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

который будет решением этих задач, если функция $g_0(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g_0(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma. \quad (5.3.4)$$

Как и для уравнения (4.3.5), для уравнения (5.3.4) решение существует с точностью до константы.

Учитывая непрерывность нормальной производной потенциала двойного слоя [30, 113], уравнение (5.3.4) записываем в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g_0(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma \quad (5.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) = \\ & = \frac{(\bar{n}_{M_0}, \bar{n}_M) r_{MM_0}^2 - 3(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0})(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^5} = K_N(M, M_0), \quad M, M_0 \in \sigma. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Для выделения единственного решения уравнения (5.3.5) (в предположении, что поверхность σ является замкнутой) надо задать значение $g_0(M)$ в некоторой точке или задать значение интеграла от $g_0(M)$ по поверхности σ .

Замечание 5.3.1. Уравнение (5.3.5) можно написать для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности σ с сохранением тех же условий единственности решения, а справа в них надо писать $M_0 \in \sigma$, за исключением точек нарушения гладкости.

$$K_N(M, M_0) =$$

Замечание 5.3.2. Пусть σ — гладкая разомкнутая поверхность. Тогда можно сформулировать следующую краевую задачу Неймана. Найти функцию $\Phi_0(M)$, гармоническую вне σ , убывающую на бесконечности, имеющую равномерно непрерывные предельные значения $\Phi_0^+(M_0)$ и $\Phi_0^-(M_0)$ в точках поверхности σ и удовлетворяющую граничному условию (5.3.1) на σ . Имеется в виду, что в точках M_0 поверхности σ выбран орт \bar{n}_{M_0} нормали, который непрерывно меняется при движении точки M_0 по поверхности.

Если искать решение сформулированной задачи в виде потенциала двойного слоя, то опять приходим к уравнению (5.3.4) или уравнению (5.3.5). Только теперь уравнения (5.3.4), (5.3.5) имеют единственное решение, обращающееся в нуль на границе поверхности σ .

Рассмотрим теперь уравнения (5.3.4), (5.3.5) на сфере σ_R радиуса R . Если функция $f(\theta_0, \varphi_0)$ представлена рядом (5.2.11) по сферическим функциям, то из метода разделения переменных в сферических координатах получим, что решением с точностью до константы внутренней задачи Неймана в шаре D_R будет функция

$$\Phi_0(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\rho^n}{R^{n-1}} Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.3.7)$$

а решением внешней задачи Неймана для шара D_R будет функция

$$\Phi_0(\rho, \theta, \varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{R^{n+2}}{\rho^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi). \quad (5.3.8)$$

Заметим, что в формуле (5.3.8) суммирование идет от единицы, так как для функции $f(\theta_0, \varphi_0)$ выполняется соотношение (5.3.2).

В силу формулы (4.3.6) для скачка потенциала двойного слоя имеем, что решением интегральных уравнений (5.3.4), (5.3.5) с точностью до константы является функция

$$\bar{g}_0(\theta, \varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)R}{n(n+1)} Y_n(\theta, \varphi). \quad (5.3.9)$$

Полагая в (5.3.4), (5.3.5) $f(\theta_0, \varphi_0) = Y_n(\theta_0, \varphi_0)$, $n=1, 2, \dots$, получаем

$g_0(\theta, \varphi) = -\frac{2n+1}{n(n+1)} R Y_n(\theta, \varphi)$, и поэтому приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_{RM} = \\ & = -\frac{n(n+1)}{R(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Обратимся теперь к уравнению Гельмгольца.

Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi(M) \in R(D^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца (5.2.17) и граничному условию (5.3.1).

Внешняя задача Неймана. Найти функцию $\Phi(M) \in R(R^3 \setminus D^{(-)})$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^3 \setminus D^{(-)}$, условию на бесконечности (5.2.18) или (5.2.19) и граничному условию (5.3.1).

Будем предполагать, что число k не является собственным значением однородной внутренней задачи Неймана. В этом случае обе задачи Неймана имеют единственное решение.

Решение задач Неймана будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$\Phi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M, \quad M_0 \notin \sigma. \quad (5.3.11)$$

Функция $\Phi(M_0)$ будет решением этих задач (на бесконечности она удовлетворяет условию излучения (5.2.19)), если функция $g(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma. \quad (5.3.12)$$

Для рассматриваемых k уравнение (5.3.12) имеет единственное решение для любой функции $f(M_0)$, непрерывной на σ [65]

Как и уравнение (5.3.4), уравнение (5.3.12) можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma, \quad (5.3.13)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) = e^{-ikr_{MM_0}} \left[\left(\frac{k^2}{r_{MM_0}^3} - \frac{3(1+ikr_{MM_0})}{r_{MM_0}^5} \right) (\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) (\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0}) + \right. \\ \left. + \frac{1+ikr_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) \right], \quad M, M_0 \in \sigma. \quad (5.3.14)$$

Для уравнения (5.3.13) справедливы замечания, аналогичные замечаниям 5.3.1 и 5.3.2.

Рассмотрим опять уравнения (5.3.12), (5.3.13) на сфере σ_R , когда функция $f(\theta_0, \varphi_0)$ представлена рядом (5.2.11) по сферическим функциям. Тогда решением внутренней задачи Неймана в шаре D_R будет функция

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n(k\rho)}{k\eta'_n(kR)} Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.3.15)$$

где функция $\eta_n(k\rho)$ определена в (5.2.24), а решением внешней задачи Неймана для шара, которое удовлетворяет условию (5.2.19) на бесконечности, будет функция

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_n^{(2)}(k\rho)}{k\xi_n^{(2)}(kR)} Y_n(\theta, \varphi), \quad (5.3.16)$$

где функция $\xi_n^{(2)}(k\rho)$ определена в (5.2.26).

Теперь в силу формулы (4.3.6) для скачка потенциала двойного слоя имеем, что единственным решением интегральных уравнений (5.3.12), (5.3.13) будет функция

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Y_n(\theta, \varphi), \quad C_n = \frac{1}{k} \left[\frac{\xi_n^{(2)}(kR)}{\xi_n^{(2)}(kR)} - \frac{\eta_n(kR)}{\eta_n(kR)} \right]. \quad (5.3.17)$$

Итак, приходим к соотношению

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_{RM} = C_n^{-1} Y_n(\theta_0, \varphi_0). \quad (5.3.18)$$

Если $k \rightarrow 0$, то соотношение (5.3.18) переходит в соотношение (5.3.10).

Замечание 5.3.3. Формулы (5.3.10) и (5.3.18) могут служить для приближенного вычисления интегралов в (5.3.5) и (5.3.13), соответственно. Для этого достаточно функции $g_0(M)$ и $g(M)$ разложить в ряд по сферическим функциям, взяв усеченную сумму и воспользоваться формулами (5.3.10), (5.3.18) соответственно. Задача вычисления сведется к вычислению коэффициентов разложения, которые выражаются обычными интегралами, аналогичными интегралам в (5.2.11).

Замечание 5.3.4. Для вычисления интегралов в (5.3.10) и (5.3.18) широкое применение [70] получили квадратурные формулы типа метода дискретных замкнутых вихревых рамок (м.д.з.в.р.). Вывод этих квадратурных формул дадим для интеграла в (5.3.13), но вначале получим удобную формулу для градиента функции $\Phi(M_0)$ в (5.3.11). Будем полагать в интеграле в (5.3.11) $g(M) = g$ константой, обозначим L_{σ} – замкнутый контур, ограничивающий поверхность σ , $U(M, M_0) = e^{ikr_{MM_0}} / r_{MM_0}$. Тогда запишем

$$\Phi(M_0) = \frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} U(M, M_0) d\sigma_M \quad (5.3.19)$$

и

$$\text{grad}\Phi(M_0) = \Phi'_{x_0} \bar{i} + \Phi'_{y_0} \bar{j} + \Phi'_{z_0} \bar{k}.$$

Вначале полагаем, что $M_0 \notin \sigma$ и поэтому дифференцирование по x_0 , y_0 и z_0 можно внести под знак интеграла. Теперь учтем, что $\frac{\partial}{\partial x_0} U(M, M_0) = -\frac{\partial}{\partial x} U(M, M_0)$ и запишем

$$\Phi'_{x_0} = -\frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \frac{\partial}{\partial x} U(M, M_0) d\sigma_M, \quad (5.3.20)$$

или, воспользовавшись формулой дифференцирования по направлению [117], получим

$$\begin{aligned} \Phi'_{x_0} = & -\frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(M, M_0) + \right. \\ & \left. + \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} U(M, M_0) + \cos \gamma \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} U(M, M_0) \right] d\sigma_M, \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

где $\bar{n}_M = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$.

Используя тот факт, что функция $U(M, M_0)$ является решением уравнения Гельмгольца в пространственном случае, т.е.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(M, M_0) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(M, M_0) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(M, M_0) - k^2 U(M, M_0)$$

и применяя формулу Стокса [68]

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \\ = \int_{L_{\sigma}} P dx + Q dy + R dz, \end{aligned}$$

получаем в тех же обозначениях

$$Q = \frac{\partial}{\partial z} U(M, M_0), \quad P = 0, \quad R = -\frac{\partial}{\partial y} U(M, M_0).$$

Теперь формулу (5.3.21) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi'_{x_0} = & -\frac{g}{4\pi} \int_{L_{\sigma}} \left(\frac{\partial}{\partial z} U(M, M_0) dy - \frac{\partial}{\partial y} U(M, M_0) dz \right) + \frac{g}{4\pi} k^2 \int_{\sigma} U(M, M_0) \cos \alpha d\sigma = \\ = & - \left[\frac{g}{4\pi} \int_{L_{\sigma}} d\bar{l} \times \text{grad}_M U(M, M_0) \right]_{x_0} + \frac{g}{4\pi} k^2 \int_{\sigma} U(M, M_0) \cos \alpha d\sigma, \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

где индекс x_0 внизу вертикальной черты означает, что берется координата вектора по оси OX , а $d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ при $M(x, y, z) \in L$.

Аналогично получаем формулы для Φ'_{y_0} и Φ'_{z_0} , т.е.

$$\begin{aligned} \text{grad}\Phi(M_0) = & \text{grad}_{M_0} \frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} U(M, M_0) d\sigma_M = \\ = & -\frac{g}{4\pi} \int_{L_{\sigma}} d\bar{l} \times \text{grad}_M \frac{e^{ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} + \frac{g}{4\pi} k^2 \int_{\sigma} \frac{e^{ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \bar{n}_M d\sigma_M. \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

При $k=0$ уравнение Гельмгольца переходит в уравнение Лапласа, а формула (5.3.23) – в известную формулу из гидродинамики [107]

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{M_0} \frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) d\sigma_M = \\ = -\frac{g}{4\pi} \int_{L_{\sigma}} d\vec{l}_M \times \operatorname{grad}_M \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right), \quad M_0 \notin \sigma, \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

где направление обхода на контуре L и направление орта нормали \bar{n}_M к поверхности σ согласованы по правилу правого винта (см. рис. 6.3.1).

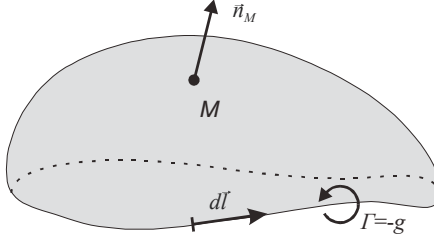


Рис. 5.3.1

Воспользовавшись теперь непрерывностью нормальной производной потенциала двойного слоя при переходе через поверхность σ , можно написать

$$\frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) d\sigma_M = -\frac{g}{4\pi} \int_L \bar{n}_M \cdot \left(d\vec{l} \times \operatorname{grad}_M \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right), \quad (5.3.25)$$

где теперь точка M_0 не принадлежит L , но может лежать на σ .

Теперь для интеграла в (5.3.13) с постоянной плотностью g имеем

$$\begin{aligned} \frac{g}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) d\sigma_M = \\ = -\frac{g}{4\pi} \int_{L_{\sigma}} \bar{n}_{M_0} \cdot \left(d\vec{l} \times \operatorname{grad}_M \left(\frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} \right) \right) + \frac{g}{4\pi} k^2 \int_L \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) d\sigma_M. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Как будет показано в главе 13, если в криволинейном интеграле в (5.3.25) L является отрезком или ломаной, то этот интеграл берется аналитически и получается формула, удобная для вычисления.

Из формулы (5.3.6) видно, что интеграл в (5.3.5) имеет особенность вида $r_{MM_0}^{-3}$, а так как $e^{ikr_{MM_0}} \cdot r_{MM_0}^{-1} = r_{MM_0}^{-1} + F(M, M_0)$, где $F(M, M_0)$ – аналитическая функция относительно r_{MM_0} , то и интеграл в (5.3.13) также имеет особенность $r_{MM_0}^{-3}$. Как понимать такие интегралы и строить квадратурные формулы типа м.д.з.в.р. более подробно рассмотрим в случае, когда σ является частью плоскости OXY . Здесь уравнение (5.3.5) принимает вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} g(x, y) \frac{dxdy}{\left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 \right]^{3/2}} = f(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \in \sigma. \quad (5.3.27)$$

Интеграл $I(x_0, y_0) = I(M_0)$ в (5.3.27) понимается в смысле конечного значения по Адамару [1] и определяется следующим образом:

$$I(x_0, y_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} g(M) \frac{dxdy}{[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]^{3/2}} - \frac{2\pi}{\varepsilon} g(M_0) \right], \quad (5.3.28)$$

где $O(M_0, \varepsilon)$ – окрестность радиуса ε точки M_0 (рис. 6.3.2).

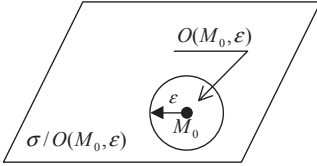


Рис. 5.3.2

Теорема 5.3.1. *Интеграл (5.3.28) существует для любой точки $M_0 \in \sigma$, $\rho(M_0, L_\sigma) > 0$, если функция $g(M)$ имеет первые частные производные, удовлетворяющие условию $H(\alpha)$.*

Доказательство. В формуле (5.3.28) справа сделаем следующие преобразования

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{g(M) - g(M_0) - g'_x(M_0)(x - x_0) - g'_y(M_0)(y - y_0)}{r_{MM_0}^3} dxdy + \\ & + g(M_0) \int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{dxdy}{r_{MM_0}^3} + g'_x(M_0) \int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{(x - x_0)}{r_{MM_0}^3} dxdy + \\ & + g'_y(M_0) \int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{(y - y_0)}{r_{MM_0}^3} dxdy - \frac{2\pi}{\varepsilon} g(M_0) = \\ & = I_1(x_0, y_0) + g(M_0)I_2(x_0, y_0) + g'_x(M_0)I_3(x_0, y_0) + \\ & + g'_y(M_0)I_4(x_0, y_0) - \frac{2\pi}{\varepsilon} g(M_0). \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Так как первые частные производные функции $g(M)$ принадлежат $H(\alpha)$, то подынтегральная функция в $I_1(x_0, y_0)$ имеет особенность вида $r_{MM_0}^{-2+\alpha}$ ($1 \geq \alpha > 0$), т.е. абсолютно интегрируема. Интегралы $I_3(x_0, y_0)$ и $I_4(x_0, y_0)$ существуют как сингулярные интегралы в смысле главного значения Коши [91].

Рассмотрим теперь $I_2(x_0, y_0)$, перейдя в нем к полярным координатам с центром в точке M_0

$$\begin{aligned} I_2(x_0, y_0) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^{\rho(\varphi)} \frac{dr}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{r} \right)_\varepsilon^{\rho(\varphi)} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\rho(\varphi)} + \frac{1}{\varepsilon} \right) d\varphi = -\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho(\varphi)} + \frac{2\pi}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ является уравнением границы σ в данной системе полярных координат. Таким образом, разность

$$g(M_0)I_2(x_0, y_0) - \frac{2\pi}{\varepsilon} g(M_0)$$

не зависит от ε , поэтому ее предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует.

Замечание 5.3.5. Формула (5.3.30) показывает, что определение сильно сингулярного интеграла $I(x_0, y_0)$, данное формулой (5.3.28), не зависит от выбора первообразной для функции $r_{MM_0}^{-3}$.

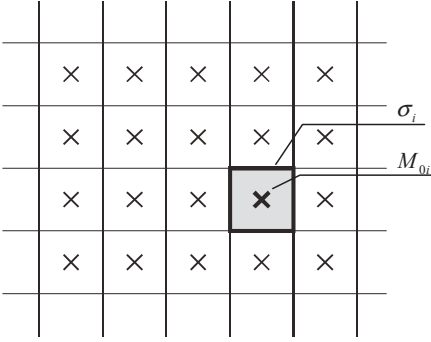


Рис. 5.3.3

В дальнейшем предполагаем выполнение условия теоремы 5.3.1.

Рассмотрим теперь квадратурные формулы для сильно сингулярного интеграла $I(M_0)$. Разобьем область σ на квадратики со стороной h и возьмем только те из них, которые целиком принадлежат σ . Пронумеруем их и будем обозначать σ_i , $i=1, \dots, n$. Центр σ_i будем обозначать M_{0i} (рис. 6.3.3). За квадратурную сумму $I_n(M_{0j})$ для интеграла будем брать сумму

$$I_n(M_{0j}) = \sum_{i=1}^n g(M_{0i}) \int_{\sigma_i} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j}}^3}, \quad j=1, \dots, n. \quad (5.3.31)$$

Верна следующая теорема.

Теорема 5.3.2. Для всех точек M_{0j} , $\rho(M_{0j}; L_\sigma) \geq \delta > 0$ справедлива оценка

$$|I(M_{0j}) - I_n(M_{0j})| = O(h |\ln h|), \quad (5.3.32)$$

если $|g''_{xx}|, |g''_{xy}|, |g''_{yy}| \leq C$, где C - некоторая константа.

Доказательство. Согласно формуле (5.3.29) преобразуем разность

$$\begin{aligned} I(M_{0j}) - I_n(M_{0j}) &= \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} \frac{g(M) - g(M_{0i})}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} \frac{\Delta g(M, M_{0i})}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy + \sum_{i=1}^n g'_x(M_{0i}) \int_{\sigma_i} \frac{x - x_{0i}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = \\ &= \sum_{i=1}^n g'(M_{0i}) \int_{\sigma_i} \frac{y - y_{0i}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = I_{n,1}(M_{0j}) + I_{n,2}(M_{0j}) + I_{n,3}(M_{0j}), \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

где $\Delta g(M, M_{0i}) = g(M) - g(M_{0i}) - g'_x(M_{0i})(x - x_{0i}) - g'_y(M_{0i})(y - y_{0i})$.

Рассмотрим каждое слагаемое $I_{n,k}(M_{0j})$, $k=1, 2, 3$ в отдельности.

Для $I_{n,1}(M_{0j})$ имеем

$$\begin{aligned} I_{n,1}(M_{0j}) &= \int_{\sigma_j} \frac{\Delta g(M, M_{0i})}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \int_{\sigma_i} \frac{\Delta g(M, M_{0i})}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = \\ &= I_{n,1}^{(1)}(M_{0j}) + I_{n,1}^{(2)}(M_{0j}). \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Так как

$$|\Delta g(M, M_{0i})| \leq Ar_{MM_{0j}}^2, \quad (5.3.35)$$

где A не зависит от точки и n , то с использованием полярных координат получим

$$|I_{n,1}^{(1)}(M_{0j})| \leq A \int_{\sigma_j} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j}}^3} \leq \pi A \sqrt{2} h \quad (5.3.36)$$

в силу того, что радиус описанной около квадрата σ_j окружности равен $h\sqrt{2}/2$. Далее

$$\begin{aligned}
|I_{n,1}^{(2)}(M_{0j})| &\leq Ah^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \int_{\sigma_i} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j}}^3} = Ah^2 \int_{\sigma_i \setminus \sigma_j} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j}}^3} \leq Ah^2 \int_{\hat{\sigma}_j} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j}}^3} = \\
&= 2\pi h^2 A \left(\frac{2}{h} - \frac{1}{R} \right) \leq 4\pi Ah, \tag{5.3.37}
\end{aligned}$$

где $\hat{\sigma}_j(\hat{\sigma}_j)$ – круг с центром в точке M_{0j} , описанный около σ (вписанный в σ_j), радиуса $R(h/2)$.

Рассмотрим теперь $I_{n,2}(M_{0j})$. Имеем

$$\begin{aligned}
I_{n,2}(M_{0j}) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [g'_x(M_{0i}) - g'_x(M_{0j})] \int_{\sigma_i} \frac{x - x_{0i}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy + \\
&+ g'_x(M_{0j}) \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} \frac{x - x_{0j}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy - g'_x(M_{0j}) \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} \frac{x_{0i} - x_{0j}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = \\
&= I_{n,2}^{(1)}(M_{0j}) + I_{n,2}^{(2)}(M_{0j}) - I_{n,2}^{(3)}(M_{0j}). \tag{5.3.38}
\end{aligned}$$

Иследуем теперь каждое слагаемое в (5.3.38). Так как для всех $i \neq j$ справедливо неравенство

$$0 < g_i \leq r_{M_{0i}M_{0j}} / r_{MM_{0j}} \leq 2, \tag{5.3.39}$$

то для $I_{n,2}^{(1)}(M_{0j})$ имеем

$$\begin{aligned}
|I_{n,2}^{(1)}(M_{0j})| &\leq h \cdot 2B \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \int_{\sigma_i} \frac{dxdy}{r_{MM_{0j}}^2} \leq 2hB \int_{\hat{\sigma}_j} \frac{dxdy}{r} = \\
&= 4\pi hB \left(\ln \frac{2}{h} + \ln R \right), \tag{5.3.40}
\end{aligned}$$

где B – наибольшее значение модуля вторых частных производных функции $g(M)$.

Для исследования разности $I_{n,2}^{(2)}(M_{0j}) - I_{n,2}^{(3)}(M_{0j})$ заметим, что

$$\int_{\tilde{\sigma}_j} \frac{x - x_{0j}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = 0 \tag{5.3.41}$$

для любого круга $\tilde{\sigma}_j$ с центром в точке M_{0j} и будем полагать его радиус равным $\delta/2$. Если h существенно меньше $\delta/2$, то рассматриваемое разбиение области обладает следующим свойством: или точки M_{0j} и M_{0i} лежат на одной вертикали и тогда $x_{0i} = x_{0j}$, или для точки M_{0i} существует такая точка M_{0i_1} , что $y_{0i} = y_{0i_1}$, $x_{0i} - x_{0j} = -(x_{0i_1} - x_{0j})$, а тогда

$$\int_{\sigma_i} \frac{x_{0i} - x_{0j}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy + \int_{\sigma_{i_1}} \frac{x_{0i_1} - x_{0j}}{r_{MM_{0j}}^3} dxdy = 0, \tag{5.3.42}$$

так как σ_i и σ_{i_1} симметричны относительно прямой $y = y_{0j}$. Из последнего следует, что сумма тех слагаемых из $I_{n,2}^{(3)}(M_{0j})$, для которых точки M_{0i} лежат в $\tilde{\sigma}_j$, равна нулю. Поэтому для исследуемой разности имеем

$$\begin{aligned} |I_{n,2}^{(2)}(M_{0j}) - I_{n,2}^{(3)}(M_{0j})| &\leq |g'_x(M_{0j})| \left| \sum_{i=1}^n \int_{\substack{\sigma_i \\ M_{0i} \in \sigma_i}} \frac{x - x_{0i}}{r_{MM_{0j}}^3} dx dy \right| \leq \\ &\leq B_1 h \int_{\substack{\sigma_j^* - \sigma_j \\ r_{MM_{0j}}^3}} \frac{dx dy}{r_{MM_{0j}}^3} = \frac{1}{2} B_1 h \left(\frac{4}{\delta^2} - \frac{1}{R^2} \right) \leq 2B_1 h / \delta^2, \end{aligned} \quad (5.3.43)$$

где B_1 – наибольшее значение g'_x на σ , а σ^* – круг радиуса R с центром в точке M_{0j} , содержащий область σ .

Таким образом, из (5.3.38), (5.3.40) и (5.3.43) следует, что

$$|I_{n,2}(M_{0j})| = O\left(h \ln \frac{1}{h}\right) \quad (5.3.44)$$

для всех точек M_{0j} таких, что $\rho(M_{0j}; L_\sigma) \geq \delta > 0$.

Так как рассматриваемое разбиение σ обладает аналогичным свойством симметрии и относительно прямой $x = x_{0j}$, то и для $I_{n,3}(M_{0j})$ справедлива оценка вида (5.3.44).

Теорема доказана.

Замечание 5.3.6. Если в теореме 5.3.2 потребовать, чтобы g'_x и g'_y принадлежали классу $H(\alpha)$ на σ , то, как несложно заметить, из рассуждений в теореме получим, что оценка в (5.3.32) будет иметь вид $O\left(h^\alpha \ln \frac{1}{h}\right)$.

Замечание 5.3.7. Л. Н. Полтавский [78] улучшил оценку (5.3.32) следующим образом. Пусть σ – область с бесконечно дифференцируемой границей Γ , тогда, если $g(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)}\psi(x, y)$, где ψ'_x и $\psi'_y \in H(\alpha)$ на σ , $\alpha \geq 1/2$, $\rho(x, y)$ – расстояние от точки $M(x, y) \in \sigma$ до L_σ , то имеет место оценка

$$|I(M_{0j}) - I_n(M_{0j})| \leq O\left(\frac{h^{1/2}}{\rho(M_{0j})}\right). \quad (5.3.45)$$

Замечание 5.3.8. На рис. 5.3.3 к теореме 5.3.2 область σ изображена в виде прямоугольника, однако из доказательства ее следует, что она справедлива и для любой области σ плоскости OXY с границей, имеющей жорданову меру, равную нулю.

Замечание 5.3.9. Так как рассуждения в доказательстве теоремы 5.3.2 имеют локальный характер, то она справедлива и в том случае, когда σ является поверхностью в пространстве $OXYZ$, составленной из плоских кусков, например, поверхностью прямоугольного параллелепипеда или любого многогранника.

Более того, в [154] оценка, аналогичная оценке (5.3.45), доказана и для любой гладкой разомкнутой поверхности σ , которая является графиком функции $z = f(M) = f(x, y)$, $M \in \sigma^* \in OXY$, а разбиение на поверхности σ берется как образ разбиения на σ^* , т.е. в этом случае

$$I_n(M_{0j}) = \sum_{i=1}^n g(M_{0i}) \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_{0i}}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_{0j}}} \right) d\sigma_M, \quad M_{0j} \in \sigma. \quad (5.3.46)$$

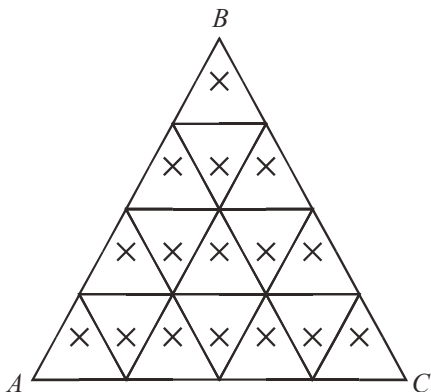


Рис. 5.3.4

Пусть теперь σ – равнобедренный треугольник ABC , $AB=BC$. Разобьем каждую из его сторон на одинаковое число равных частей и соединим попарно точки разбиения на разных сторонах треугольника прямыми, параллельными сторонам. Получим разбиение $\triangle ABC$ на равные треугольники, ему подобные (рис. 5.3.4). Через середины отрезков разбиения сторон AB и BC проведем прямые, параллельные стороне AC , а через точки разбиения этих сторон и точку B проведем прямые, перпендикулярные стороне AC . Точки пересечения этих прямых возьмем за расчетные точки M_{0i} , а соответствующие треугольники обозначим σ_i , $i=1, \dots, n$, т.е. точка M_{0i} лежит

на середине высоты треугольника σ_i , проведенной к стороне, параллельной AC .

Теорема 5.3.3. Для построенного разбиения $\triangle ABC$ справедлива оценка (5.3.32), если h обозначить наименьшую длину частичных отрезков на сторонах $\triangle ABC$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы практически почти совпадает с доказательством теоремы 5.3.2. Отличие будет только в доказательстве оценки для $I_{n,3}(M_{0j})$, для чего заметим следующее. Для точки M_{0j} для каждой разности $y_{0i} - y_{0j}$ имеется множество треугольников, образующих полосу, параллельную стороне AC , и симметричная ей относительно прямой $y = y_{0j}$ полоса, заполненная треугольниками разбиения σ_i , такими, что $y_{0i} - y_{0j} = -(y_{0i} - y_{0j})$. Поэтому в формуле (5.3.38) для $I_{n,3}(M_{0j})$ слагаемые в $I_{n,3}^{(2)}(M_{0j})$ и $I_{n,3}^{(3)}(M_{0j})$ внутри некоторой окрестности точки M_{0j} взаимно уничтожаются, а вне этой окрестности будет справедлива оценка вида (5.3.43). Теорема доказана.

Замечание 5.3.10. Из доказательства теорем 5.3.2 и 5.3.3 следует, что они будут справедливы и в следующих случаях. Если $g(M)$ зависит только от x (от y), то разбиение должно состоять из фигур, симметричных относительно прямых $x = x_{0i}$ ($y = y_{0i}$), и точки x_{0i} (y_{0i}), $i=1, \dots, n$, должны обладать свойством нечетности относительно этих прямых. В общем случае разбиение σ надо строить из фигур σ_i и точки M_{0i} должны быть выбраны на σ_i так, чтобы эти точки и фигуры были симметричны относительно прямых, параллельных осям координат и проходящих через точки M_{0i} .

Замечание 5.3.11. Рассмотрим интеграл

$$I(M_0) = \int_{\sigma} \frac{(y-y_0) dx dy}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]^{3/2}},$$

где σ – треугольник с координатами вершин $(0,0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(2,0)$ в точке $M_0(1, \sqrt{3}/2)$. Точное значение интеграла в этой точке равно 1,1257.

Вычислим его по квадратурной формуле вида (5.3.31) для разбиения области, изображенной на рис. 5.3.4. Если расчетные точки M_{0i} лежат на серединах высот (см. рис. 5.3.4), то при разбиении на 100 частей и далее $I_n(M_0)$ отличается от 1,1257 не менее, чем в третьем знаке после запятой, а при отклонении расчетных точек от середины высоты уже на 0.01 значения $I_n(M_0)$ колеблются при увеличении n от 1,06 до 1,18.

5.4. Гиперсингулярный интеграл на сфере

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл в левой части уравнения (5.3.5) на сфере радиуса R , которую обозначим C_R^2 . Параметрическое представление сферы в сферических координатах (рис. 6.4.1)

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, \\ z = R \cos \theta, \end{cases} \quad (5.4.1)$$

где $R > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$.

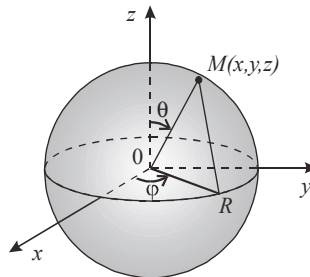


Рис. 5.4.1

Используя геометрию сферы, упростим вид ядра (5.3.6) интеграла в (5.3.5). Докажем следующую теорему.

Теорема 5.4.1. *Справедливо представление:*

$$\int_{C_R^2} K_N(M, M_0) g(M) d\sigma_M = \frac{1}{R} \int_{C_{R=1}^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{1}{4r_{MM_0}} \right) g(M) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.4.2)$$

для любой точки (φ_0, θ_0) , $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$.

Доказательство. Для преобразования функции $K_N(M, M_0)$ заметим, что для точек сферы C_R^2 справедливы следующие соотношения.

Для величины $r_{MM_0}^2$ имеем

$$\begin{aligned} r_{MM_0}^2 &= R^2 [(\sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi)^2 + \\ &\quad + (\sin \theta_0 \sin \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi)^2 + (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2] = \\ &= R^2 [\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \\ &\quad + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \sin \varphi_0 \sin \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \\ &\quad + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \left[\sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi_0 - \varphi) + \sin^2 \theta + \right. \\
&\quad \left. + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] = \\
&= R^2 \left[(\sin \theta_0 - \sin \theta)^2 + 2 \sin \theta_0 \sin \theta (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] = \\
&= R^2 \left[4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + 4 \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} + \right. \\
&\quad \left. + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] = \\
&= 4R^2 \left[\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right]. \tag{5.4.3}
\end{aligned}$$

Далее, из геометрии сферы получаем

$$\begin{aligned}
\vec{n}_M &= \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}, \\
\vec{n}_{M_0} &= \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \vec{i} + \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \vec{j} + \cos \theta_0 \vec{k}.
\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Из формул (5.4.4) следует

$$\begin{aligned}
(\vec{n}_M - \vec{n}_{M_0}, \vec{n}_{M_0}) &= (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \\
&+ (\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0) \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + (\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta_0 = \\
&= \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \varphi_0 - \\
&\quad - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \cos \theta \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0 = \\
&= \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) + \cos \theta \cos \theta_0 - 1 = \\
&= \sin \theta \sin \theta_0 [\cos(\varphi_0 - \varphi) - 1] + \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta - 1 = \\
&= -2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \theta \sin \theta_0 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} = \\
&= -2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin \theta \sin \theta_0 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right). \tag{5.4.5}
\end{aligned}$$

Из сравнения формул (5.4.3) и (5.4.5) получаем

$$(\vec{n}_M - \vec{n}_{M_0}, \vec{n}_{M_0}) = -\frac{1}{2R^2} r_{MM_0}^2. \tag{5.4.6}$$

Далее, можно заметить

$$\begin{aligned}
(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_{M_0}) &= R[(\sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \\
&+ (\sin \theta_0 \sin \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cos \theta_0] = \\
&= R[\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \\
&+ \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \cos^2 \theta_0 - \cos \theta \cos \theta_0] = \\
&= R[1 - \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos \theta_0 \cos \theta] = \\
&= R[1 - (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta) + \sin \theta_0 \sin \theta (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi))] = \\
&= 2R \left(\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right) = \frac{1}{2R} r_{MM_0}^2. \tag{5.4.7}
\end{aligned}$$

Итак, имеем

$$(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0}) = \frac{1}{2R} r_{MM_0}^2. \quad (5.4.8)$$

Аналогично получаем

$$(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) = -(\bar{r}_{M_0M}, \bar{n}_M) = -\frac{1}{2R} r_{MM_0}^2. \quad (5.4.9)$$

Из формул (5.3.6), (5.4.6), (5.4.8) и (5.4.9) получаем

$$\begin{aligned} \int_{C_R^2} K_N(M, M_0) g(M) d\sigma_M &= \int_{C_R^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} - \frac{2}{4R^2 r_{MM_0}} + \frac{3}{4R^2 r_{MM_0}} \right) g(M) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_{C_R^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{1}{4R^2 r_{MM_0}} \right) g(M) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Так как для расстояния r_{R, MM_0} точек на сфере C_R^2 , $R > 0$, радиуса R и расстояния r_{1, MM_0} соответствующих точек на сфере $C_{R=1}^2$ радиуса 1 справедливо соотношение

$$r_{R, MM_0} = R r_{1, MM_0}, \quad (5.4.11)$$

то получаем справедливость выражения (5.4.2). Теорема 5.4.1 доказана.

Так как каждое спектральное соотношение всегда представляет собой большой интерес в различных теоретических и вычислительных задачах, то докажем следующую теорему.

Теорема 5.4.2. *На единичной сфере справедливо следующее спектральное соотношение:*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}^2} \frac{1}{r_{MM_0}^3} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M = -\frac{2n+1}{4} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.4.12)$$

где $Y_n(\theta, \varphi)$ – сферическая функция порядка n ; (см. (5.2.7)–(5.2.9))

Доказательство. Известны следующие спектральные соотношения [70, 110]:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}^2} \frac{1}{r_{MM_0}} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M = \frac{1}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.4.13)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_R^2} K_N(M, M_0) Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M = -\frac{n(n+1)}{R(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.4.14)$$

Теперь используя соотношения (5.4.13), (5.4.14) и представление интеграла слева в (5.4.14) в виде (5.4.2) для $R = 1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}^2} \frac{1}{r_{MM_0}^3} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M &= -\frac{(n+1)n}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0) - \frac{1}{4(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0) = \\ &= -\frac{(2n+1)^2}{4(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0) = -\frac{2n+1}{4} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Теорема 5.4.2 доказана.

Рассмотрим теперь квадратурные формулы типа метода дискретных замкнутых вихревых рамок для сферы C_R^2 . На отрезке $[0, 2\pi]$ возьмем точки $\varphi_k = (k-1)h$,

$h = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$, $k = 1, \dots, 2n+1$, и точки $\varphi_{0k} = \varphi_k + \frac{h}{2}$, $k = 1, \dots, 2n$, и на отрезке $[0, \pi]$ точки

$\theta_k = (k-1)h$, $h = \frac{\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n+1$, и $\theta_{0k} = \theta_k + \frac{h}{2}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда линии

$\varphi = \varphi_i, i = 1, \dots, 2n+1$, и $\theta = \theta_k, k = 1, \dots, n+1$, разобьют прямоугольник $I = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ на прямоугольники $I_{i,k}$ с центрами в точках $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k}), i = 1, \dots, 2n, k = 1, \dots, n$. Образ прямоугольника $I_{i,k}$ на сфере C_R^2 будем обозначать $\sigma_{i,k}$, а образ точки $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k}) - M_{0i,0k}$. Теперь для интеграла $I_N(M_{0j,0m})$ на сфере рассмотрим сумму

$$S_{N,n}(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n g(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} K_N(M, M_{0j,0m}) d\sigma_{i,k}, \quad (5.4.16)$$

где $j = 1, \dots, 2n, m = 1, \dots, n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4.3. Пусть функция $g(M) \in H_1(\alpha)$ на сфере C_R^2 . Тогда для всех точек $M_{0j,0m}$ сферы, таких, что $\theta_{0m} \in [\delta, \pi - \delta]$, где $\delta > 0$ – достаточно малое положительное число, выполняется оценка

$$|I_N(M_{0j,0m}) - S_{N,n}(M_{0j,0m})| \leq C_\delta h^\alpha \ln n. \quad (5.4.17)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть в неравенстве (5.4.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} |I_N(M_{0j,0m}) - S_{N,n}(M_{0j,0m})| &\leq \frac{1}{R} \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} [g(M) - g(M_{0i,0k})] \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}^3} \right| + \\ &+ \frac{1}{4R} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} |g(M) - g(M_{0i,0k})| \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}} = \\ &= \frac{1}{R} I_1(M_{0j,0m}) + \frac{1}{4R} I_2(M_{0j,0m}), \quad j = 1, \dots, 2n; m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Вначале оценим величину $I_2(M_{0j,0m})$. Для этого напомним, что так как $g(M) \in H_1(\alpha)$ на сфере C_R^2 , то справедливо неравенство

$$|g(M) - g(M_0)| \leq A r_{MM_0}, \quad (5.4.19)$$

где $M, M_0 \in C_R^2$, r_{MM_0} – расстояние между соответствующими точками на сфере единичного радиуса, $A > 0$ – некоторая константа.

Представим теперь $I_2(M_{0j,0m})$ в виде

$$\begin{aligned} I_2(M_{0j,0m}) &= \int_{\sigma_{j,m}} \frac{|g(M) - g(M_{0j,0m})|}{r_{MM_{0j,0m}}} \sin \theta d\theta d\varphi + \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{|g(M) - g(M_{0i,0k})|}{r_{MM_{0j,0m}}} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= I_{2,1}(M_{0j,0m}) + I_{2,2}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Для $I_{2,1}(M_{0j,0m})$ с учетом (5.4.19) имеем

$$I_{2,1}(M_{0j,0m}) \leq A \int_{\sigma_{j,m}} \sin \theta d\theta d\varphi \leq A h^2. \quad (5.4.21)$$

Для оценки $I_{2,2}(M_{0j,0m})$ заметим, что справедливо неравенство (см. рис. 6.4.2)

$$\alpha \geq \sin \alpha \geq \frac{2}{\pi} \alpha, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (5.4.22)$$

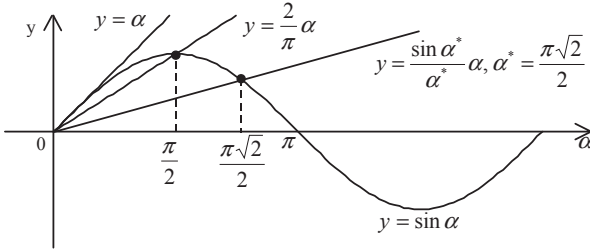


Рис. 5.4.2

Поэтому из (5.4.3) и (5.4.19) имеем

$$\begin{aligned} |g(M) - g(M_{0r,0k})| &\leq Ar_{MM_{0r,0k}} \leq A2\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{0k} - \theta}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_{0k} - \varphi}{2}} \leq \\ &\leq A2\sqrt{\frac{(\theta_{0k} - \theta)^2}{4} + \frac{(\varphi_{0k} - \varphi)^2}{4}} = A\sqrt{(\theta_{0k} - \theta)^2 + (\varphi_{0k} - \varphi)^2} \leq A\frac{h}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

когда $M(\varphi, \theta) \in I_{i,k}$.

Введем на прямоугольнике $I = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ переменных φ и θ полярные координаты с центром в точке $M(\varphi_{0j}, \theta_{0m})$:

$$\begin{cases} \varphi - \varphi_{0j} = r \cos \alpha, \\ \theta - \theta_{0m} = r \sin \alpha, \end{cases} \quad (5.4.24)$$

где $0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \pi\sqrt{2}$, так как в силу периодичности всех функций в рассматриваемом интеграле по φ можно полагать, что разность $(\varphi - \varphi_{0j})$ меняется в пределах от $-\pi$ до π и тем более в этих пределах меняется разность $(\theta - \theta_{0m})$. Теперь в силу формулы (5.4.3) можно написать для точек единичной сферы

$$\begin{aligned} r_{MM_{0j,0m}}^2 &= 4\left[\sin^2 r \frac{\sin \alpha}{2} + \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 r \frac{\cos \alpha}{2}\right] = \\ &= 4r^2 \left[\frac{\sin^2 r \frac{\sin \alpha}{2}}{r^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4}} + \sin \theta_0 \sin \theta \frac{\sin^2 r \frac{\cos \alpha}{2}}{r^2 \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \right]. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

Теперь в силу ограничения на r (см. (5.4.24)) получим, что

$$0 \leq \left| r \frac{\cos \alpha}{2} \right|, \left| r \frac{\sin \alpha}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \alpha^* \quad (5.4.26)$$

и поэтому (см. рис. 5.4.2) имеем

$$\frac{\sin^2 \alpha^*}{(\alpha^*)^2} \leq \frac{\sin^2 r \frac{\cos \alpha}{2}}{\left(r \frac{\cos \alpha}{2}\right)^2}, \frac{\sin^2 r \frac{\sin \alpha}{2}}{\left(r \frac{\sin \alpha}{2}\right)^2} \leq 1. \quad (5.4.27)$$

Теперь заметим еще, что для любых положительных чисел a и b выполняется соотношение

$$\min(a, b) \leq a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha \leq \max(a, b) \quad (5.4.28)$$

для любых α . Следовательно, из формул (5.4.25)–(5.4.28) получаем

$$r^2 \geq r_{MM_{0j,0m}}^2 \geq \lambda^2 r^2, \quad (5.4.29)$$

для любых M и $M_{0j,0m}$, где $\lambda^2 = \min\left(\left(\frac{\sin \alpha^*}{\alpha^*}\right)^2, \sin \theta_{0m} \sin \theta\right)$, или

$$1 \geq \frac{r_{MM_{0j,0m}}}{r} \geq \lambda. \quad (5.4.30)$$

Возвращаясь к оценке $I_{2,2}(M_{0j,0m})$ с переходом к полярным координатам (r, α) , получаем

$$\begin{aligned} I_{2,2}(M_{0j,0m}) &\leq \frac{A}{\sqrt{2}} h \int_{I_{1j,m}} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{r\lambda} \leq \frac{C_1 h}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} \int_{I_{1j,m}} \frac{\sqrt{\sin \theta} d\theta d\varphi}{r} \leq \\ &\leq \frac{C_1 h}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{2\pi} \frac{r dr}{r} = \frac{C_1 h}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} 4^2 \pi^2 = \frac{C_2}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} h, \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

где $\rho^*(\theta_{0m}) = \min(\theta_{0m}, \pi - \theta_{0m})$.

Обратимся теперь к оценке $I_1(M_{0j,0m})$. Введем величину \tilde{r}_{MM_0} для точек единичной сферы по формуле

$$\tilde{r}_{MM_0} = 2 \left[\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right]^{1/2}. \quad (5.4.32)$$

Преобразуем выражение для $I_1(M_{0j,0m})$ следующим образом

$$\begin{aligned} I_1(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{g(M) - g(M_{0i,0k})}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} [g(M) - g(M_{0i,0k})] \left[\frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}^3} - \frac{1}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \right] \sin \theta d\theta d\varphi \right| = \\ &= I_{1,1}(M_{0j,0m}) + I_{1,2}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (5.4.33)$$

Введем обозначения $r_{MM_{0j,0m}}^2 = (1)$ и $\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^2 = (2)$. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}^3} - \frac{1}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} &= \frac{1}{(1)^{3/2}} - \frac{1}{(2)^{3/2}} = \frac{(2)^{3/2} - (1)^{3/2}}{(1)^{3/2} (2)^{3/2}} = \\ &= \frac{(2)^3 - (1)^3}{(1)^{3/2} (2)^{3/2} [(2)^{3/2} + (1)^{3/2}]} = \frac{[(2) - (1)][(2)^2 + (2)(1) + (1)^2]}{(1)^{3/2} (2)^{3/2} [(2)^{3/2} + (1)^{3/2}]} = \\ &= \frac{(2) - (1)}{(1)^{3/2} (2)} \left[\frac{(2)^{3/2}}{(2)^{3/2} + (1)^{3/2}} + \frac{(2)^{1/2} (1)^{2/2}}{(2)^{3/2} + (1)^{3/2}} \right] + \frac{(2) - (1)}{(1)(2)^{3/2}} \frac{(1)^{3/2}}{(2)^{3/2} + (1)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Заметим, что поскольку величины (2) и (1) положительны, то справедливы неравенства

$$\frac{(2)^{3/2}}{(2)^{3/2} + (1)^{3/2}} \leq 1, \quad \frac{(2)^{1/2} (1)^{2/2}}{(2)^{3/2} + (1)^{3/2}} \leq 1, \quad \frac{(1)^{3/2}}{(2)^{3/2} + (1)^{3/2}} \leq 1, \quad (5.4.35)$$

для произвольных точек M и $M_{0j,0m}$.

Запишем теперь разность (2) – (1) в виде

$$\begin{aligned}
(2)-(1) &= \tilde{r}_{MM_0}^2 - r_{MM_0}^2 = 4 \sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2} \sin \theta_0 (\sin \theta_0 - \sin \theta) = \\
&= 8 \sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin \theta_0,
\end{aligned} \tag{5.4.36}$$

при $M_0 = M_{0j,0m}$.

Теперь обратимся к слагаемому $I_{1,2}(M_{0j,0m})$. Используя формулы (5.4.23) и (5.4.33)–(5.4.36) получаем

$$\begin{aligned}
I_{1,2}(M_{0j,0m}) &\leq \int_{\sigma_{j,m}} \frac{8A \sin^2 \frac{\Phi_{0j} - \Phi}{2} \sin \left| \frac{\theta_{0m} - \theta}{2} \right| \sin \theta_{0m} \left(\frac{2}{r_{MM_{0j,0m}}} + \frac{1}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}} \right) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
&+ \frac{8Ah}{\sqrt{2}} \int_{C_R^2 \setminus \sigma_{j,m}} \frac{\sin^2 \frac{\Phi_{0j} - \Phi}{2} \sin \left| \frac{\theta_{0m} - \theta}{2} \right| \sin \theta_{0m} \left(\frac{2}{r_{MM_{0j,0m}}} + \frac{1}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \\
&= I_{1,2}^*(M_{0j,0m}) + I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m}).
\end{aligned} \tag{5.4.37}$$

Заметим теперь, что для величины $\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}$ справедливо соотношение

$$1 \geq \frac{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}}{r} \geq \lambda_1, \tag{5.4.38}$$

где $\lambda_1 = \min\left(\frac{\sin \alpha^*}{\alpha^*}, \sin \theta_{0m}\right)$ для любых точек M и $M_{0j,0m}$.

Далее, справедливы неравенства

$$\frac{\sin \left| \frac{\theta_{0m} - \theta}{2} \right|}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}}, \frac{\sin \left| \frac{\theta_{0m} - \theta}{2} \right|}{r_{MM_{0j,0m}}} \leq 1, \tag{5.4.39}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\Phi_{0j} - \Phi}{2} \sin \theta_{0m}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^2} \leq \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \tag{5.4.40}$$

для любых точек M и $M_{0j,0m}$. С учетом неравенств (5.4.39), (5.4.40), переходя к полярным координатам (5.4.24), имеем

$$\begin{aligned}
I_{1,2}^*(M_{0j,0m}) &\leq 8A \int_0^{2\pi} \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{1}{r \sin \theta_{0m}} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \sin \theta r dr d\alpha \leq \\
&\leq A_1 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \left(\frac{2}{\sqrt{\sin \theta_{0m}}} + \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \right) dr \leq \\
&\leq A_2 h \frac{1}{\sin^2 \theta_{0m}}, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad m = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.4.41}$$

Для $I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m})$ имеем аналогично

$$I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m}) \leq \frac{8Ah}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{2\pi} \frac{1}{r\lambda} \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{\sin \theta r dr}{r} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq A_3 h \left(\frac{2}{(\sin \theta_{0m})^{3/2}} + \frac{1}{(\sin \theta_{0m})^{5/2}} \right) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{2\pi} \frac{dr}{r} \leq \\
&\leq A_4 h \frac{1}{(\sin \theta_{0m})^{5/2}} \ln n, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad m = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.4.42}$$

Таким образом, из формул (5.4.37) и (5.4.41), (5.4.42) получаем

$$I_{1,2}(M_{0j,0m}) \leq A_5 \frac{1}{(\sin \theta_{0m})^{5/2}} h \ln n. \tag{5.4.43}$$

Наконец, рассмотрим оценку для $I_{1,1}(M_{0j,0m})$ в (5.4.33). Запишем вначале его в следующем виде:

$$\begin{aligned}
I_{1,1}(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\Delta(M, M_{0i,0k})}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| + \\
&+ \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{g'_\varphi(M)(\varphi - \varphi_{0i})}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| + \\
&+ \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{g'_\theta(M)(\theta - \theta_{0k})}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| = \\
&= I_{1,1}^*(M_{0j,0m}) + I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m}) + I_{1,1}^{***}(M_{0j,0m}),
\end{aligned} \tag{5.4.44}$$

где $\Delta(M, M_{0i,0k}) = g(M) - g(M_{0i,0k}) - g'_\varphi(M)(\varphi - \varphi_{0i}) - g'_\theta(M)(\theta - \theta_{0k})$.

Для $I_{1,1}^*(M_{0j,0m})$ получаем с учетом формулы для $\Delta(M, M_{0i,0k})$ и того, что $g(M) \in H_1(\alpha)$ на сфере,

$$\begin{aligned}
I_{1,1}^*(M_{0j,0m}) &\leq A^* \int_{\sigma_{j,m}} \frac{r_{MM_{0j,0m}}^{1+\alpha}}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi + A_1^* h^{1+\alpha} \int_{C_R^2 \sigma_{j,m}} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \leq \\
&\leq A^* \left[\int_{\sigma_{j,m}} \frac{r_{MM_{0j,0m}}^{1+\alpha} |\sin \theta - \sin \theta_{0m}|}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi + \sin \theta_{0m} \int_{\sigma_{j,m}} \frac{r_{MM_{0j,0m}}^{1+\alpha}}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right] + \\
&+ A_1^* h^{1+\alpha} \left[\int_{C_R^2 \sigma_{j,m}} \frac{|\sin \theta - \sin \theta_{0m}|}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi + \sin \theta_{0m} \int_{C_R^2 \sigma_{j,m}} \frac{d\theta d\varphi}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \right].
\end{aligned} \tag{5.4.45}$$

Переходя к полярным координатам (5.4.24) и проводя выкладки, аналогичные проведенным для оценки $I_{1,2}^*(M_{0j,0m})$, получаем

$$I_{1,1}^*(M_{0j,0m}) \leq A_2^* \frac{h^\alpha}{\sin^2 \theta_{0m}}. \tag{5.4.46}$$

Для оценки $I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m})$ запишем его вначале в виде

$$\begin{aligned}
I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{[g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0i,0k})](\varphi - \varphi_{0i})}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| + \\
&+ B_1 \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{(\varphi - \varphi_{0i})(\sin \theta - \sin \theta_{0m})}{\mathfrak{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_1 |\sin \theta_{0m}| \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\Phi - \Phi_{0i}}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| = \\
& = \eta_1(M_{0j,0m}) + B_1 \eta_2(M_{0j,0m}) + B_1 |\sin \theta_{0m}| \eta_3(M_{0j,0m}), \tag{5.4.47}
\end{aligned}$$

где $B_1 = \max_{M \in C_R^2} g'_\varphi(M)$.

Теперь записав $\eta_3(M_{0j,0m})$ в виде

$$\eta_3(M_{0j,0m}) = \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\Phi - \Phi_{0i}}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\Phi_{0j} - \Phi_{0i}}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right|, \tag{5.4.48}$$

видим, что $\eta_3(M_{0j,0m}) = 0$ в силу нечетности по $(\Phi - \Phi_{0j})$ подынтегральной функции (напомним, что Φ_{0j} является точкой 0, а интегрирование идет от $-\pi$ до π по Φ) в первом слагаемом и в силу симметрии точек Φ_{0i} относительно точки Φ_{0j} во втором слагаемом (рис. 5.4.3).

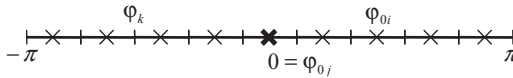


Рис. 5.4.3

Для $\eta_2(M_{0j,0m})$ с учетом неравенств (5.4.39) получаем

$$\begin{aligned}
\eta_2(M_{0j,0m}) & \leq \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{|\Phi - \Phi_{0i}|}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^2} d\theta d\varphi = \\
& = \int_{I_{j,m}} \frac{|\Phi - \Phi_{0i}|}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^2} d\theta d\varphi + \sum_{\substack{i=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{|\Phi - \Phi_{0i}|}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^2} d\theta d\varphi. \tag{5.4.49}
\end{aligned}$$

Переходя опять к полярным координатам (5.4.24), видим, что

$$\eta_2(M_{0j,0m}) \leq B_2 \frac{h \ln n}{\sin^2 \theta_{0m}}. \tag{5.4.50}$$

Для оценки $\eta_1(M_{0j,0m})$ запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\eta_1(M_{0j,0m}) & \leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{[g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0i,0k})](\Phi - \Phi_{0i})}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^3} (\sin \theta - \sin \theta_{0m}) d\theta d\varphi \right| + \\
& + |\sin \theta_{0m}| \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{[g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0i,0k})](\Phi - \Phi_{0i})}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right|. \tag{5.4.51}
\end{aligned}$$

Опять используя неравенства (5.4.38) и выделяя слагаемое (j,m) , получаем оценку

$$\eta_1(M_{0j,0m}) \leq B_3 \frac{h^\alpha}{\sin^2 \theta_{0m}}. \tag{5.4.52}$$

Таким образом, для $I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m})$ в формуле (5.4.34) получена оценка такого же типа, как и оценка (5.4.46) для слагаемого $I_{1,1}^*(M_{0j,0m})$ в этой формуле.

Наконец, для исследования $I_{1,1}^{***}(M_{0j,0m})$, сделав в нем такие же преобразования, как и для $I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m})$, придем к исследованию величин, аналогичных величинам

$\eta_p(M_{0j,0m})$, $p=1,2,3$, с заменой $(\varphi - \varphi_{0i})$ на $(\theta - \theta_{0k})$. Для первых двух слагаемых получим такие же оценки, а для третьего слагаемого, предполагая $\theta_{0m} < \frac{\pi}{2}$, получаем (см. рис. 5.4.4)

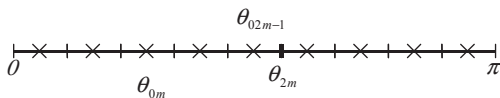


Рис. 5.4.4

$$\left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}^{MM_{0j,0m}}} \frac{\theta - \theta_{0k}}{\tilde{r}^3} d\theta d\varphi \right| = \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=2m}^n \int_{\tilde{r}^3} \frac{\theta - \theta_{0k}}{MM_{0j,0m}} d\theta d\varphi \right| \leq$$

$$\leq \frac{h}{\sin^3 \theta_{0m}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\frac{-\theta_{0m} + \theta_{2m}}{|\sin \alpha|}}^{2\pi} \frac{dr}{r^2} \leq B_4 \frac{h}{\sin^3 \theta_{0m} \rho^*(\theta_{0m})}. \quad (5.4.53)$$

С учетом множителя $\sin \theta_{0m}$ окончательно получаем

$$I_{1,1}^{***}(M_{0j,0m}) \leq B_5 \frac{h}{\sin^2 \theta_{0m} \rho^*(\theta_{0m})}. \quad (5.4.54)$$

Из всех приведенных выкладок следует справедливость неравенства (5.4.17). Теорема 5.4.3 доказана.

Замечание 5.4.1. Численный эксперимент, проведенный для сферы в случаях, когда известны спектральные соотношения для ядра $K_N(M, M_0)$, показывает справедливость теоремы 5.4.3 и, более того, доказывает справедливость результата

$$\sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^n |I_N(M_{0j,0m}) - S_{N,n}(M_{0j,0m})|_{\sigma_{j,m}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.4.55)$$

который, к сожалению, не следует из оценок полученных в процессе доказательства теоремы 5.4.3. Доказательству такого результата мешает оценка (5.4.54).

Приведем некоторые примеры численных расчетов. Все вычисления будем проводить с использованием спектрального соотношения (5.4.14), что позволит сравнивать численные результаты вычислений с точными. Нас будут интересовать следующие параметры вычислений: численные характеристики погрешности (максимум погрешности, интегральная погрешность) и динамика изменения погрешности с увеличением числа разбиений параметрической поверхности $0\theta\varphi$, будем исследовать также вопросы практической сходимости численного решения.

Под практической сходимостью понимаем следующее. Вычисляем численно интеграл от найденного численного решения. Делаем это для одного разбиения, потом для более мелкого и смотрим модуль разности этих значений. Если при увеличении числа разбиений, начиная с некоторого момента, модуль разности не превышает заданной точности, то говорят, что имеется «практическая сходимость».

Так как для сферы известны точные спектральные соотношения, то можно посмотреть, насколько совпадает интеграл от модуля численного решения с интегралом от модуля точного решения, что представляет интерес с учетом рассмотрения в следующей главе квадратурных формул для гиперсингулярного интегрального уравнения на торе, для которого точные решения пока не известны.

Рассмотрим вычисление квадратурных формул для интеграла в левой части выражения (5.4.14). Разобьем его на $N_\theta \times N_\varphi$ рамок. При этом

$$\sum_{k=1}^{N_\theta} \sum_{i=1}^{N_\varphi} Y_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) \int_{\sigma_{k,i}} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}} \right) d\sigma_M \equiv -\frac{4\pi m(n+1)}{R(2n+1)} Y_n(\theta_{0m}, \varphi_{0j}), \quad (5.4.56)$$

где $n = 1, 2, \dots$; $m = 1, \dots, N_\theta$; $j = 1, \dots, N_\varphi$.

Интеграл в сумме (5.4.56) будем вычислять по формуле [70]

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_{k,i}} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}} \right) d\sigma_M = \\ & = \oint_{L_{k,i}} \left(d\vec{l}_M \times \nabla_{M_0} \frac{1}{r_{MM_{0j,0m}}} \right) \cdot \vec{n}_{M_{0j,0m}} = \oint_{L_{k,i}} \left(\frac{\vec{r}_{MM_{0j,0m}}}{r_{MM_{0j,0m}}^3} \times d\vec{l}_M \right) \cdot \vec{n}_{M_{0j,0m}}. \end{aligned} \quad (5.4.57)$$

Обходя каждую площадку, обратим внимание на то, что при движении по горизонтальным участкам (параллелям)

$$d\vec{l} = \pm R \sin \theta d\varphi \vec{\theta}^0,$$

а при движении по вертикальным (меридианам)

$$d\vec{l} = \pm R d\theta \vec{\theta}^0.$$

Зададим равномерную по координатам φ и θ прямоугольную сетку на сфере. Площадь каждого участка на этой сетке:

$$\Delta S(i_\varphi, j_\theta) = \int_0^{\Delta\varphi_{j+1}} \int_{\theta_j} \sin \theta d\theta d\varphi = \Delta\varphi (\cos \theta_j - \cos \theta_{j+1}). \quad (5.4.58)$$

Для ускорения вычислений (особенно при больших N_φ и N_θ) можно заменить сферические ячейки плоскими рамками, для границ которых интеграл (5.4.57) вычисляется аналитически [70]. Для этого введем обозначения, представленные на рис. 5.4.5.

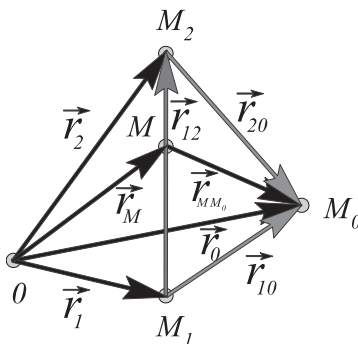


Рис. 5.4.5

Точку наблюдения обозначим M_0 , концы отрезка обозначим как M_1 и M_2 , тогда точку M , принадлежащую отрезку, можно найти из соотношения:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad d\bar{l}_M = dt(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \quad t \in [0,1]. \quad (5.4.59)$$

Тогда интересующий нас вектор \bar{r}_{MM_0} равен:

$$\bar{r}_{MM_0} = \bar{r}_0 - \bar{r}_M = (\bar{r}_0 - \bar{r}_1) - t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \bar{r}_{10} - t\bar{r}_{12}, \quad \bar{r}_{10} = \bar{r}_0 - \bar{r}_1, \quad \bar{r}_{12} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1. \quad (5.4.60)$$

Интеграл (5.4.57) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{M_1}^{M_2} \frac{\bar{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} \times d\bar{l}_M &= \int_0^1 \frac{(\bar{r}_{10} - t\bar{r}_{12}) \times \bar{r}_{12}}{\left((\bar{r}_{10} - t\bar{r}_{12})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} dt = \int_0^1 \frac{(\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}) dt}{\left(t^2 r_{12}^2 - 2t(\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}) + r_{10}^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^3} \int_0^1 \frac{dt}{\left(\left(t - \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}^2} \right)^2 + \frac{r_{10}^2}{r_{12}^2} - \left(\frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}^2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^3} \int_0^1 \frac{dt}{\left((t - C_1)^2 + C_0 \right)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (5.4.61)$$

где $C_1 = \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}^2}$, $C_0 = \frac{r_{10}^2}{r_{12}^2} - C_1^2$. Интеграл вида $\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + C)^3}} = \frac{z}{C\sqrt{(z^2 + C)}}$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{M_1}^{M_2} \frac{\bar{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} \times d\bar{l}_M &= \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^3} \frac{z}{C_0 \sqrt{(z^2 + C_0)}} \Bigg|_{-C_1}^{1-C_1} = \\ &= \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^3 C_0} \left[\frac{1 - C_1}{\sqrt{(1 - C_1)^2 + C_0}} + \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_0}} \right] = \\ &= \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^3 C_0} \left[\frac{\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{12} - \bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}^2 \sqrt{1 - 2C_1 + C_1^2 + C_0}} + \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{12}^2 \sqrt{C_1^2 + C_0}} \right] = \\ &= \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^4 C_0} \left[\frac{(\bar{r}_{12} - \bar{r}_{10}) \cdot \bar{r}_{12}}{\sqrt{\bar{r}_{12}^2 - 2(\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10}) + \bar{r}_{10}^2}} + \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10}} \right] = \\ &= \frac{\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}}{r_{12}^4 C_0} \left[\frac{-\bar{r}_{20} \cdot \bar{r}_{12} + \bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{20}} + \frac{\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10}} \right] = \frac{(\bar{r}_{10}^0 - \bar{r}_{20}^0) \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10}^2 r_{12}^2 - (\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12})^2} (\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\int_{M_1}^{M_2} \left(\frac{\bar{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} \times d\bar{l}_M \right) \cdot \bar{n}_{M_0} = \frac{(\bar{r}_{10}^0 - \bar{r}_{20}^0) \cdot \bar{r}_{12}}{r_{10}^2 r_{12}^2 - (\bar{r}_{10} \cdot \bar{r}_{12})^2} (\bar{r}_{10} \times \bar{r}_{12}) \cdot \bar{n}_{M_0}. \quad (5.4.62)$$

Таким образом, мы заменили интеграл по поверхности в формуле (5.4.56) на интеграл по контуру (5.4.57) и дали формулу его аналитического вычисления (5.4.62).

На рис. 5.4.6 представлено каноническое разбиение параметрической поверхности $0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq\pi$ и образ отображения данного разбиения на сфере.

На рис. 5.4.7, 5.4.8 приведены результаты численных расчетов для квадратурных сумм при следующих параметрах обработки:

1) сфера: $R = 1$;

2) плотность – сферическая функция: $n = 1, A_i = 1, B_i = 1, i = 0, \dots, n$.

На рис. 5.4.7 показана погрешность, а на рис 5.4.8 – динамика погрешности квадратурных формул на сфере.

На всех рисунках, где указано только число разбиений N_θ по переменной θ , подразумевается, что соответствующее число разбиений N_φ по переменной φ определяется по формуле $N_\varphi = 2N_\theta$, чтобы обеспечить равные шаги расчетной сетки по обоим переменным. Так как величина N_φ зависит от N_θ то в обозначении размерности расчетной сетки будем указывать первым значение N_θ , а затем значение N_φ : $[N_\theta, N_\varphi]$.

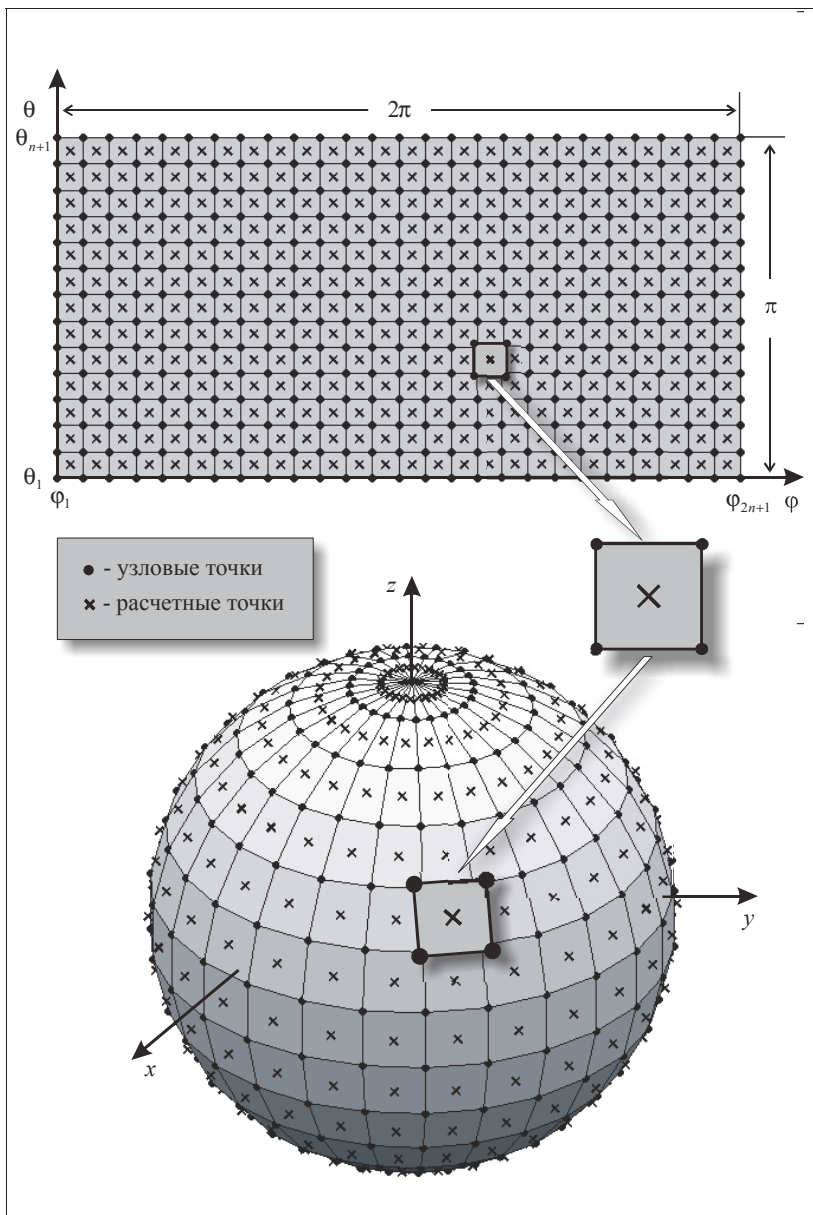


Рис. 5.4.6

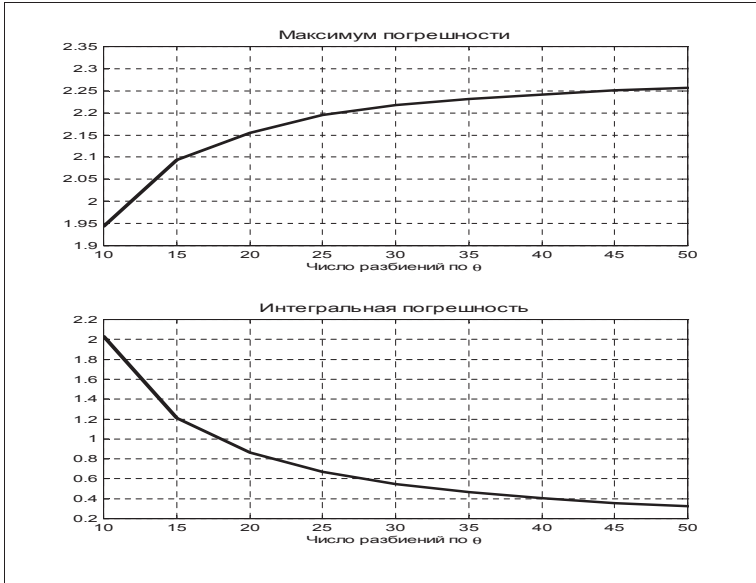


Рис. 5.4.7

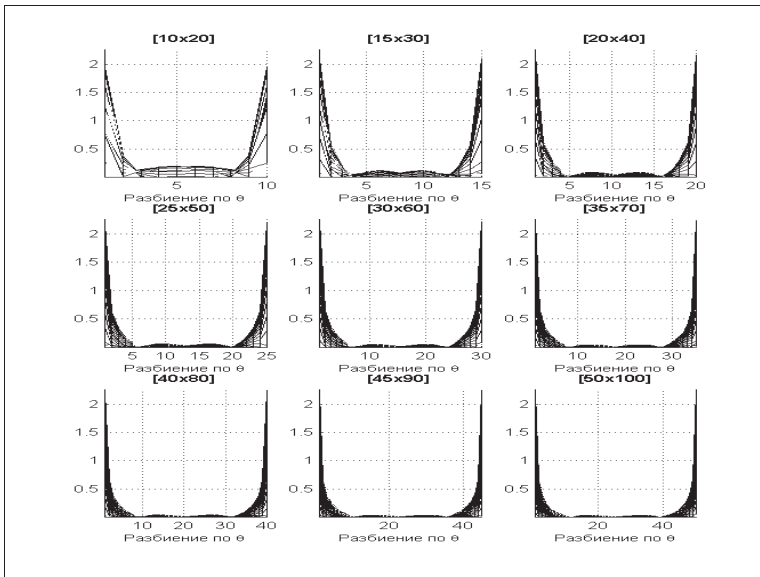


Рис. 5.4.8

5.5. Гиперсингулярный интеграл на торе

На примере сферы было показано, что если параметрическое представление поверхности является периодическим по одной из переменных, то по этой переменной удастся доказать равномерную по расчетным точкам $M_{0j,0m}$ сходимость квадратурных формул типа метода дискретных замкнутых вихревых рамок к точным значениям соответствующего гиперсингулярного интеграла. Поэтому целесообразно теперь рассмотреть замкнутую поверхность, параметрическое представление которой периодическое по обоим переменным. Примером такой поверхности является тор.

Итак, пусть теперь поверхность σ в уравнении (5.3.5) является тором. Напишем удобное параметрическое уравнение тора (рис. 5.5.1).

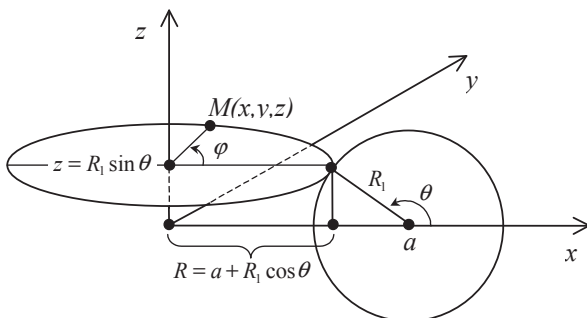


Рис. 5.5.1

Геометрически ясно, что тор получается вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей ее. Поэтому возьмем в плоскости $OXYZ$ окружность радиуса $R_1 > 0$ с центром в точке $(a, 0, 0)$ оси OX , $0 < R_1 < a$. Уравнение этой окружности в плоскости OXZ будет

$$\begin{cases} z = R_1 \sin \theta, \\ x = a + R_1 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (5.5.1)$$

Теперь напомним уравнение окружности в плоскости $z = R_1 \sin \theta$ радиуса $R = a + R_1 \cos \theta$ и с центром в точке $(0, 0, R_1 \sin \theta)$. Имеем

$$\begin{cases} z = R_1 \sin \theta, \\ x = (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi, \\ y = (a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi, \end{cases} \quad (5.5.2)$$

где θ – постоянная величина, а $\varphi \in [0, 2\pi]$. Если теперь менять θ тоже на $[0, 2\pi]$, то система уравнений (5.5.2) и будет параметрическим представлением тора, где $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi, 0 < R_1 < a$.

Для удобного представления $K_{T,N}(M, M_0)$ на торе, как и в случае сферы, найдем вначале удобное представление для величины $r_{MM_0}^2$ – квадрата расстояния между двумя точками на торе. Имеем

$$\begin{aligned} r_{MM_0}^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \\ &= [(a + R_1 \cos \theta_0) \cos \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(a + R_1 \cos \theta_0) \sin \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi]^2 + \\
& \quad + R_1^2 (\sin \theta_0 - \sin \theta)^2 = \\
& = (a + R_1 \cos \theta_0)^2 + (a + R_1 \cos \theta)^2 - \\
& - 2(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta)(\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) + \\
& \quad + 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} = \\
& = R_1^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 + 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + \\
& \quad + 2(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta)(1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) = \\
& = 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + \\
& \quad + 4(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta) \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}. \tag{5.5.3}
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательно можно написать

$$r_{MM_0}^2 = 4 \left[R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + (a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta) \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right]. \tag{5.5.4}$$

Орт \bar{n}_M нормали к тору в точке M найдем как векторное произведение касательных ортов $\bar{\tau}_\varphi$ и $\bar{\tau}_\theta$ в точке M к соответствующим координатным линиям на торе. Имеем

$$\begin{cases} x'_\varphi = -(a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi, \\ y'_\varphi = (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi, \\ z'_\varphi = 0, \end{cases} \tag{5.5.5}$$

т.е.

$$\bar{\tau}_\varphi = \frac{x'_\varphi \bar{i} + y'_\varphi \bar{j} + z'_\varphi \bar{k}}{\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2}} = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}. \tag{5.5.6}$$

Аналогично находим

$$\bar{\tau}_\theta = -\sin \theta \cos \varphi \bar{i} - \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}. \tag{5.5.7}$$

Запишем теперь выражения для внешней нормали в точке M и M_0 :

$$\begin{aligned}
\bar{n}_M &= \frac{\bar{\tau}_\varphi \times \bar{\tau}_\theta}{|\bar{\tau}_\varphi \times \bar{\tau}_\theta|} = \cos \theta \cos \varphi \bar{i} + \cos \theta \sin \varphi \bar{j} + \sin \theta \bar{k}, \\
\bar{n}_{M_0} &= \frac{\bar{\tau}_{\varphi_0} \times \bar{\tau}_{\theta_0}}{|\bar{\tau}_{\varphi_0} \times \bar{\tau}_{\theta_0}|} = \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \bar{i} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \bar{j} + \sin \theta_0 \bar{k}.
\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
(\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) &= \cos \theta \cos \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) + \sin \theta \sin \theta_0 = \\
&= -\cos \theta \cos \theta_0 (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) + \cos(\theta_0 - \theta) = \\
&= -2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta \cos \theta_0 - (1 - \cos(\theta_0 - \theta)) + 1 = \\
&= 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta \cos \theta_0.
\end{aligned} \tag{5.5.9}$$

Так как

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{MM_0} &= (x_0 - x)\bar{i} + (y_0 - y)\bar{j} + (z_0 - z)\bar{k} = \\
&= [(a + R_1 \cos \theta_0) \cos \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi] \bar{i} + \\
&+ [(a + R_1 \cos \theta_0) \sin \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi] \bar{j} + \\
&+ R_1 (\sin \theta_0 - \sin \theta) \bar{k}, \tag{5.5.10}
\end{aligned}$$

то, принимая во внимание еще формулу (5.5.8), получаем

$$\begin{aligned}
&(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) = \\
&= [a(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + R_1(\cos \theta_0 \cos \varphi_0 - \cos \theta \cos \varphi)] \cos \theta \cos \varphi + \\
&+ [a(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) + R_1(\cos \theta_0 \sin \varphi_0 - \cos \theta \sin \varphi)] \cos \theta \sin \varphi + \\
&+ R_1(\sin \theta_0 \sin \theta - \sin^2 \theta) = \\
&= -2a \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \cos \theta \cos \varphi + \\
&+ 2a \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \cos \theta \sin \varphi + \\
&+ R_1[\cos \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi] + \\
&+ R_1[\cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi] + \\
&+ R_1(\sin \theta_0 \sin \theta - \sin^2 \theta) = \\
&= 2a \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta \left(\sin \varphi \cos \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} - \cos \varphi \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \right) + \\
&+ R_1[\cos \theta_0 \cos \theta (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) - \cos^2 \theta] + \\
&+ R_1(\sin \theta_0 \sin \theta - \sin^2 \theta) = \\
&= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta + R_1 \cos \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi_0 - \varphi) - \\
&- R_1(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + R_1 \sin \theta_0 \sin \theta = \\
&= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta - R_1 \cos \theta_0 \cos \theta (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) - R_1 + \\
&+ R_1(\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta) = \\
&= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta - R_1(1 - \cos(\theta_0 - \theta)) - \\
&- 2R_1 \cos \theta_0 \cos \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} = \\
&= -2R_1 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} (a \cos \theta + R_1 \cos \theta_0 \cos \theta). \tag{5.5.11}
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) = -2R_1 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta (a + R_1 \cos \theta_0). \tag{5.5.12}$$

Далее

$$(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0}) = -(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) = 2R_1 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta_0 (a + R_1 \cos \theta). \tag{5.5.13}$$

Теперь заметим, что, так как

$$\begin{cases} (a + R_1 \cos \theta) \geq (a - R_1) > 0, \\ (a + R_1 \cos \theta_0) \geq (a - R_1) > 0, \end{cases}$$

то из предыдущих формул и (5.5.4) получаем для тора

$$\frac{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}}{r_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4R_1^2}, \quad (5.5.14)$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2}}{r_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta)}. \quad (5.5.15)$$

Поэтому для функции $K_{T,N}(M, M_0)$ на торе из формул (5.5.9), (5.5.11)–(5.5.15) получаем

$$K_{T,N}(M, M_0) = \frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{\lambda_1(M, M_0)}{r_{MM_0}}, \quad (5.5.16)$$

где функция $\lambda_1(M, M_0)$ гладкая на $\sigma \setminus M_0$ и ограниченная на торе.

Напомним [119], что если $x = x(U, V)$, $y = y(U, V)$, $z = z(U, V)$ есть параметрическое представление поверхности σ , то для дифференциала площади поверхности справедлива формула

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dUdV, \quad (5.5.17)$$

где

$$E = x_U'^2 + y_U'^2 + z_U'^2,$$

$$G = x_V'^2 + y_V'^2 + z_V'^2,$$

$$F = x_U'x_V' + y_U'y_V' + z_U'z_V'.$$

Поэтому, исходя из формулы (5.5.2), которая дает параметрическое представление тора, получаем (полагая $U = \theta$, $V = \varphi$)

$$E = R_1^2, \quad G = (a + R_1 \cos \theta)^2, \quad F = 0, \quad (5.5.18)$$

и окончательно имеем

$$d\sigma = R_1(a + R_1 \cos \theta) d\theta d\varphi. \quad (5.5.19)$$

Обозначая $I_{T,N}(M_0)$ – интеграл слева в уравнении (5.3.5) можем теперь написать для тора

$$I_{T,N}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(M) \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{\lambda_1(M, M_0)}{r_{MM_0}} \right) R_1(a + R_1 \cos \theta) d\theta d\varphi, \quad (5.5.20)$$

где $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$.

Аналогично, как это было сделано для сферы, введем величину $\tilde{r}_{MM_0}^2$ по формуле

$$\tilde{r}_{MM_0}^2 = 4 \left[R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + (a + R_1 \cos \theta_0)^2 \sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2} \right], \quad (5.5.21)$$

и запишем

$$\frac{1}{r_{MM_0}^3} = \frac{1}{\tilde{r}_{MM_0}^3} + \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} - \frac{1}{\tilde{r}_{MM_0}^3} \right). \quad (5.5.22)$$

Заметим теперь, что из формул (5.5.4) и (5.5.21) следует

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{MM_0}^2 - r_{MM_0}^2 &= 4 \sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2} (a + R_1 \cos \theta_0) R_1 (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \\ &= -8R_1 \sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2} (a + R_1 \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (5.5.23)$$

Аналогично формулам (5.5.14) и (5.5.15) можно записать

$$\frac{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}}{\tilde{r}_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4R_1^2}, \quad (5.5.24)$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\Phi_0 - \Phi}{2}}{\tilde{r}_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4(a + R_1 \cos \theta_0)^2} \leq \frac{1}{4(a - R_1)^2}, \quad (5.5.25)$$

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} \geq \frac{r_{MM_0}^2}{\tilde{r}_{MM_0}^2}, \quad \frac{\tilde{r}_{MM_0}^2}{r_{MM_0}^2} \geq \frac{V_2^2}{V_1^2}, \quad (5.5.26)$$

где $V_1 = a + R_1$, $V_2 = \min(R_1, a - R_1)$.

Из формул (5.5.14), (5.5.15), (5.5.24)–(5.5.26) следует, что выражение для $I_{T,N}(M_0)$ можно записать в виде

$$I_{T,N}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(M) \left(\frac{\lambda_3^*(M_0)}{\tilde{r}_{MM_0}^3} + \frac{\lambda_2^*(M, M_0)}{\tilde{r}_{MM_0}^2} + \frac{\lambda_1^*(M, M_0)}{\tilde{r}_{MM_0}} \right) d\theta d\varphi, \quad (5.5.27)$$

для произвольной точки $M_0 = M(x_0, y_0, z_0) = M(\varphi_0, \theta_0)$, где $\lambda_3^*(M_0) = R_1(a + R_1 \cos \theta_0)$, а $\lambda_2^*(M, M_0)$ и $\lambda_1^*(M, M_0)$ такие же, как и функция $\lambda_1(M, M_0)$ в формуле (5.5.16).

Перейдем теперь к построению квадратурной формулы для интеграла $I_{T,N}(M_0)$ на торе. Возьмем на осях $O^*\varphi$ и $O^*\theta$ точки $\varphi_i, \theta_i = (i-1)h$, $h = \frac{2\pi}{2n-1}$, $i = 1, \dots, 2n$, и точки $\varphi_{0i} = \varphi_i + \frac{h}{2}$, $\theta_{0i} = \theta_i + \frac{h}{2}$, $i = 1, \dots, 2n-1$. Тогда линии $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, \dots, 2n$, и $\theta = \theta_k$, $k = 1, \dots, 2n$, разобьют квадрат $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ плоскости $O^*\varphi\theta$ на прямоугольники $I_{i,k}$ с центрами в точках $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$, $i, k = 1, \dots, 2n-1$. Образ прямоугольника $I_{i,k}$ на торе T будем обозначать $\sigma_{i,k}$, а образ точки $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$ через $M_{0i,0k}$.

Замечание 5.5.1. Так как точек φ_{0i} , θ_{0i} нечетное число и они являются серединами отрезков $I_{\varphi,i} = [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $I_{\theta,i} = [\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = 1, \dots, 2n-1$, то точка π является одной из них. Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от сдвига этого отрезка на любое число, то можно считать, что заданная точка $M^*(\varphi_{0j}, \theta_{0m})$ является серединой квадрата I , т.е. имеет координаты (π, π) .

Теперь для интеграла $I_{T,N}(M_{0j,0m})$ на торе, как это было сделано для сферы, рассмотрим сумму

$$S_{T,N,n}(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} g(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} K_{T,N}(M, M_{0j,0m}) d\sigma_M, \quad (5.5.28)$$

где $j, m = 1, \dots, 2n-1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.5.1. Пусть функция $g(M)$ принадлежит $H_1(\alpha)$ на торе T . Тогда для всех точек $M_{0j,0m}$ выполняется оценка

$$|I_{T,N}(M_{0j,0m}) - S_{T,N,n}(M_{0j,0m})| \leq Ch^\alpha \ln n, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.5.29)$$

где константа C не зависит от n .

Доказательство. Используя формулу (5.5.27), записываем

$$\begin{aligned}
 & \left| I_{T,N}(M_{0j,0m}) - S_{T,N,n}(M_{0j,0m}) \right| \leq \\
 & \leq \left| \lambda_3^*(M_{0j,0m}) \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{[g(M) - g(M_{0i,0k})] d\varphi d\theta}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^3} \right| \right| + \\
 & + \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\lambda_2^*(M_{0j,0m}) [g(M) - g(M_{0i,0k})] d\varphi d\theta}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^2} \right| + \\
 & + \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\lambda_4^*(M_{0j,0m}) [g(M) - g(M_{0i,0k})] d\varphi d\theta}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}} \right| = \\
 & = \left| \lambda_3^*(M_{0j,0m}) I_{T,1}(M_{0j,0m}) + I_{T,2}(M_{0j,0m}) + I_{T,3}(M_{0j,0m}) \right|. \quad (5.5.30)
 \end{aligned}$$

По формуле (5.4.24) на квадрате $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ в плоскости $O^*\varphi\theta$ введем полярные координаты с центром в точке $M^*(\varphi_{0j}, \theta_{0m})$. Тогда в силу замечания 5.5.1 имеем $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \pi\sqrt{2}$. Теперь аналогично формуле (5.4.25) можно записать

$$\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^2 = 4r^2 \left[R_1^2 \frac{\sin^2 r \frac{\sin \alpha}{2}}{r^2 \frac{\sin^2 \alpha}{4}} \frac{\sin^2 \alpha}{4} + (a + R_1 \cos \theta_0)^2 \frac{\sin^2 r \frac{\cos \alpha}{2}}{r^2 \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \frac{\cos^2 \alpha}{4} \right], \quad (5.5.31)$$

откуда в силу соотношения (5.4.27) получаем

$$v_1^2 \geq \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}^2}{r^2} \geq (v_1^*)^2, \quad (5.5.32)$$

где v_1 определено в (5.5.26), а $v_1^* = \min\left(\frac{4}{3}\pi, R_1, a - R_1\right) > 0$.

Так как по условию теоремы 5.5.1 $g(M) \in H_1(\alpha)$, то с учетом неравенств (5.4.19), (5.4.23) и (5.5.26) получим

$$I_{T,3}(M_{0j,0m}) \leq A_1 h \int_I \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}} \leq \frac{A_1}{v_1^*} h \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi\sqrt{2}} dr = A_1^* h, \quad (5.5.33)$$

где константы $A_1, A_1^* > 0$ и не зависят от n .

Для $I_{T,2}(M_{0j,0m})$ можно написать

$$\begin{aligned}
 I_{T,2}(M_{0j,0m}) & \leq A_2 h \int_{I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}} + A_2^* \int_{I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{\mathcal{F}}_{MM_{0j,0m}}} = \\
 & = I_{T,2}^*(M_{0j,0m}) + I_{T,2}^{**}(M_{0j,0m}), \quad (5.5.34)
 \end{aligned}$$

где $I_{j,m} = [\varphi_j, \varphi_{j+1}] \times [\theta_m, \theta_{m+1}]$, а константы A_2 и A_2^* не зависят от n . Переходя к полярным координатам (5.4.24), получаем

$$I_{T,2}^*(M_{0j,0m}) \leq \frac{A_2}{(v_1^*)^2} h \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r} \leq B_2 h \ln n, \quad (5.5.35)$$

$$I_{T,2}^{**}(M_{0j,0m}) \leq \frac{A_2^*}{v_1^*} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} dr \leq B_2^* h, \quad (5.5.36)$$

где константы B_2 и B_2^* не зависят от n . Наконец, для $I_{T,1}(M_{0j,0m})$ сделаем преобразование, аналогичные тем, которые были сделаны для $I_{1,1}(M_{0j,0m})$ (см. (5.4.25)) в формуле (5.4.36). Получим

$$\begin{aligned} I_{T,1}(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{\Delta(M, M_{0i,0k})}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{g'_\varphi(M)(\varphi - \varphi_{0i})}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{g'_\theta(M)(\theta - \theta_{0k})}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| = \\ &= I_{T,1}^*(M_{0j,0m}) + I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m}) + I_{T,1}^{***}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (5.5.37)$$

Как и для $I_{1,1}^*(M_{0j,0m})$ в (5.4.44), переходя к полярным координатам (5.4.24), получаем

$$I_{T,1}^*(M_{0j,0m}) \leq A_3 h^\alpha. \quad (5.5.38)$$

Для $I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m})$ запишем

$$\begin{aligned} I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m}) &\leq \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \left| \frac{g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0j,0m})}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} \right| |\varphi - \varphi_{0i}| d\varphi d\theta + \\ &+ g'_\varphi(M_{0j,0m}) \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{\varphi - \varphi_{0i}}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (5.5.39)$$

Так как $|\varphi - \varphi_{0i}| \leq \frac{h}{2}$, $g'_\varphi \in H(\alpha)$ на $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и справедливы неравенства (5.5.26), (5.5.32), то переходя к полярным координатам (5.4.24), получаем

$$\begin{aligned} S_1 &\leq B_3 h \int_{I_{1,j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{MM_{0j}}^{3-\alpha}} + B_3^* \int_{I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{MM_{0j}}^{2-\alpha}} \leq \\ &\leq \frac{2\pi B_3 h}{(V_1^*)^{3-\alpha}} \int_{\frac{h}{2}}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} + \frac{2\pi B_3^*}{(V_1^*)^{2-\alpha}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \frac{dr}{r^{1-\alpha}} \leq \tilde{B}_3 \frac{h}{h^{1-\alpha}} + \tilde{B}_3^* h^\alpha \leq B_4 h^\alpha. \end{aligned} \quad (5.5.40)$$

Наконец, теперь представляя

$$\varphi - \varphi_{0i} = (\varphi - \varphi_{0j}) + (\varphi_{0j} - \varphi_{0i})$$

и учитывая, что $\varphi_{0j} = \pi$ и точки φ_{0i} симметричны относительно точки φ_{0j} , получаем

$$S_2 = 0. \quad (5.5.41)$$

Таким образом, имеем

$$I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m}) \leq B_4 h^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (5.5.42)$$

Аналогичная оценка вида (5.5.42) справедлива и для $I_{T,1}^{***}(M_{0j,0m})$.

Проведенные выше рассуждения доказывают теорему 5.5.1.

Приведем некоторые примеры численных расчетов. Будем рассматривать общий вид квадратурных формул при различных разбиениях параметрической поверхности $0\varphi\theta = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Наша задача показать, что значения квадратурных формул стабилизируются с увеличением разбиения параметрической поверхности.

При вычислении квадратурных формул будем задавать плотность уравнения в виде сферической функции (5.2.7).

На рис. 5.5.2 представлено каноническое разбиение параметрической поверхности $0\varphi\theta = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, а также образ отображения данного разбиения на торе.

На рис. 5.5.3 приведена динамика изменения значений квадратурных сумм при следующих параметрах обработки:

- 1) тор: $a = 5, R_1 = 1$;
- 2) плотность – сферическая функция: $n = 1, A_i = 1, B_i = 1, i = 0, \dots, n$.

На всех рисунках, где указано только число разбиений N_θ по переменной θ , подразумевается, что соответствующее число разбиений N_φ по переменной φ определяется по формуле $N_\varphi = N_\theta$, чтобы обеспечить равные шаги расчетной сетки по обоим переменным.

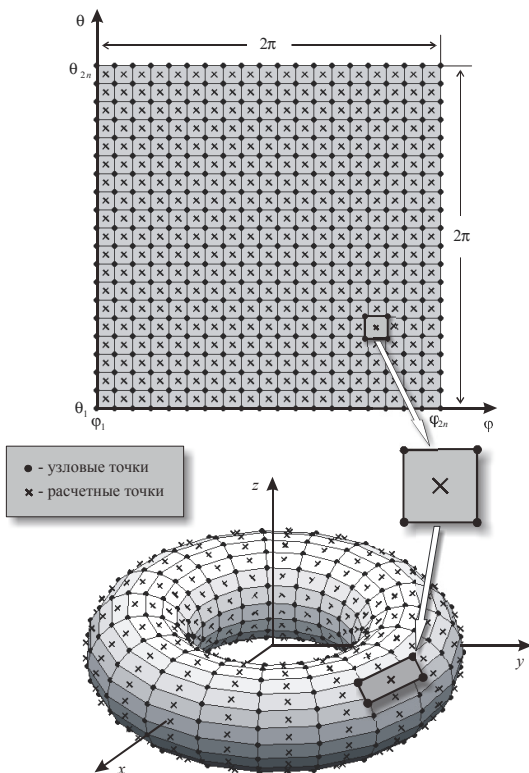


Рис. 5.5.2

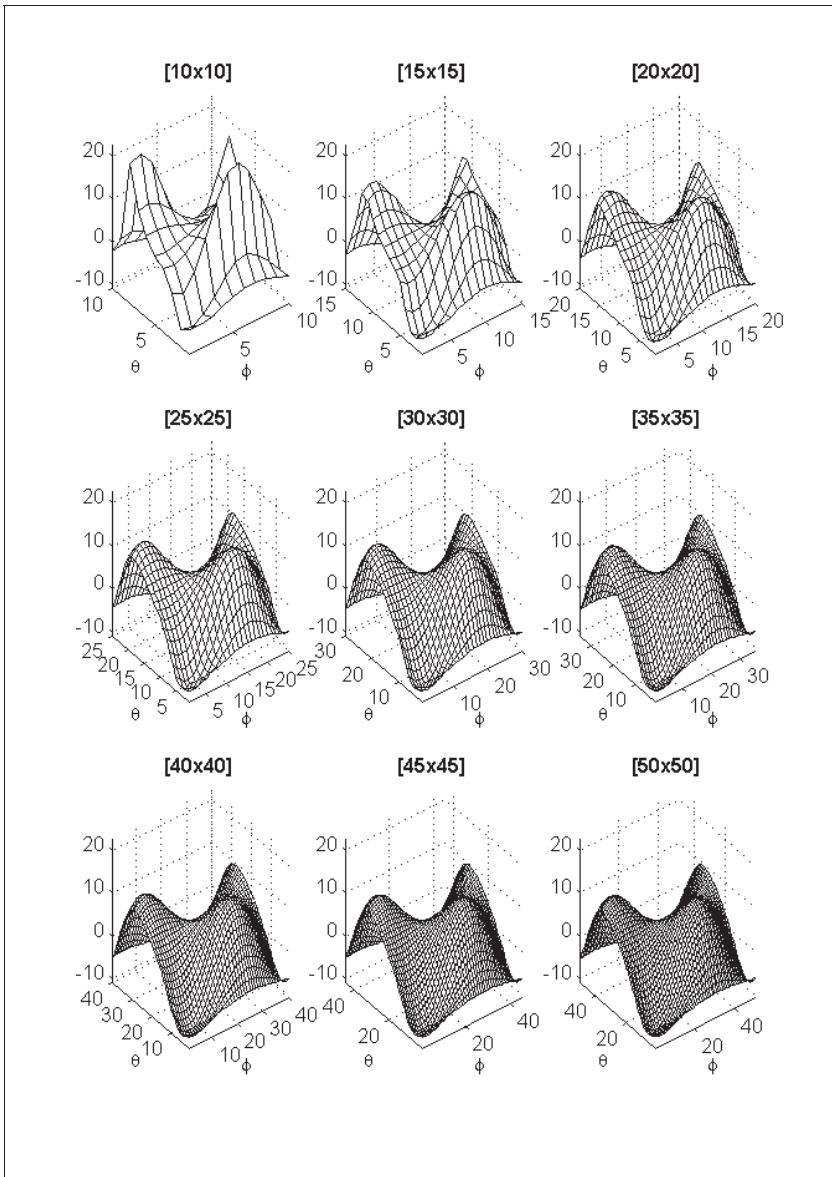


Рис. 5.5.3

Глава 6. Метод численного решения одномерных сингулярных интегральных уравнений первого рода

6.1. Характеристическое уравнение на отрезке

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{t_0 - t} = f(t_0). \quad (6.1.1)$$

Решение индекса $\kappa = 0, 1, -1$ этого уравнения задается формулой [37, 98]

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} R_\kappa(t) \left[\int_a^b R_\kappa^{-1}(t_0) \frac{f(t_0)dt_0}{t - t_0} - \nu_\kappa C\pi \right], \quad (6.1.2)$$

где $\nu_1 = 1, \nu_0 = \nu_{-1} = 0$,

$$R_0(t) = \sqrt{\frac{b-t}{t-a}}, \quad R_1(t) = \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}, \quad R_{-1}(t) = R_1^{-1}(t).$$

Решение с особенностью вида $\sqrt{(t-a)/(b-t)}$ рассматривать не будем, так как из приведенных рассуждений будет видно, что надо изменить в этом случае.

Пусть множества $E = \{t_\kappa, \kappa = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j = 0, 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[a, b]$ с шагом h . Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1.1. Пусть функция $f(t)$ принадлежит классу $H(\lambda)$ на $[a, b]$. Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.1.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k)h = C, \quad (6.1.4)$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (6.1.5)$$

и решением $\varphi(t)$ индекса $\kappa = 0, 1, -1$ соответственно в (6.1.2) уравнения (6.1.1) выполняется неравенство

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \theta_n(t_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.1.6)$$

в котором величина $\theta_n(t_k)$ удовлетворяет неравенствам:

1) для всех точек $t_k \in [a + \delta, b - \delta]$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало,

$$\theta_n(t_k) \leq O_\delta(h^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 0; \quad (6.1.7)$$

2) для всех точек $t_k \in [a, b]$

$$\sum_{k=1}^n \theta_n(t_k)h \leq O(h^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 0. \quad (6.1.8)$$

Доказательство. Заметим вначале, что в силу результатов о квадратурных формулах для сингулярного интеграла на отрезке в 2.3 системы (6.1.3)–(6.1.5) аппроксимируют уравнение (6.1.1). Для определителей систем (6.1.3)–(6.1.5) получим

$$D_{\kappa}^{(n)} = h^n \Delta_{\kappa}^{(n)}, \quad \kappa = 0, 1, -1, \quad (6.1.9)$$

$$\Delta_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_{01} - t_1 & \cdots & t_{01} - t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ t_{0n} - t_1 & \cdots & t_{0n} - t_n \end{vmatrix}, \quad \Delta_1^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_{01} - t_1 & \cdots & t_{01} - t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ t_{0n-1} - t_1 & \cdots & t_{0n-1} - t_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{-1}^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_{00} - t_1 & \cdots & t_{00} - t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ t_{0n} - t_1 & \cdots & t_{0n} - t_n \end{vmatrix}.$$

Несложно показать [18], что

$$\Delta_{\kappa}^{(n)} = \frac{\prod_{1 \leq m < p \leq n} (t_m - t_p) \prod_{1 - \zeta(-\kappa) \leq m < p \leq n - \zeta(\kappa)} (t_{0p} - t_{0m})}{\prod_{m=1-\zeta(-\kappa)}^n \prod_{p=1}^n (t_{0m} - t_p)}, \quad (6.1.10)$$

где $\zeta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\zeta(x) = 0$ при $x \leq 0$. Покажем это для $\Delta_0^{(n)}$, так как для остальных будет аналогично, с некоторыми очевидными изменениями.

Вычтем последнюю строчку в определителе $\Delta_0^{(n)}$ из всех предыдущих и из каждого столбца вынесем множитель $1/(t_{0n} - t_k)$, $k = 1, \dots, n$, а из каждой строчки – множитель $t_{0n} - t_{0m}$, $m = 1, \dots, n-1$. Получим

$$\Delta_0^{(n)} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{t_{0n} - t_k} \prod_{m=1}^{n-1} (t_{0n} - t_{0m}) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_{01} - t_1 & \cdots & t_{01} - t_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 1 \\ t_{0n-1} - t_1 & \cdots & t_{0n-1} - t_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем в последнем определителе последний столбец из всех предыдущих, вынесем множители из каждой строчки и столбца и разложим полученный после этого определитель по последней строчке. Получим

$$\Delta_0^{(n)} = \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (t_{0n} - t_{0m})(t_m - t_n)}{\prod_{m,p=1}^n (t_{0n} - t_p)(t_{0m} - t_n)} \Delta_0^{(n-1)}.$$

Метод математической индукции заканчивает доказательство формулы $\Delta_0^{(n)}$.

Из формулы (6.1.10) видно, что $D_{\kappa}^{(n)} \neq 0$ при любом n . Применяя правило Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений, получаем

$$\varphi_n(t_k) = \frac{D_{\kappa,k}^{(n)}}{D_{\kappa}^{(n)}} = \frac{1}{h} \sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)} \frac{(-1)^{j+k} \Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)}}{\Delta_{\kappa}^{(n)}} f(t_{0j}) + \nu_{\kappa} \frac{(-1)^{n+k} \Delta_{1(n,k)}^{(n)}}{h \Delta_1^{(n)}} C, \quad (6.1.11)$$

где V_κ определена в (6.1.2), а $\zeta(x)$ в (6.1.10); $D_{\kappa,k}^{(n)}$ и $\Delta_{\kappa,k}^{(n)}$ получаются соответственно из $D_\kappa^{(n)}$ и $\Delta_\kappa^{(n)}$ заменой k -го столбца на столбец из свободных членов правой части системы, а $\Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)}$ – из $\Delta_\kappa^{(n)}$ вычеркиванием j -й строчки и k -го столбца. Для $\Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)}$ так же как и для $\Delta_\kappa^{(n)}$, находим

$$\Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq m < p \leq n \\ m, p \neq k}} (t_m - t_p) \prod_{\substack{1 - \zeta(-\kappa) \leq m < p \leq n - \zeta(\kappa) \\ m, p \neq j}} (t_{0p} - t_{0m})}{\prod_{\substack{m=1-\zeta(-\kappa) \\ m \neq j}}^{n-\zeta(\kappa)} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n (t_{0m} - t_p)} \quad (6.1.12)$$

Поэтому формула (6.1.11) принимает вид

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{h} I_{\kappa,k}^{(n)} \sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)} \frac{1}{h} I_{\kappa,0j}^{(n)} \frac{f(t_{0j})h}{t_k - t_{0j}} + V_\kappa \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n)} C, \quad k=1, \dots, n, \quad (6.1.13)$$

где

$$\begin{aligned} I_{0,k}^{(n)} &= \prod_{m=1}^n (t_{0m} - t_k) \Big/ \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (t_m - t_k), \\ I_{0,0j}^{(n)} &= \prod_{m=1}^n (t_{0j} - t_m) \Big/ \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (t_{0j} - t_{0m}), \\ I_{1,k}^{(n)} &= I_{0,k}^{(n)} \frac{1}{t_{0n} - t_k}, \quad I_{1,0j}^{(n)} = I_{0,0j}^{(n)} (t_{0n} - t_{0j}), \\ I_{-1,k}^{(n)} &= I_{0,k}^{(n)} (t_k - t_{00}), \quad I_{-1,0j}^{(n)} = I_{0,0j}^{(n)} \frac{1}{t_{0j} - t_{00}}. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\frac{1}{h} I_{0,k}^{(n)} = \frac{1}{2} P_{k-1} P_{n-k}, \quad (6.1.14)$$

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= \prod_{m=1}^{k-1} \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_m - t_k} \right), \quad P_{n-k} = \prod_{m=k+1}^n \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_m - t_k} \right), \quad P_0 = 1, \\ \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} &= \frac{1}{2} P_{0,j-1} P_{0,n-j}, \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

$$P_{0,j-1} = \prod_{m=1}^{j-1} \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_{0j} - t_{0m}} \right), \quad P_{0,n-j} = \prod_{m=j+1}^n \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_{0j} - t_{0m}} \right), \quad P_{0,0} = 1.$$

Напомним, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} t_k &= a + kh, \quad t_{0k} - t_k = \frac{h}{2}, \quad h = \frac{b-a}{n+1}, \\ t_m - t_k &= t_{0m} - t_{0k} = h(m-k). \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Следовательно, формулы (6.1.14)–(6.1.16) дают

$$P_{k-1} = \prod_{m=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1/2}{m} \right), \quad P_{n-k} = \prod_{m=1}^{n-k} \left(1 + \frac{1/2}{m} \right). \quad (6.1.17)$$

В [120] имеется формула из теории гамма-функции

$$\frac{(1+\beta)(2+\beta)\dots(n+\beta)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{n^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O(n^{\beta-1}), \quad (6.1.18)$$

которую можно записать так:

$$\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{\beta}{m}\right) = \frac{n^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O(n^{\beta-1}).$$

Так как нас будет интересовать формула (6.1.18) с точностью до величин порядка n , то можно написать

$$\prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{\beta}{m}\right) = \frac{(n+1)^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O((n+1)^{\beta-1}). \quad (6.1.18)^*$$

Полагая теперь $\beta = \pm 1/2$, получаем

$$P_{k-1} = \frac{k^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + O(k^{-3/2}), \quad P_{n-k} = \frac{(n-k+1)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + O((n-k+1)^{-1/2}). \quad (6.1.19)$$

Напомним известные по [118] формулы

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(a+1) = \Gamma(a)a, \quad \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2.$$

Таким образом,

$$P_{k-1}P_{n-k} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{n-k+1}{k}} + O(k^{-1/2}(n-k+1)^{-1/2}) + O(k^{-3/2}(n-k+1)^{1/2}). \quad (6.1.20)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} P_{0,j-1} &= \prod_{m=1}^{j-1} \left(1 + \frac{1/2}{m}\right), \quad P_{0,n-j} = \prod_{m=1}^{n-j} \left(1 - \frac{1/2}{m}\right), \\ P_{0,j-1}P_{0,n-j} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{j+1/2}{n-j+1/2}} + O\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \left(n - j + \frac{1}{2}\right)^{-1/2}\right) + \\ &+ O\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(n - j + \frac{1}{2}\right)^{-3/2}\right). \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

Отметим, что в силу формулы (6.1.16) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{b-t_k} &= \sqrt{h(n-k+1)}, \quad \sqrt{t_k-a} = \sqrt{kh}, \\ \sqrt{b-t_{0j}} &= \sqrt{h(n-j+1/2)}, \quad \sqrt{t_{0j}-a} = \sqrt{h(j+1/2)}. \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Из формул (6.1.22) следует, что формулы (6.1.20) и (6.1.21) можно записать в виде

$$P_{k-1}P_{n-k} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{b-t_k}{t_k-a}} + A_{0(n,k)}, \quad (6.1.23)$$

$$A_{0(n,k)} = O\left(\frac{h}{\sqrt{(b-t_k)(t_k-a)}}\right) + O\left(\frac{h(b-t_k)^{1/2}}{(t_k-a)^{3/2}}\right),$$

$$P_{0,j-1}P_{0,n-j} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{t_{0j}-a}{b-t_{0j}}} + B_{0(n,j)}, \quad (6.1.24)$$

$$B_{0(n,j)} = O\left(\frac{h}{\sqrt{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})}}\right) + O\left(\frac{h(t_{0j}-a)^{1/2}}{(b-t_{0j})^{3/2}}\right).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что для $\kappa = 1, -1$ имеем

$$\frac{1}{h} I_{\kappa,k}^{(n)} = \frac{1}{\pi} [(t_k-a)(b-t_k)]^{-\kappa/2} + A_{\kappa(n,k)}, \quad (6.1.25)$$

$$A_{\kappa(n,k)} = O\left(\frac{h}{[(t_k-a)(b-t_k)]^{3/2-\zeta(-\kappa)}}\right),$$

$$\frac{1}{h} I_{\kappa,0j}^{(n)} = \frac{1}{\pi} [(t_{0j} - a)(b - t_{0j})]^{k/2} + B_{\kappa(n,0j)}, \quad (6.1.26)$$

$$B_{\kappa(n,0j)} = O\left(\frac{h}{[(t_{0j} - a)(b - t_{0j})]^{3/2 - \zeta(\kappa)}}\right).$$

Подставляя теперь формулы (6.1.23)–(6.1.26) в формулу (6.1.13) и пользуясь рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены при доказательстве теоремы 2.3.2, получаем

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{\pi^2} R_\kappa(t_k) \int_a^b R_\kappa^{-1}(t_0) \frac{f(t_0) dt_0}{t_k - t_0} + V_\kappa R_\kappa(t_k) C + \theta_\kappa(t_k), \quad (6.1.27)$$

$$k = 1, \dots, n,$$

где величина $|\theta_\kappa(t_k)|$ удовлетворяет неравенствам (6.1.7) и (6.1.8). Теорема 6.1.1 доказана.

Замечание 6.1.1. Поясним смысл неизвестной γ_{0n} в системе (6.1.5). Эта система без γ_{0n} переопределена (число уравнений больше числа неизвестных) и, как правило, несовместна. С другой стороны, эта система должна аппроксимировать уравнение (6.1.1), имеющее единственное решение индекса $\kappa = -1$ при выполнении условия [37, 98]

$$\int_a^b \frac{f(t_0) dt_0}{\sqrt{(t_0 - a)(b - t_0)}} = 0. \quad (6.1.28)$$

Поэтому уровень рассогласованности системы (6.1.5) без γ_{0n} должен понижаться, и, следовательно, если эта система с γ_{0n} совместна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{0n} = 0$. Но это надо доказать.

Таким образом, γ_{0n} делает определенной систему (6.1.5), и поэтому будем называть ее регуляризирующим фактором. Для нахождения γ_{0n} опять воспользуемся правилом Крамера:

$$\gamma_{0n} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{h} I_{-1,0j}^{(n)} f(t_{0j}) h = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^n \frac{f(t_{0j}) h}{\sqrt{(t_{0j} - a)(b - t_{0j})}} + O(h^{1/2}). \quad (6.1.29)$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{0n} = 0$ тогда и только тогда, когда решение индекса $\kappa = -1$ для уравнения (6.1.1) существует. Следовательно, поведение γ_{0n} при расчетах является индикатором наличия решения индекса $\kappa = -1$.

Замечание 6.1.2. Во многих приложениях (аэродинамике, теории упругости и т.д.) часто требуется вычислить не саму функцию $\varphi(t)$, а интеграл $\int_a^b \psi(t) \varphi(t) dt$, где $\psi(t) \in H$ на $[a, b]$. Из неравенств (6.1.6) и (6.1.8) следует, что для вычисления указанного интеграла можно воспользоваться формулой прямоугольников по точкам t_k , $k = 1, \dots, n$, причем брать в этих точках не функцию $\varphi(t)$, а значение $\Phi_n(t_k)$, т.е. выполняется неравенство

$$\left| \int_a^b \psi(t) \varphi(t) dt - \sum_{k=1}^n \psi(t_k) \varphi_n(t_k) h \right| \leq O(h^{\lambda_3}), \quad \lambda_3 > 0. \quad (6.1.30)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \psi(t) \varphi(t) dt - \sum_{k=1}^n \psi(t_k) \varphi_n(t_k) h \right| \leq \left| \int_a^{b+h} \psi(t) \varphi(t) dt \right| + \\ & + \left| \int_{a+h}^b \psi(t) \varphi(t) dt - \sum_{k=1}^n \psi(t_k) \varphi_n(t_k) h \right| + \left| \sum_{k=1}^n \psi(t_k) (\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)) h \right| \leq \\ & \leq O(h^{\lambda_4}) + M \sum_{k=1}^n \theta_n(t_k) h \leq O(h^{\lambda_4}), \end{aligned}$$

где $M = \max_{t \in [a, b]} |\psi(t)|$.

Замечание 6.1.3. Теорема 6.1.1 останется справедливой и в том случае, когда функция $f(t)$ не принадлежит классу H на отрезке $[a, b]$, а принадлежит классу H^* , т.е. имеет вид

$$f(t) = \frac{\psi(t)}{(t-a)^\nu (b-t)^\mu}, \quad (6.1.31)$$

где $\psi(t) \in H$ на $[a, b]$.

При этом теорема 6.1.1 для системы (6.1.3) останется справедливой при $0 \leq \nu < 1$, $0 \leq \mu < 1/2$, для системы (6.1.4) – при $0 \leq \nu$, $\mu < 1$. для системы (6.1.5) – при $0 \leq \nu$, $\mu < 1/2$. То, что функции (6.1.2) будут решениями уравнения (6.1.1) при указанных в данном замечании ограничениях, следует из формулы Пуанкаре–Бертрана.

Замечание 6.1.4. В задаче стационарного обтекания профиля с закрылком приходится рассматривать случай, когда функция $f(t) \in H$ на отрезках $[a, q]$ и $[q, b]$ и терпит разрыв первого рода в точке q . Если при этом множества $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j=0, 1, \dots, n\}$ выбрать так, чтобы точка q лежала посередине между ближайшими к ней точками из множеств E и E_0 (см. замечание 2.3.2), то теорема 6.1.1 останется справедливой, только неравенство (6.1.7) будет справедливо для всех точек $t_k \in [a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta]$. Действительно, для теоремы 6.1.1 важно было взаимное расположение точек $t_k, k=1, \dots, n$, и $t_{0j}, j=0, 1, \dots, n$, и чтобы для этих точек были справедливы квадратурные формулы сингулярного интеграла на отрезке, изученные в параграфе 2.3.

Результаты параграфа 2.3 и замечаний 6.1.3 и 6.1.4 данного параграфа позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.1.2. Пусть функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{\psi(t)}{(t-a)^\nu |q-t|^\beta (b-t)^\mu}, \quad (6.1.32)$$

где $\psi(t) \in H$ на $[a, b]$, $a < q < b$, и пусть на отрезке $[a, b]$ взяты множества E и E_0 с шагом $h = (b-a)/(n+1)$ так, как это указано в замечании 6.1.4. Тогда:

- 1) при $0 \leq \nu$, $\beta < 1$ и $0 \leq \mu < 1/2$ между решением системы линейных алгебраических уравнений (6.1.3) и решением (6.1.2) индекса $\kappa = 0$ уравнения (6.1.1);
- 2) при $0 \leq \nu$, $\beta, \mu < 1$ между решением системы линейных алгебраических уравнений (6.1.4) и решением (6.1.2) индекса $\kappa = 1$ уравнения (6.1.1);
- 3) при $0 \leq \nu$, $\mu < 1/2$, $0 \leq \beta < 1$ между решением системы линейных алгебраических уравнений (6.1.5) и решением (6.1.2) индекса $\kappa = -1$ уравнения (6.1.1) выполняется соотношение (6.1.6), в котором величина $\theta(t_k)$ для всех точек

$t_k \in [a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta]$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало, удовлетворяет неравенству

$$\theta(t_k) \leq O(h^\lambda), \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad (6.1.33)$$

и неравенству (6.1.8) для всех точек $t_k \in [a, b]$.

Заметим, что если $f(t)$ терпит разрыв первого рода в точке q , то она может быть представлена в виде (6.1.32), где $\beta > 0$ сколь угодно мало. В этом случае решения (6.1.2) уравнения (6.1.1) будут иметь в точке q логарифмическую особенность. Однако расчеты показали, что хорошие результаты получаются, если точку q сделать одной из точек t_{0j} при $j = j_q$ и правую часть в системах (6.1.3)–(6.1.5) брать следующим образом: $f(t_{0j})$ при $j \neq j_q$, $\frac{1}{2}[f(t_{0j_q} - 0) + f(t_{0j_q} + 0)]$ при $j = j_q$, где $f(t_{0j_q} - 0)$ и $f(t_{0j_q} + 0)$ – односторонние пределы функции $f(t_0)$ в точке q .

Из формулы (6.1.2) видно, что решение $\varphi(t)$ индекса $\kappa = 1$ уравнения (6.1.1) зависит от одной произвольной константы C , являющейся интегралом от этого решения по отрезку $[a, b]$. Но из формулы (6.1.2) видно, что константа, а следовательно, и решение $\varphi(t)$ будут однозначно определены, если задать значение $\varphi(q)$ в какой-нибудь точке $q \in [a, b]$. Чтобы найти численное значение этого решения из системы (6.1.4), надо определить C_q , соответствующую константу, и подставить ее в последнее уравнение этой системы. Нахождение C_q потребует дополнительных затрат в вычислениях, особенно при наличии в уравнении регулярной части. Покажем, как обойтись без нахождения константы C_q , зная только $\varphi(q)$. Справедлива следующая

Теорема 6.1.3. Пусть $f(t)$ принадлежит классу H на $[a, b]$ и пусть множества E и E_0 образуют каноническое разбиение отрезка $[a, b]$ с шагом h . Обозначим через t_{k_q} ближайшую слева к точке $q \in [a, b]$ точку множества E . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_q}}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}) + \frac{\varphi(q)h}{t_{k_q} - t_{0j}}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (6.1.34)$$

и решением $\varphi(t)$ индекса $\kappa = 1$ уравнения (6.1.1)

$$\varphi(t) = -\frac{q-t}{\pi^2 \sqrt{(t-a)(b-t)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)} f(t_0) dt_0}{(t-t_0)(q-t_0)} + \varphi(q) \sqrt{\frac{(q-a)(b-q)}{(t-a)(b-t)}} \quad (6.1.35)$$

выполняется соотношение (6.1.6).

Доказательство. Как и в теореме 6.1.1, можно показать, что определитель системы (6.1.34) отличен от нуля, и применить правило Крамера:

$$\varphi_n(t_k) = -(t_k - t_{k_q}) \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n)} \left[f(t_{0j}) + \frac{\varphi(q)h}{t_{k_q} - t_{0j}} \right] \frac{h}{(t_k - t_{0j})(t_{0j} - t_{k_q})}, \quad (6.1.36)$$

$$k = 1, \dots, n; \quad k \neq k_q.$$

Если обозначить $S_1(t_k)$ – первую сумму в формуле (6.1.13) для $\kappa = 1$, то можно написать

$$\begin{aligned}\varphi_n(t_k) &= S_1(t_k) - S_1(t_{k_q}) - \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n)} \frac{\varphi(q)hh}{(t_{k_q} - t_{0j})(t_k - t_{0j})} + \\ &+ \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n)} \frac{\varphi(q)hh}{(t_{k_q} - t_{0j})^2} = S_1(t_k) - S_1(t_{k_q}) - M_1 + M_2.\end{aligned}$$

Используя рассуждения, проведенные при доказательстве формулы Пуанкаре–Бертрана, получаем

$$M_2 = \varphi(q) \sqrt{\frac{(q-a)(b-q)}{(t_k-a)(b-t_k)}} + O\left(\frac{h^{1/2}}{\sqrt{(t_k-a)(b-t_k)}}\right). \quad (6.1.37)$$

Далее, учитывая, что

$$-\int_a^b \frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)} dt_0}{t_{k_q} - t_0} + \int_a^b \frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)} dt_0}{t_k - t_0} = \pi(t_k - t_{k_q}),$$

имеем

$$|M_1| \leq \left[|\varphi(q)|h + \frac{h|\varphi(q)|}{t_k - t_{k_q}} \frac{h^{1/2}}{\sqrt{(t_k-a)(b-t_k)}} \right] O(|\ln h|). \quad (6.1.38)$$

Учитывая формулы (6.1.37) и (6.1.38) и доказательство теоремы 6.1.1, получаем справедливость теоремы 6.1.3.

В задаче обтекания профиля с эжектированием (всасыванием) воздуха, которая подробнее будет описана в разделе об аэродинамике, приходим к необходимости численно решать уравнение (6.1.1) в классе функций, имеющих вид

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{q-t},$$

где $\psi(t) \in H$ в окрестности точки $q \in (a, b)$.

В последующих теоремах 6.1.4, 6.1.5 будем брать множества E и E_0 так, чтобы заданная точка q лежала в множестве E_0 при $j = j_q$.

Теорема 6.1.4. Пусть функция $f(t) \in H$ на $[a, b]$ и известно значение функции $\psi(t)$ в точке q . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_q}}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}) - \frac{h\psi(q)}{(t_{0j} - t_{j_q})(q - t_{j_q})}, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq j_q, \quad (6.1.39)$$

и решением $\varphi(t)$ уравнения (6.1.1)

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \left[\int_a^b \sqrt{\frac{t_0-a}{b-t_0}} \frac{f(t_0) dt_0}{t-t_0} - \frac{\pi^2}{q-t} \sqrt{\frac{q-a}{b-q}} \psi(q) \right] \quad (6.1.40)$$

выполняется соотношение (6.1.6), в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенству (6.1.7) для всех $t_k \in [a + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, b - \delta]$, $\delta > 0$ сколь угодно мало, и неравенству (6.1.8).

Доказательство. Как и в предыдущих теоремах, показывается, что определитель системы (6.1.39) отличен от нуля при любом n . Поэтому, применяя правило Крамера к этой системе, получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t_k) = & -\frac{1}{h} I_{0,k}^{(n)} \frac{1}{q-t_k} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0,j}^{(n)} \frac{(q-t_{0j})f(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}} - \right. \\
& - \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0,j}^{(n)} \frac{(q-t_{0j})}{t_{j_q}-t_{0j}} f(t_{0j})h - \psi(q) \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0,j}^{(n)} \frac{h^2}{(t_{j_q}-t_{0j})^2} + \\
& \left. + 2\psi(q) \frac{t_k-q}{t_k-t_{j_q}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0,j}^{(n)} \left(\frac{1}{t_k-t_{0j}} - \frac{1}{t_{j_q}-t_{0j}} \right) h \right]. \quad (6.1.41)
\end{aligned}$$

Используя теперь доказательство теоремы 6.1.1 и формулы Пуанкаре–Бертрана [70], получаем

$$\varphi_n(t_k) = \varphi(t_k) + \tilde{\theta}(t_k),$$

где величина $|\tilde{\theta}(t_k)|$ удовлетворяет необходимым соотношениям.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 6.1.5. Пусть функция $f(t)$ принадлежит классу H на $[a, b]$. Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k} = f(t_{0j}), \quad j=0, 1, \dots, n; \quad j \neq j_q, \quad (6.1.42)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k} = f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n; \quad j \neq j_q,$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k)h = C, \quad j = n+1, \quad (6.1.43)$$

и решениями $\varphi(t)$ уравнения (6.1.1) соответственно

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{q-t} \int_a^b \frac{(q-t_0)f(t_0)dt_0}{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)(t-t_0)}}, \quad (6.1.44)$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} R_0(t) \frac{1}{q-t} \left[\int_a^b R_0^{-1}(t_0) \frac{(q-t_0)f(t_0)dt_0}{t-t_0} - \pi C \right], \quad (6.1.45)$$

для последнего

$$\int_a^b \varphi(t)dt = C \quad (6.1.46)$$

выполняется соотношение (6.1.6) так же, как и в теореме 6.1.4.

Замечание 6.1.5. В теореме 6.1.4 можно полагать известным значение искомого решения не в точке t_{j_q} (перед точкой t_{0j_q}), а в точке t_{j_q+1} (за точкой t_{0j_q}). Расчеты, сделанные В. В. Демидовым [27], хорошо это подтверждают. Он же заметил там, что если обозначить $\varphi_n^{(1)}(t_k)$ – решение системы (6.1.39) при $k \neq j_q$, а $\varphi_n^{(2)}(t_k)$ – при $k \neq j_{q+1}$, то значение $(\varphi_n^{(1)}(t_k) + \varphi_n^{(2)}(t_k))/2$ более точно дает значение точного решения $\varphi(t_k)$, $k=1, \dots, n$, чем каждое из слагаемых. Дадим объяснение этому факту [155] и покажем, какую систему вместо системы (6.1.39) лучше брать.

Функция $\varphi(t)$ в системах (6.1.39), (6.1.42) и (6.1.43) аппроксимируется следующим образом. Запишем функцию $\varphi(t)$ так:

$$\varphi(t) = \frac{\psi(q)}{q-t} + \frac{\psi(t) - \psi(q)}{q-t}. \quad (6.1.47)$$

Когда t достаточно близко к q , второй член справа имеет конечное значение (предполагаем $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки q), а первый член становится бесконечно большим при $h \rightarrow 0$ ($\psi(q) \neq 0$). Поэтому в системе (6.1.39) было взято

$$\varphi_n^{(1)}(t_{j_q}) = \frac{\psi(q)}{q-t_{j_q}} \text{ и } \varphi_n^{(2)}(t_{j_{q+1}}) = \frac{\psi(q)}{q-t_{j_{q+1}}}.$$

Таким образом, эти значения взяты достаточно грубо (отличаются от истинного на конечную величину).

Напишем теперь функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \frac{\psi(q)}{q-t} + \lambda(t), \quad (6.1.48)$$

где $\lambda(t)$ будем предполагать непрерывно дифференцируемой в окрестности точки q .

Пусть $t_1 = q - \frac{h}{2}$ и $t_2 = q + \frac{h}{2}$. Тогда имеем

$$\varphi\left(q + \frac{h}{2}\right) - \varphi\left(q - \frac{h}{2}\right) = -\frac{4\psi(q)}{h} + \left[\lambda\left(q + \frac{h}{2}\right) - \lambda\left(q - \frac{h}{2}\right) \right] \quad (6.1.49)$$

Поэтому величина

$$\varphi_n\left(q + \frac{h}{2}\right) - \varphi_n\left(q - \frac{h}{2}\right) = -\frac{4\psi(q)}{h}, \quad (6.1.50)$$

отличается от точного значения в (6.1.49) на величину порядка h .

Таким образом, для более точного решения уравнения (6.1.1) в данном классе функций вида (6.1.48) надо взять вместо системы (6.1.39) следующую систему

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n; \quad j \neq j_q, \\ \varphi_n(t_{j_{q+1}})h - \varphi_n(t_{j_q})h = -4\psi(q). \quad (6.1.51)$$

Для рассмотрения сходимости решения системы (6.1.51) к точному решению (6.1.40) запишем систему (6.1.51) в виде (6.1.39)

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_q}}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}) - \frac{\varphi(q)h}{(t_{0j} - t_{j_q})(q - t_{j_q})}, \quad j=1, \dots, n; \quad j \neq j_q, \\ \varphi_n(t_{j_q})h = \varphi_n(t_{j_{q+1}})h + 4\psi(q) \quad (6.1.52)$$

где $\varphi(q) = \frac{1}{2}\varphi_n(t_{j_{q+1}})h + 2\psi(q)$.

Решая систему первых $(n-1)$ уравнений в (6.1.51) по правилу Крамера, как и систему (6.1.39) (напомним, что $q = t_{0j_q}$), имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t_k) = & -\frac{1}{h} I_{0,k}^{(n)} \frac{1}{q-t_k} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{q-t_{0j}}{t_k-t_{0j}} f(t_{0j}) h - \right. \\
& - \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{(q-t_{0j})}{t_{j_q}-t_{0j}} f(t_{0j}) h - \varPsi(q) \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{h^2}{(t_{j_q}-t_{0j})^2} + \\
& \left. + 2\varPsi(q) \frac{t_k-q}{t_k-t_{j_q}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \left(\frac{1}{t_k-t_{0j}} - \frac{1}{t_{j_q}-t_{0j}} \right) h \right]. \\
& k=1, \dots, n; k \neq j_q,
\end{aligned} \tag{6.1.53}$$

Полагая $k = j_q + 1$ в (6.1.53), получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t_{j_q+1}) = & -\frac{1}{h} I_{0,j_q+1}^{(n)} \frac{1}{q-t_{j_q+1}} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{q-t_{0j}}{t_{j_q+1}-t_{0j}} f(t_{0j}) h - \right. \\
& - \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{q-t_{0j}}{t_{j_q}-t_{0j}} f(t_{0j}) h - \left[\frac{1}{2} \varphi_n(t_{j_q+1}) h + 2\varPsi(q) \right] \times \\
& \times \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{h^2}{(t_{j_q}-t_{0j})^2} - 2 \frac{t_{j_q+1}-q}{t_{j_q+1}-t_{j_q}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \left(\frac{1}{t_{j_q+1}-t_{0j}} - \frac{1}{t_{j_q}-t_{0j}} \right) h \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{6.1.54}$$

Заметим, что $\frac{t_{j_q+1}-q}{t_{j_q+1}-t_{j_q}} = \frac{1}{2}$. Поэтому запишем равенство (6.1.54) в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t_{j_q+1}) = & -\frac{1}{h} I_{0,j_q+1}^{(n)} \frac{1}{q-t_{j_q+1}} [A_1 - A_2] + \\
& + \left[\frac{1}{2} \varphi_n(t_{j_q+1}) h + 2\varPsi(q) \right] \cdot \frac{1}{h} I_{0,j_q+1}^{(n)} \frac{1}{q-t_{j_q+1}} A_3,
\end{aligned} \tag{6.1.55}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{q-t_{0j}}{t_{j_q+1}-t_{0j}} f(t_{0j}) h, \\
A_2 = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{q-t_{0j}}{t_{j_q}-t_{0j}} f(t_{0j}) h, \\
A_3 = & \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \frac{h^2}{(t_{j_q}-t_{0j})^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} \left(\frac{1}{t_{j_q+1}-t_{0j}} - \frac{1}{t_{j_q}-t_{0j}} \right) h.
\end{aligned}$$

Из формулы (6.1.55)

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t_{j_q+1}) \left[1 - \frac{h}{2} \frac{1}{h} I_{0,j_q+1}^{(n)} \frac{A_3}{q-t_{j_q+1}} \right] = & \\
= 2\varPsi(q) \frac{1}{h} I_{0,j_q+1}^{(n)} \frac{A_3}{q-t_{j_q+1}} - \frac{1}{h} I_{0,j_q+1}^{(n)} \frac{1}{q-t_{j_q+1}} [A_1 - A_2] &
\end{aligned} \tag{6.1.56}$$

Так как $q-t_{j_q+1} = -h/2$, то находим

$$\begin{aligned}
& (q - t_{j_q+1}) \varphi_n(t_{j_q+1}) \left[1 + \frac{1}{h} I_{0, j_q+1}^{(n)} A_3 \right] = \\
& = 2\psi(q) \frac{1}{h} I_{0, j_q+1}^{(n)} A_3 - \frac{1}{h} I_{0, j_q+1}^{(n)} [A_1 - A_2].
\end{aligned} \tag{6.1.57}$$

Используя рассуждения из доказательства формулы Пуанкаре–Бертрана [70] и вычисляя пределы для $\frac{1}{h} I_{0, j_q+1}^{(n)}$ и $\frac{1}{h} I_{0, 0, j}^{(n)}$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h} I_{0, j_q+1}^{(n)} A_3 = 1, \tag{6.1.58}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (q - t_{j_q+1}) \varphi_n(t_{j_q+1}) = \psi(q). \tag{6.1.59}$$

Из (6.1.59) видим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{2} \varphi_n(t_{j_q+1}) = -\psi(q). \tag{6.1.60}$$

Теперь из (6.1.60) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h}{2} \varphi_n(t_{j_q+1}) + 2\psi(q) \right) = \psi(q).$$

Переходя к пределу в формуле (6.1.53), как это сделано в теореме 6.1.4, получаем с теми же оценками в пределе

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \left[\int_a^b \sqrt{\frac{t-a}{b-t}} \frac{f(t_0) dt_0}{t-t_0} - \frac{\pi^2}{q-t} \sqrt{\frac{q-a}{b-q}} \psi(q) \right].$$

Замечание 6.1.6. Так как функция $\psi(t)$ принадлежит классу H в окрестности точки q , то системы в теоремах 6.1.4 и 6.1.5 можно составлять следующим образом. Берем множества E и E_0 на отрезке $[a, b]$, образующие его каноническое разбиение. За точку t_{0, j_q} берем любую ближайшую к точке q точку из множества E_0 . Далее системы имеют тот же вид. Оценки между точными решениями соответствующего вида уравнения (6.1.1) и решениями систем сохраняют свой характер.

Так как отсосов на крыле может быть несколько (m штук), то естественно распространить сформулированные выше результаты на случай численного нахождения решений уравнения (6.1.1) вида

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{(q_1 - t) \dots (q_m - t)}, \tag{6.1.61}$$

где q_1, \dots, q_m – фиксированные точки в интервале (a, b) ; $\psi(t)$ – функция, принадлежащая классу H в некоторых окрестностях этих точек. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1.6. Пусть функция $f(t) \in H$ на $[a, b]$ и известны значения функции $\psi(t)$ в точках q_1, \dots, q_m . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \neq j_{q_1}, \dots, j_{q_m}}^n \frac{\varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}) - \frac{\psi(q_1) h}{(t_{0j} - t_{j_{q_1}})(t_{0j_{q_1}} - t_{j_{q_1}})} - \dots \\
& \dots - \frac{\psi(q_m) h}{(t_{0j} - t_{j_{q_m}})(t_{0j_{q_m}} - t_{j_{q_m}})}, \quad j = 1, \dots, n; \quad j \neq j_{q_1}, \dots, j_{q_m},
\end{aligned} \tag{6.1.62}$$

и решением $\varphi(t)$ уравнения (6.1.1)

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \int_a^b \sqrt{\frac{t_0-a}{b-t_0}} \frac{f(t_0) dt_0}{t-t_0} + \\ & + \sqrt{\frac{b-t}{t-a}} \left[\sqrt{\frac{q_1-a}{b-q_1}} \frac{\psi(q_1)}{q_1-t} + \dots + \sqrt{\frac{q_m-a}{b-q_m}} \frac{\psi(q_m)}{q_m-t} \right] \end{aligned} \quad (6.1.63)$$

выполняется соотношение (6.1.6), в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенству (6.1.7) для всех точек

$$t_k \in [a+\delta, q_1-\delta] \cup [q_1+\delta, q_2-\delta] \cup \dots \cup [q_m+\delta, b-\delta],$$

$\delta > 0$ – достаточно малое число, $q_1 < q_2 < \dots < q_m$, и неравенству (6.1.8).

Отметим только, что точки t_k , $k=1, \dots, n$, и t_{0j} , $j=0, 1, \dots, n$, выбираются, как в теореме 6.1.4, если точки q_1, \dots, q_m находятся на равном друг от друга расстоянии, или как в замечании к теореме 6.1.5. То, что функции (6.1.40), (6.1.44), (6.1.45) и (6.1.63) являются решениями уравнения (6.1.1), можно проверить непосредственно.

Рассмотрим теперь уравнение (6.1.1) на отрезке $[-b, b]$, симметричном относительно начала координат, т.е. уравнение

$$\int_{-b}^b \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0) \quad (6.1.1)^*$$

Все решения уравнения (6.1.1)* даются по [37, 98] формулой

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{b^2 - t^2}} \left[\int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - t_0^2} f(t_0) dt_0}{t - t_0} - \pi C \right] \quad (6.1.64)$$

Несложно заметить, что если $f(t_0)$ – нечетная функция, то любое решение уравнения (6.1.1)* является четной функцией, а если $f(t_0)$ – четная функция, то решение уравнения (6.1.1)* будет нечетной функцией только при $C = 0$.

Указанный факт можно использовать для уменьшения вдвое порядка системы линейных алгебраических уравнений, предназначенной для численного нахождения решения уравнения (6.1.1)*.

Теорема 6.1.7. Пусть $f(t) \in H$ на $[-b, b]$ и является четной функцией на этом отрезке. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^m \varphi_n(t_k) \left[\frac{1}{t_{0j} - t_k} - \frac{1}{t_{0j} + t_k} \right] h = f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, m, \quad (6.1.65)$$

где множества $E = \{t_k, k=1, \dots, 2m+1\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j=1, \dots, 2m+1\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[-b, b]$ с шагом h , и решением $\varphi(t)$ уравнения (6.1.1)*

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{b^2 - t^2}} \int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - t_0^2} f(t_0) dt_0}{t - t_0} \quad (6.1.66)$$

выполняется соотношение (6.1.6).

Аналогично, когда $f(t_0)$ – нечетная функция и $n = 2m$, то надо брать систему

$$\sum_{k=1}^m \varphi_n(t_k) \left(\frac{1}{t_{0j} + t_k} + \frac{1}{t_{0j} - t_k} \right) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (6.1.67)$$

$$\sum_{k=1}^m \varphi_n(t_k) h = \frac{1}{2} C.$$

Если желательно получить решение индекса $\kappa = -1$, то надо рассмотреть систему

$$\sum_{k=1}^m \varphi_n(t_k) \left(\frac{1}{t_{0j} + t_k} + \frac{1}{t_{0j} - t_k} \right) h = f(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (6.1.68)$$

Как приложение теоремы 6.1.1, рассмотрим еще вопрос о численном решении уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad (6.1.69)$$

все решения которого даются формулой

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^t \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_0^2} f(t_0) dt_0}{\tau - t_0} + \\ & + \frac{C_1}{\pi} \left| \arcsin t + \frac{\pi}{2} \right| + C_2, \quad \varphi(-1) = C_2, \quad \varphi(1) = C_1 + C_2. \end{aligned} \quad (6.1.70)$$

Покажем построение численного метода для нахождения решения этого уравнения, обращающегося на концах отрезка в нуль, что наиболее часто встречается в приложениях. Пусть точки $t_1 = -1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} = 1$ разбивают отрезок $[-1, 1]$ на равные части длины h , а точка t_{0j} является серединой отрезка $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема 6.1.8. Пусть функция $f(t_0)$ принадлежит классу H на $[-1, 1]$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^m \varphi_n(t_k) \left(\frac{1}{t_{0j} + t_k} + \frac{1}{t_{0j} - t_{k+1}} \right) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n \quad (6.1.71)$$

и решением $\varphi(t)$ уравнения (6.1.69), обращающимся в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$, выполняется соотношение

$$|\varphi_n(t_{0k}) - \varphi(t_{0k})| \leq O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.1.72)$$

где $\lambda > 0$.

Доказательство. Система (6.1.71) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi_n(t_{0k}) - \varphi_n(t_{0k-1})}{h} \frac{h}{t_{0j} - t_k} &= f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi_n(t_{0k}) - \varphi_n(t_{0k-1})}{h} h &= 0, \quad j = n+1, \end{aligned} \quad (6.1.73)$$

где полагаем $\varphi_n(t_{00}) = \varphi_n(t_{0n+1}) = 0$.

Видно, что система (6.1.73) совпадает с системой (6.1.4) при $C = 0$. Поэтому имеем

$$\frac{\varphi_n(t_{0k}) - \varphi_n(t_{0k-1})}{h} = -\frac{1}{h} I_{1,k}^{(n+1)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n+1)} \frac{f(t_{0j}) h}{t_k - t_{0j}}, \quad k = 1, \dots, n+1,$$

или

$$\varphi_n(t_{0k}) = -\sum_{i=1}^k \frac{1}{h} I_{1,i}^{(n+1)} h \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n+1)} \frac{f(t_{0j})h}{t_k - t_{0j}}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.1.74)$$

так как $\varphi_n(t_{00}) = \varphi(t_{0n+1}) = 0$.

Теперь в силу формул (6.1.25) и (6.1.26) имеем

$$\varphi_n(t_{0k}) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^k \frac{h}{\sqrt{1-t_i^2}} \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{1-t_{0j}^2} f(t_{0j})h}{t_i - t_{0j}} + O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right), \quad (6.1.75)$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Из формулы (6.1.75) получаем справедливость теоремы, так как функция

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^t \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_0^2} f(t_0) dt_0}{\tau - t_0} \quad (6.1.76)$$

является требуемым решением уравнения (6.1.69). Отметим, что выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h} I_{1,i}^{(n+1)} h \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n+1)} \frac{f(t_{0j})h}{t_i - t_{0j}} = 0. \quad (6.1.77)$$

Заметим также, что из доказательства теоремы 6.1.8 следует, что система (6.1.71) невырождена и матрица, обратная к матрице этой системы, определяется формулой (6.1.74). Невырожденность матрицы системы (6.1.71) можно показать непосредственно с помощью признака Адамара невырожденности определителя- модуль диагонального члена в каждой строчке больше суммы модулей остальных членов этой строчки. Действительно, имеем равенство

$$a_{jk} = \frac{1}{t_{0j} - t_k} - \frac{1}{t_{0j} - t_{k+1}} = -\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{(t_{0j} - t)^2}, \quad k, j = 1, \dots, n. \quad (6.1.78)$$

Потому если $t_{0j} \notin [t_k, t_{k+1}]$, то $a_{jk} > 0$, а $a_{jj} < 0$ и $-\int_{-1}^1 \frac{dt}{(t_{0j} - t)^2} > 0$.

Следовательно,

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{(t_{0j} - t)^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{jk} + a_{jj} < 0. \quad (6.1.79)$$

Наконец, из равенства (6.1.79) получаем

$$-a_{jj} = |a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{jk} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|. \quad (6.1.80)$$

Аналогично теореме 6.1.8 с использованием рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 6.1.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 6.1.9. Пусть функция $f(t) \in H$ на $[-1, 1]$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{C_2}{t_{0j} - t_1} + \sum_{k=1}^m \varphi_n(t_k) \left(\frac{1}{t_{0j} - t_k} - \frac{1}{t_{0j} - t_{k+1}} \right) + \frac{C_1 + C_2}{t_{0j} - t_{n+1}} = f(t_{0j}), \quad (6.1.81)$$

$$j = 1, \dots, n,$$

и решением $\varphi(t)$ уравнения (6.1.69), даваемым формулой (6.1.70), выполняется соотношение (6.1.72).

Для доказательства этой теоремы заметим только, что система (6.1.81) эквивалентна системе

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi_n(t_{0k}) - \varphi_n(t_{0k-1})}{h} \frac{h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.1.82)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi_n(t_{0k}) - \varphi_n(t_{0k-1})}{h} h = C_1, \quad j = n+1,$$

где $\varphi_n(t_{00}) = C_2$, $\varphi_n(t_{0n+1}) = C_1 + C_2$.

Используя теорему 6.1.1, имеем

$$\varphi_n(t_{0k}) = -\sum_{i=1}^k \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n+1)} h \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{j,0j}^{(n+1)} \frac{f(t_{0j})h}{t_i - t_{0j}} + C_1 \sum_{i=1}^k \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n+1)} h + C_2. \quad (6.1.83)$$

Отметим, что из последней формулы при $k = n+1$ в силу формулы (6.1.66) и условия $\varphi_n(t_{0n+1}) = C_1 + C_2$ получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} I_{1,i}^{(n+1)} = 1. \quad (6.1.84)$$

В работе [89] получено обобщение последнего результата на уравнение

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi^{(m)}(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0). \quad (6.1.85)$$

6.2. Полное уравнение на отрезке

В данном параграфе рассмотрим численное решение полного уравнения первого рода на отрезке

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 k(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0). \quad (6.2.1)$$

Будем предполагать пока, что функции $f(t)$ и $k(t_0, t)$ принадлежат классу H на своих областях определения.

Разрешив уравнение (6.2.1) относительно его характеристической части, получим, что оно эквивалентно в смысле разыскания решений индекса κ уравнению типа Фредгольма второго рода [37, 98]

$$\varphi(t) + \int_{-1}^1 N_{\kappa}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f_{1,\kappa}(t). \quad (6.2.2)$$

где

$$N_{\kappa}(t, \tau) = -\frac{1}{\pi^2} R_{\kappa}(t) \int_{-1}^1 R_{\kappa}^{-1}(t_0) \frac{k(t_0, \tau)}{t - t_0} dt_0,$$

$$f_{1,\kappa}(t) = -\frac{1}{\pi^2} R_{\kappa}(t) \left[\int_{-1}^1 R_{\kappa}^{-1}(t_0) \frac{f(t_0) dt_0}{t - t_0} - T_{\kappa} C \right],$$

причем $T_1 = \pi$, $T_0 = T_{-1} = 0$ и при $\kappa = -1$ должно выполняться условие

$$\int_{-1}^1 R_{-1}^{-1}(t) f(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 R_{-1}^{-1}(t) k(t, \tau) d\tau \right) \varphi(\tau) d\tau. \quad (6.2.3)$$

Отметим, что ядро $N_{\kappa}(t, \tau)$ имеет вид

$$N_{\kappa}(t, \tau) = \frac{\Phi(t, \tau)}{(1-t)^{\alpha}(1+\tau)^{\beta}}, \quad (6.2.4)$$

где α и β равны 0 или 1/2, а функция $\Phi(t, \tau)$ непрерывна на множестве $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Отметим, что к интегральному уравнению второго рода с ядрами вида (6.2.4) применима полностью теория Фредгольма построения приближенного решения и нахождения его решений [44, 102]. Однако уравнение (6.2.2) можно непосредственно свести к уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром с помощью соответствующей замены переменной. Это замечание позволит систему линейных алгебраических уравнений для уравнения (6.2.1), получаемую в рассматриваемом численном методе, эквивалентным образом преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений для уравнения Фредгольма второго рода, эквивалентного уравнению (6.2.1) в данном классе решений.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2.1. Пусть в уравнении (6.2.1) функции $f(t)$ и $k(t_0, t)$ принадлежат классу H на множествах $[-1, 1]$ и $[-1, 1] \times [-1, 1]$ соответственно и это уравнение имеет единственное решение в соответствующем данному индексу κ классе функций (для $\kappa = 1$ считаем заданным значение интеграла от решения). Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k)h = C, \end{array} \right. \quad (6.2.6)$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k)\varphi_n(t_k)h = f(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (6.2.7)$$

и соответствующими решениями уравнения (6.2.1) выполняется соотношение (6.1.6), в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенствам (6.1.7) и (6.1.8). Здесь множества $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j=0, 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[-1, 1]$.

Доказательство. В системах (6.2.5)–(6.2.7) оставим слева слагаемые, соответствующие характеристическому сингулярному интегральному уравнению, а все остальное перенесем вправо. Используя результаты теоремы 6.1.1, получим, что рассматриваемые системы эквивалентны системам ($\kappa=0, 1, -1$)

$$\varphi_n(t_k) + \sum_{m=1}^n \tilde{N}_k(t_k, t_m)\varphi_n(t_m)h = \tilde{f}_{1,\kappa}(t_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{N}_k(t_k, t_m) &= -\frac{1}{h} I_{\kappa, k}^{(n)} \sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(-\kappa)} I_{\kappa, 0j}^{(n)} \frac{k(t_{0j}, t_m)h}{t_k - t_{0j}}, \\ \tilde{f}_{1,\kappa}(t_k) &= -\frac{1}{h} I_{\kappa, k}^{(n)} \left[\sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(-\kappa)} I_{\kappa, 0j}^{(n)} \frac{f(t_{0j})h}{t_k - t_{0j}} - T_{\kappa} C \right], \end{aligned}$$

определение $\zeta(x)$ см. (6.1.10).

Дальнейшее доказательство проведем более подробно для $\kappa=0$, так как в остальных случаях оно аналогично. Из формулы (6.1.27) видно, что если умножить обе части системы (6.2.8) на $(1-t_k)^{1/4}(1+t_k)^{3/4}$, потом произведение $\varphi_n(t_k)$ на этот множитель обозначить $\tilde{\varphi}_n(t_k)$ и рассматривать вновь полученную систему линейных алгебраических уравнений, то она аппроксимирует интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ограниченным ядром

$$\tilde{\varphi}_n(t_k) + \int_0^{\bar{\alpha}} \tilde{N}_\kappa(t_1, \tau_1) \tilde{\varphi}(\tau_1) d\tau_1 = \tilde{f}_{1,\kappa}(t_1), \quad (6.2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{N}_\kappa(t_1, \tau_1) &= N_\kappa(t(t_1), \tau(\tau_1))(1-t(t_1))^{1/4}(1+t(t_1))^{3/4}, \\ \tilde{f}_{1,\kappa}(t_1) &= f_{1,\kappa}(t(t_1))(1-t(t_1))^{1/4}(1+t(t_1))^{3/4}, \\ \tilde{\varphi}(\tau_1) &= \varphi(\tau(\tau_1))(1-\tau(\tau_1))^{1/4}(1+\tau(\tau_1))^{3/4}, \\ d\tau_1 &= \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1/4}(1+\tau)^{3/4}}, \quad \tau_1 = \int_{-1}^{\tau} \frac{d\tilde{\tau}}{(1-\tilde{\tau})^{1/4}(1+\tilde{\tau})^{3/4}} = \tau_1(\tau), \\ \bar{\alpha} &= \int_{-1}^1 \frac{d\tilde{\tau}}{(1-\tilde{\tau})^{1/4}(1+\tilde{\tau})^{3/4}}, \end{aligned}$$

причем, как следует из формулы (6.1.27), порядок аппроксимации будет иметь вид

$$\tilde{\vartheta}(t_k) \leq \left[h^\lambda (t_k + 1)^{1/4} + \frac{h^{1/2}(1+t_k)^{1/4}}{(1-t_k)^{1/4}} + \frac{h}{(1-t_k)^{3/4}(1+t_k)^{3/4}} \right] O(|\ln h|). \quad (6.2.10)$$

Из теории численных методов для интегральных уравнений Фредгольма второго рода [64] с непрерывным ядром следует, что порядок аппроксимации $\tilde{\varphi}_n(t_k)$ функции $\tilde{\varphi}(t)$ такой же. Возвращаясь теперь к функциям $\varphi(t)$ и $\varphi_n(t_k)$, получаем справедливость сформулированной теоремы для $\kappa=0$. Для $\kappa=1$ и -1 она доказывается аналогично.

Замечание 6.2.1. Из доказательства теоремы 6.2.1 видно, что она справедлива и в том случае, если ядро $k(t_0, t)$ имеет вид $k_1(t_0, t)/|t_0 - t|^\alpha$, где $0 \leq \alpha < 1$, а $k_1(t_0, t)$ принадлежит классу H на прямоугольнике. В этом случае ядро $N_\kappa(t, \tau)$ будет иметь такой же вид, что можно показать с использованием формулы Пуанкаре–Бертрана перестановки порядка интегрирования и свойств сингулярных интегралов. Поэтому с помощью перехода к итерированным ядрам можно получить уравнение Фредгольма с непрерывным ядром. Ясно, что все эти операции можно проделать и в дискретном виде. Проведенное рассуждение показывает, что теорему 6.2.1 можно переформулировать для уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{k(t_0, t) \varphi(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad (6.2.11)$$

где $k(t_0, t)$ и $f(t)$ принадлежат классу H и $k(t_0, t_0) \neq 0$, $t_0 \in [-1, 1]$.

В этом случае для составления систем линейных алгебраических уравнений не требуется перехода к сингулярному уравнению вида (6.2.1). Таким образом, для численного нахождения решения индекса $\kappa=1, 0$ или -1 уравнения (6.2.11) надо рассматривать следующие системы линейных алгебраических уравнений соответственно:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.2.5)^*$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (6.2.6)^*$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k) h = C, \quad j = n,$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \frac{k(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (6.2.7)^*$$

Отметим, наконец, что указанный выше способ рассуждений позволяет перенести на уравнения (6.2.1) и (6.2.11) все замечания и теоремы, сделанные для характеристического уравнения в параграфе 6.1.

Замечание 6.2.2. Результаты Фредгольма [44, 102] справедливы и для системы интегральных уравнений второго рода, если она имеет единственное решение и ядра регулярны (непрерывны). Поэтому сформулированные в данном параграфе результаты справедливы и для системы сингулярных интегральных уравнений, если она имеет единственное решение данного индекса при соответствующих дополнительных условиях, и систему линейных алгебраических уравнений для характеристической части можно обратить аналогично тому, как сделано это для одного сингулярного уравнения.

Замечание 6.2.3. При рассмотрении стационарного обтекания крыла бесконечного размаха с закрылком приходится рассматривать характеристическое сингулярное интегральное уравнение на отрезке $[0, 1]$ в следующей ситуации. Когда закрылок отклонен, то $f(t)$ терпит разрыв первого рода в точке q (точка отклонения закрылка); если закрылок не отклонен, то $f(t) \in H$ на отрезке интегрирования. Для конкретных расчетов желательно иметь такой метод, который бы единым образом рассматривал оба эти случая. С другой стороны, при определении шарнирных моментов в точке отклонения закрылка используются только точки сетки, лежащие на закрылке. Поэтому, если закрылок мал (мал отрезок $[q, 1]$), то на нем располагается мало точек и достигнуть удовлетворительной точности при определении моментов трудно. Желательно строить такой вычислительный процесс, при котором число точек на отрезках $[0, q]$ и $[q, 1]$ было бы одинаковым. Здесь удалось реализовать следующую идею.

Берем отображение отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[-1, 1]$, которое было бы бесконечно дифференцируемым (хотя бы имело производные до порядка $r \geq 2$ и r -я производная ограничена), причем первая производная в нуль не обращается, и при котором точка q переходит в точку 0 на $[-1, 1]$. Теперь на отрезке $[-1, 1]$ берем равномерные сетки при условии, что точка 0 является одной из точек множества E_0 . Обратное отображение распределит узлы сеток на $[0, 1]$ требуемым образом. Отображение можно взять следующее:

$$t(\tau) = \frac{q(1+\tau)}{(1+\tau)(2q-1) + 2(1-q)}, \quad (6.2.12)$$

где $q \in (0, 1)$, $t \in [0, 1]$, $\tau \in [-1, 1]$.

Видно, что $t(-1) = 0$, $t(1) = 1$, $t(0) = q$, $t'(\tau) > 0$ для любого $\tau \in [-1, 1]$. Сделаем замену переменной, определяемую формулой (6.2.12), в уравнении (6.1.1), $a = 0$, $b = 1$; тогда получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t(\tau))\varphi'(\tau)d\tau}{t(\tau)-t(\tau_0)} = f(t(\tau_0)), \quad (6.2.13)$$

это уравнение вида (6.2.11). Для нахождения решения, ограниченного в точке 1 и неограниченного в точке -1, можно рассмотреть систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{\Gamma_i}{t_i - t_{0j}} = f_j, \quad j = 1, \dots, 2n-1, \quad (6.2.14)$$

где

$$\begin{aligned} t_i &= t(\tau_i), \quad t_{0j} = t(\tau_{0j}), \quad \tau_{0j} = -1 + jh, \quad h = 1/n, \\ \tau_j &= \tau_{0j} - h/2, \quad j = 1, \dots, 2n-1, \\ \Gamma_i &= \varphi(t_i)\varphi'(\tau_i)h, \quad f_j = f(t(\tau_{0j})), \quad j = 1, \dots, 2n-1, \quad j \neq n, \\ f_n &= [f(q-0) + f(q+0)]/2. \end{aligned}$$

В приложениях часто возникает необходимость при построении прямого численного метода иметь на одной или нескольких частях отрезка интегрирования больше точек, на других – меньше точек, в которых ищется решение. Для этого, нам кажется, хорошо было бы найти удобные для программирования наборы стандартных отображений отрезка на отрезок, которые: 1) имели бы не обращающуюся в нуль первую производную класса H или имели бы производные более высокого порядка; 2) переводили бы требуемые части отрезка на равные, или близкие к равным, отрезки.

Замечание 6.2.4. Используя результаты численного решения уравнения (6.1.69) и результаты данного параграфа, получим, что для уравнения Прандтля

$$\int_{-1}^1 \frac{d\Gamma(t)}{dt} \frac{dt}{t_0 - t} - a(t_0)\Gamma(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad (6.2.15)$$

надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений (см. (6.1.81)):

$$\begin{aligned} & -\frac{C_2}{t_{0j} - t_1} + \sum_{k=1}^m \Gamma_n(t_{0k}) \left(\frac{1}{t_{0j} - t_k} - \frac{1}{t_{0j} - t_{k+1}} \right) + \\ & + \frac{C_1 + C_2}{t_{0j} - t_{n+1}} - a(t_{0j})\Gamma_n(t_{0j}) = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Между решением этой системы и решением уравнения Прандтля, удовлетворяющим условию $\Gamma(-1) = C_2$, $\Gamma(1) = C_1 + C_2$, выполняется соотношение (6.1.72).

6.3. Уравнение на системе непересекающихся отрезков

Рассмотрим теперь случай сингулярного интегрального уравнения вида

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad (6.3.1)$$

где L является совокупностью l штук непересекающихся отрезков $[A_1, B_1], \dots, [A_l, B_l]$.

Это уравнение может иметь (см. [37, 98]) индекс $\kappa = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$, определяемый количеством концов отрезков, в которых искомое решение ограничено [98]. Для формулировок общих результатов, следуя [98], перенумеруем концы отрезков $[A_1, B_1], \dots, [A_l, B_l]$ произвольным образом и обозначим их c_1, c_2, \dots, c_{2l} . Обозначим

$\eta(c_1, \dots, c_q)$ – класс решений индекса $\kappa = l - q$ уравнения (6.3.1), которые при $f(t) \in H$ на L ограничены в концах c_1, \dots, c_q и неограничены в концах c_{q+1}, \dots, c_{2l} .

На отрезке $[A_m, B_m]$ возьмем множества $E_m = \{t_k, k = n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$ и $E_{0m} = \{t_{0j}, j = n_{m-1} + 0, n_{m-1} + 1, \dots, n_m\}$, которые образуют каноническое разбиение (с шагом h_m) этого отрезка, $m = 1, \dots, l$; $n_0 = 0$. Обозначим $E = \bigcup_{m=1}^l E_m$ и $E_0 = \bigcup_{m=1}^l E_{0m}$ и будем говорить, что множества E и E_0 образуют каноническое разбиение кривой L , если выполняется соотношение

$$\frac{h}{h_m} \leq R < +\infty, \quad m = 1, \dots, l, \quad (6.3.2)$$

где $h = \max(h_1, \dots, h_l)$, $h \rightarrow 0$. Отметим, что соотношение (6.3.2) означает, что числа n_l и $N_m = n_m - n_{m-1}$, $m = 1, \dots, l$, при $n \rightarrow \infty$ являются величинами, отношение любых двух из которых есть величина ограниченная. В дальнейшем соотношение (6.3.2) всегда будем считать выполненным.

Будем обозначать $P(q)$ – множество точек t_{0j} , которое получается из множества E_0 выбрасыванием ближайших к концам c_{q+1}, \dots, c_{2l} . Рассуждениями, аналогичными ми рассуждениям параграфа 6.1, показывается справедливость следующих теорем.

Теорема 6.3.1. Пусть функция $f(t) \in H$ на L . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n_l} \frac{\varphi_{n_l}(t_k) \Delta t_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad t_{0j} \in P(q), \quad (6.3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n_l} t_k^\varepsilon \varphi_{n_l}(t_k) \Delta t_k = C_\varepsilon, \quad \varepsilon = 0, 1, \dots, \kappa - 1, \quad 1 \leq \kappa \leq l,$$

и решением $\varphi(t)$ индекса $\kappa \geq 0$ класса $\eta(c_1, \dots, c_q)$, удовлетворяющим условию

$$\int_L t^\varepsilon \varphi(t) dt = C_\varepsilon, \quad (6.3.4)$$

выполняется соотношение

$$|\varphi(t_k) - \varphi_{n_l}(t_k)| \leq \theta(t_k), \quad k = 1, \dots, n_l, \quad (6.3.5)$$

в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{aligned} \text{для всех точек } t_k \in \bigcup_{m=1}^l [A_m + \delta, B_m - \delta], \quad \delta > 0 - \text{сколь угодно мало,} \\ \theta(t_k) \leq O(h^4), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

2) для всех точек $t_k \in L$

$$\sum_{k=1}^{n_l} \theta(t_k) \Delta t_k \leq O(h^2), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1. \quad (6.3.7)$$

Теорема 6.3.2. Пусть функция $f(t) \in H$ на L . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\kappa-1} t_{0j}^\varepsilon \gamma_\varepsilon + \sum_{k=1}^{n_l} \frac{\varphi_{n_l}(t_k) \Delta t_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad t_{0j} \in P(q), \quad (6.3.8)$$

и решением $\varphi(t)$ индекса $\kappa < 0$ класса $\eta(c_1, \dots, c_q)$, $l - q = \kappa < 0$, если выполняются условия

$$\int_L t^\varepsilon R_\kappa^{-1}(t) f(t) dt = 0, \quad \varepsilon = 0, 1, \dots, -\kappa - 1, \quad (6.3.9)$$

где $R_\kappa(t)$ – характеристическая функция класса $\eta(c_1, \dots, c_q)$, выполняется соотношение (6.3.5). Здесь величины γ_ε ($\varepsilon = 0, 1, \dots, -\kappa - 1$) – регуляризирующие факторы.

Достаточно подробное доказательство этих теорем дано в [73].

Замечание 6.3.1. Теоремы 6.3.1, 6.3.2 будут справедливы и в том случае, когда функция $f(t) \in H$ на L и может иметь обращение в бесконечность порядка $\alpha \in [0, 1)$ в концах c_{q+1}, \dots, c_{2l} и порядка β , $\beta \in [0, 1/2)$, в концах c_1, \dots, c_q . При этом под классом $\eta(c_1, \dots, c_q)$ надо понимать класс решений уравнения (6.3.1), которые в концах c_1, \dots, c_q имеют особенность степени меньше одной второй, а в концах c_{q+1}, \dots, c_{2l} – особенность степени не меньше одной второй.

Если функция $f(t)$, кроме этого, может иметь разрыв вида $|c - t|^{-\nu}$, $\nu \in [0, 1)$, на некотором отрезке $[A_m, B_m] \supset c$, то множества E_{0m} и E_m на этом отрезке надо выбирать так, как указано в теореме 6.1.2. Если же функция $f(t)$ в точке c терпит разрыв первого рода, то множества E_{0m} и E_m на отрезке $[A_m, B_m]$ и систему линейных алгебраических уравнений для точек из этого отрезка целесообразно составлять так, как указано в дополнении к теореме 6.1.2.

В задачах электродинамики [35, 36] для уравнения (6.3.1) удобнее требовать выполнение условий

$$\int_{L_k} \varphi(t) dt = C_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad m \leq l, \quad (6.3.10)$$

на всех отрезках L_k из L , на которых решение неограничено на обоих концах.

Несложно показать, что система условий (6.3.10) выделяет единственное решение уравнения (6.3.1).

Идея дальнейших рассуждений будет состоять в представлении уравнения (6.3.1) как системы сингулярных интегральных уравнений на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому, в соответствии с терминологией в теории таких систем [98], будем говорить, что решение $\varphi(t)$ уравнения (6.3.1) имеет индекс $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_l)$, $\kappa_m = 1, 0, -1$, $m = 1, \dots, l$, если оно: неограничено на обоих концах; неограничено на одном конце; ограничено на обоих концах отрезка $[A_m, B_m]$. Будем это решение обозначать $\varphi_k(t)$. Рассмотрим отображение $g_m(\tau)$ отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[A_m, B_m]$, где

$$g_m(\tau) = \frac{B_m - A_m}{2} \tau + \frac{B_m + A_m}{2}, \quad m = 1, \dots, l. \quad (6.3.11)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa_m}(t) &= \varphi_\kappa(t) \Big|_{t \in [A_m, B_m]} = \omega_{\kappa_m}(t) \psi_{\kappa, m}(t), \\ f_m(t) &= f(t) \Big|_{t \in [A_m, B_m]}, \quad m = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Будем использовать равномерное разбиение на каждом из отрезков $[A_m, B_m]$, $m = 1, \dots, l$. На отрезке $[A_m, B_m]$ выберем каноническое разбиение с шагом h_m множествами $E_m = \{t_{m,k}, k = 1, \dots, n_m\}$ и $E_{m,0} = \{t_{m,0,j}, j = 0, 1, \dots, n_m\}$, $m = 1, \dots, l$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.3. Пусть функция $f(t) \in H$ на L . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\zeta(-\kappa_m) \gamma_{0n_m} + \sum_{k=1}^{n_m} \frac{\varphi_{\kappa_m, n_m}(t_{m,k}) h_m}{t_{m,0j} - t_{m,k}} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m}}^l \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\varphi_{\kappa_p, n_p}(t_{p,k}) h_p}{t_{m,0j} - t_{m,k}} = f_m(t_{m,0j}), \quad (6.3.13)$$

$$\sum_{k=1}^{n_m} \zeta(\kappa_m) \varphi_{\kappa_m, n_m}(t_{m,k}) h_m = \zeta(\kappa_m) C_m, \quad j = 1, \dots, n_m - \kappa_m, \quad m = 1, \dots, l,$$

и решением $\varphi_\kappa(t)$ уравнения (6.3.1), для которого известны значения интегралов по тем отрезкам, составляющим L , на которых оно имеет индекс 1, выполняется соотношение (6.3.5).

Доказательство. С помощью отображений (6.3.11) уравнение (6.3.1) можно рассматривать как систему l сингулярных интегральных уравнений на $[-1, 1]$, которая при соответствующих дополнительных условиях (известно значение интеграла от решения на тех отрезках из L , на которых решение неограничено на обоих концах, т.е. на которых оно имеет индекс 1) имеет единственное решение. Следовательно, эта система [98] эквивалентна системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая также имеет единственное решение. Поэтому, повторив в дискретном виде процесс перехода к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, получим, что система линейных алгебраических уравнений (6.3.13) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений для этой системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Такой переход возможен в силу того, что разрешимы системы (6.1.3)–(6.1.5) при любом $\kappa = 1, 0, -1$.

Рассмотрим теперь полное сингулярное интегральное уравнение первого рода на системе непересекающихся отрезков

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} + \int_L K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0). \quad (6.3.14)$$

Для этого уравнения справедливы аналоги всех теорем, доказанных в этом параграфе для уравнения (6.3.1). При этом в линейные алгебраические уравнения надо добавить суммы

$$\sum_{k=1}^{n_j} K(t_{0j}, t_k) \varphi_{n_j}(t_k) \Delta t_k$$

в системы (6.3.3), (6.3.8); суммы

$$\sum_{p=1}^l \sum_{k=1}^{n_p} K(t_{m,0j}, t_{p,k}) \varphi_{\kappa_p, n_p}(t_{p,k}) h_p$$

в систему (6.3.13).

Если функции $f(t)$ и $K(t_0, t)$ принадлежат классу H на соответствующих множествах или $K(t_0, t)$ имеет вид $K_1(t_0, t)/|t_0 - t|^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, где $K_1(t_0, t) \in H$ на $L \times L$, то при составлении систем линейных алгебраических уравнений по равномерным сеткам используются стандартные канонические разбиения отрезков $[A_m, B_m]$, составляющих L . Если же $f(t)$ может иметь особенности, указанные в замечании 6.3.1, на каком-нибудь из отрезков, то на этом отрезке равномерные сетки надо выбирать так, как указано в этом замечании.

6.4. Уравнение на окружности

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad (6.4.1)$$

в котором L является окружностью радиуса 1 с центром в начале координат. Пусть множества $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j=1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение окружности. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.4.1. Пусть функция $f(t) \in H$ на L . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n, \quad (6.4.2)$$

где $a_k = t_{k+1} - t_k$, $t_{n+1} = t_1$, и решением уравнения (6.4.1)

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2} \int_L \frac{f(t_0)dt_0}{t - t_0} \quad (6.4.3)$$

выполняется соотношение

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq \theta(t_k), \quad k=1, \dots, n, \quad (6.4.4)$$

в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенству

$$\theta(t_k) \leq O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (6.4.5)$$

Доказательство. Система (6.4.2) совпадает с системой (6.1.3), если в последней заменить h на a_k . Поэтому те же рассуждения дадут

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{a_k} I_{0,k}^{(n)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j} I_{0,0j}^{(n)} \frac{f(t_{0j})b_j}{t_k - t_{0j}}, \quad (6.4.6)$$

где $b_j = t_{0j+1} - t_{0j}$, $k=1, \dots, n$, $t_{0n+1} = t_{01}$.

Так как теперь L – окружность, то к изучению множителей $I_{0,k}^{(n)}$ и $I_{0,0j}^{(n)}$ придется подойти иначе, нежели в теореме 6.1.1. Напомним, что

$$t_k = e^{i\theta_k}, \quad t_{0k} = e^{i(\theta_k + \pi/n)} = e^{i\theta_{0k}}, \quad k=1, \dots, n.$$

Поэтому можно написать

$$I_{0,k}^{(n)} = \frac{\prod_{m=1}^n (t_{0m} - t_k)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n (t_m - t_k)} = -t_k \frac{\prod_{m=1}^n [1 - e^{i(\theta_{0m} - \theta_k)}]}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n [1 - e^{i(\theta_m - \theta_k)}]} = -t_k \frac{P_{2,k}^{(n)}}{P_{1,k}^{(n)}}. \quad (6.4.7)$$

Так как точки $t_k, k=1, \dots, n$, разбивают окружность L на равные части, а t_{0k} является серединой дуги (t_{k+1}, t_k) , то $\theta_m - \theta_k = 2\pi(m-k)/n$, $\theta_{0m} - \theta_k = 2\pi(m-k)/n + \pi/n$. Вводя теперь перенумерацию, с учетом периодичности функции $e^{i\theta}$ записываем

$$P_{1,k}^{(n)} = \prod_{m=1}^{n-1} (1 - e^{im \cdot 2\pi/n}), \quad P_{2,k}^{(n)} = \prod_{m=0}^{n-1} (1 - e^{i(\pi/n + m \cdot 2\pi/n)}).$$

Для вычисления $P_{1,k}^{(n)}$ заметим, что числа $e^{im \cdot 2\pi/n}$, $m=0, 1, \dots, n-1$, являются корнями n -й степени из числа $z=1$, т.е.

$$z^n - 1 = \prod_{m=0}^{n-1} (z - e^{im \cdot 2\pi/n}) = (z-1) \prod_{m=1}^{n-1} (z - e^{im \cdot 2\pi/n})$$

или

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1 = \prod_{m=1}^{n-1} (z - e^{im \cdot 2\pi/n}).$$

Последнее равенство есть тождество. Поэтому, устремляя z к единице, в пределе имеем

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = n = P_{1,k}^{(n)}. \quad (6.4.8)$$

Для вычисления $P_{2,k}^{(n)}$ заметим, что числа $e^{i(\pi/n+m \cdot 2\pi/n)}$, $m=0,1,\dots,n-1$, являются корнями n -й степени из числа $z = -1$, т.е.

$$z^n + 1 = \prod_{m=0}^{n-1} (z - e^{i(\pi/n+m \cdot 2\pi/n)}).$$

Последнее равенство верно при любом z , поэтому при $z = 1$ получаем

$$P_{2,k}^{(n)} = 2. \quad (6.4.9)$$

Формулы (6.4.7)–(6.4.9) показывают, что

$$I_{0,k}^{(n)} = -t_k \frac{2}{n}, \quad (6.4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_k} I_{0,k}^{(n)} &= \frac{1}{t_{k+1} - t_k} (-t_k) \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \frac{1}{1 - e^{i2\pi/n}} = \\ &= \frac{1}{n \sin \pi/n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + i \cos \frac{\pi}{n} \right) = i \frac{1}{\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$I_{0,0,j}^{(n)} = t_{0j} \frac{2}{n}, \quad \frac{1}{b_j} I_{0,0,j}^{(n)} = -i \frac{1}{\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6.4.11)$$

Из формул (6.4.6), (6.4.10) и (6.4.11) следует, что

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \frac{f(t_{0j}) b_j}{t_k - t_{0j}} + \sum_{j=1}^n O\left(\frac{1}{n}\right) \frac{f(t_{0j}) b_j}{t_k - t_{0j}}. \quad (6.4.12)$$

Учитывая теперь формулы (2.2.7) и (2.2.10), видим справедливость теоремы 6.4.1.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 6.4.2. Пусть функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{\psi(t)}{|t - q|^v}, \quad (6.4.13)$$

где $\psi(t) \in H$ на L , $0 \leq v < 1$, и пусть множества E и E_0 , образующие каноническое разбиение окружности L , выбираются так, что точка q делит пополам дугу между ближайшими к ней точками из E и E_0 . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений (6.4.2) и решением (6.4.3) уравнения (6.4.1) выполняется соотношение (6.4.4), в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенствам:

1) для всех точек $t_k \in L^*$, $\delta > 0$ – сколь угодно мало,

$$\theta(t_k) \leq O\left(\frac{1}{n^{\lambda_1}}\right), \quad 0 < \lambda_1 \leq 1; \quad (6.4.14)$$

2) для всех точек $t_k \in L$

$$\sum_{k=1}^n \theta(t_k) |a_k| \leq O\left(\frac{1}{n^{\lambda_2}}\right), \quad 0 < \lambda_2 \leq 1. \quad (6.4.15)$$

При доказательстве теоремы 6.4.2 надо воспользоваться формулами (2.4.5) и (2.4.6) для кусочно-ляпуновской кривой. Отметим, что в формуле (6.4.14) под L^* подразумевается часть L , лежащая вне δ -окрестности точки q :

$$L^* = L \setminus O(q, \delta). \quad (6.4.16)$$

Аналогично теореме 6.1.5 с использованием результатов теоремы 6.4.1 и неравенств (2.2.12)–(2.2.14) доказывается следующая теорема.

Теорема 6.4.3. Пусть функция $f(t) \in H$ на L и множества E и E_0 выбираются так, что точка $q \in E_0$ при $j = j_q$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq j_q, \quad (6.4.17)$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k) a_k = C, \quad j = j_q,$$

и решением $\varphi(t)$ класса Π на L уравнения (6.4.1)

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2(q-t)} \int_L \frac{(q-t_0)f(t_0)dt_0}{t-t_0} + \frac{i}{\pi} \frac{C}{q-t}, \quad (6.4.18)$$

$$\int_L \varphi(t) dt = C,$$

выполняется соотношение (6.4.4), в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенствам (6.4.14), (6.4.15).

Для доказательства достаточно заметить, что так как L – окружность, то можно всегда считать $j_q = n$.

Замечание 6.4.1. Если функция $f(t)$ терпит разрыв первого рода в точке $q \in L$ и принадлежит классу H на множестве $L \setminus q$, то множества E и E_0 надо выбирать так, чтобы $q \in E_0$ при $j = j_q$, а систему линейных алгебраических уравнений составлять следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} = \begin{cases} f(t_{0j}), & j = 1, \dots, n, \quad j \neq j_q, \\ \frac{f(q-0) + f(q+0)}{2}, & j = j_q. \end{cases} \quad (6.4.19)$$

Тогда теоретически можно показать, что $|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)|$, $\varphi(t)$ – решение уравнения (6.4.1), ведет себя так же, как в теореме 6.4.2, но расчеты показывают более хорошее совпадение.

Замечание 6.4.2. В теоремах 6.4.1–6.4.3 были использованы квадратурные формулы типа прямоугольников для сингулярного интеграла на окружности, рассмотренные в 2.2.

Теперь рассмотрим полное уравнение первого рода на окружности

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} + \int_L K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (6.4.20)$$

где функция $f(t) \in H$ на L , а $K(t_0, t) \in H$ на $L \times L$, или уравнение

$$\int_L \frac{K(t_0, t)}{t_0 - t} \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (6.4.21)$$

где $K(t_0, t) \in H$ на $L \times L$ и $K(t_0, t_0) \neq 0$.

Уравнения (6.4.20) и (6.4.21) эквивалентны соответствующим уравнениям Фредгольма 2-го рода. Если эти уравнения имеют единственное решение, то и соответствующие уравнения Фредгольма 2-го рода имеют единственное решение. Для численного решения этих уравнений в классе непрерывных функций надо рассмотреть следующие системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) a_k = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.4.22)$$

или

$$\sum_{k=1}^n \frac{K(t_{0j}, t_k)}{t_{0j} - t_k} \varphi_n(t_k) a_k = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.4.23)$$

где точки t_k , $k=1, \dots, n$, делят окружность L на равные части, t_{0k} делит пополам дугу (t_k, t_{k+1}) , $a_k = -i2\pi_k / (2n+1)$, $k=1, \dots, n$, и n – нечетное число или $a_k = t_{k+1} - t_k$ в общем случае. При этом предполагаем, что $f(t)$ и $K(t_0, t)$ или $K(t_0, t), K(t_0, t_0) \neq 0$ на L , принадлежат классу H на соответствующих множествах.

Если $f(t)$ терпит разрыв первого рода в точке q , то надо воспользоваться замечанием 6.4.1. Если же $f(t)$ терпит интегрируемый разрыв в точке q , то надо выбрать точки t_k и t_{0k} так, чтобы точка q делила пополам дугу между ближайшими к ней точками из множеств $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{t_{0k}, k=1, \dots, n\}$. При этом системы (6.4.22) и (6.4.23) сохраняют свой вид.

Доказательство сходимости решений систем (6.4.22) и (6.4.23) к решениям уравнений (6.4.20) и (6.4.21) соответственно производится так же, как и для аналогичных уравнений на отрезке, т.е. надо в дискретном виде повторить переход к системам линейных алгебраических уравнений для соответствующих интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Естественно, что эти системы будут невырождены начиная с некоторого n_1 .

Если надо найти решение уравнения (6.4.22), имеющее в заданной точке q особенность вида $1/(q-t)$, то точки t_k и t_{0k} надо выбрать так, чтобы $q = t_{0k_q}$, и рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) a_k = f(t_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k_q, \quad (6.4.24)$$

$$\sum_{k=1}^n \varphi_n(t_k) a_k = C, \quad j = k_q.$$

Замечание 6.4.3. Все результаты данного параграфа легко переносятся на тот случай, когда L в уравнениях (6.4.1), (6.4.20) и (6.4.21) является системой непересекающихся окружностей [73].

6.5. Уравнения с ядром Гильберта

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0). \quad (6.5.1)$$

Выберем на отрезке $[0, 2\pi]$ точки $\theta_k, k=1, \dots, n$, которые, интерпретируемые как точки единичной окружности L , разбивают ее на n равных частей. Точка $\theta_{0k}, k=1, \dots, n$, делит пополам дугу (θ_k, θ_{k+1}) .

Напомним [98], что уравнение (6.5.1) имеет решение только при условии

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0. \quad (6.5.2)$$

Для выделения единственного решения надо задать значение решения в некоторой точке либо значение интеграла от решения (последнее более часто встречается в приложениях). Поэтому, если применить к численному решению уравнения (6.5.1) тот подход, который был проведен для характеристического уравнения на отрезке, то, с использованием квадратурных формул для интеграла с ядром Гильберта из параграфов 2.5 и 2.6, уравнение (6.5.1) надо заменить следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} &= f(\theta_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} &= C. \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

Система (6.5.3) переопределена. В силу выбора точек θ_k и θ_{0k}

$$\sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (6.5.4)$$

Следовательно, сложив первые n уравнений в системе (6.5.3) и учтя равенство (6.5.4), получим

$$0 = \sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}). \quad (6.5.5)$$

Поэтому система первых n уравнений из системы (6.5.3) вырождена и, в общем случае, несовместна. Это же относится и ко всей системе (6.5.3).

Естественно, возникает мысль отбросить одно из первых уравнений в системе (6.5.3). Тогда, как будет показано ниже, получаем невырожденную определенную систему, но дающую неустойчивый вычислительный процесс. Поэтому к системе (6.5.3) применим метод регуляризирующих факторов, который был нами использован для характеристического сингулярного интегрального уравнения на отрезке в случае отрицательного индекса (безударное обтекание профиля или обтекание телесного профиля с острой задней кромкой).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.5.1. Пусть функция $f(t) \in H$ на $[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$, и для нее выполняется равенство (6.5.2). Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} &= f(\theta_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} &= C \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

и решением $\varphi(\theta)$ уравнения (6.5.1), задаваемым формулой [98]

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} f(\theta_0) d\theta_0 + C \quad (6.5.7)$$

при условии

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = C, \quad (6.5.8)$$

выполняется соотношение

$$|\varphi(\theta_k) - \varphi_n(\theta_k)| \leq O(n^{-\lambda} \ln n), \quad (6.5.9)$$

где $\lambda = \alpha \in (0, 1]$, если n произвольно и $f(\theta) \in H(\alpha)$, $\lambda = r + \alpha$, если n нечетно и $f^{(r)}(\theta) \in H(\alpha)$.

Доказательство. Просуммировав первые n уравнений в системе (6.5.6) и учтя равенство (6.5.4), получим

$$\gamma_{0n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n}. \quad (6.5.10)$$

Отсюда следует, что $\gamma_{0n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда уравнение (6.5.1) имеет решение.

Идея дальнейших рассуждений состоит в сведении системы (6.5.6) к системе вида (6.4.2) для уравнения на окружности с помощью равенства

$$\frac{it_k}{t_k - t_0} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} + \frac{1}{2} i. \quad (6.5.11)$$

Умножим последнее равенство в системе (6.5.6) на $(-i)$ и прибавим его ко всем первым n уравнениям. Учитывая равенство (6.5.10), после умножения обеих частей на π получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = \\ & = \left[\pi f(\theta_{0m}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f(\theta_{0k}) \frac{2\pi}{n} \right] - i\pi C, \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0m} - t_k} = \hat{f}(t_{0m}), \quad m = 1, \dots, n, \quad (6.5.12)$$

где

$$t_k = e^{i\theta_k}, \quad t_{0m} = e^{i\theta_{0m}}, \quad \varphi_n(t_k) = \varphi_n(\theta_k), \quad a_k = 2\pi it_k / n,$$

$$\hat{f}(t_{0m}) = \left[\pi f(\theta_{0m}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f(\theta_{0k}) \frac{2\pi}{n} \right] - i\pi C.$$

Система (6.5.12) совпадает с системой (6.4.2), и поэтому ее решение дается формулой (6.4.6). В силу равенств (6.4.11) и (6.4.20) имеем

$$\hat{\Phi}_n(t_k) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \frac{\hat{f}(t_{0m}) b_m}{t_k - t_{0m}}, \quad (6.5.13)$$

где $b_m = 2\pi i t_{0m} / n$.

Таким образом, опять воспользовавшись равенствами (6.5.4) и (6.5.11), получим

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta_k) &= -\frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} - \frac{i}{2} \right) \left\{ \left[\pi f(\theta_{0m}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f(\theta_{0k}) \frac{2\pi}{n} \right] - i\pi C \right\} \frac{2\pi}{n} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} + C.\end{aligned}\quad (6.5.14)$$

Сравнивая формулы (6.5.7) и (6.5.14), видим справедливость теоремы.

Замечание 6.5.1. Если вместо (6.5.6) рассмотреть систему

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad m = 1, \dots, n,$$

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = C,$$

то аналогичные рассуждения показывают, что

$$\varphi_n(\theta_k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} + C.\quad (6.5.16)$$

Аналогично теореме 6.5.1 доказываются и следующие теоремы.

Теорема 6.5.2. Между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n^-(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad m = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n^-(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = C$$

и решением $\varphi^-(\theta)$ уравнения (6.5.1) для любой $f(\theta)$

$$\varphi^-(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} f(\theta_0) d\theta_0 - \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{q - \theta}{2} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0 + C\quad (6.5.18)$$

выполняется соотношение

$$\left| \varphi^-(\theta_k) - \varphi_n^-(\theta_k) \right| \leq \eta(\theta_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

где величина $\eta(\theta_k)$ удовлетворяет неравенствам (6.4.14) и (6.4.15), в которых числа λ_1 и λ_2 определяются по свойствам функции $f(\theta)$ так же, как в (6.5.9). При этом точки θ_k и θ_{0k} , $k = 1, \dots, n$, выбираем так, чтобы при любом n иметь $\theta_{0n} = q$.

Теорема 6.5.3. Пусть $f(\theta) \in H$ на $[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$ и точки θ_k и θ_{0k} , $k = 1, \dots, n$, выбраны так, что $\theta_{k_q} = q$, $q \in [0, 2\pi]$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n^+(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}) -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi(q) \frac{2\pi}{n}, \quad m = 1, \dots, n-1,$$

где $\varphi(q)$ известно, и решением $\varphi^+(\theta)$ уравнения (6.5.1)

$$\varphi^+(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} - \operatorname{ctg} \frac{q - \theta_0}{2} \right) f(\theta_0) d\theta_0 + \varphi(q)\quad (6.5.21)$$

выполняется неравенство

$$|\varphi^+(\theta_k) - \varphi_n^+(\theta_k)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right), \quad k=1, \dots, n. \quad (6.5.22)$$

Замечание 6.5.2. Решения систем (6.5.17) и (6.5.20) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n^-(\theta_k) = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} - \\ & -\frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0n} - \theta_k}{2} \sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} + C, \end{aligned} \quad (6.5.23)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^+(\theta_k) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \left(-\operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta_{k_q} - \theta_{0m}}{2} \right) f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} - \\ & -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \left(-\operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta_{k_q} - \theta_{0m}}{2} \right) \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_{k_q}}{2} \varphi(q) \left(\frac{2\pi}{n} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

Из формулы (6.5.23) видно, что получается ухудшение счета в точке q – в окрестности той точки, уравнение для которой выброшено, так как в общем случае

$$\sum_{m=1}^n f(\theta_{0m}) \frac{2\pi}{n} \neq 0.$$

Из формулы (6.5.24) получаем, что если $\varphi(q) = 0$, тогда при $f^{(r)}(\theta) \in H(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$ и n нечетном в неравенстве (6.5.22) справа будет стоять величина $O(n^{-r-\alpha} \ln n)$. Поэтому если известно значение $\varphi(q)$, то лучше ввести новую функцию $\bar{\varphi}(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(q)$, для которой $\bar{\varphi}(q) = 0$.

Замечание 6.5.3. Если в уравнении (6.5.1) функция $f(\theta)$ терпит интегрируемый разрыв в точке q , то, как и для уравнения на отрезке, систему линейных алгебраических уравнений можно брать вида (6.5.6), только точки θ_k и θ_{0k} , $k=1, \dots, n$, надо взять так, чтобы точка q делила пополам отрезок между ближайшими к ней точками из множеств E и E_0 .

Если же функция $f(\theta)$ терпит разрыв первого рода в точке $q \in [0, 2\pi]$, то расчеты показывают, что лучше поступать следующим образом. Точки θ_k и θ_{0k} выбирать так, чтобы точка q была бы точкой θ_{0k_q} и в системе (6.5.6) для первых n уравнений правую часть брать следующим образом:

- 1) для уравнений с номерами $m=1, \dots, n, m \neq k_q$, справа стоит $f(\theta_{0m})$;
- 2) в уравнении с номером $m=k_q$ справа стоит $[f(q-0) + f(q+0)]/2$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} \varphi(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} K(\theta_0, \theta) \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0) \quad (6.5.25)$$

или уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta_0, \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad (6.5.26)$$

в котором $K(\theta_0, \theta_0) \neq 0$ и $K(\theta_0, \theta) \in H$ на $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, функции $f(\theta_0)$ и $K(\theta_0, \theta)$ – периодические по своим координатам.

Будем предполагать, что уравнение (6.5.25) имеет единственное решение при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} K_1(\theta)\varphi(\theta)d\theta = C, \quad (6.5.27)$$

где $K_1(\theta)$ – некоторая ненулевая функция.

Если ядро $K(\theta_0, \theta)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^{2\pi} K(\theta_0, \theta)d\theta = 0, \quad (6.5.28)$$

а правая часть – равенству (6.5.2), то равенство в (6.5.6) должно быть задано из некоторых дополнительных соображений, которые будут продемонстрированы ниже в задачах аэродинамики.

Если же уравнение (6.5.25) однозначно разрешимо при любой правой части, то в качестве дополнительного условия следует взять равенство

$$\int_0^{2\pi} d\theta_0 \int_0^{2\pi} K(\theta_0, \theta)\varphi(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta_0)d\theta_0. \quad (6.5.29)$$

Численный метод для уравнения (6.5.25) или (6.5.26) надо строить с учетом сделанных замечаний.

Таким образом, аналогом системы (6.5.6) для уравнения (6.5.25) будет следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} + \\ + \sum_{k=1}^n K(\theta_{0m}, \theta_k) \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad m = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n K_1(\theta_k) \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = C. \end{aligned} \quad (6.5.30)$$

Если единственное решение уравнения (6.5.25) выделяется с помощью условия $\varphi(q) = 0$, то для этого уравнения надо рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_q}}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} + \\ + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_q}}^n K(\theta_{0m}, \theta_k) \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad m = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.5.31)$$

где точки θ_k и θ_{0m} выбраны так же, как в системе (6.5.20). Системы (6.5.30) и (6.5.31) удобны тем, что с учетом разрешимости систем (6.5.6) и (6.5.20), их можно эквивалентным образом преобразовать в системы линейных алгебраических уравнений для интегральных уравнений Фредгольма второго рода, эквивалентных уравнению (6.5.25) в классе непрерывных решений. Таким образом можно доказать сходимость решений систем (6.5.30) и (6.5.31) к точному решению уравнения (6.5.25) с теми же оценками, как и для характеристического уравнения.

Если в уравнении (6.5.25) правая часть терпит разрыв первого рода или имеет интегрируемый разрыв в точке q , то при составлении системы (6.5.30) надо учесть замечание 6.5.3.

Поясним, почему для уравнения (6.5.25) целесообразно составлять систему вида (6.5.30) и в том случае, когда оно однозначно разрешимо при любой правой части, на примере уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \varphi(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad (6.5.32)$$

имеющего при любой правой части решение [98]

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} f(\theta_0) d\theta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0. \quad (6.5.33)$$

Действительно, рассмотрим систему

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad (6.5.34)$$

$$m = 1, \dots, n,$$

где точки θ_k и θ_{0k} , $k = 1, \dots, n$, выбираются так же, как в системе (6.5.6). Просуммируем в (6.5.34) все уравнения; получим, что она эквивалентна системе

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f(\theta_{0p}) \frac{2\pi}{n}, \quad (6.5.35)$$

$$m = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f(\theta_{0p}) \frac{2\pi}{n}, \quad m = n.$$

Сравнивая систему (6.5.35) с системой (6.5.17), видим, что решение системы (6.5.35) будет даваться формулой

$$\varphi_n(\theta_k) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\theta_k - \theta_{0m}}{2} \left(f(\theta_{0m}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f(\theta_{0p}) \right) \frac{2\pi}{n} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0n} - \theta_k}{2} \left[\sum_{m=1}^n \left(f(\theta_{0m}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f(\theta_{0p}) \right) \frac{2\pi}{n} \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^n f(\theta_{0p}) \frac{2\pi}{n}. \quad (6.5.36)$$

Из формулы (6.5.36) видно, что при наличии погрешности в вычислении правых частей и суммы $\sum_{p=1}^n f(\theta_{0p}) \frac{2\pi}{n}$ эта погрешность еще увеличивается множителем $\operatorname{ctg}(\theta_{0n} - \theta_k)/2$, который имеет порядок числа n при $\theta_k \rightarrow \theta_{0n}$.

6.6. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

Как было показано в 4.1, задача Дирихле для кусочно-гладкой кривой L с помощью потенциала простого слоя сводится к интегральному уравнению (4.1.4) первого рода с логарифмической особенностью. Пусть кривая $L \in H(\alpha)$ (см. параграф 4.1). Тогда, продифференцировав по длине дуги уравнение (4.1.4), приходим:

1) к сингулярному интегральному уравнению первого рода с ядром Коши на отрезке, если L – разомкнутая кривая;

2) к уравнению первого рода с ядром Гильберта, если L – замкнутая кривая.

Так как приведение продифференцированного уравнения (4.1.4) к сингулярным интегральным уравнениям первого рода требует дополнительных затрат, то лучше написать его в виде

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{x'_0(x_0-x) + y'_0(y_0-y)}{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2} \psi_0(s) ds = f'(s_0), \quad s_0 \in [0, l], \quad (6.6.1)$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$ – параметрическое задание кривой L .

Если кривая L разомкнутая, то уравнение (6.6.1) имеет вид (6.2.10), и так как его единственное решение выделяется с помощью условия, получаемого из уравнения (4.1.4) при фиксировании в нем произвольным образом точки s_0 , то индекс этого уравнения равен единице. Поэтому в силу замечания 6.2.1 численное значение искомого решения получится из системы вида (6.2.6)*, т.е. из системы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega(s_{0m}, s_k) \psi_{0n}(s_k) \Delta s_k &= f'(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n-1, \\ -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (\ln r_{M_k M_{0\nu}}) \psi_{0n}(s_k) \Delta s_k &= -f(s_{0\nu}), \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

где $\omega(s_{0m}, s_k) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x'_{0m}(x_{0m}-x_k) + y'_{0m}(y_{0m}-y_k)}{(x_{0m}-x_k)^2 + (y_{0m}-y_k)^2}$, $x_k = x(s_k)$, $y_k = y(s_k)$, $x_{0m} = x(s_{0m})$, $y_{0m} = y(s_{0m})$, $r_{M_k M_{0\nu}} = [(x_{0\nu}-x_k)^2 + (y_{0\nu}-y_k)^2]^{1/2}$, множества точек $E = \{s_k, k=1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{s_{0m}, m=0, 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[0, l]$, ν – какой-нибудь фиксированный номер точки из множества E_0 .

Если кривая L – замкнутая, то уравнение (6.6.1) имеет вид (6.5.26), для которого единственное решение выделяется с помощью условия вида (6.5.27). Поэтому численное решение этого уравнения получится из системы вида (6.5.30), т.е. из системы

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \omega(s_{0m}, s_k) \psi_{0n}(s_k) \Delta s_k &= f'(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (\ln r_{M_k M_{0\nu}}) \psi_{0n}(s_k) \Delta s_k &= -f(s_{0\nu}), \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

где точки s_k , $k=1, \dots, n$, интерпретируемые как точки окружности длины l с центром в начале координат, разбивают ее на равные части, а точки s_{0m} , $m=1, \dots, n$, являются серединами этих частей; γ_{0n} – регуляризирующая переменная.

Задача Неймана, как следует из параграфа 4.3, для кусочно-гладкой кривой L с помощью потенциала двойного слоя сводится к интегральному уравнению (4.3.7) относительно производной плотности потенциала или к интегральному уравнению (4.3.9) относительно плотности потенциала.

Если кривая L – разомкнутая, то уравнение (4.3.7) является сингулярным интегральным уравнением на отрезке первого рода с ядром Коши, для которого условие выделения единственного решения можно записать в виде

$$\int_0^l g'_{0s}(s) ds = 0, \quad (6.6.4)$$

так как $g(0) = g(l) = 0$. Таким образом, индекс уравнения (4.3.8) равен единице, и поэтому численное значение решения этого уравнения с учетом обозначений в (6.6.2) можно находить из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \omega(s_{0m}, s_k) g'_{n,0s}(s_k) \Delta s_k = f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n-1, \quad (6.6.5)$$

$$\sum_{k=1}^n g'_{n,0s}(s_k) \Delta s_k = 0.$$

Уравнение (4.3.9) является гиперсингулярным интегральным уравнением на отрезке, которое имеет единственное решение. Так как интеграл слева в (4.3.9) является гиперсингулярным, то для численного решения этого уравнения воспользуемся квадратурной формулой (4.3.29). Для этого на отрезке $[0, l]$ параметра s длины дуги кривой L возьмем два семейства точек $s_k = (k-1)h$, $k=1, \dots, n+1$, $h=l/n$, и $s_{0k} = s_k + h/2$, $k=1, \dots, n$. Для численного решения уравнения (6.3.9) надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n [\omega(s_{0m}, s_k) - \omega(s_{0m}, s_{k+1})] g_n(s_{0k}) = f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n. \quad (6.6.6)$$

Справедлива такая теорема.

Теорема 6.6.1. Пусть разомкнутая кривая L принадлежит классу $H_3(\alpha)$, а $f(s_0) \in H(\alpha)$. Тогда между точным решением $g(s)$ уравнения (4.3.9) и решением системы (6.6.6) выполняется соотношение

$$|g(s_{0k}) - g_n(s_{0k})| \leq O(h^\lambda), \quad 0 < \lambda < 1. \quad (6.6.7)$$

Доказательство можно провести следующим образом. При условиях теоремы уравнение (4.3.9) может быть записано в виде уравнения (4.3.27). Последнее можно, разрешив относительно гиперсингулярной части, свести к эквивалентному в смысле нахождения решений интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с регулярным ядром. Этот процесс можно повторить в дискретном виде для системы (6.6.6), что продемонстрируем для уравнения (4.3.11). В этом случае система (6.6.6) имеет вид (6.1.71) и дальше надо воспользоваться теоремой 6.1.8.

Если кривая L – замкнутая, то уравнение (4.3.8) является сингулярным интегральным уравнением первого рода с ядром Гильберта, решение которого определено с точностью до константы. Для выделения единственного решения надо воспользоваться равенством (6.6.4), которое справедливо в этом случае в силу периодичности функции $g_0(s)$. Из результатов параграфа 6.5 следует, что для численного решения уравнения (4.3.8) надо взять следующую систему:

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \omega(s_{0m}, s_k) g'_{n,0s}(s_k) \Delta s_k = f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \quad (6.6.8)$$

$$\sum_{k=1}^n g'_{n,0s}(s_k) \Delta s_k = 0,$$

где точки s_k и s_{0k} , $k=1, \dots, n$, выбраны так же, как в (6.6.3).

Уравнение (4.3.9) является гиперсингулярным интегральным уравнением типа Гильберта, т.е. может быть приведено к виду (4.3.28). В данном случае это уравнение имеет решение с точностью до константы. Поэтому для выделения единственного решения надо задать или значение интеграла от решения или значение решения в некоторой точке.

Если задано значение интеграла от решения, то для численного решения уравнения (4.3.9) надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n [\omega(s_{0m}, s_k) - \omega(s_{0m}, s_{k+1})] g_n(s_{0k}) &= f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n g_n(s_{0k}) \Delta s_k &= C, \end{aligned} \quad (6.6.9)$$

где $s_{n+1} = s_1$.

Если задано значение решения в точке $q \in [0, l]$, то надо рассмотреть систему

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n [\omega(s_{0m}, s_k) - \omega(s_{0m}, s_{k+1})] g_n(s_{0k}) = f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \quad (6.6.10)$$

где $s_{n+1} = s_1$, $g_n(s_{0n}) = g(q)$.

Для модуля разности значений точного решения уравнений (4.3.8) и (4.3.9) и решения соответствующих систем (6.6.8), (6.6.9) и (6.6.10) в точках s_{0k} , $k=1, \dots, n$, справедливы такие же оценки, как для решений уравнения с ядром Гильберта в параграфе 9.5, если кривая $L \in H_3(\omega)$. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 6.6.1 (см. [74, 76]).

Замечание 6.6.1. Если кривая L является кусочно-гладкой, то, как будет показано ниже в численных экспериментах, множество $E = \{s_k, k=1, \dots, n\}$ надо выбирать так, чтобы узлы кривой входили в это множество.

6.7. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца

В этом случае *задача Дирихле* для простого кусочно-гладкого разомкнутого контура при любом k и для замкнутого контура для k , которые не являются собственными значениями для внутренней задачи Дирихле, сводится к интегральному уравнению (4.2.10) первого рода с логарифмической особенностью, которое имеет единственное решение. Продифференцировав уравнение (4.2.10) по параметру s_0 , получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} \int_L H_1^{(2)}(kr_{MM_0}) k \frac{x'_0(x_0 - x) + y'_0(y_0 - y)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}} \psi(s) ds &= f'(s_0), \\ s_0 &\in [0, l]. \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

Следовательно, *если контур L разомкнут*, то для численного решения уравнения (6.7.1) надо рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n W(s_{0m}, s_k) \psi_n(s_k) \Delta s_k &= f'(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n-1, \\ -\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n H_0^{(2)}(kr_{M_k M_{0v}}) \psi_n(s_k) \Delta s_k &= f(s_{0v}), \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

где $W(s_{0m}, s_k) = -\frac{i\pi}{4} H_1^{(2)}(kr_{M_k M_{0m}}) k \omega(s_{0m}, s_k)$, $\omega(s_{0m}, s_k)$ определена в формуле (6.6.2) и точки s_k и s_{0m} выбраны так же, как в системе (6.6.2).

Замечание 6.7.1. Численный эксперимент показывает, что в системах (6.6.2) и (6.7.2) в последнем уравнении для вычисления интеграла с логарифмической особенностью лучше взять более точную квадратурную формулу.

Если контур L замкнут, то для численного решения уравнения (6.7.1) надо рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n W(s_{0m}, s_k) \psi_n(s_k) \Delta s_k &= f'(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ -\frac{i}{4} \sum_{k=1}^n H_0^{(2)}(kr_{M_k M_{0v}}) \psi_n(s_k) \Delta s_k &= f(s_{0v}), \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

где точки s_k и s_{0m} выбраны также, как в системе (6.6.3).

Задача Неймана, как следует из результатов параграфа 5.4, для кусочно-гладкой кривой L с помощью потенциала двойного слоя сводится к интегро-дифференциальному сингулярному уравнению (4.4.4) или к гиперсингулярному интегральному уравнению (4.4.7).

Если кривая L – разомкнутая гладкая, то уравнение (5.4.4) является уравнением типа уравнения Прандтля на отрезке (6.2.15). Так как решение $g(s)$ в этом случае обращается в нуль на концах кривой L , то для численного решения уравнения (4.4.4) надо рассмотреть следующую систему:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n [W_1(s_{0m}, s_k) - W_1(s_{0m}, s_{k+1})] g_n(s_{0k}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n W_2(s_{0m}, s_k) g_n(s_{0k}) h = f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ W_1(s_{0m}, s_k) &= \frac{-ik}{4} H_1^{(2)}(kr_{M_k M_{0m}}) \frac{x'_{0m}(x_{0m} - x_k) + y'_{0m}(y_{0m} - y_k)}{r_{M_k M_{0m}}}, \\ W_2(s_{0m}, s_k) &= \frac{-ik^2}{4} H_0^{(2)}(kr_{M_k M_{0m}}) \bar{\pi}_{M_k} \bar{\pi}_{M_{0m}}, \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

где точки s_k , $k=1, \dots, n+1$ и s_{0m} , $m=1, \dots, n$, выбраны также, как в системе (6.2.16).

Для гиперсингулярного уравнения (4.4.7) заметим следующее. Это уравнение имеет единственное решение, если кривая L простая кусочно-гладкая разомкнутая при любом числе k , и если эта кривая – замкнутая, то при числах k , не являющихся собственными для внутренней задачи Неймана. Как показано в [130], в обоих этих случаях для численного решения уравнения (4.4.7) надо рассмотреть следующую систему:

$$-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n g_n(s_{0k}) W^*(s_{0m}, s_k) = f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \quad (6.7.5)$$

где

$$\begin{aligned} W^*(s_{0m}, s_k) &= A(s_{0m}, s_{k+1}) - A(s_{0m}, s_k) - B(s_{0m}, s_k), \\ A(s_{0m}, s_k) &= k H_1^{(2)}(kr_{M_k M_{0m}}) \frac{x'_{0m}(x_{0m} - x_k) + y'_{0m}(y_{0m} - y_k)}{r_{M_k M_{0m}}}, \\ B(s_{0m}, s_k) &= k^2 \int_{s_k}^{s_{k+1}} H_0^{(2)}(kr_{M M_{0m}}) \bar{\pi}_M \bar{\pi}_{M_{0m}} ds, \end{aligned}$$

точки s_k , $k=1, \dots, n+1$, и s_{0m} , $m=1, \dots, n$, выбраны так же, как в (6.7.4), если кривая L – разомкнутая, и так же, как в уравнении с ядром Гильберта, если кривая L – замкнутая ($s_{n+1} = s_1$).

Замечание 6.7.2. В работе [130] показано в численном эксперименте, что скорость сходимости решения системы (6.7.5) к точному решению уравнения (4.4.7) зависит от способа вычисления $B(s_{0m}, s_k)$.

Замечание 6.7.3. Если кривая L достаточно гладкая замкнутая, то уравнение (4.4.7) является гиперсингулярным с ядром Гильберта, и поэтому, чтобы доказать равномерную по точкам s_{0m} , $m=1, \dots, n$, сходимость численного решения к точному, надо согласно параграфу 6.5 рассмотреть следующую систему:

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n g_n(s_{0k}) W^*(s_{0m}, s_k) &= f(s_{0m}), \quad m=1, \dots, n, \\ \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n g_n(s_{0k}) W^*(s_{0m}, s_k) \Delta s_{0m} &= \sum_{m=1}^n f(s_{0m}) \Delta s_{0m}. \end{aligned} \tag{6.7.6}$$

Глава 7. Одномерные сингулярные интегральные уравнения первого рода. Интерполяционные методы

7.1. Об одном свойстве сингулярных интегральных операторов

В предыдущей главе были рассмотрены численные методы типа дискретных вихрей для уравнения первого рода, которые основывались на применении специальных квадратурных формул типа прямоугольников к сингулярному интегралу. Однако эти формулы, обладая большой общностью, имеют невысокую скорость сходимости. Для построения численных методов решения сингулярных интегральных уравнений, скорость сходимости которых зависит от дифференциальных свойств регулярного ядра и правой части, укажем некоторые свойства операторов [7, 70]

$$S_{\kappa, t_0}^{(\pm)}(\psi(t)) = a(t_0)\omega_{\kappa}^{(\pm)}(t_0)\psi(t_0) \pm \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_{\kappa}^{(\pm)}(t)\psi(t)dt}{t-t_0}, \quad (7.1.1)$$

где функция

$$\varphi(t) = \omega_{\kappa}^{(+)}(t)\psi(t) \quad (7.1.2)$$

является решением индекса κ сингулярного интегрального уравнения

$$K_0\varphi \equiv a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (7.1.3)$$

где L – кусочно-гладкая кривая; $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ являются достаточно гладкими на L [98];

$$\omega_{\kappa}^{(+)}(t) = Z(t)/[a^2(t) - b^2(t)], \quad (7.1.4)$$

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]X^+(t) = [a(t) - b(t)]X^-(t), \quad (7.1.5)$$

а функция $X(z)$ – каноническое решение индекса κ требуемого класса $h(c_1, \dots, c_q)$ [98] соответствующей краевой задачи Коши–Римана.

Функция $\varphi(t)$ находится по формуле [70, 98]

$$\varphi(t_0) = \omega_{\kappa}^{(+)}(t_0)[S_{\kappa, t_0}^{(-)}(f(t)) + \eta(\kappa)b(t_0)P_{\kappa-1}(t_0)], \quad (7.1.6)$$

где

$$S_{\kappa, t_0}^{(-)}(f(t)) = a(t_0)\omega_{\kappa}^{(-)}(t_0)f(t_0) - \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_{\kappa}^{(-)}(t)f(t)dt}{t-t_0},$$

$$\omega_{\kappa}^{(-)}(t) = Z^{-1}(t),$$

и $\eta(\kappa) = 1$ при $\kappa > 0$, $\eta(\kappa) = 0$ при $\kappa \leq 0$, $P_{\kappa-1}(t)$ – многочлен с произвольными коэффициентами степени $\kappa - 1$ при $\kappa \geq 1$.

Уравнение относительно функции $\omega_{\kappa}^{(-)}(t)\mu(t)$

$$S_{\kappa, t_0}^{(-)}(\mu(t)) \equiv a(t_0)\omega_{\kappa}^{(-)}(t_0)\mu(t_0) - \frac{b(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_{\kappa}^{(-)}(t)\mu(t)dt}{t-t_0} = g(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (7.1.7)$$

называется *союзным* к уравнению (7.1.3).

Введем в рассмотрение еще операторы

$$S_{t_0}^{(\pm)}(\omega_{\kappa}^{(\pm)}\psi(t)) = S_{\kappa, t_0}^{(\pm)}(\psi(t)), \quad t_0 \in L, \quad (7.1.8)$$

и присоединенные к последнему

$$S_{t_0}^{*(\pm)}(\gamma(t)) = a(t_0)\gamma(t_0) \pm \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(t)\gamma(t)dt}{t-t_0}. \quad (7.1.9)$$

Аналогично оператору $S_{\kappa, t_0}^{(\pm)}(\psi(t))$ введем оператор

$$S_{\kappa, t_0}^{*(\pm)}(\psi(t)) = S_{t_0}^{*(\pm)}(\omega_{\kappa}^{(\pm)}(t)\psi(t)), \quad t_0 \in L. \quad (7.1.10)$$

Обозначим $\xi_{n,m}(z) = P_n(z) + \lambda_{-m}(z-c)$ и $\xi_{n,0}(z) = P_n(z)$, где $P_n(z)$ – многочлен степени n , $\lambda_{-m}(z-c) = c_{-1}(z-c)^{-1} + \dots + c_{-m}(z-c)^{-m}$, $c \notin L$. Функцию $\xi_{n,m}(z)$ будем называть обобщенным многочленом степени (n, m) . Справедливы следующие теоремы.

Теорема 7.1.1. [7]. Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ – произвольные функции класса H на L . Тогда для любой функции $\xi_{n,m}(z)$ выполняется соотношение

$$S_{\kappa, t_0}^{*(\pm)}(\xi_{n,m}(t)) = \hat{\xi}_{n \mp \kappa, m}(t_0), \quad t_0 \in L. \quad (7.1.11)$$

Доказательство. Рассуждения проведем для $\omega_{\kappa}^{(+)}$. Рассмотрим функцию $X(z)\xi_{n,m}(z)$, где $X(z)$ – каноническая функция индекса κ для краевой задачи Коши–Римана [98], соответствующей уравнению (7.1.3). Будем в дальнейшем называть $X(z)$ канонической функцией уравнения (7.1.3) [98]. Так как $X(z)$ аналитична вне L , $X^{\pm}(t) \in H^*$ на L и на бесконечности ведет себя, как $z^{-\kappa}$, то существует такая функция $\hat{\xi}_{n-\kappa, m}(z)$, что функция $\Phi(z) = X(z)\xi_{n,m}(z) - \hat{\xi}_{n-\kappa, m}(z)$ аналитична вне L , $\Phi^{\pm}(t) \in H^*$ на L и $\Phi(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда в силу формул Сохоцкого–Племеля [98] имеем

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \quad (7.1.12)$$

Учитывая, что $\xi_{n,m}^+(t) = \xi_{n,m}^-(t) = \xi_{n,m}(t)$, $\hat{\xi}_{n-\kappa, m}^+(t) = \hat{\xi}_{n-\kappa, m}^-(t) = \hat{\xi}_{n-\kappa, m}(t)$, а $X^{\pm}(t) = [a(t) \mp b(t)]Z(t) / [a^2(t) - b^2(t)]$, из формулы (7.1.12) получаем соотношение (7.1.11). Для получения соотношения (7.1.11) с $\omega_{\kappa}^{(-)}$ надо рассматривать функцию $X^{-1}(z) / \xi_{n,m}(z)$.

Из теоремы 7.1.1 следует следующая теорема.

Теорема 7.1.2. Пусть $b(t)$ – многочлен степени l . Тогда для операторов $S_{\kappa, t_0}^{(\pm)}(\bullet)$ справедливо соотношение

$$S_{\kappa, t_0}^{(\pm)}(\xi_{n,m}(t)) = \xi_{n \mp \kappa, m}^*(t_0), \quad n \mp \kappa \geq l - 1. \quad (7.1.13)$$

Теорему 7.1.2 можно обобщить следующим образом [85]. Пусть коэффициент $b(t)$ представлен в виде $b(t) = b_l(t) \cdot b_1(t)$, где $b_l(t)$ – полином степени l . Тогда для любого $n \geq l \pm \kappa - 1$ выполняется соотношение

$$S_{\kappa, t_0}^{(\pm)}(b_l(t)\xi_{n,m}(t)) = \xi_{n \mp \kappa, m}^{**}(t_0) b_l(t_0). \quad (7.1.14)$$

Соотношения (7.1.13) и (7.1.14) важны при построении численных методов интерполяционного типа для сингулярных интегральных уравнений второго рода. Из (7.1.14) следует, что если правая часть в характеристическом уравнении (7.1.3) представлена произведением функции $b_l(t)$ на обобщенный полином степени $(n - \kappa, m)$, то решение этого уравнения также будет произведением функции $b_l(t)$ на обобщенный полином степени (n, m) (напомним, что $b(t) = b_l(t)b_1(t)$).

Для сингулярного интегрального оператора второго рода с действительными коэффициентами на отрезке $[-1, 1]$ информацию о соотношениях (7.1.13) и (7.1.14) можно уточнить [151]. Под таким оператором будем понимать оператор $S_{t_0}^{(+)}(\gamma(t))$, в котором $L = [-1, 1]$ на числовой оси, $b(t_0) = i\tilde{b}(t_0) = b_l(t_0)b_r(t_0)$, $b_l(t_0)$ – действительная неотрица-

тельная на $[-1, 1]$ и может иметь нули не целого порядка на одном или обоих концах отрезка, $b_r(t_0)$ – действительный многочлен степени $r \geq 0$ (в дальнейшем будем обозначать $\tilde{b}(t_0)$ через $b(t_0)$), $a(t_0)$ – действительная функция на $[-1, 1]$ класса H . Введем еще обозначение

$$W_{\kappa}^{(+)}(t) = (-1)^{\kappa} b_1(t) \omega_{\kappa}^{(+)}(t).$$

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 7.1.3. Пусть $p_n(t)$ и $q_{n-\kappa}(t)$ – произвольные действительные полиномы, соответственно степени n и $n - \kappa$, где $n > r + |\kappa|$. Тогда существуют действительные многочлены $\hat{q}_{n-\kappa}(t)$ и $\hat{p}_n(t)$, соответственно, степеней $n - \kappa$ и n такие, что

$$S_{t_0}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)p_n(t)) = (-1)^{\kappa} b_1(t_0)\hat{q}_{n-\kappa}(t_0), \quad (7.1.15)$$

$$S_{t_0}^{(-)}(W_{\kappa}^{(-)}(t)q_{n-\kappa}(t)) = (-1)^{\kappa} b_1(t_0)\hat{p}_n(t_0), \quad (7.1.16)$$

где $W_{\kappa}^{(-)}(t) = (-1)^{\kappa} \omega_{\kappa}^{(-)}(t)$.

Полиномы $\hat{q}_{n-\kappa}(t)$ и $\hat{p}_n(t)$ могут быть в явном виде выписаны через коэффициенты многочленов $p_n(t)$, $q_{n-\kappa}(t)$, $b_r(t)$ и моменты весовых функций $W_{\kappa}^{(+)}(t)$ и $W_{\kappa}^{(-)}(t)$.

Теорема 7.1.4. Пусть $W_{\kappa}^{(+)}(t) \geq 0$, $W_{\kappa}^{(-)}(t) \geq 0$ абсолютно интегрируемы на $[-1, 1]$, p_n^* – полиномы, ортогональные на $[-1, 1]$ с весом $W_{\kappa}^{(+)}(t)$, $q_{n-\kappa}^*$ – полиномы, ортогональные на $[-1, 1]$ с весом $W_{\kappa}^{(-)}(t)$. Тогда формулы (7.1.15) и (7.1.16) в теореме 7.1.3 примут вид

$$S_{t_0}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)p_n^*(t)) = (-1)^{\kappa} b_1(t_0)q_{n-\kappa}^*(t_0), \quad (7.1.17)$$

$$S_{t_0}^{(-)}(W_{\kappa}^{(-)}(t)q_{n-\kappa}^*(t)) = (-1)^{\kappa} b_1(t_0)p_n^*(t_0). \quad (7.1.18)$$

Из теоремы 7.1.3, следует, что если в характеристическом уравнении (7.1.3) на $[-1, 1]$ будет $f(t_0) = b_1(t_0)f_{n-\kappa}(t_0)$, где $f_{n-\kappa}(t_0)$ – полином степени $n - \kappa$, то решением этого уравнения будет полином степени n . Свойства операторов $S_{t_0}^{(\pm)}$, сформулированные в теоремах 7.1.3 и 7.1.4, образуют основу построения вычислительной схемы решения сингулярного интегрального уравнения второго рода с действительными коэффициентами на отрезке $[-1, 1]$. Отметим, что для программной реализации настоящей вычислительной схемы важное значение имеет конструктивное доказательство теоремы 7.1.3, которое не только устанавливает, что операторы $S_{t_0}^{(\pm)}$ преобразуют произведение весовой функции на известный многочлен в новый многочлен, умноженный на $b_1(t_0)$, но и позволяет выписать последний многочлен в явном виде.

Обратимся теперь к доказательству теорем 7.1.3 и 7.1.4 для оператора $S_{t_0}^{(+)}$ (доказательство для оператора $S_{t_0}^{(-)}$ аналогично).

Доказательство теоремы 7.1.3 и 7.1.4 для оператора $S_{t_0}^{(+)}$.

1. Пусть $\kappa > 0$. Представим $p_n(t)$ как $p_n(t) = \bar{p}_{\kappa-1}(t)\pi_{n-\kappa+1}(t)$, где $\bar{p}_{\kappa-1}(t)$ – полином степени $\kappa - 1$, а $\pi_{n-\kappa+1}(t)$ – полином степени $n - \kappa + 1$. Тогда

$$S_{t_0}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)p_n(t)) = (-1)^{\kappa} \frac{\pi_{n-\kappa+1}(t_0)}{b_r(t_0)} S_{t_0}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)\bar{p}_{\kappa-1}(t)) +$$

$$+ b_1(t_0)Q_{r-1}^{(1)}(t_0) + b_1(t_0)Q_{n-\kappa}^{(2)}(t_0),$$

где

$$S_{t_0}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)\bar{p}_{\kappa-1}(t)) \equiv 0, \quad t_0 \in (-1,1),$$

$$Q_{r-1}^{(1)}(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{b_r(t_0) - b_r(t)}{t - t_0} p_n(t) W_{\kappa}^{(+)}(t) dt,$$

$$Q_{r-1}^{(2)}(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\pi_{n-\kappa+1}(t) - \pi_{n-\kappa+1}(t_0)}{t - t_0} b_r(t) W_{\kappa}^{(+)}(t) \bar{p}_{\kappa-1} dt.$$

2. Пусть $\kappa=0$. Тогда

$$S_{t_0}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)p_n(t)) = (-1)^{\kappa} b_1(t_0)p_n(t_0)S_{t_0}^{(-)}(\omega_{\kappa}^{(+)}(t)) +$$

$$+ b_1(t_0)Q_{r-1}^{(1)}(t_0) + b_1(t_0)Q_{n-1}^{(3)}(t_0),$$

где

$$S_{t_0}^{(-)}(\omega_{\kappa}^{(+)}(t)) \equiv \text{const}, \quad Q_{r-1}^{(3)}(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_n(t) - p_n(t_0)}{t - t_0} b_r(t) W_{\kappa}^{(+)}(t) dt,$$

3. Пусть $\kappa < 0$. Тогда рассмотрим сингулярное интегральное уравнение индекса $\tilde{\kappa} = -\kappa > 0$ класса \tilde{h} , союзного по отношению к классу h , с вспомогательными условиями

$$S_{t_0}^{(-)}(W_{\kappa}^{(+)}(t)q(t)) = b_1(t_0)p_n(t_0),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 t^{\nu} W_{\kappa}^{(-)}(t)q(t) dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, \tilde{\kappa} - 1.$$

Решение этого уравнения находится конструктивно [86] и дает искомый многочлен $q_{n-\kappa}(t_0)$, $\kappa < 0$.

Доказательство теоремы 7.1.4. На основании 1-го критерия ортогональности (см. [112]) следует, что теорема будет доказана, если получим, что $\int_{-1}^1 W_{\kappa}^{(-)}(t)q_{n-\kappa}^*(t)Q_m(t)dt = 0$ для любого многочлена $Q_m(t)$ степени $m < n - \kappa$. Учитывая, что $m + \kappa < n$, применяя свойство союзных сингулярных интегральных операторов (см. [98]) и теорему 7.1.3, получаем, что существует такой полином $p_{m+\kappa}(t)$, для которого справедливо соотношение

$$\int_{-1}^1 W_{\kappa}^{(-)}(t)q_{n-\kappa}^*(t)Q_m(t)dt = \int_{-1}^1 \omega_{\kappa}^{(-)}(t)Q_m(t)S_t^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)}(\tau)p_n^*(\tau))d\tau =$$

$$= \int_{-1}^1 W_{\kappa}^{(+)}(t)p_n^*(t)S_t^{*(+)}(\omega_{\kappa}^{(-)}(t)Q_m(t))d\tau = \int_{-1}^1 W_{\kappa}^{(+)}(t)p_n^*(t)p_{m+\kappa}(t)dt = 0.$$

7.2. Общая схема построения численных методов интерполяционного типа

В данном параграфе напомним следующую схему приближенного решения уравнения

$$A(\hat{\psi}) = f, \quad (7.2.1)$$

где A – линейный оператор, непрерывно обратимый в паре банаховых пространств (\hat{X}, \hat{Y}) [114]. Если имеется последовательность уравнений

$$A_n(\hat{\psi}_n^*) = f, \quad (7.2.2)$$

где $A_n: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ – линейные ограниченные операторы, и $\|A - A_n\| = \beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тогда, начиная с некоторого n_0 для всех $n > n_0$ операторы A_n непрерывно обратимы в паре пространств (\hat{X}, \hat{Y}) и выполняется следующее неравенство:

$$\|\hat{\psi} - \hat{\psi}_n^*\|_{\hat{X}} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|(A - A_n)A^{-1}\|}{1 - \|(A - A_n)A^{-1}\|} \|\mathcal{F}\|_{\hat{Y}}. \quad (7.2.3)$$

Для этих n решение уравнения

$$A_n(\hat{\psi}_n) = f_n, \quad f_n \in \hat{Y}, \quad (7.2.4)$$

единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{\psi} - \hat{\psi}_n\|_{\hat{X}} \leq \|\hat{\psi} - \hat{\psi}_n^*\|_{\hat{X}} + \|A^{-1}(f - f_n)\|_{\hat{X}}. \quad (7.2.5)$$

Рассмотрим теперь полное сингулярное интегральное уравнение, которое с учетом обозначений параграфа 7.1 запишем в виде

$$A(\hat{\psi}(t)) = \hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\hat{\psi}(t)) + \int_L k(t_0, t) \omega_{\kappa}^{(+)}(t) \psi(t) dt = \hat{f}(t_0), \quad (7.2.6)$$

где через $\hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$ обозначена [70] совокупность оператора $S_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$, условий и регуляризирующих переменных, выделяющих единственное решение $\hat{\psi}(t)$ уравнения (7.2.1) в совокупности с упомянутыми условиями и регуляризирующими переменными, а $\hat{f}(t_0)$ – совокупность функции $f(t_0)$ и значений соответствующих условий.

Возьмем теперь уравнение

$$A(\hat{\psi}_n^*) = \hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\hat{\psi}_n^*(t)) + \int_L k(t_0, t) \omega_{\kappa}^{(+)}(t) \psi_n^*(t) dt = \hat{f}(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (7.2.7)$$

где ядро $k_n(t_0, t)$ получается из ядра $k(t_0, t)$ аппроксимацией его обобщенными полиномами степени $(n - \kappa, n)$, а если $L = [-1, 1]$ на действительной оси, то алгебраически-ми полиномами степени $n - \kappa$ по переменной t_0 . Будем предполагать, что кривая L и ядра $k(t_0, t)$, $k_n(t_0, t)$ таковы, что $\|K - K_n\|_{\hat{X} \rightarrow \hat{Y}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$K(\psi(t)) = \int_L k(t_0, t) \omega_{\kappa}^{(+)}(t) \psi(t) dt, \\ K_n(\psi^*(t)) = \int_L k_n(t_0, t) \omega_{\kappa}^{(+)}(t) \psi(t) dt, \quad \hat{X} = X_{\kappa}, \quad \hat{Y} = Y_{\kappa}.$$

В этом случае $\|A - A_n\|_{\hat{X} \rightarrow \hat{Y}} = \|K - K_n\|_{\hat{X} \rightarrow \hat{Y}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, начиная с некоторого n_0 для всех $n \geq n_0$, уравнение (7.2.7) имеет единственное решение для любого $\hat{f} \in \hat{Y}$.

Если теперь рассмотреть уравнение

$$A(\hat{\psi}_n) = \hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\hat{\psi}_n(t)) + \int_L k_n(t_0, t) \omega_{\kappa}^{(+)}(t) \psi_n(t) dt = \hat{f}_n(t_0), \quad (7.2.8)$$

где $\hat{f}_n(t_0)$ получено из $\hat{f}(t_0)$ заменой $f(t_0)$ на $f_n(t_0)$ таким же образом, как $k_n(t_0, t)$ из $k(t_0, t)$, тогда для достаточно больших n компонента $\psi_n(t)$ решения $\hat{\psi}_n(t)$ этого урав-

нения есть полином степени n , если $L = [-1, 1]$ или обобщенный полином степени (n, n) в силу соотношения (7.1.7).

Уравнение (7.2.8) эквивалентно соответствующей системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов решения $\psi_n(t)$, которая имеет единственное решение. Близость функций $\psi(t)$ и $\psi_n(t)$ в норме пространства X может быть получена из формулы (7.1.7).

Замечание 7.2.1. Как известно [71], сингулярный интегральный оператор неограничен в равномерной метрике. Поэтому, чтобы получить оценку сходимости численного решения к точному в равномерной метрике, можно поступить следующим образом. От исходного уравнения (7.2.6) и приближенного уравнения (7.2.8) перейти к эквивалентным им интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода, операторы которых уже являются ограниченными в равномерной метрике, и затем дать оценку разности точного и приближенного решений.

7.3. Уравнение на отрезке и системе отрезков

Рассмотрим вначале характеристическое уравнение на отрезке $[-1, 1]$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad (7.3.1)$$

которое для данного индекса κ запишем с учетом обозначений в параграфе 7.1 (см. также [70]) в виде

$$A(\hat{\psi}(t)) = \hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\hat{\psi}(t)) = \hat{f}(t_0). \quad (7.3.2)$$

Здесь:

1) для $\kappa = 1$

$$\omega_1(t) = (1-t)^{-1/2}, \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t), \quad \hat{f}(t) = (f(t), C),$$

где

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \omega_1(t) \psi(t) dt = C; \quad (7.3.3)$$

2) для $\kappa = 0$

$$\omega_0(t) = \sqrt{(1-t)/(1+t)}, \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t), \quad \hat{f}(t) = f(t);$$

3) для $\kappa = -1$

$$\omega_{(-1)}(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad \hat{\psi}(t) = (\psi(t), \gamma_0), \quad \hat{f}(t) = f(t);$$

$\psi(t)$ является решением уравнения (7.3.1) тогда и только тогда, когда

$$\gamma_0 = \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0. \quad (7.3.4)$$

Построение численного метода более подробно проведем для индекса $\kappa = 1$. Заменяем функцию $f(t_0)$ многочленом $f_n(t_0)$ степени $n-2$. Тогда решение $\psi(t)$ уравнения (7.3.1) будет многочленом степени $n-1$ (см. теорему 7.1.3). Равенство многочленов $f_n(t_0)$ и $S_{1, t_0}^{(+)}(\psi_n(t))$ эквивалентно системе $(n-1)$ равенств относительно либо $(n-1)$ коэффициентов при степенях переменной, либо значений этих многочленов в $(n-1)$ различных точках. Во втором случае уравнение

$$A(\hat{\psi}_n(t)) = \hat{S}_{1,t_0}^{(+)}(\hat{\psi}_n(t)) = \hat{f}_n(t_0), \quad (7.3.5)$$

которое имеет единственное решение, эквивалентно в смысле нахождения решений системе n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1,t_0}^{(+)}(\hat{\psi}_n(t)) &= \hat{f}_n(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt &= C, \end{aligned} \quad (7.3.5)^*$$

которая также будет иметь единственное решение.

Если многочлен $\psi_n(t)$ записан в виде интерполяционного полинома Лагранжа по корням полинома Чебышева первого рода степени n , то он однозначно задается n числами $\psi_n(t_k)$, $k=1, \dots, n$. Поэтому уравнение (7.3.5) эквивалентно уравнению

$$\hat{\psi}_n(t_0) = \psi_n(t_0) = \hat{S}_{1,t_0}^{(-)}(\hat{f}_n(t)) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(t)\sqrt{1-t^2}}{t_0-t} dt + C, \quad (7.3.6)$$

а система уравнений (7.3.5)* – системе уравнений

$$\psi_n(t_k) = \hat{S}_{1,t_k}^{(-)}(\hat{f}_n(t)). \quad (7.3.7)$$

Близость функций $\psi(t)$ и $\psi_n(t)$ в соответствующей метрике будет оцениваться близостью квадратурной формулы $S_{1,t_0}^{(-)}(f_n(t))$ к значению сингулярного интеграла $S_{1,t_0}^{(-)}(f(t))$. При этом желательно, чтобы полученная система линейных алгебраических уравнений (7.3.5)* была бы похожа на систему линейных алгебраических уравнений (6.1.4), получаемую в методе дискретных вихрей. Для этого достаточно вспомнить о квадратурной формуле интерполяционного типа для сингулярного интеграла на отрезке $[-1, 1]$, полученной в параграфе 4.8.

Таким образом, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 7.3.1. Пусть $f(t) \in H$ на $[-1, 1]$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} &= f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \psi_n(t_k) a_k &= C, \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

где $a_k = \pi/n$; $t_k = \cos(2k-1)\pi/(2n)$, $k=1, \dots, n$; $t_{0j} = \cos j\pi/n$, $j=1, \dots, n-1$, и функцией

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_0^2} f(t_0) dt_0}{t-t_0} + C, \quad (7.3.9)$$

выполняется соотношение

$$|\psi(t_k) - \psi_n(t_k)| \leq R_n(t_k), \quad (7.3.10)$$

где $R_n(t_k)$ – погрешность аппроксимации в точке t_k сингулярного интеграла, стоящего в формуле (7.3.9), с помощью квадратурной формулы интерполяционного типа, построенной по точкам t_{0j} , $j=1, \dots, n-1$ (см. параграф 4.8)

Замечание 7.3.1. Доказательство теоремы 7.3.1 дано с использованием однозначно разрешимых операторов. Доказательство этой теоремы на основе идей доказательства теоремы (6.1.1), т.е. чисто алгебраическое доказательство, дано в [18, 132].

Замечание 7.3.2. Как следует из параграфа 2.8, значение приближенного решения $\varphi_n(t_k) = \psi_n(t_k)(1-t_k^2)^{1/2}$ для уравнения (7.3.1) будет даваться формулой

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-t_k^2}} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(t_{0j})b_j}{t_k - t_{0j}} - C \right], \quad k=1, \dots, n, \quad (7.3.11)$$

где $b_j = \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{k}{n}$, $j=1, \dots, n-1$, причем, как следует из [111], формула (7.3.11) дает точное значение решения $\varphi(t)$ в точках t_k , если $f(t)$ является многочленом степени не более $2(n-1)$.

Аналогичными рассуждениями может быть доказана теорема о численном решении уравнения (7.3.1) для индексов $\kappa = -1$ и $\kappa = 0$.

Теорема 7.3.2. Пусть функция $f(t) \in H$ на $[-1, 1]$. Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \gamma_{0n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n+1, \quad (7.3.12)$$

$$a_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}, \quad t_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k=1, \dots, n,$$

$$t_{0j} = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2(n+1)}, \quad j=1, \dots, n+1,$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j=1, \dots, n, \quad (7.3.13)$$

$$a_k = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}, \quad t_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k=1, \dots, n,$$

$$t_{0j} = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n+1}, \quad j=1, \dots, n,$$

и функциями $\psi(t)$, соответственно

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t_0) dt_0}{\sqrt{1-t_0^2} (t-t_0)}, \quad (7.3.14)$$

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t_0}{1-t_0}} \frac{f(t_0) dt_0}{t-t_0} \quad (7.3.15)$$

выполняется соотношение (7.3.10).

Заметим, что если требуется брать приближенное решение как функцию от t , то надо воспользоваться формулой (2.8.1), которая запишется в виде

$$\psi_n(t) = \sum_{k=1}^n \psi_n(t_k) \frac{P_n(t)}{(t-t_k)P'_n(t_k)},$$

где для теоремы 7.3.1

$$P_n(t) = T_n(t) = \cos(n \arccos t),$$

и для теоремы 7.3.2

$$P_n(t) = U_n(t) = \frac{\sin[(n+1) \arccos t]}{\sin(\arccos t)},$$

для системы (7.3.12)

$$P_n(t) = \frac{T_{n+1}(t) - T_n(t)}{1-t}.$$

В некоторых прикладных задачах [14] приходится рассматривать решение характеристического уравнения, когда известно его значение в некоторой точке $q \in (-1, 1)$. В этом случае с помощью рассуждений в понятиях операторов или алгебраических рассуждений можно получить следующий аналог теоремы 6.1.3:

решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_q}}^n \frac{\Psi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}) + \frac{\Psi(q) a_{k_q}}{t_{k_q} - t_{0j}}, \quad j=1, \dots, n-1, \quad (7.3.16)$$

(где a_k , t_k , $k=1, \dots, n$ и t_{0j} , $j=1, \dots, n-1$, определяется так же, как и в теореме 7.3.1, а k_q – номер точки t_k , ближайшей к точке q), равномерно сходится к функции

$$\psi(t) = -\frac{q-t}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_0^2} f(t_0) dt_0}{(t-t_0)(q-t_0)} + \psi(q). \quad (7.3.17)$$

В общем случае с учетом формулы (2.8.6) можно показать, что, если функция $f(t)$ обладает ограниченной второй производной, то $|\Psi_n(t_k) - \psi(t_k)|$ будет величиной порядка n^{-1} .

Наконец, если решение ищется в классе функций $\varphi(t) = \psi(t)/(q-t)$, $\psi(t) = \sqrt{(1-t)/(1+t)}u(t)$ и известно значение $u(q)$ в точке $q \in (-1, 1)$, то справедлив также аналог теоремы 6.1.4, который состоит в следующем.

Между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_q}}^n \frac{V_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}) - \frac{1}{\pi} \frac{u(q) a_{k_q}}{(t_{0j} - t_{j_q})(t_{0j_q} - t_{j_q})}, \quad (7.3.18)$$

$$j=1, \dots, n, \quad j \neq j_q,$$

где a_k , t_k и t_{0j} определяются так же, как и в системе (7.3.13), j_q – номер точки t_{0j} , ближайшей к точке q , $V(t) = u(t)/(q-t)$, и функцией

$$V(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t_0} f(t_0) dt_0}{\sqrt{1-t_0} (t-t_0)} + \frac{u(q)}{q-t} \quad (7.3.19)$$

выполняется соотношение (при достаточной гладкости функции $f(t_0)$)

$$|V_n(t_k) - V(t_k)| \leq \frac{1}{q-t_k} O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7.3.20)$$

Можно также сформулировать аналоги теорем 6.1.5 и 6.1.6. Здесь, как и в замечании 6.1.2, отметим, что с использованием решений системы линейных алгебраических уравнений (7.3.16) и (7.3.18) хорошо вычисляются интегралы $\int_{-1}^1 \eta(t) \varphi(t) dt$, где $\eta(t)$ – функция класса H на $[-1, 1]$.

Все сформулированные в настоящем параграфе результаты для характеристического уравнения (7.3.2) справедливы и для полного уравнения первого рода (6.2.1), если

оно однозначно разрешимо и если его можно записать в виде уравнения (7.2.6), т.е. в том виде, когда его характеристическая часть становится однозначно разрешима также в соответствующих пространствах. В этом случае справедлив аналог теоремы 6.2.1, для чего в системе (7.3.8) в первых $(n-1)$ уравнениях, а в системах (7.3.12) и (7.3.13) во всех n уравнениях надо добавить слагаемое

$$\sum_{k=1}^n k(t_{0j}, t_k) \psi_n(t_k) a_k, \quad (7.3.21)$$

где точки t_{0j} и t_k , а также коэффициенты a_k выбираются так же, как и для соответствующего характеристического уравнения.

В соответствии с замечанием 6.2.2 результаты, сформулированные в данном параграфе для сингулярного интегрального уравнения на отрезке, справедливы для сингулярного интегрального уравнения на системе L непересекающихся отрезков (6.3.1), а именно справедлив аналог теоремы 6.3.3. Для формулировки этого результата введем еще обозначение

$$\Phi_{\kappa_m}(t) = \Phi_{\kappa}(t)|_{t \in [A_m, B_m]} = \omega_{\kappa_m}(t) \Psi_{\kappa, m}(t). \quad (7.3.22)$$

На каждом из отрезков $[A_m, B_m]$ будем рассматривать неравномерные сетки, состоящие из точек $t_{m,k} = g_m(\tau_k)$, $k=1, \dots, n_m$, где τ_k – корни многочлена $P_{\kappa_m, n_m}(\tau)$ из системы ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $\omega_{\kappa_m}(\tau)$, и точек $t_{m,0j} = g_m(\tau_{0j})$, $j=1, \dots, n_m - \kappa_m$, где τ_{0j} – корни многочлена $Q_{\kappa_m, n_m}(\tau)$, определенного через $P_{\kappa_m, n_m}(\tau)$ равенством (2.8.4).

Теорема 7.3.3. Пусть функция $f(t) \in H$ на L . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \xi(-\kappa_m) \gamma_{0, n_m} + \sum_{k=1}^{n_m} \frac{\Psi_{\kappa_m, n_m}(t_{m,k}) a_{m,k}}{t_{m,0j} - t_{m,k}} + \sum_{\substack{l=1 \\ p \neq m}}^l \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\Psi_{\kappa_p, n_p}(t_{p,k}) a_{p,k}}{t_{m,0j} - t_{p,k}} + \\ + \sum_{p=1}^l \sum_{k=1}^{n_p} K(t_{m,0j}, t_{p,k}) \Psi_{\kappa_p, n_p}(t_{p,k}) a_{p,k} = f_m(t_{m,0j}), \quad (7.3.23) \\ j=1, \dots, n_m - \kappa_m, \quad m=1, \dots, l, \\ \sum_{k=1}^{n_m} \xi(\kappa_m) \Psi_{\kappa_m, n_m} a_{m,k} = \xi(\kappa_m) C_m, \quad m=1, \dots, l, \end{aligned}$$

где $a_{m,k} = (B_m - A_m) a_k / 2$, $a_k = Q_{\kappa_m, n_m}(t_{m,k}) / P'_{\kappa_m, n_m}(t_{m,k})$, и функцией $\Psi_{\kappa}(t)$, определяющей решение $\Phi_{\kappa}(t)$ на каждом из отрезков $[A_m, B_m]$, выполняется соотношение (7.3.10), где $R_{m, n_m}(t_{m,k})$ – погрешность аппроксимации сингулярных интегралов на l , которые появляются в эквивалентном уравнении Фредгольма, в точке $t_{m,k}$.

7.4. Уравнение на окружности и с ядром Гильберта

Рассмотрим полное уравнение (6.4.18) первого рода на окружности радиуса единицы с центром в начале координат при условии, что его правая часть и регулярное ядро принадлежит классу H на окружности и оно имеет единственное решение в этом классе функций. Из рассуждений параграфа 7.2 следует, что, применяя к интегралу на окружности квадратурную формулу (2.7.14) интерполяционного типа, получим численный метод решения уравнения (6.4.18), для которого вид системы линейных алгеб-

раических уравнений будет такой же, как и в методе типа дискретных вихрей. Таким образом справедлива теорема.

Теорема 7.4.1. Пусть функции $f(t_0)$ и $K(t_0, t)$ принадлежат пространству $H_r(\alpha)$ на окружности. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=0}^{2n} K(t_{0j}, t_k) \varphi_n(t_k) a_k = f(t_{0j}), \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad (7.4.1)$$

где $a_k = 2\pi t_k / (2n+1)$, а точки t_k и t_{0j} , $k, j = 0, 1, \dots, 2n$, выбраны так же, как в формуле (2.7.14), и решением уравнения (6.4.18) справедливо соотношение вида (7.3.10), в котором $R_n(t_k) = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$.

Замечание 7.4.1. Теорема 7.4.1 легко переносится на случай, когда L в уравнении (6.4.18) является системой непересекающихся окружностей [73]. Отметим также, что доказательство этой теоремы можно дать и алгебраическим путем [18, 132].

Обратимся теперь к полному уравнению Гильберта первого рода (6.5.26). Сопоставляя квадратурные суммы для интеграла с ядром Гильберта, данные в формулах (2.2.17) и (2.6.8), видим, что квадратурная сумма (2.6.18) интерполяционного типа отличается от квадратурной суммы типа метода дискретных вихрей (2.2.17) только тем, что в (2.6.18) всегда надо брать нечетное число точек θ_k и θ_{0m} , $k, m = 0, 1, \dots, 2n$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.4.2. Пусть в уравнении (6.5.26) функции $f(\theta_0)$ и $K(\theta_0, \theta)$ периодические и принадлежат классу $H_r(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$. Тогда, если в системах линейных алгебраических уравнений (6.5.30) и (6.5.31) число точек нечетно, то между их решениями и соответствующими решениями уравнения (6.5.25) справедливо соотношение вида (7.3.10), в котором $R_n(\theta_k) = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$.

7.5. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа

В параграфе 6.6 для интегральных уравнений первого рода, к которым сводятся с помощью потенциалов простого и двойного слоя задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, были даны численные методы решения типа метода дискретных вихрей (на основе квадратурных формул типа прямоугольников). Эти методы имеют точность, не превосходящую первого порядка при любой гладкости исходных данных. Поэтому для "хороших" разомкнутых и замкнутых контуров укажем построение численных методов интерполяционного типа.

Задача Дирихле. Напомним, что с помощью потенциала простого слоя эта задача сводится к интегральному уравнению первого рода с логарифмической особенностью (4.1.4), которое имеет единственное решение. Это уравнение эквивалентно, в смысле нахождения решения, системе уравнения (6.6.1)

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{x'_0(x_0 - x) + y'_0(y_0 - y)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \psi_0(s) ds = f'(s_0), \quad s_0 \in [0, l], \quad (7.5.1)$$

и интегрального соотношения

$$-\frac{1}{2\pi} \int_L \left(\ln r_{MM_0^*} \right) \psi_0(M) ds_M = f(M_0^*), \quad (7.5.2)$$

где M_0^* – произвольная фиксированная точка кривой L , не являющаяся ее узлом и соответствующая значению \mathfrak{S}_0 (см. (6.6.2)) параметра длины дуги s_0 на кривой L .

Пусть теперь кривая L является простой разомкнутой и пусть имеется такое ее параметрическое представление $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [-1, 1]$, что $x'(t), y'(t) \in H_r(\alpha)$ на $[-1, 1]$, т.е. $x^{(r+1)}, y^{(r+1)} \in H(\alpha)$ на $[-1, 1]$. Тогда уравнение (7.5.1) может быть приведено к уравнению вида (6.2.1), для которого решение $\psi_0(s) = \psi_0(t)$ уравнения (7.5.1) будет иметь индекс $\kappa = 1$. Поэтому в силу результатов параграфа 10.3 надо заменить уравнение (7.5.1) на систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n \psi_{n,0k} \omega_{k,j} a_k = f'_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (7.5.3)$$

где

$$\omega_{k,j} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x'(t_{0_j})[x(t_{0_j}) - x(t_k)] + y'(t_{0_j})[y(t_{0_j}) - y(t_k)]}{\left[(x(t_{0_j}) - x(t_k))^2 + (y(t_{0_j}) - y(t_k))^2 \right]^{3/2}} \frac{\sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k)}}{\sqrt{x'^2(t_{0_j}) + y'^2(t_{0_j})}},$$

$$a_k = \frac{\pi}{n}, \quad t_k = \cos \frac{\pi}{2n} (2k-1), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$t_{0_j} = \cos \frac{\pi}{n} j, \quad f'_j = f'(t_{0_j}), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

а $\psi_{n,0k}$ – значение гладкой части неизвестной функции в точке t_k при данном n , т.е.

$$\psi_0(t) = \frac{\tilde{\psi}_0(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \text{где } \tilde{\psi}_0(t) \text{ – гладкая функция.}$$

Система (7.5.3) имеет n неизвестных $\psi_{n,0k}$ и $(n-1)$ линейных алгебраических уравнений. Недостающее уравнение надо получить дискретизацией интегрального соотношения (7.5.2). Для этого за точку M_0^* надо взять фиксированную точку, соответствующую значению $t_{0_{j_*}}$ параметра t , где j_* – фиксированный номер.

Так как интеграл в (7.5.2) имеет логарифмическую особенность, то выделив $\ln|t - t_0|$ и воспользовавшись формулой (4.1.31), получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \psi_{n,0k} \left[\ln 2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i(t_{0_{j_*}}) \frac{T_i(t_k)}{i} \right] \frac{\pi}{n} r'_k + \sum_{k=1}^n \psi_{n,0k} \lambda_{k,j_*} \frac{\pi}{n} = f(t_{0_{j_*}}), \quad (7.5.4)$$

где

$$r'_k = \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k)},$$

$$\lambda_{k,j_*} = -\frac{r'_k}{2\pi} \ln \left[\sqrt{\left(\frac{x(t_{0_{j_*}}) - x(t_k)}{t_{0_{j_*}} - t_k} \right)^2 + \left(\frac{y(t_{0_{j_*}}) - y(t_k)}{t_{0_{j_*}} - t_k} \right)^2} \right], \quad k = 1, \dots, n.$$

Теперь система (7.5.3) вместе с уравнением (7.5.4) составляет систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Из результатов параграфа 7.3 следует, что начиная с некоторого n такая система будет иметь единственное решение.

Если теперь кривая L является простой гладкой замкнутой, то можно считать, что параметр t в ее параметрическом представлении меняется на $[0, 2\pi]$, а уравнение (7.5.1) может быть приведено к уравнению вида (6.5.25). При этом интеграл в интегральном соотношении (7.5.2) может быть представлен в виде суммы двух интегралов, в одном из которых ядро имеет вид $\ln \left| \sin \frac{t-t_0}{2} \right|$, а в другом ядро является гладкой функ-

цией. Поэтому в силу результатов параграфа 6.5 (см. (6.5.30)) и параграфа 4.1 (см. (4.1.35)) для численного решения системы (7.5.1), (7.5.2) надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=0}^{2n} \psi_{n,0k} \omega_{k,j} b_k = f'_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad (7.5.5)$$

где γ_{0n} – регуляризирующая переменная; $t_k = \frac{2k}{2n+1} \pi$, $t_{0j} = \frac{2j+1}{2n+1} \pi$, $k, j = 0, 1, \dots, 2n$; $\omega_{k,j}$ и f'_j даны в (7.5.3), и уравнение (см. (4.1.35))

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \psi_{n,0k} \frac{2\pi}{2n+1} \left(\ln 2 + \sum_{i=1}^n \frac{\cos i(t_{0j_s} - t_k)}{i} \right) r'_k + \sum_{k=0}^{2n} \psi_{n,0k} \lambda_{k,j_s} \frac{2\pi}{2n+1} = f'(t_{0j_s}), \quad (7.5.6)$$

$$\lambda_{k,j_s} = -\frac{r'_k}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{x(t_{0j_s}) - x(t_k)}{\sin \frac{t_{0j_s} - t_k}{2}} \right)^2 + \left(\frac{y(t_{0j_s}) - y(t_k)}{\sin \frac{t_{0j_s} - t_k}{2}} \right)^2},$$

где r'_k определено в (7.5.4).

Задача Неймана. Как было указано в параграфе 4.3, эта задача для кусочно-гладкой кривой L с помощью потенциала двойного слоя сводится к сингулярному интегральному уравнению (4.3.8), которое запишем в виде

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{x'_0(x_0 - x) + y'_0(y_0 - y)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} g'_{0s} ds = f(s_0). \quad (7.5.7)$$

Единственное решение этого уравнения в случаях, когда кривая L является простой гладкой разомкнутой или замкнутой, выделяется с помощью условия (6.6.4)

$$\int_0^l g'_{0s}(s) ds = 0. \quad (7.5.8)$$

Пусть теперь кривая L опять задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, как и в случае задачи Дирихле. Заметим, что

$$g'_{0s}(s) ds = g'_{0t}(t) dt, \quad (7.5.9)$$

и поэтому для численного решения уравнения (7.5.7) надо поступить следующим образом.

Если кривая L является гладкой разомкнутой, т.е. параметр t меняется на $[-1, 1]$, а $g'_{0t} = \psi^*(t) / \sqrt{1-t^2}$, надо рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \psi_{n,0k}^* \omega_{k,j}^* a_k &= f_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{k=1}^n \psi_{n,0k}^* a_k &= 0, \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

где a_k, t_k, t_{0j} даны в (7.5.3), а $\omega_{k,j}^*$ отличается от $\omega_{k,j}$ в (7.5.3) только отсутствием множителя $r'_k = \sqrt{x'^2(t_k) + y'^2(t_k)}$.

Если кривая L является гладкой замкнутой, т.е. параметр t меняется на $[0, 2\pi]$, а g'_{0t} является гладкой функцией, надо рассмотреть систему

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=0}^{2n} g'_{0t,n,k} \omega_{k,j}^* b_k = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad (7.5.11)$$

$$\sum_{k=0}^{2n} g'_{0t,n,k} b_k = 0,$$

где $\omega_{k,j}^*$ определено в (7.5.10), а b_k, t_k, t_{0j} — в (7.5.5).

Глава 8. Одномерные сингулярные интегральные уравнения второго рода

8.1. Уравнение с постоянными коэффициентами на отрезке

Рассмотрим уравнение

$$a\varphi(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = f(t_0), \quad (8.1.1)$$

где a и b – действительные числа, $b \neq 0$, $a^2 + b^2 = 1$, и функция $f(t)$ принадлежит классу H на $[-1, 1]$. Напомним кратко некоторые результаты [70, 98] для уравнения (8.1.1).

Индекс κ этого уравнения принимает значения $1, 0, -1$, а соответствующие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \omega_\kappa(t)\psi(t), \\ \omega_\kappa(t) &= (1-t)^\alpha(1+t)^\beta, \quad 0 < |\alpha|, |\beta| < 1, \\ \kappa &= -(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Число α определяется равенством

$$a + b \operatorname{ctg} \pi \alpha = 0.$$

При использовании представления (8.1.2) получаем, что сингулярный оператор, стоящий слева в (8.1.1), является оператором $S_0^{(+)}(W_\kappa^{(+)}(t) \bullet)$. Как указано в теореме 7.1.4, этот оператор переводит многочлены, ортогональные с весом $W_\kappa^{(+)}(t)$ в многочлены, ортогональные с весом $W_\kappa^{(-)}(t)$. В данном случае получаем, что многочленами $p_n^*(t)$ (см. (7.1.11)) будут многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ степени n , а многочленами $q_{n-\kappa}^*(t)$ будут многочлены $P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t)$. В работе [143] дано уточнение формулы (7.1.11), а именно там показано, что выполняется соотношение

$$a\omega_\kappa(t_0)P_n^{(\alpha, \beta)}(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_\kappa(t)P_n^{(\alpha, \beta)}(t)dt}{t-t_0} = -\frac{b}{2^\kappa \sin \alpha \pi} P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_0). \quad (8.1.4)$$

Поэтому, если функцию $f(t_0)$ заменяем на многочлен $f_{n-\kappa}(t_0)$ степени $n-\kappa$, то решением уравнения (8.1.1) будет многочлен $\psi_n(t)$ степени n , причем, используя формулу обращения для уравнения (8.1.1), получим, что

$$\psi_n(t) = a \frac{f_{n-\kappa}(t)}{\omega_\kappa(t)} - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_{n-\kappa}(t_0)dt_0}{\omega_\kappa(t_0)(t_0-t)} + T_\kappa C, \quad (8.1.5)$$

где $T_0 = T_{-1} = 0$, $T_1 = -\pi(\sin \alpha \pi)^{-1}$. Из этой формулы обращения следует, что оценку погрешности между функциями $\psi(t)$ и $\psi_n(t)$ можно получить в той метрике, в которой можно дать оценку разности их представлений в формуле (8.1.5).

Для получения численного метода, в котором система линейных алгебраических уравнений будет похожа на соответствующую систему в методе дискретных вихрей, проведем следующие построения. Представим многочлен $\psi_n(t)$ интерполяционной формулой Лагранжа по корням многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, т.е. в виде

$$\psi_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k)P_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{(t-t_k)P_n^{(\alpha, \beta)}(t_k)}, \quad (8.1.6)$$

получим

$$S_{t_0}^{(+)}(\omega_\kappa^{(+)}(t)\psi_n(t)) = -\sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k)}{(t_0 - t_k)P_n^{(\alpha, \beta)}(t_k)} \times \left[\frac{b}{2^\kappa \sin \alpha\pi} P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_\kappa^{(+)}(t)P_n^{(\alpha, \beta)}(t)dt}{t - t_k} \right]. \quad (8.1.7)$$

Теперь видно, что рассматривая $S_{t_0}^{(+)}(\omega_\kappa^{(+)}(t)\psi_n(t))$ в точках t_{0m} , являющихся корнями многочлена $P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_0)$, получаем формулу

$$S_{t_{0m}}^{(+)}(\omega_\kappa^{(+)}(t)\psi_n(t)) = -\frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k)a_k}{t_{0m} - t_k}, \quad m = 1, \dots, n - \kappa, \quad (8.1.8)$$

$$a_k = \frac{1}{P_n^{(\alpha, \beta)}(t_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega_\kappa^{(+)}(t)P_n^{(\alpha, \beta)}(t)dt}{t - t_k}.$$

Полагая в формуле (8.1.4) $t_0 = t_k$, замечаем, что коэффициент a_k в (8.1.8) можно записать в виде

$$a_k = -\frac{\pi}{2^\kappa \sin \alpha\pi} \frac{P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_k)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(t_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (8.1.9)$$

Теперь отметим следующее. Если $\kappa = 0$ и надо получить решение, ограниченное в точке 1 и неограниченное в точке -1 , то следует брать положительное число α ; тогда β будет отрицательным. Если $\kappa = 1$, то, беря α отрицательным, получаем и β отрицательным. В этом случае решение не единственное и выделять единственное решение будем с помощью задания значения интеграла по $[-1, 1]$ от решения. Если $\kappa = -1$, то берем α положительным, тогда и β будет положительным. В этом случае решение единственное, но оно существует только при выполнении равенства [98]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)dt}{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta} = 0, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (8.1.10)$$

Эти замечания и рассуждения в 7.2 с использованием формулы (8.1.8), аналогично, как в 7.3, позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 8.1.1. Пусть функция $f(t) \in H_r(\alpha)$ на $[-1, 1]$. Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k)a_k}{t_{0m} - t_k} = f(t_{0m}), \quad m = 1, \dots, n, \quad (8.1.11)$$

для $\kappa = 0$,

$$\begin{cases} -\frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k)a_k}{t_{0m} - t_k} = f(t_{0m}), & m = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \psi_n(t_k)a_k = C \end{cases} \quad (8.1.12)$$

для $\kappa = 1$,

$$\gamma_{0n} - \frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(t_k)a_k}{t_{0m} - t_k} = f(t_{0m}), \quad m = 1, \dots, n+1 \quad (8.1.13)$$

для $\kappa = -1$

и соответствующими решениями индекса κ уравнения (8.1.1) выполняется соотношение (7.3.10), в котором $R_n(t_k)$ -погрешность в точках t_k , $k = 1, \dots, n$, представления

точного решения формулой (8.1.5), в которой $f_{n-\kappa}(t_0)$ интерполяционный многочлен Лагранжа по корням многочлена $P_{n-\kappa}^{(-\alpha, -\beta)}(t_0)$ для функции $f(t_0)$.

З а м е ч а н и е 8.1.1. Доказательство теоремы 8.1.1 можно дать и чисто алгебраическим методом [18, 132], аналогично, как в методе дискретных вихрей.

Сформулированные выше результаты для уравнения (8.1.1) справедливы и для уравнения

$$a\varphi(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \int_{-1}^1 K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0), \quad (8.1.14)$$

в котором будем полагать, что функция $K(t_0, t) \in H$ на $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

От уравнения (8.1.14) будем требовать однозначной разрешимости для решения индекса $\kappa = 1, 0, -1$ при соответствующих дополнительных условиях на решение при $\kappa = 1$ и на функции $K(t_0, t)$ и $f(t_0)$ при $\kappa = -1$.

Системы линейных алгебраических уравнений для уравнения (8.1.14) получают из соответствующих систем характеристического уравнения прибавлением члена

$$\sum_{k=1}^n K(t_{0m}, t_k) \psi_n(t_k) a_k, \quad m = 1, \dots, n - \kappa.$$

8.2. Уравнение с постоянными коэффициентами на окружности

Рассмотрим уравнение

$$a\varphi(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} = f(t_0), \quad (8.2.1)$$

где a и b – действительные числа, $b \neq 0$, $a^2 + b^2 = 1$, и функция $f(t) \in H$ на L – окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Это уравнение имеет [70, 98] индекс $\kappa = 0$, т.е. однозначно разрешимо при любой правой части и его решение дается формулой

$$\varphi(t) = af(t) - \frac{b}{\pi} \int_L \frac{f(t_0) dt_0}{t_0 - t}, \quad (8.2.2)$$

и, следовательно, в данном случае

$$\omega_0^{(+)}(t) = \omega_0^{(-)}(t) = 1. \quad (8.2.3)$$

Из теоремы 7.1.2 получаем, что операторы $S_{0, t_0}^{(\pm)}(t)$, стоящие в (8.2.1) и (8.2.2), переводят обобщенный многочлен степени (n, n) в обобщенный многочлен той же степени. Поэтому, если заменим $f(t_0)$ на обобщенный многочлен $f_{n, n}(t_0)$, то решением будет также обобщенный многочлен степени (n, n) , который обозначим $\varphi_n(t)$. Возьмем этот обобщенный многочлен в виде

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi_n(t_k) \frac{t^{2n+1} - t_k^{2n+1}}{(t - t_k) t_k^n}, \quad (8.2.4)$$

где точки $t_k = e^{i\theta_k}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, разбивают L на $2n+1$ равных частей.

Воспользовавшись формулами (2.7.7) и (2.7.8), получим

$$S_{0, t_0}^{(+)}(\varphi_n(t)) = -\frac{b}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_0 - t_k} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi_n(t_k) (a + bi) \left(t_0^{2n+1} + \frac{-a + bi}{a + bi} t_k^{2n+1} \right)}{(2n+1)(t_0 - t_k) t_0^n t_k^n}, \quad (8.2.5)$$

где $a_k = 2\pi i t_k / (2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Функция $t_0^{2n+1} + \frac{-a+bi}{a+bi} t_k^{2n+1}$ имеет $2n+1$ корня $t_{0m} = t_m \exp\left(i \frac{\pi + \psi}{2n+1}\right)$, $m = 0, 1, \dots, 2n$, где $\exp(i\psi) = (-a+bi)/(a+bi)$. Так как $b \neq 0$, то $-\pi < \psi < \pi$, и, таким образом, $t_{0m} \neq t_k$ для любых m и k . Если $a = 0$, то $\psi = 0$ и в этом случае точка t_{0m} делит пополам дугу $\overline{t_m t_{m+1}}$. Следовательно, в точках t_{0m} значения $S_{0,t_0}^{(+)}(\varphi_n(t))$ будут даваться формулой (8.2.5), в которой отсутствует второе слагаемое. Теперь из результатов параграфа 7.2 и рассуждений, аналогичных рассуждениям в параграфе 7.4, вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 8.2.1. Пусть функция $f(t) \in H_r(\alpha)$ на L . Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{b}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi_n(t_k) a_k}{t_{0m} - t_k} = f(t_{0m}), \quad m = 0, 1, \dots, 2n, \quad (8.2.6)$$

и решением $\varphi(t)$ уравнения (8.2.1), даваемым формулой (8.2.2), выполняется соотношение

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (8.2.7)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$a\varphi(t_0) + \frac{b}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \int_L K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0). \quad (8.2.8)$$

Будем предполагать, что это уравнение имеет единственное решение, и возьмем для него систему линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{b}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{1}{t_{0m} - t_k} - \frac{\pi}{b} K(t_{0m}, t_k) \right] \varphi_n(t_k) a_k = f(t_{0m}), \quad m = 0, 1, \dots, 2n. \quad (8.2.9)$$

Если функции $f(t)$ и $K(t_0, t)$ таковы, что $f^{(r)}(t)$ и $K_i^{(r)}(t_0, t)$, $K_t^{(r)}(t_0, t)$ принадлежат классу $H(\alpha)$ соответственно на множествах L и $L \times L$, то между решением системы линейных алгебраических уравнений (8.2.9) и решением $\varphi(t)$ уравнения (8.2.8) также выполняется соотношение (8.2.7).

З а м е ч а н и е 8.2.1 Доказательство теоремы 8.2.1 можно дать также на алгебраическом уровне [18, 132].

8.3. Уравнение с постоянными коэффициентами с ядром Гильберта

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$a\varphi(\theta_0) - \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0), \quad (8.3.1)$$

где предполагаем, что $a \neq 0$ и $a^2 + b^2 = 1$. Это уравнение имеет единственное решение [70, 98], даваемое формулой

$$\varphi(\theta) = a f(\theta) + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} f(\theta_0) d\theta_0 + \frac{b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0. \quad (8.3.2)$$

Уравнение (8.3.1) и его решение (8.3.2) можно записать в виде

$$\Gamma_{0, \theta_0}^{(+)}(\varphi(\theta)) = f(\theta_0), \quad (8.3.3)$$

$$\varphi(\theta) = \Gamma_{0,\theta}^{(-)}(f(\theta_0)) + \frac{b^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0. \quad (8.3.4)$$

Из соотношений (2.6.2) и (2.6.3) получаем, что если $f(\theta_0)$ заменим на тригонометрический полином $f_n(\theta_0)$ степени n , то решением уравнения (8.3.3) будет также тригонометрический полином $\varphi_n(\theta)$. Поэтому равенство тригонометрических полиномов $\Gamma_{0,\theta_0}^{(+)}(\varphi_n(\theta))$ и $f_n(\theta_0)$ степени n эквивалентно системе $(2n+1)$ линейных алгебраических уравнений. Для того чтобы эта система имела вид, аналогичный системе (6.5.6), произведем следующие построения. Запишем тригонометрический полином $\varphi_n(\theta)$ в виде

$$\varphi_n(\theta) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi_n(\theta_k) \frac{\sin(2n+1)(\theta - \theta_k)/2}{\sin(\theta - \theta_k)/2}, \quad (8.3.5)$$

где точки θ_k , $k=0,1,\dots,2n$, интерпретируемые как точки окружности радиуса единица, разбивает ее на $2n+1$ равных частей (см. также (2.6.6)). Воспользовавшись равенствами (2.6.2) и (2.6.3), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,\theta_0}^{(+)}(\varphi_n(\theta)) = & -\frac{b}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{2n+1} + \\ & + \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi_n(\theta_k)}{2n+1} \frac{a \sin(2n+1)(\theta_0 - \theta_k)/2 + b \cos(2n+1)(\theta_0 - \theta_k)/2}{\sin(\theta - \theta_k)/2}. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Функция $a \sin(2n+1)(\theta_0 - \theta_k)/2 + b \cos(2n+1)(\theta_0 - \theta_k)/2$ имеет своими корнями точки $\theta_{0m} = \theta_m + (\pi - 2\psi)/(2n+1)$, где $e^{i\psi} = -b + ai$, и так как $b \neq 0$, то $\theta_{0m} \neq \theta_k$ для любых m и k . Если $a = 0$, то $\psi = 0$ или π , и точка θ_{0m} делит пополам дугу $\overline{\theta_m \theta_{m+1}}$, но тогда уравнение (8.3.1) переходит в уравнение (6.5.1), и надо применить теорему 7.4.2. Так как в рассматриваемом случае $a \neq 0$, то из результатов параграфа 7.2 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 8.3.1. Пусть в уравнении (8.3.1) функция $f(\theta) \in H_r(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi)$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{b}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{2n+1} = f(\theta_{0m}), \quad m = 0, 1, \dots, 2n, \quad (8.3.7)$$

где точки θ_{0m} и θ_k указаны выше в этом параграфе, и решением $\varphi(\theta)$ уравнения (8.3.1) выполняется соотношение (8.2.7).

Если теперь уравнение

$$a\varphi(\theta_0) - \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \varphi(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} K(\theta_0, \theta) \varphi(\theta) d\theta = f(\theta_0) \quad (8.3.8)$$

имеет единственное решение, то между решением системы линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{b}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0m} - \theta_k}{2} - \frac{2\pi}{b} K(\theta_{0m}, \theta_k) \right] \varphi_n(\theta_k) \frac{2\pi}{2n+1} = f(\theta_{0m}), \quad (8.3.9)$$

$$m = 0, 1, \dots, 2n,$$

и решением этого уравнения выполняется соотношение (8.2.7) при условии, что $f^{(r)}(\theta_0)$ и $K_{\theta_0}^{(r)}(\theta_0, \theta)$, $K_{\theta_0}^{(r)}(\theta_0, \theta) \in H(\alpha)$.

Замечание 8.3.1. Алгебраическое доказательство теоремы 8.3.1 дано в [18, 132].

8.4. Уравнение с переменными коэффициентами на отрезке

Рассмотрим уравнение

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \int_{-1}^1 k(t_0, t)\varphi(t)dt = f(t_0). \quad (8.4.1)$$

Найдем искать решение этого уравнения индекса κ класса h , которое будем представлять в виде $\varphi(t) = \omega_{\kappa}^{(+)}(t)\psi(t)$ и предполагать, что уравнение

$$\hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\hat{\psi}(t)) + \int_{-1}^1 k(t_0, t)\omega_{\kappa}^{(+)}(t)\psi(t)dt = \hat{f}(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad (8.4.2)$$

имеет единственное решение, где:

при $\kappa > 0$ $\hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$ – оператор, состоящий из $S_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$, данного в (7.1.1), и совокупности условий, выделяющих единственное решение [70, 98], $\hat{\psi}(t) = \psi(t)$, $\hat{f}(t_0) = (f(t_0), C_0, C_1, \dots, C_{\kappa-1})^T$;

при $\kappa = 0$ $\hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet) = S_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$, $\hat{\psi}(t) = \psi(t)$, $\hat{f}(t_0) = f(t_0)$;

при $\kappa < 0$ $\hat{S}_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$ – оператор, состоящий из $S_{\kappa, t_0}^{(+)}(\bullet)$ и умножения γ_k на t^k , $k = 0, 1, \dots, |\kappa| - 1$, $\hat{\psi}(t) = (\psi(t), \gamma_0, \dots, \gamma_{|\kappa|-1})^T$, $\hat{f}(t_0) = f(t_0)$.

Опишем вычислительный метод, предложенный в [75] и получивший развитие в [6, 85, 87, 88]. Все эти работы являются обобщением результатов Д.Эллиота [141, 142], которые послужили основой большого числа публикаций (см., например, [92–97, 138, 140, 146–148]) по численному решению сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами на отрезке и окружности, несущих, как правило, сугубо теоретический характер. В таких работах за приближение к решению исследуемого сингулярного интегрального уравнения принимается точное решение некоторого приближенного уравнения. Однако алгоритм определения коэффициентов приближенного уравнения либо не приводится, либо представляет собой сложную вычислительную задачу. Предлагаемый вычислительный метод ставит своей целью довести приближенное решение до числа.

По целому числу $n > r + |\kappa|$ (напомним, что $b(t) = b_1(t)b_r(t)$, где $b_r(t)$ – многочлен степени r , а $b_1(t)$ – действительная неотрицательная функция на $[-1, 1]$ и может иметь нули не целого порядка на концах отрезка) построим на $[-1, 1]$ две сетки $E_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ с n различными узлами, отличными от нулей $b(t_0)$, и $E_{0, n-\kappa} = \{t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0, n-\kappa}\}$ с $n - \kappa$ различными узлами, отличными от нулей $b(t_0)$ и узлов сетки E_n .

В [75] в качестве узлов сеток E_n и $E_{0, n-\kappa}$, соответственно, использовались корни многочленов $p_n^*(t) \in \{P_N^*\}$ и $q_{n-\kappa}^*(t) \in \{Q_M^*\}$, где $\{P_N^*\}$ – система многочленов, ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $(-1)^k W_{\kappa}^{(+)}(t)$, а $\{Q_M^*\}$ – система многочленов, ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $(-1)^k W_{\kappa}^{(-)}(t)$. При этом предполагалось, что коэффициент при сингулярном интеграле является многочленом степени r , т.е. $b(t_0) = b_r(t_0)$. Но так как $p_n^*(t)$ и $q_{n-\kappa}^*(t)$ являются, вообще говоря, обобщенными многочленами Якоби и при вычислении их корней часто возникают затруднения, то в данном изложении, так же, как и в

работах [5, 6, 85, 87, 88, 151] не требуется, чтобы узлы сеток E_n и $E_{0,n-\kappa}$ обязательно были корнями многочленов p_n^* и $q_{n-\kappa}^*$.

С коэффициента $b(t_0)$ снимается также требование быть многочленом, т.е. иметь нули на $[-1,1]$ только целого порядка. Единственное требование, которое необходимо предъявлять к сеткам E_n и $E_{0,n-\kappa}$ – это то, чтобы их узлы, будучи узлами интерполяции многочленов Лагранжа, обеспечивали аппроксимацию функций, входящих в (8.4.2). В связи со сказанным, при построении E_n и $E_{0,n-\kappa}$ достаточно лишь учитывать характер поведения исходных данных в уравнении (8.4.2) и вид нормированных пространств X_κ и Y_κ , в которых оно рассматривается. Чаще всего в качестве узлов сеток E_n и $E_{0,n-\kappa}$ берут корни многочленов Чебышева. Они легко вычисляются и приводят к малым константам Лебега. Если в качестве узлов сеток E_n и $E_{0,n-\kappa}$ взять корни многочленов $p_n^*(t) \in \{P_N^*\}$ и $q_{n-\kappa}^*(t) \in \{Q_M^*\}$, соответственно, и положить $b(t_0) = b_r(t_0)$, т.е. $b_1(t_0) = 1$, то вычислительная схема, которая будет описана ниже, совпадает со схемой, предложенной в [75].

Пусть $p_n(t) = \prod_{k=1}^n (t - t_k)$, $t_k \in E_n$. В силу теоремы 7.1.3 по заданному многочлену $p_n(t)$ найдем многочлен $q_{n-\kappa}(t_0)$ степени $n - \kappa$ по формуле (7.1.9). Введем в рассмотрение функции

$$B_k(t_0) = \frac{B_k^{(1)}(t_0)}{t_0 - t_k} + B_k^{(2)}(t_0),$$

$$B_k^{(1)}(t_0) = \frac{1}{p_n'(t_k)} \left[b_1(t_0) q_{n-\kappa}(t_0) - \frac{b(t_0)}{b(t_k)} b_1(t_k) q_{n-\kappa}(t_k) \right],$$

$$B_k^{(2)}(t_0) = \int_{-1}^1 W_\kappa^{(+)}(M(t_0, t)) l_k(t) ds,$$

и числа $\lambda_{k,n}$, определяемые по формуле

$$\lambda_{k,n} = \frac{\pi q_{n-\kappa}(t_k) b_1(t_k)}{b(t_k) p_n'(t_k)}, \quad t_k \in E_n.$$

Теперь относительно уравнения (8.4.2) сделаем следующие предположения: $b(t) = b_1(t) b_r(t)$, где $b_1(t)$ и $b_r(t)$ описаны выше в данном параграфе; $k(t_0, t) = \frac{b_1(t_0)}{\pi} M(t, t_0)$; $f(t) = b_1(t) f^*(t)$; введем новую неизвестную функцию по формуле $\gamma(t) = W_\kappa^{(+)}(t) u(t)$, где $W_\kappa^{(+)}(t)$ введено перед теоремой 7.1.3. Поэтому уравнение (8.4.2) запишется в виде

$$S_{t_0}^{(+)} \left(W_\kappa^{(+)} \hat{u}(t) \right) + \frac{b_1(t_0)}{\pi} \int_{-1}^1 M(t, t_0) W_\kappa^{(+)}(t) \hat{u}(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1), \quad (8.4.3)$$

где $S_{t_0}^{(+)}$ и $\hat{u}(t)$ определяются аналогично тому, как в уравнении (8.4.2).

Из теоремы 7.1.3 следует, что если в уравнении (8.4.3) функцию $f^*(t_0)$ заменить на многочлен $f_{n-\kappa}^*(t_0)$ степени $n - \kappa$, а функцию $M(t, t_0)$ заменить на многочлен

$M_{n-\kappa}(t, t_0)$ по переменной t_0 степени $n - \kappa$, то решением уравнения (8.4.3) будет многочлен $u_n(t)$ степени n . Неизвестную функцию $u_n(t)$ будем искать в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n l_k(t) u_n(t_k), \quad l_k(t) = \frac{P_n(t)}{(t-t_k)P_n'(t_k)}, \quad t_k \in E_n, \quad (8.4.4)$$

тогда

$$\int_{-1}^1 W_{\kappa}^{(+)}(t) u_n(t) dt = \sum_{k=1}^n u_n(t_k) \lambda_{k,n}.$$

Подставим (8.4.4) в уравнение (8.4.3) и рассмотрим результат в узлах t_{0j} сетки $E_{0n-\kappa}$:

$$\hat{S}_{t_{0j}}^{(+)}(W_{\kappa}^{(+)} \hat{u}(t)) + \frac{b_1(t_{0j})}{\pi} \int_{-1}^1 M_{n,n-\kappa}(t, t_{0j}) W_{\kappa}^{(+)}(t) \hat{u}(t) dt = f(t_{0j}), \quad t_{0j} \in E_{0n-\kappa}. \quad (8.4.5)$$

Из результатов параграфа 7.2 получаем справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 8.4.1. Пусть в уравнении (8.4.3), имеющем единственное решение класса h индекса κ , функции $f(t_0)$ и $M(t_0, t)$ являются многочленами степени не выше $n - \kappa - 1$ по переменной t_0 . Тогда система метода коллокаций (8.4.5) однозначно разрешима при любом $n > r + |\kappa|$ и определяет точное решение этого уравнения

$$\gamma(t) = W_{\kappa}^{(+)}(t) u_n(t)$$

где числа $u_n(t_k)$, $k = 1, \dots, n$, находятся из системы (8.4.5).

З а м е ч а н и е 8.4.1. Если уравнение (8.4.3) имеет единственное решение и функции $f(t_0)$ и $M(t, t_0)$ хорошо аппроксимируются многочленами по переменной t_0 , то система (8.4.5) имеет единственное решение, начиная с некоторого $n_0 > r + |\kappa|$.

8.5. Примеры численного решения

На рис. 8.5.1 (сплошная линия – точное значение, Δ – при $h=2/11$, \times – при $h=2/21$, \circ – при $h=2/41$) приведено численное решение индекса $\kappa = 0$ уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = \pi, \quad (8.5.1)$$

которое имеет точное решение

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad (8.5.2)$$

при равномерном разбиении. Видно, что при увеличении числа n точек разбиения численное решение сходится к точному. Численное решение находится из системы

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_n(x_i) h}{x_{0j} - x_i} = \pi, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.5.3)$$

где $x_i = -1 + hi$, $x_{0j} = x_j + h/2$, $i = 1, \dots, n$, $h = 2/(n+1)$.

На рис. 8.5.2 приведено численное решение индекса $\kappa = 1$ уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = -\pi, \quad (8.5.4)$$

которое имеет точное решение

$$\gamma(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (8.5.5)$$

при том же разбиении. Численное решение находилось из системы

$$\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_n(x_i)h}{x_{0j} - x_i} = \pi, \quad j=1, \dots, n-1, \quad (8.5.6)$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_n(x_i)h = 0, \quad j=n.$$

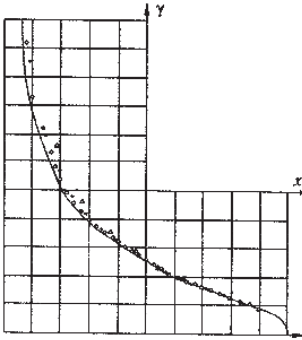


Рис. 8.5.1

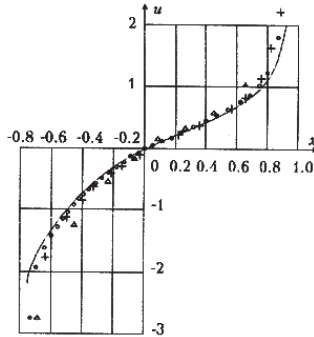


Рис. 8.5.2

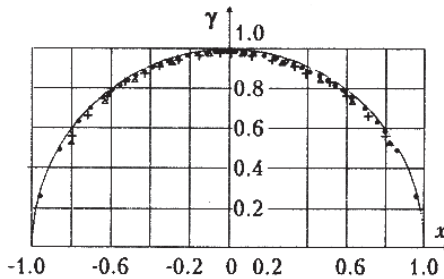


Рис. 8.5.3

Наконец, на рис. 8.5.3 (при тех же обозначениях) приведено численное решение индекса $\kappa = -1$ уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x)dx}{x_0 - x} = \pi x_0, \quad (8.5.7)$$

которое имеет точное решение

$$\gamma(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad (8.5.8)$$

при том же разбиении. Оно находилось из системы

$$\gamma_{0n} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_n(x_i)h}{x_{0j} - x_i} = \pi x_{0j}, \quad j=0, 1, \dots, n.$$

На рис. 8.5.4–8.5.6 (сплошная линия – точное решение, x – при $n=10$, o – при $n=20$) приведено численное решение тех же уравнений по неравномерной сетке, т.е. ин-

терполяционным методом. В этом случае решение $\gamma(x)$ представляется в виде $\omega(x)u(x)$ и системы линейных уравнений составляются относительно значений функций $u(x)$ в корнях соответствующих полиномов. Таким образом, для численного нахождения решения (8.5.2) рассматривается система (рис. 8.5.4, $\kappa=0$)

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_n(x_i)a_i}{x_{0j} - x_i} = \pi, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_i = \cos \frac{2i}{2n+1} \pi, \quad a_i = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{i}{2n+1} \pi, \quad x_{0j} = \cos \frac{2j-1}{2n+1} \pi,$$

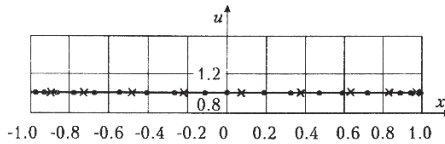


Рис. 8.5.4

для численного нахождения решения (8.5.5), (рис. 8.5.5, $\kappa=1$)

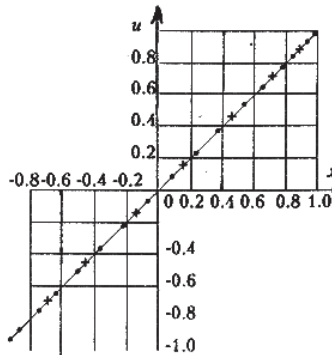


Рис. 8.5.5

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_n(x_i)a_i}{x_{0j} - x_i} = \pi, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{i=1}^n u_n(x_i)a_i = 0, \quad j = n,$$

$$x_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad a_i = \frac{\pi}{n}, \quad x_{0j} = \cos \frac{j}{n} \pi,$$

наконец, для численного нахождения решения (8.5.8), (рис. 8.5.6, $\kappa = -1$)

$$\gamma_{0n} + \sum_{i=1}^n \frac{u_n(x_i) a_i}{x_{0j} - x_i} = \pi x_{0j}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

$$x_i = \cos \frac{i}{n+1} \pi, \quad a_i = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{i}{n+1} \pi, \quad x_{0j} = \cos \frac{2j-1}{2(n+1)} \pi.$$

Расчеты проводились для $n=10, 20, 30, 40$ и было обнаружено, что $|u(x_i) - u_n(x_i)| \leq 5 \cdot 10^{-6}$.

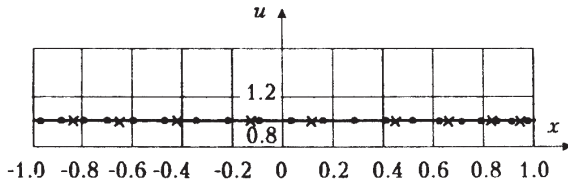


Рис. 8.5.6

На рис. 8.5.7 приведено сравнение расчетов по равномерной (\times) и неравномерной (\bullet) схемам при $n=30$ для уравнения

$$\int_0^1 \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = f(x_0), \quad (8.5.9)$$

при $f(x_0) = -2\pi$, $\kappa = 0$ и помещении расчетной точки в заданную точку $q=0.8$ (точку отклонения закрылка) в интервале интегрирования. В точке q брали значение правой части, равное $[f(q-0) + f(q+0)]/2$.

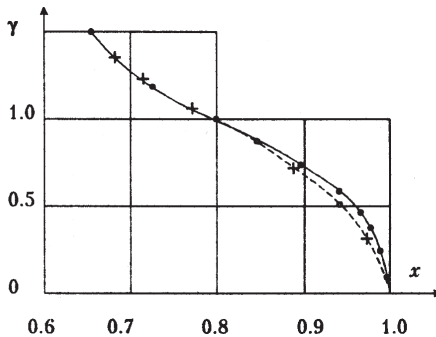


Рис. 8.5.7

На рис. 8.5.8 приведено сравнение тех же схем, но при

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 0.8, \\ -2\pi, & 0.8 < x < 1. \end{cases} \quad (8.5.10)$$

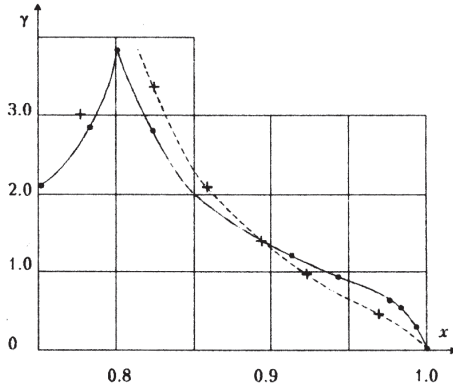


Рис. 8.5.8

Теперь рассмотрим решение характеристического сингулярного интегрального уравнения второго рода с постоянными коэффициентами

$$a\gamma(x_0) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(x)dx}{x-x_0} = f(x_0). \quad (8.5.11)$$

В этом случае несложно найти точные решения, некоторые из которых приведены в табл. 8.5.1. Приведем также отдельные расчеты, дающие возможность судить о надежности и эффективности получаемых результатов. Данные численных расчетов характеристического уравнения сопоставляются с аналитическими решениями в ряде случаев – (табл. 8.5.2). В первой колонке приводятся порядковые номера точек, в которые пересчитывалось решение по интерполяционной формуле Лагранжа. Точки располагались равномерно по углу $\varphi = \arccos(-x)$, значения которого в градусах даны во второй колонке. Приближенные значения координат на отрезке $[-1, 1]$ приводятся в третьем столбце. В последних трех колонках представлены результаты сравнения расчетов с точными решениями для трех вариантов уравнения с постоянными коэффициентами. Рассматривалась относительная погрешность $\Delta = 100\% \cdot |\gamma_p - \gamma_T|$, где γ_p, γ_T – соответственно рассчитанное и точное значение решения уравнения. Расчеты проводились при следующих значениях параметров уравнения.

1) Решение искалось в классе функций, не ограниченных при $x = -1$ и ограниченных при $x = 1$, $a = 0$, $b = -0.5$, $f(x_0) \equiv 1$. Точное решение имеет вид $\gamma_T = 2(1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$.

2) Решение искалось в классе функций, не ограниченных при $x = \pm 1$, $a = b = -0.5$, $f(x_0) \equiv 1$. Значение интеграла от решения полагалось равным нулю, тогда точное решение имеет вид $\gamma_T = -\sqrt{2}(1/2+x)(1-x)^{1/4}(1+x)^{-3/4}$.

3) Решение искалось в классе функций, ограниченных при $x = \pm 1$, $a = 1/\sqrt{2}$, $b = -1/\sqrt{2}$, $f(x_0) = x_0^2 + 3/4 \cdot x_0 - 1/4$. Вводилась одна регуляризирующая переменная. Точное решение $\gamma_T = (1/4+x)(1-x)^{1/4}(1+x)^{3/4}$.

Таблица 8.5.1

Класс функций	Значение правой части	Решение сингулярного интегрального уравнения	$\int_{-1}^1 \gamma(x) dx$
Неограниченные при $x = -1$	C	$-C \operatorname{sign} b W(x)$	$-2\pi C \alpha / b$
Ограниченные при $x = 1$	Cx_0	$-C \operatorname{sign} b W(x)(x + 2\alpha)$	$-2\pi C \alpha^2 / b$
	Cx_0^2	$-C \operatorname{sign} b W(x)(x^2 + 2\alpha x + 2\alpha^2)$	$-2\pi C \frac{1}{3}(2\alpha^2 + 1)\alpha^2 / b$
$W(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha, \quad \operatorname{tg} \pi \alpha = -b/a, \quad 0 < \alpha \leq 1$			
Ограниченные при $x = \pm 1$	C	$C \operatorname{sign} b W(x)(x^2 + 2\alpha x + 1) - C_1 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} W(x)$	C_1
	Cx_0	$C \operatorname{sign} b W(x)[x(x + 2\alpha + 1) + 2\alpha(\alpha + 1)] - C_1 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} W(x)$	C_1
	Cx_0^2	$C \operatorname{sign} b W(x)[x^2(x + 2\alpha + 1) + 2\alpha x(\alpha + 1) + 2\alpha(\alpha + 1) - \frac{4}{3}\alpha(1 - \alpha^2)] - C_1 \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} W(x)$	C_1
$W(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (1-x)^\alpha (1+x)^{-1-\alpha}, \quad \operatorname{tg} \pi \alpha = -b/a, \quad -1 < \alpha < 0$			
Неограниченные при $x = \pm 1$	$C(x - 2\alpha + 1)$	$-C \operatorname{sign} b W(x)$	$-2\pi C \alpha(1 - \alpha) / b$
$W(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (1-x)^\alpha (1+x)^{-1-\alpha}, \quad \operatorname{tg} \pi \alpha = -b/a, \quad 0 < \alpha < 1$			

В точках, где решение обращалось в нуль, относительная погрешность не рассчитывалась.

Приведем еще пример численного решения полного сингулярного интегрального уравнения второго рода вида

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{1-x_0^2} \gamma(x_0) + \frac{x_0 - \beta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(x) dx}{x - x_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(x) dx}{x + x_0 + \lambda} = \\
 = -1 + \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0\lambda + \lambda^2 - 1}},
 \end{aligned}
 \tag{8.5.12}$$

где $x_0 \in (-1, 1)$, $|\beta| < 1$, $|\lambda| > 2$. Определялось решение, не ограниченное на обоих концах. Так как индекс уравнения (8.5.12) в искомом классе решений равен 2, то для выделения единственного решения были выбраны два дополнительных условия:

$$\int_{-1}^1 \gamma(x) dx = \pi, \quad \int_{-1}^1 x \gamma(x) dx = 0.
 \tag{8.5.13}$$

Точное решение уравнения (8.5.12) при условиях (8.5.13) имеет вид

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
 \tag{8.5.14}$$

Результаты решения уравнения (8.5.12) приведены в таблице 8.5.2. В первом столбце даны значения координат точек, в которых пересчитывалось решение. В последующих столбцах приводятся результаты точного решения и трех примеров приближенного расчета при следующих значениях коэффициентов λ , β и количестве расчетных точек n :

- 1) $\beta = 0.5, \lambda = 2.1, n = 20$;
- 2) $\beta = 0.5, \lambda = 2.1, n = 10$;
- 3) $\beta = 0.5, \lambda = 3.0, n = 10$;

Таблица 8.5.2

№ ₀	φ	x	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	6.0	-0.994522	0.9 E-14	0.2 E-12	-0.3 E-10
2	12.0	-0.978148	0.2 E-13	0.1 E-12	-0.3 E-10
3	18.0	-0.951057	0.5 E-14	0.2 E-12	-0.3 E-10
4	24.0	-0.913545	0.1 E-13	0.3 E-12	-0.3 E-10
5	30.0	-0.866025	0.1 E-13	0.2 E-12	-0.3 E-10
6	36.0	-0.809017	0.1 E-13	0.3 E-12	-0.3 E-10
7	42.0	-0.743145	0.5 E-13	0.5 E-12	-0.3 E-10
8	48.0	-0.669131	0.5 E-13	0.7 E-12	-0.4 E-10
9	54.0	-0.587785	0.6 E-14	0.1 E-11	-0.4 E-10
10	60.0	-0.500000	0.1 E-13	-	-0.5 E-10
11	66.0	-0.406737	0.7 E-14	-0.1 E-11	-0.8 E-10
12	72.0	-0.309017	0.6 E-13	-0.6 E-12	-0.2E-09
13	78.0	-0.207912	0.6 E-13	-0.3 E-12	0.2E-09
14	84.0	-0.104528	0.6 E-13	-0.2 E-12	0.6 E-10
15	90.0	0.000000	0.9 E-13	-0.2 E-12	0.3 E-10
16	96.0	0.104528	0.5 E-13	-0.2 E-12	0.2 E-10
17	102.0	0.207912	0.4 E-13	-0.2 E-12	0.1 E-10
18	108.0	0.309017	0.8 E-13	-0.9 E-13	0.6 E-11
19	114.0	0.406737	0.7 E-13	-0.8 E-13	0.3 E-11
20	120.0	0.500000	0.1 E-12	-0.2 E-13	0.1 E-11
21	126.0	0.587785	0.3 E-12	-0.6 E-12	0.3 E-12
22	132.0	0.669131	0.8 E-13	-0.4 E-13	0.1 E-11
23	138.0	0.743145	0.7 E-13	-0.4 E-13	0.2 E-11
24	144.0	0.809017	0.1 E-12	-0.4 E-13	0.3 E-11
25	150.0	0.866025	0.2 E-12	-0.7 E-13	0.3 E-11
26	156.0	0.913545	0.1 E-12	-0.4 E-13	0.4 E-11
27	162.0	0.951057	0.1 E-12	-0.5 E-13	0.4 E-11
28	168.0	0.978148	0.1 E-12	-0.7 E-14	0.4 E-11
29	174.0	0.994522	0.2 E-12	-0.1 E-12	0.4 E-11

Таблица 8.5.3

x	решение	расчет 1	Расчет 2	расчет 3
-0.6	1.250000	1.253089	1.262185	1.250472
-0.2	1.020620	1.022388	1.030875	1.020959
0.2	1.020620	1.021729	1.024166	1.020877
0.6	1.250000	1.250308	1.236262	1.250009

Поскольку вид и регулярного ядра и правой части достаточно сложен и при $\lambda \rightarrow 2$ имеет особенность, то это существенным образом сказывается на точности расчетов при λ , близких к 2. Отметим, что для получения численных результатов высокой точ-

ности желательно иметь эффективную процедуру нахождения корней многочленов Якоби при заданных показателях степеней α и β .

Рассмотрим теперь гиперсингулярное интегральное уравнение на отрезке

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (8.5.15)$$

Будем искать решение этого уравнения в классе $H_1^{(0,0)*}$ (см. замечание 4.2.2) функций на $[-1, 1]$. В этом классе функций, в силу формулы (4.6.12), уравнение (8.5.15) эквивалентно уравнению

$$-\int_{-1}^1 \frac{g'(x)dx}{x_0-x} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad (8.5.16)$$

при выполнении условия

$$\int_{-1}^1 g'(x)dx = g(1) - g(-1) = 0.$$

Как следует из [98], решением уравнения (8.5.16) при условии (8.5.17) является функция

$$g'(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} f(x_0) dx_0}{x-x_0}, \quad x \in (-1, 1). \quad (8.5.18)$$

Следовательно, решением уравнения (8.5.15) из класса $H_1^{(0,0)*}$ функций на $[-1, 1]$ будет функция

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} f(x_0) dx_0}{\tau-x_0}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (8.5.19)$$

Так как при последовательном интегрировании можно менять местами порядок интегрирования, если один из интегралов сингулярный, а другой абсолютно интегрируемый [98], то можно написать

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x_0^2} \left(\int_{-1}^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} (\tau-x_0)} \right) f(x_0) dx_0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (8.5.20)$$

Непосредственным вычислением с помощью замены переменной $\tau = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-1 \leq \tau \leq 1$, получаем

$$\int_{-1}^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2} (\tau-x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \ln \frac{|x_0-x|}{1-x_0x + \sqrt{1-x_0^2} \sqrt{1-x^2}}. \quad (8.5.21)$$

Таким образом, решение уравнения (8.5.15) для любой функции $f(x) \in H$ на $[-1, 1]$ задается формулой:

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{|x_0-x|}{1-x_0x + \sqrt{1-x_0^2} \sqrt{1-x^2}} f(x_0) dx_0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (8.5.22)$$

Из формулы (8.5.22) видно, что интеграл в ней имеет логарифмическую особенность на диагонали (при $x = x_0$) и $g(-1) = g(1) = 0$.

Рассмотрим теперь численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения (8.5.15) на основе идей метода дискретных вихревых пар [70]. Заменяем его следующей системой линейных алгебраических уравнений, используя каноническое разбиение отрезка $[-1, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n g_n(x_{0k}) \left(\frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right) = f(x_{0j}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.5.23)$$

Приведем некоторые примеры численных расчетов по нахождению решения интегрального уравнения (8.5.15) на отрезке. Будем использовать соотношение (4.6.20) для сравнения численных результатов с точными значениями. Методика проведения вычислений следующая.

Задаем индекс полинома Чебышева. Берем каноническое разбиение отрезка $[-1, 1]$ на N частей. Обозначим точное решение $g(x_0)$, приближенное – $g_N(x_0)$, а $\Theta^*(x_0) = |g(x_0) - g_N(x_0)|$ – погрешность вычисления. Для нас представляет интерес рассмотреть характер поведения максимума погрешности $\max_k \Theta^*(x_{0k})$ и интегральной по-

грешности $\sum_{k=1}^N \Theta^*(x_{0k})h$. Также интересна динамика изменения погрешности вычисления в зависимости от числа разбиения N .

На рис. 8.5.9 приведены данные о погрешности, на рис. 8.5.10 о динамике погрешности численного решения интегрального уравнения на отрезке при $n = 2$ в соотношении (4.6.20). Как показали расчеты, поточечная погрешность численного решения уравнения равномерно стремится к нулю по всем расчетным точкам.

Рассмотрим, наконец, еще гиперсингулярное интегральное уравнение на окружности

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta)d\theta}{\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2}} = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (8.5.24)$$

Будем искать решение этого уравнения в классе H_1 2π -периодических на $[0, 2\pi]$ функций. Сразу заметим, что в силу равенства (4.7.3) константа является решением однородного уравнения (8.5.24). Таким образом, решение этого уравнения определено с точностью до константы. Так как функция $\sin^{-2} \frac{\theta_0 - \theta}{2}$ симметрична относительно переменных θ_0 и θ , то отсюда и из формулы (4.7.3) следует, что уравнение (8.5.24) разрешимо только для тех функций $f(\theta)$, для которых выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0. \quad (8.5.25)$$

Используя теперь формулу (4.7.5), уравнение (8.5.24) запишем в виде

$$-2 \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (8.5.26)$$

Известно [37], что если $f(\theta_0)$ удовлетворяет условию (8.5.25) и принадлежит классу H на $[0, 2\pi]$, то его решение $g'(\theta)$ тоже принадлежит этому классу. Так как при этом очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} g'(\theta)d\theta = 0 \quad (8.5.27)$$

в силу 2π -периодичности функции $g(\theta)$, то получаем

$$g'(\theta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} f(\theta_0) d\theta_0, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (8.5.28)$$

Из формулы (8.5.28) находим, что

$$g(\theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}} \right| f(\theta_0) d\theta_0 + C, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (8.5.29)$$

Так как известно, что

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| d\theta = -2\pi \ln 2, \quad (8.5.30)$$

то, записав решение (8.5.29) в виде

$$g(\theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| f(\theta_0) d\theta_0 + \frac{\ln 2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0 + C, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (8.5.31)$$

получим такую запись решения с произвольной константой C :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = C. \quad (8.5.32)$$

Рассмотрим теперь численное решение уравнения (8.5.24) опять на основе идей метода дискретных вихревых пар [70]. Заменяем уравнение (8.5.24) следующей системой линейных алгебраических уравнений, используя каноническое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + 2 \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}) \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right) &= f(\theta_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}) \frac{2\pi}{n} &= C. \end{aligned} \quad (8.5.33)$$

где величина γ_{0n} является регуляризирующей [70].

Приведем некоторые примеры численных расчетов по нахождению решения интегрального уравнения (8.5.24). Воспользуемся спектральным соотношением (4.7.10). Методика проведения расчетов полностью совпадает с методикой проведения расчетов на отрезке, кроме задания отрезка разбиения и параметров спектрального соотношения.

На рис. 8.5.11 приведены данные о погрешности, а на рис. 8.5.12 о динамике погрешности численного решения интегрального уравнения (4.7.10) на окружности при следующих параметрах: $n = 2$, $a_i = b_i = 1$, $i = 0, 1, 2$. Как показали расчеты, поточечная погрешность решения уравнения равномерно стремится к нулю по всем расчетным точкам.

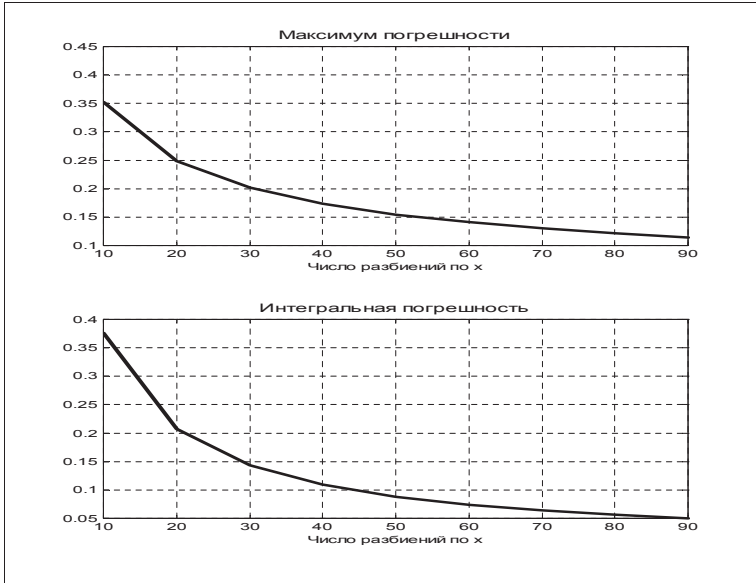


Рис. 8.5.9

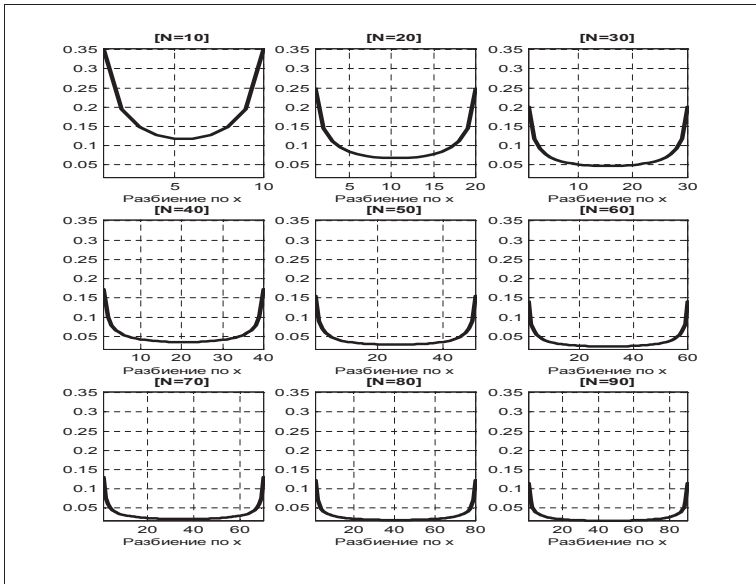


Рис. 8.5.10

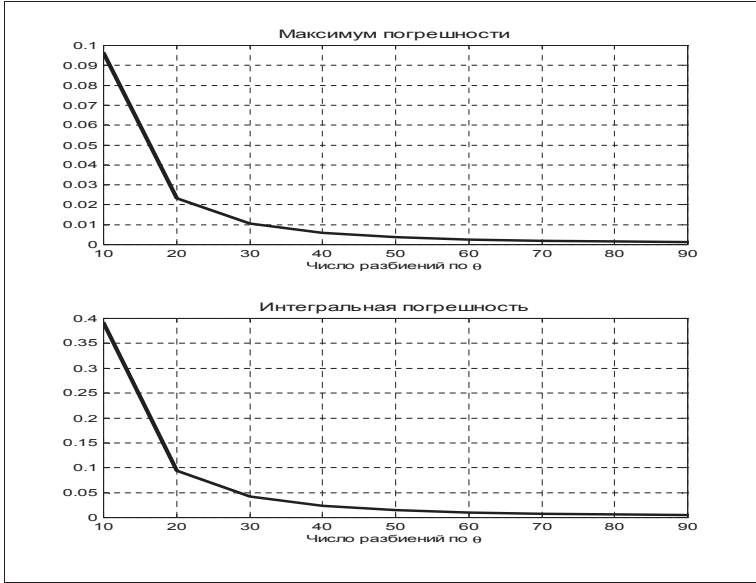


Рис. 8.5.11

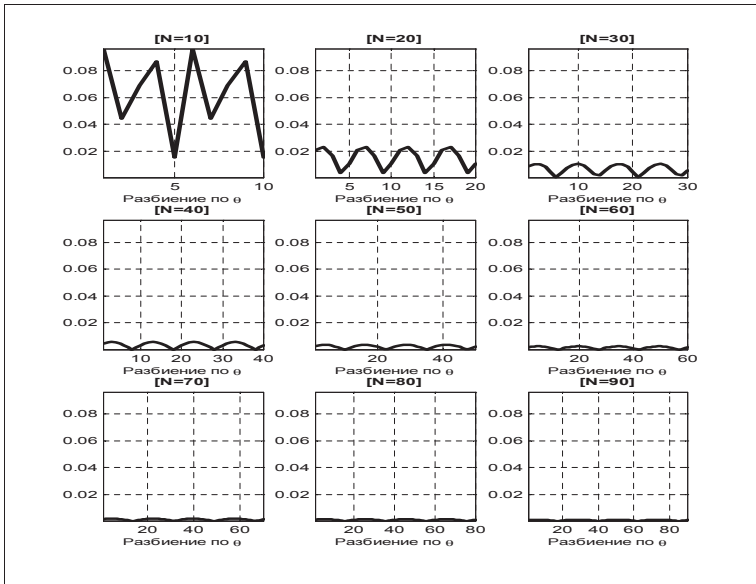


Рис. 8.5.12

Глава 9. Дискретные вихревые системы в аэрогидродинамике

9.1. О постановке задач аэрогидродинамики

Рассматривается стационарное и нестационарное обтекание крыла (тела) произвольной формы в плане, движущегося в идеальной вязкой несжимаемой среде со средней поступательной скоростью \vec{U}_0 (рис. 9.1.1). Плотность ее $\rho = \rho_\infty$ не изменяется при обтекании тела.

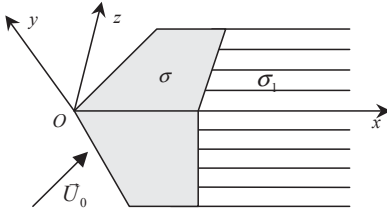


Рис. 9.1.1

В задачах аэродинамики форма тела и закон движения его считаются известными. Если тело упругое, то предполагается, что задан и закон деформации тела. Кроме того, естественно, считаются известными условия, в которых совершается движение (полет) тела. Обычно это безграничная среда, возмущенная только телом. Однако могут рассматриваться и движения тела в возмущенной среде (воздействие ветра, течений, турбулентности). В этом случае неизвестными будут скорость $\vec{V}(x, y, z, t) = \{V_x, V_y, V_z\}$,

возмущенная телом в среде, и давление $P(x, y, z, t)$. Для определения четырех неизвестных функций V_x, V_y, V_z и P имеем три уравнения Эйлера и уравнение неразрывности [41].

Один из важнейших вопросов – граничные условия на поверхности тела. Таким является условие, определяющее задание скоростей, возмущенных телом, на его поверхности. Если вязкостью среды не пренебрегать, то таким условием явилось бы требование о "прилипании", т.е. на поверхности тела $\vec{V} = 0$. Для идеальной вязкой жидкости граничное условие сводится к требованию о непротекании потока сквозь поверхность тела. Оно формулируется как условие обращения в нуль нормальной составляющей относительной скорости среды на поверхности тела

$$\vec{V}_{отн} \cdot \vec{n}_M = 0, \quad M(x, y, z) \in \sigma, \tag{9.1.1}$$

где \vec{n}_M – орт нормали к поверхности σ тела в рассматриваемой точке $M(x, y, z)$.

Заметим, что существует класс задач, например, связанных с обтеканием парашютов и крыльев-парашютов, когда поверхность тела представляет собой тонкую ткань. Тогда поток может протекать сквозь поверхность тела, но закон протекания известен. Он определяется экспериментальным путем и представляет собой соотношение, характеризующее данный материал. Обычно он задается в виде зависимости скорости протекания от перепада давления на ткани.

Дальнейшее упрощение в постановке общей задачи связано со следующим фундаментальным опытным фактом. При обтекании тела возле него и за ним образуется аэродинамический след, характеризуемый тем, что в нем наблюдается вихревое движение, т.е. такое движение жидких частиц, при котором они не только движутся поступательно и деформируются, но и вращаются. Вне этой области течение оказывается безвихревым. Тогда вне тела и следа за ним течение, возмущенное телом, можно характе-

ризовать не тремя неизвестными функциями V_x , V_y , V_z , а одной – потенциалом поля скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, причем

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = \vec{V} \quad (9.1.2)$$

или

$$V_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

В этом случае уравнение неразрывности превращается в уравнение Лапласа

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \quad M \notin \sigma \cup \sigma_1, \quad (9.1.3)$$

где σ_1 – вихревой след движущего тела. Так как из физических соображений ясно, что вдали от тела σ и его следа σ_1 возмущенные скорости должны затухать, то для требуемого решения $\Phi(x, y, z, t)$ уравнения (9.1.3) должны выполняться условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \nabla\Phi = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (9.1.4)$$

для точек $M(x, y, z)$, бесконечно удаленных от тела σ и его следа σ_1 .

При указанных выше условиях уравнения движения Эйлера могут быть проинтегрированы, что приведет к известному соотношению между давлением P и производными от потенциала поля скоростей Φ по координатам и времени – интегралу Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{V_{\text{отн}}^2}{2} - \frac{V^{*2}}{2} + \frac{P - P_\infty}{\rho} = 0, \quad (9.1.5)$$

где $\vec{V}_{\text{отн}}$ – относительная, а \vec{V}^* – переносная скорости частицы жидкости, ρ – плотность жидкости (она полагается постоянной), P_∞ – давление на бесконечности, которое считается известным.

Таким образом, неизвестная функция $P(x, y, z, t)$ также может быть исключена из общей постановки задачи.

Следует отметить одну важную особенность общей постановки задачи. При рассмотрении вихревого следа тела необходимо учитывать те общие теоремы гидродинамики, которые пока не фигурировали в условиях задачи. Они вытекают из общих свойств полей скоростей и тех уравнений, которым эти поля должны удовлетворять.

Отметим их:

- а) при установившемся движении вихри направлены по линиям тока;
- б) при неустановившемся движении вихри, сошедшие с тела (свободные вихри), движутся по траекториям жидких частиц вместе с ними;
- в) циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, не пересекающему тело и его след или состоящего из одних и тех же частиц жидкости во времени, со временем не меняется;
- г) изменение циркуляции присоединенного вихря (неподвижно связанного с телом) сопровождается сходом свободного вихря, причем должно выполняться требование предыдущего пункта;

д) вихревой след σ_1 не создает перепада давления (не несет) и является бесконечно тонкой поверхностью, таким образом, при переходе через него должны соблюдаться условия непрерывности давления и нормальной составляющей к нему скорости:

$$P^+ = P^-, \quad V_{nM}^+ = V_{nM}^-, \quad M(x, y, z) \in \sigma_1. \quad (9.1.6)$$

Индексы (+) и (–) относятся к разным сторонам поверхности σ_1 .

Из теоремы Жуковского “в малом” [14] следует, что относительная скорость свободных вихрей равна нулю, т.е. они движутся вместе с частицами жидкой среды.

Физическое содержание задачи и выбираемый исследователем уровень точности ее описания диктует еще один очень важный этап в постановке задачи – выбор схемы обтекания. Основными среди них являются следующие.

1) Бесциркуляционное обтекание – когда вихревым следом пренебрегают. Обычно применяется при анализе обтекания сильно вытянутых тел, присоединенных масс и при колебании тел на месте.

2) Циркуляционное отрывное обтекание с удовлетворением всем физически очевидным условиям, в том числе требованию о конечности скоростей и давлений во всем пространстве. Сказанное решающим образом влияет на выбор схемы обтекания. Например, когда изучается обтекание тонкого крыла с острыми кромками (передними, задними, боковыми), приходится допускать сход свободных вихрей со всех кромок, и на всех кромках выставлять условие Кутта–Жуковского о конечности скоростей. В противном случае на них скорости будут достигать бесконечно больших значений. Заметим, что при этом обычно даже при движении крыла с постоянной скоростью получаются пульсирующие (нестационарные) режимы обтекания.

3) Упрощенные схемы циркуляционного обтекания тел, в которых некоторые условия снимаются. Наиболее распространены схемы, в которых не требуется конечность скоростей и давлений на передних и боковых кромках тонких крыльев и на изломах поверхности тела. В результате задача может решаться и как стационарная, причем свободные вихри сходят только с задней кромки крыла.

Опыт использования подобных схем велик. Они приводят к удовлетворительным результатам по суммарным эффектам, но дают локально некорректные данные (вблизи острых кромок и изломов картины давлений и скоростей описываются ими неправильно).

9.2. Основные положения метода дискретных вихрей

Метод дискретных вихрей численного решения задач дозвуковой аэрогидродинамики заключается в следующем.

Крыло σ и его след σ_1 заменяем непрерывной вихревой поверхностью, причем крыло σ – поверхностью из присоединенных суммарных и свободных вихрей, неподвижно связанных с крылом, а след σ_1 – поверхностью из свободных вихрей, двигающихся вместе с жидкостью по траекториям частиц. С помощью этого непрерывного вихревого слоя найдем поле скорости V , для которого потенциалом будет функция $\Phi(x, y, z)$ и которое будет удовлетворять всем перечисленным в параграфе 9.1 условиям.

Таким образом, задачу аэродинамики при решении ее вихревым методом стремятся свести к нахождению интенсивности такого вихревого слоя, заменяющего крыло σ и его след σ_1 , чтобы поле скоростей, индуцированное этим слоем, удовлетворяло всем требованиям, указанным в параграфе 9.1.

Численная реализация всех условий краевых задач аэрогидродинамики в методе дискретных вихрей осуществляется следующим образом.

Непрерывный вихревой слой заменяется системой дискретных вихрей так, чтобы в пределе при увеличении числа дискретных вихрей получить искомый вихревой слой. В качестве основного элемента рассматривается соответствующий изучаемому классу задач вихревой образ: в плоских задачах – вихревая нить бесконечного размаха; при изучении обтекания тонких крыльев на малых углах атаки – косые подковообразные вихри; в общих нелинейных пространственных задачах – прямолинейные вихревые отрезки или замкнутые вихревые многоугольники (обычно – треугольники или четырехугольники).

Индукцируемое ими поле скоростей вычисляется с помощью формулы Био–Савара, которая гласит, что элемент $d\vec{s}$ вихревой линии, имеющей циркуляцию Γ , индуцирует в точке M_0 , расположенной на расстоянии от $d\vec{s}$, определяемого вектором \vec{r} , скорость, равную

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (9.2.1)$$

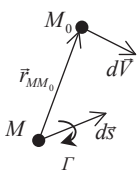


Рис. 9.2.1

Направление $d\vec{s}$ должно быть принято таким, чтобы циркуляция вокруг него в соответствии с правилом правой руки, была положительна, что иллюстрируется рис. 9.2.1. Если начало элемента $d\vec{s}$ помещено в точку M , то $\vec{r} = \overline{MM_0}$. Обозначим Π – данный дискретный вихревой образ, имеющий по всей длине интенсивность Γ (в силу известных теорем гидродинамики о вихревых нитях [41, 81, 107], их интенсивность не должна меняться по длине). Тогда поле скоростей, индуцированное этим вихрем, определяется формулой

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\Pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (9.2.2)$$

Получаемое поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности во всем пространстве (исключая сам дискретный вихрь). Кроме того, скорости затухают при удалении от вихревых элементов, обращаясь в нуль на бесконечном расстоянии от точек, принадлежащих вихрям.

В стационарных задачах след продолжается от тела до бесконечности. В нестационарных он развивается – старые вихри сносятся потоком, а новые сходят с тела. При этом конструирование вихревых систем осуществляется с обязательным выполнением всех теорем о сохранении вихрей в рамках выбранной схемы обтекания.

Поверхность тела в каждый момент времени заменяется суммарными вихрями, в которых нет деления на присоединенные и свободные, причем положение их на теле фиксировано. Криволинейные свободные вихри аппроксимируются системами прямолинейных отрезков.

Число дискретных вихрей конечно, но может безгранично увеличиваться. Это осуществляется по заданному алгоритму, который обеспечивает выполнение следующих требований, лежащих в основе эффективности метода.

1. Размеры вихревых сеток вблизи тела по всем направлениям должны быть примерно одинаковыми.

2. Точки, в которых удовлетворяются граничные условия о непротекании (*точки коллокации*), должны лежать примерно в центре вихревых многоугольников. Этим обеспечивается выделение главного значения в интегралах типа Коши.

3. На границах тонких поверхностей и вблизи изломов поверхности тела, где скорости могут обращаться в бесконечность, выбор расположения вихрей и расчетных

точек производится в соответствии с выбранной схемой. Если ставится требование о конечности скоростей (*условие Кутта–Жуковского*) на кромках и изломах, то на них (или ближе к ним) ставятся точки коллокации (расчетные точки) – дискретный аналог условия Кутта–Жуковского. В противном случае на них ставятся вихри. В дальнейшем это правило расположения дискретных вихрей и расчетных точек у кромок будем называть *Б–условием метода дискретных вихрей*, которое впервые было сформулировано в [11].

Важным этапом решения задач аэродинамики является построение формы вихревого следа. В линейных стационарных и нестационарных задачах она задается наиболее естественным образом. В нелинейных – след выстраивается, причем при установившемся движении методом итераций, а при неустановившемся – конструируется по временным шагам. Циркуляция первых дискретных свободных вихрей за телом вычисляется. Далее вихри сносятся потоком без изменения величины циркуляции.

Указанным способом удовлетворяются все условия поставленных задач аэрогидродинамики. Решение их сводится в общем случае к осуществлению (итерации в пространстве и по шагам во времени) следующих вычислительных операций:

а) решению систем линейных алгебраических уравнений, вытекающих из граничных условий на теле;

б) построению вихревого следа за телом.

9.3. Основные дискретные вихревые системы

Рассмотрим вначале поле скоростей от вихревого отрезка A_1A_2 постоянной интенсивности Γ с направлением от точки A_1 к точке A_2 . Произвольную точку A этого отрезка можно записать в виде радиус–вектора

$$\vec{r}_A = \vec{r}_1 + t\vec{r}_{12}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (9.3.1)$$

где $\vec{r}_A = \overline{OA}$, $\vec{r}_1 = \overline{OA_1}$, $\vec{r}_{12} = \overline{A_1A_2}$ и O – некоторая точка пространства. Поэтому для элемента дуги $d\vec{s}$ будем иметь

$$d\vec{s} = \vec{r}_{12} dt. \quad (9.3.2)$$

Поместим теперь элемент $d\vec{s}$ в точку A . Тогда для вектора \vec{r} получаем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{r}_A = \vec{r}_{10} - t\vec{r}_{12}, \quad (9.3.3)$$

где $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$, $\vec{r}_{10} = \overline{A_1M_0}$. Заметим также, что

$$r = \left[\left(t\vec{r}_{12} - \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2 + \alpha \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = r_{10}^2 - \left(\frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2. \quad (9.3.4)$$

Из формул (9.2.1), (9.3.2)–(9.3.4) получаем формулу для индуцированной скорости \vec{V} в точке M_0 от вихревого отрезка A_1A_2 :

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^1 \frac{(\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}) dt}{\left[\left(t\vec{r}_{12} - \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2 + \alpha \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.3.5)$$

Первообразная для подынтегральной функции в формуле (9.3.5) легко находится:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \frac{tr_{12} - \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}}}{\sqrt{\left(tr_{12} - \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}} \right)^2 + \alpha}} \Bigg|_{t=0}^1 \quad (9.3.6)$$

или

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \left[\frac{r_{12} - \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}}}{\sqrt{r_{12}^2 - 2\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12} + r_{10}^2}} + \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{10} r_{12}} \right] = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}}{r_{12}^2 r_{10}^2 - (\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{10})^2} \left(\frac{-\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{20}}{r_{20}} + \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{10}}{r_{10}} \right). \end{aligned} \quad (9.3.7)$$

Заметим, что

$$r_{12}^2 \cdot r_{10}^2 - (\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{10})^2 = |\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}|^2.$$

Рассмотрим теперь различные частные случаи формул (9.3.6) и (9.3.7).

Пусть в пространстве введена декартова система координат $OXYZ$ как на рис. 9.1.1, т.е. тройка векторов \vec{i} , \vec{k} , \vec{j} – правая. Рассмотрим частный случай, когда точка M_0 и вихревой отрезок лежит в плоскости OXZ , причем отрезок параллелен одной из осей координат, например, $A_1 A_2 \parallel OZ$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} M_0 &= (x_0, z_0, 0), \quad A_1 = (x_1, z_1, 0), \quad A_2 = (x_1, z_2, 0), \\ \vec{r}_{12} &= (z_2 - z_1)\vec{k}, \quad \vec{r}_{10} = (x_0 - x_1)\vec{i} + (z_0 - z_1)\vec{k}, \\ \vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10} &= -\vec{j}(x_0 - x_1)(z_2 - z_1), \\ r_{12}^2 &= (z_2 - z_1)^2, \quad \vec{r}_{20} = (x_0 - x_2)\vec{i} + (z_0 - z_2)\vec{k}, \\ \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{20} &= (z_2 - z_1)(z_0 - z_2), \\ \vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12} &= (z_2 - z_1)(z_0 - z_1), \quad r_{10}^2 = (x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2, \end{aligned}$$

и из формулы (9.3.7) получаем

$$\vec{V} = -\vec{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{x_0 - x_1} \left(\frac{-(z_0 - z_2)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}} + \frac{z_0 - z_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right). \quad (9.3.8)$$

Теперь рассмотрим прямолинейный вихрь полубесконечного размаха, начинающийся в точке $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и через точку $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ уходящий в бесконечность.

Тогда в формуле (9.3.1) параметр t будет изменяться от 0 до $+\infty$. Следовательно, в формуле (9.3.6) верхний предел будет $+\infty$, и поэтому при подстановке пределов получим

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \left[1 + \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{10} \cdot r_{12}} \right]. \quad (9.3.9)$$

Если же направление на вихре идет из бесконечности через точку A_2 до точки A_1 , то в формуле (9.3.2) для $d\vec{s}$, надо поставить знак минус, поэтому будем иметь

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{10}}{r_{12} \alpha} \left[1 + \frac{\vec{r}_{10} \cdot \vec{r}_{12}}{r_{10} \cdot r_{12}} \right]. \quad (9.3.10)$$

Например, пусть вихрь начинается в точке $A_1(x_1, z_1, 0)$ и через точку $A_2(x_2, z_1, 0)$ уходит в бесконечность. Точка $M_0(x_0, z_0, 0)$ также лежит в плоскости OXZ . Тогда имеем: $\bar{r}_{12} = (x_2 - x_1)\bar{i}$, $\bar{r}_{10} = (x_0 - x_1)\bar{i} + (z_0 - z_1)\bar{k}$, $\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10} = \bar{j}(x_2 - x_1)(z_0 - z_1)$, $r_{12} = x_2 - x_1$ (предполагаем $x_2 > x_1$), $r_{12} \cdot \bar{r}_{10} = (x_2 - x_1)(x_0 - x_1)$, $\alpha = (z_0 - z_1)^2$, и

$$\bar{V} = \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{z_0 - z_1} \left(1 + \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right). \quad (9.3.11)$$

Рассмотрим теперь прямолинейный вихрь бесконечного размаха. Будем полагать, что направление на вихре определяется параметром в формуле (9.3.1), т.е. формула (9.3.2) сохраняет свой вид. В этом случае пределы интегрирования в формуле (9.3.5) будут $-\infty$ и $+\infty$. Следовательно, из формулы (9.3.6) при подстановке $t = -\infty$ и $t = +\infty$ получим

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10}}{r_{12} \alpha}. \quad (9.3.12)$$

В формулах (9.3.1) и (9.3.3) под \bar{r}_{12} можно понимать любой вектор, направленный одинаково с направлением на вихре.

Например, пусть вихрь проходит через точку $A_1 = (x_1, z_1, 0)$ параллельно оси OZ и одинаково с ней направлен. За направляющий вектор \bar{r}_{12} возьмем вектор \bar{k} . Скорость от этого вихря будем подсчитывать в точке $M_0 = (x_0, z_0, 0)$. В этом случае $\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10} = -\bar{j}(x_0 - x_1)$, $\alpha = (x_0 - x_1)^2$,

$$\bar{V} = -\bar{j} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{x_0 - x_1}. \quad (9.3.13)$$

В задачах для телесного профиля потребуется случай, когда $A_1 = (x_1, 0, y_1)$, $\bar{r}_{12} = \bar{k}$ и $M_0 = (x_0, 0, y_0)$. Тогда $\bar{r}_{10} = (x_0 - x_1)\bar{i} + (y_0 - y_1)\bar{j}$, $\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10} = -\bar{j}(x_0 - x_1) + \bar{i}(y_0 - y_1)$, $\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10} = 0$. Таким образом, получаем

$$\bar{V} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(y_0 - y_1)\bar{i} - (x_0 - x_1)\bar{j}}{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}. \quad (9.3.14)$$

Перейдем теперь к рассмотрению прямого и косоуго подковообразных вихрей.

Прямые подковообразные вихри, следуя [14], будем называть (рис. 9.3.1,а) вихрь постоянной интенсивности Γ , состоящий из отрезка $[A_1(x_1, z_1, 0), A_2(x_1, z_2, 0)]$ и двух полубесконечных прямолинейных вихрей $(A_1, +\infty)$ и $(A_2, +\infty)$, параллельных оси OX . Направление на этом вихре будем задавать вектором \bar{r}_{12} и обозначать его $\Pi(A_1, A_2)$. Найдем скорость \bar{V} , индуцированную этим вихрем в точке $M_0 = (x_0, z_0, 0)$ не лежащей на вихре. Обозначим \bar{V}_{12} , \bar{V}_1 и \bar{V}_2 – скорости в точке M_0 , индуцированные, соответственно, вихрями (A_1, A_2) , $(A_1, +\infty)$ и $(A_2, +\infty)$. Используя формулы (9.3.8)–(9.3.10), получаем

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_{12} + \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \\ &= \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{z_0 - z_2} - \frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_2)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_1)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(z_0 - z_2)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}} \right) dz = \\
&= j \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2 + \infty} \frac{dx dz}{[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}. \tag{9.3.15}
\end{aligned}$$

Косой подковообразный вихрь (рис. 9.3.1,б) отличается от прямого только тем, что отрезок $[A_1, A_2]$ не параллелен оси OZ , т.е. $A_1 = (x_1, z_1, 0)$, $A_2 = (x_2, z_2, 0)$ и $x_2 \neq x_1$.

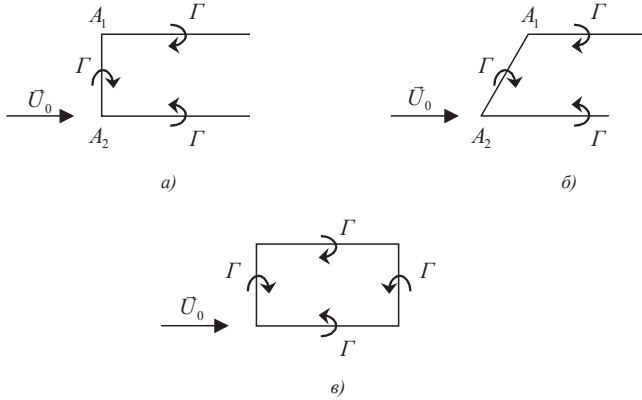


Рис. 9.3.1

Пусть уравнение линии вихря (A_1, A_2) будет

$$x(z) = a + zb, \tag{9.3.16}$$

т.е. $x_1 = x(z_1) = a + z_1b$, $x_2 = x(z_2) = a + z_2b$. Тогда имеем для той же точки $M_0 = (x_0, z_0, 0)$:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{12} &= (x_2 - x_1)\bar{i} + (z_2 - z_1)\bar{k} = (z_2 - z_1)b\bar{i} + (z_2 - z_1)\bar{k} = (z_2 - z_1)(b\bar{i} + \bar{k}), \\
\bar{r}_{10} &= (x_0 - x_1)\bar{i} + (z_0 - z_1)\bar{k}, \\
\bar{r}_{12} \times \bar{r}_{10} &= j[(x_2 - x_1)(z_0 - z_1) - (x_0 - x_1)(z_2 - z_1)] = j[b(z_0 - z_1) - (x_0 - x_1)], \\
r_{12} &= (z_2 - z_1)\sqrt{1 + b^2}, \\
\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{10} &= (z_2 - z_1)[b(x_0 - x_1) + (z_0 - z_1)], \\
\bar{r}_{12} \cdot \bar{r}_{20} &= (z_2 - z_1)[b(x_0 - x_2) + (z_0 - z_2)].
\end{aligned}$$

Отсюда по (9.3.7)

$$V_{12} = j \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\lambda(x_0, z_0)} \left[\frac{(x_0 - x_2)b + (z_0 - z_2)}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}} - \frac{(x_0 - x_1)b + (z_0 - z_1)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}} \right], \tag{9.3.17}$$

где $\lambda(x_0, z_0) \equiv x_0 - a - z_0b \equiv x_0 - x(z_0)$. Для вихрей $(A_1, +\infty)$ и $(A_2, +\infty)$ формулы сохраняются, поэтому имеем

$$V = j \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{z_0 - z_2} - \frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{\lambda(x_0, z_0)(z_0 - z_2)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{\lambda(x_0, z_0)(z_0 - z_1)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x(z)}{\sqrt{(x_0 - x(z))^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dz = \\
&= \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{+\infty} \frac{dx dz}{\left[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{3/2}}. \tag{9.3.18}
\end{aligned}$$

Заметим, что, если $b=0$, т.е. $\Pi(A_1, A_2)$ – прямой подковообразный вихрь, то формула (9.3.18) совпадает с формулой (9.3.15), так как в этом случае $x(z) = x_1$, $\lambda = x_0 - x(z_0) = x_0 - x_1$. Отметим еще следующее. Если точка M_0 лежит на линии отрезка $[A_1, A_2]$, то формулы (9.3.15) и (9.3.18) надо использовать в интегральной форме. Тогда получим, что

$$\mathcal{V} = \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{1}{z_0 - z_2} - \frac{1}{z_0 - z_1} \right] \tag{9.3.19}$$

так как в этом случае или $x_0 - x_1 = 0$, или $x_0 - x(z) = 0$.

Наконец, рассмотрим вихрь постоянной интенсивности Γ , имеющий вид контура прямоугольника в плоскости Oxz со сторонами, параллельными осям координат (рис. 9.3.1, в). Пусть этот вихрь своими угловыми точками имеет точки $A_1 = (x_1, z_1, 0)$, $A_2 = (x_1, z_2, 0)$, $z_2 > z_1$, $A_3 = (x_2, z_2, 0)$, $x_2 > x_1$, $A_4 = (x_2, z_1, 0)$. Направление на этом вихре зададим вектором \bar{r}_{12} . Обозначим \bar{V}_{12} , \bar{V}_{23} , \bar{V}_{34} и \bar{V}_{41} – скорости, индуцируемые в точке $M_0(x_0, z_0, 0)$ вихрями (A_1, A_2) , (A_2, A_3) , (A_3, A_4) и (A_4, A_1) соответственно. Используя формулу (9.3.7) (см. также (9.3.8)) и учитывая направление вихрей, для скорости \mathcal{V} , индуцируемой в точке M_0 всем вихрем, получаем формулу

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{34} + \bar{V}_{41} = \\
&= \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_2)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_2)^2}}{(x_0 - x_2)(z_0 - z_2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{(x_0 - x_2)(z_0 - z_1)} - \frac{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}}{(x_0 - x_1)(z_0 - z_1)} \right]. \tag{9.3.20}
\end{aligned}$$

Формулу (9.3.20) можно записать еще в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= -\bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x_2}{\sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (z_0 - z)^2}} - \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dz = \\
&= \bar{j} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx dz}{\left[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2 \right]^{3/2}}. \tag{9.3.21}
\end{aligned}$$

Замечание 9.3.1. Отметим, что формулы (9.3.15), (9.3.18) и (9.3.21) являются частными случаями общей формулы [81, 107] для потенциала поля скоростей замкнутой вихревой нити, которая гласит: *поле скоростей от замкнутой вихревой нити L постоянной циркуляции Γ совпадает с полем скоростей от двойного слоя, расположенного на поверхности σ , опирающейся на контур L , постоянной плотности скачка $g = \Gamma$* (рис. 9.3.2). Эта формула имеет вид

$$\mathcal{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \text{grad}_{M_0} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) d\sigma, \quad (9.3.22)$$

так как система координат левая.

Если контур L состоит из конечного числа прямолинейных частей, то скорость \mathcal{V} , индуцированная этой вихревой нитью, представляется суммой скоростей от каждой из этих частей, которые затем вычисляются по одной из приведенных в данном параграфе формул.

Замечание 9.3.2. Если поверхность σ представляет собой полосу плоскости Oxz , ограниченную прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_2 > x_1$), то формула (9.3.22) показывает: поле скоростей от слоя диполей постоянной интенсивности Γ , расположенных на этой полосе, равно полю скоростей от системы двух вихревых прямолинейных нитей, расположенных на прямых $x = x_1$ и $x = x_2$, имеющих циркуляции $\hat{\Gamma}$ и $-\hat{\Gamma}$, соответственно, т.е. (рис. 9.3.3)

$$\mathcal{V} = \hat{j} \frac{\hat{\Gamma}}{2\pi} \left[\frac{1}{x_0 - x_2} - \frac{1}{x_0 - x_1} \right] = \hat{j} \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x_0 - x)^2}. \quad (9.3.23)$$

При этом точка $M_0(x_0, 0)$ лежит на оси Ox .

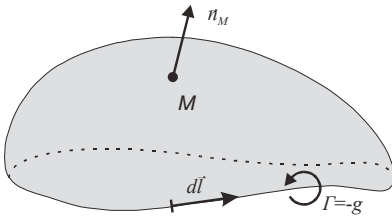


Рис. 9.3.2

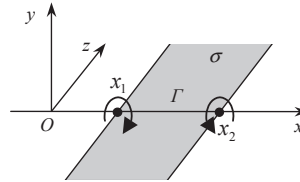


Рис. 9.3.3

Глава 10. Метод дискретных особенностей для плоских стационарных задач аэродинамики. Дискретные вихри, вихревые пары, диполи, стоки/источники

10.1. Задачи для профиля, решетки профилей

Рассмотрим плоскопараллельное обтекание изолированного профиля установленным потоком идеальной невязкой несжимаемой жидкости, скорость которого $\vec{U}_0 = u_{0x}\vec{i} + u_{0y}\vec{j}$. Сам профиль считаем неподвижным. Под профилем понимаем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси OZ , и направляющей кривой L в плоскости OXY (рис. 10.1.1). Так как все параметры набегающего и возмущенного потока не зависят от координаты z , то в дальнейшем профиль будем изображать только кривой L в плоскости OXY . Если кривая L является простой разомкнутой (рис. 10.1.1, а), то такой профиль будем называть тонким, а если кривая L является простой замкнутой кусочно-гладкой (рис. 10.1.1, б), то такой профиль будем называть телесным. Так как рассматриваем стационарную задачу, то следа за профилем нет, и возмущенное течение будет потенциальным везде вне профиля L .

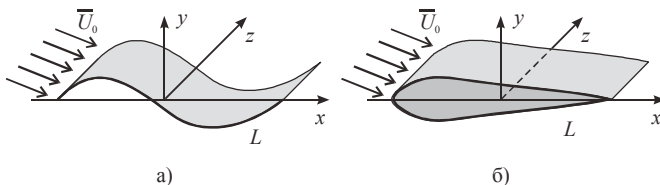


Рис. 10.1.1

Обозначим $\Phi = \Phi(x, y)$ – потенциал скоростей возмущенного течения, а $\vec{V} = \text{grad}\Phi$ – скорость этого течения в точке вне профиля или на его поверхности. Представим потенциал скоростей в виде потенциала двойного слоя по профилю L с плотностью $g(M)$

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^2} g(M) ds_M = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-(x_0 - x)y'_s + (y_0 - y)x'_s}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} g(M) ds_M \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

для точек $M_0(x_0, y_0)$, не лежащих на L ($M_0 \notin L$), и в виде

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{r}_{MM_0}, \vec{n}_M)}{r_{MM_0}^2} g(M) ds_M \pm \frac{1}{2} g(M_0) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{-(x_0 - x)y'_s + (y_0 - y)x'_s}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} g(M) ds_M \pm \frac{1}{2} g(M_0) \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

для точек M_0 , лежащих на L ($M_0 \in L$).

При этом знак плюс (+) берется для значения потенциала, получаемого при подходе к точке M_0 с той стороны от профиля L , куда направлен вектор \vec{n}_M , а знак минус (–) – для противоположной стороны (см. рис. 10.1.2, где показана схема стационарного обтекания разомкнутого гладкого профиля (а) и замкнутого профиля с острой задней кромкой (б)).

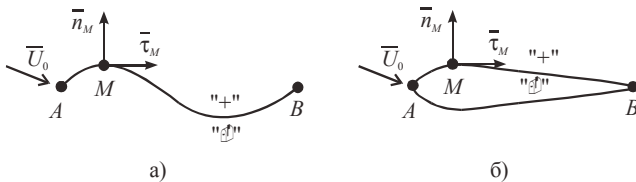


Рис. 10.1.2

В формулах (10.1.1), (10.1.2) и далее в задачах о профилях предполагаем, что L задан параметрически.

Так как скорость точки при потенциальном течении является градиентом потенциала поля скоростей, т.е. $\vec{V} = \nabla\Phi$, то используя формулу градиента от потенциала двойного слоя в плоском случае [70, 113] и обозначая $g'_s(M)$ через $\gamma(M)$, получим, что скорость \vec{V} возмущенного течения теперь запишется в виде

$$\vec{V} = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{r_{MM_0}^2} \gamma(M) ds_M \quad (10.1.3)$$

для точек M_0 , не лежащих на профиле L , или в виде

$$\vec{V}^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{r_{MM_0}^2} \gamma(M) ds_M \pm \frac{1}{2} (x'_{0s}\vec{i} + y'_{0s}\vec{j}) \gamma(M_0), \quad (10.1.4)$$

для точек M_0 профиля L .

Таким образом, видим, что поле скоростей для выбранного нами потенциала такое же [18, 67, 107], как от распределенного по профилю L вихревого слоя с распределенной интенсивностью $\gamma(M)$ этого слоя в точке $M \in L$.

С другой стороны, выбранный потенциал в каждой точке $M_0 \notin L$ удовлетворяет уравнению Лапласа, а скорости от него стремятся к нулю на бесконечности. Таким образом, поле скоростей от вихревого слоя, расположенного на профиле L , удовлетворяет условиям (9.1.2)–(9.1.4) потенциального вне L течения идеальной невязкой жидкости, и осталось выполнить только граничное условие (9.1.1) об обращении в нуль нормальной составляющей относительной скорости частиц на поверхности профиля (т.е. выполнить на поверхности профиля L условие непротекания). Так как профиль L неподвижен, то

$$\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V} + \vec{U}_0, \quad (10.1.5)$$

и поэтому задача о нахождении поля возмущенных скоростей будет решена, если $\gamma(M)$, $M \in L$, будет удовлетворять равенству

$$\vec{V}\vec{n}_{M_0} = -\vec{U}_0\vec{n}_{M_0}, \quad M_0 \in L, \quad (10.1.6)$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{y'_{0s}(y_0 - y) + x'_{0s}(x_0 - x)}{r_{MM_0}^2} \gamma(M) ds_M = f(M_0), \quad M_0 \in L, \quad (10.1.7)$$

где $f(M_0) = \vec{U}_0\vec{n}_{M_0}$.

Удобство моделирования профиля и вообще несущей поверхности вихревым слоем при рассмотрении задач обтекания их потоком идеальной невязкой жидкости понял еще Н.Е.Жуковский. Это дает аэродинамику физически ясный образ для изучения таких задач.

Теперь рассмотрим более подробно уравнение (10.1.7) и особенности его решения для различных профилей.

Пусть вначале L – гладкая разомкнутая кривая, заданная параметрически – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [-1, 1]$, т.е. функция $r'_M = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ непрерывна на $[-1, 1]$ и не обращается в нуль. В этом случае уравнение (10.1.7) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{K(t_0, t)}{t_0 - t} \gamma(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in [-1, 1], \quad (10.1.8)$$

$$K(t_0, t) = \frac{x'(t_0)x_2(t_0, t) + y'(t_0)y_2(t_0, t)}{r_{2,MM_0}^2 r'_{MM_0}} r'_M,$$

$$x_2(t_0, t) = \frac{x_1(t_0, t)}{t_0 - t}, \quad y_2(t_0, t) = \frac{y_1(t_0, t)}{t_0 - t},$$

$$x_1(t_0, t) = x(t_0) - x(t), \quad y_1(t_0, t) = y(t_0) - y(t),$$

$$r_{2,MM_0}^2 = x_2^2(t_0, t) + y_2^2(t_0, t).$$

Естественно функции $x_2(t_0, t)$, $y_2(t_0, t)$ доопределить как $x_2(t_0, t_0) = x'(t_0)$, $y_2(t_0, t_0) = y'(t_0)$ и поэтому $K(t_0, t_0) = 1$, $t_0 \in [-1, 1]$. Теперь уравнение (10.1.8) можно представить в виде [80]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K_1(t_0, t) \gamma(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in [-1, 1], \quad (10.1.9)$$

$$K_1(t_0, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{K(t_0, t) - 1}{t_0 - t} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_2(t_0, t) + K_3(t_0, t)}{r_{2,MM_0}^2 r'_{M_0}},$$

$$K_2(t_0, t) = [x'(t_0)x_2(t_0, t) + y'(t_0)y_2(t_0, t)] \frac{r'_M - r'_{M_0}}{t_0 - t},$$

$$K_3(t_0, t) = r'_{M_0} [x_2(t_0, t)x_3(t_0, t) + y_2(t_0, t)y_3(t_0, t)],$$

$$x_3(t_0, t) = \frac{x(t) - x(t_0) - x'(t_0)(t - t_0)}{(t - t_0)^2},$$

$$y_3(t_0, t) = \frac{y(t) - y(t_0) - y'(t_0)(t - t_0)}{(t - t_0)^2}.$$

Вид функции $K_2(t_0, t)$ и $K_3(t_0, t)$ позволяет утверждать, что если $x''(t), y''(t) \in H$ на $[-1, 1]$, то $K_1(t_0, t)$ также принадлежит H на $[-1, 1]$ (см. [98] или параграф 3.1).

Если при этом $x''(t)$ и $y''(t)$ на всем отрезке $[-1, 1]$ по модулю малы (в смысле допустимой в данной задаче точности), то и ядро $K_1(t_0, t)$ по модулю мало, и поэтому для нахождения интегральных характеристик достаточно рассмотреть уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) dt}{t_0 - t} = f(t_0), \quad t_0 \in [-1, 1], \quad (10.1.10)$$

которое и называется уравнением тонкого слабоизогнутого профиля.

Напомним [70, 98], что уравнение (10.1.9), а следовательно, и (10.1.7) для гладкой разомкнутой кривой имеет не единственное решение. При этом из физики задачи следует, что если точка A является передней кромкой профиля L (см. рис. 10.1.2, а), то в общем случае частица среды при плавном обтекании профиля должна мгновенно повернуться вокруг этой точки, и скорость \vec{V} возмущенного потока должна стремиться к бесконечности вблизи этого конца. На заднем конце профиля в точке B поток должен

плавно сходиться, и поэтому скорость частиц, сходящих с верхней стороны профиля L (обозначенной на рис. 10.1.2 а знаком "+"), должна совпадать со скоростью частиц, сходящих с нижней стороны профиля, т.е. скорость потока должна быть в точке B конечной или, более точно, $\bar{V}^+(B) = \bar{V}^-(B)$. Это и есть знаменитая гипотеза Кутта–Жуковского [14, 41, 107].

Из формулы (10.1.4) сразу получаем, что $\bar{V}^+ - \bar{V}^- = (x'_{0s}\bar{i} + y'_{0s}\bar{j})\gamma(M_0)$ и поэтому при подходе по L к точке B величина $\gamma(M_0)$ должна стремиться к нулю.

Вывод 1. При плавном обтекании тонкого профиля L (циркуляционная задача) надо взять решение уравнения (10.1.9) или (10.1.7), обращающееся в нуль в точке B . Такое решение единственно и имеет вид

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\psi(t), \quad (10.1.11)$$

где функция $\psi(t)$ не имеет особенностей на L .

Если на стоящий на месте тонкий профиль набегают легкие быстроменяющиеся порывы ветра, то можно считать, что вокруг профиля нет циркуляции, т.е. интеграл от $\gamma(M)$ по профилю L равен нулю (это же справедливо и для телесного профиля L) [21, 41]. При этом обе кромки профиля находятся в одинаковом положении.

Вывод 2. При бесциркуляционном обтекании тонкого профиля решение $\gamma(M)$ обращается в бесконечность на обоих концах профиля, т.е. имеет вид

$$\gamma(t) = \frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (10.1.12)$$

и удовлетворяет условию

$$\int_L \gamma(M) ds = 0. \quad (10.1.13)$$

Наконец, если поток набегают на профиль так, что происходит плавное обтекание профиля и при этом и передняя кромка обтекается плавно, т.е. скорость потока и на передней кромке конечна, то *такое обтекание называется безударным*. При этом набегающий поток и профиль должны быть подстроены специальным образом друг к другу. На самолетных крыльях для этого существуют предкрылки, с помощью которых профиль крыла подстраивается под набегающий поток (процесс такого подстраивания описан в [21]).

Вывод 3. Для безударного обтекания тонкого профиля решение $\gamma(M)$ обращается в нуль на обеих кромках профиля и имеет вид

$$\gamma(t) = \sqrt{1-t^2}\psi(t) \quad (10.1.14)$$

Замечание 10.1.1. Пусть теперь тонкий профиль L является простым кусочно-гладким (рис. 10.1.3, а), и пусть точка K является одной из угловых точек. Будем полагать, что локально этот угол является линейным, и наибольший размер этого угла равен β , $\pi < \beta < 2\pi$. Тогда, как следует из результатов [70, §4.4], *вихревая интенсивность $\gamma(M)$ имеет в точке K особенность вида $\rho^{\pi/\beta-1}$, где ρ – расстояние от точки M до точки K* . При этом уравнение (10.1.7) пишется для всех точек $M_0 \in L$, за исключением концов и узлов кривой L , а в уравнении (10.1.9) не совпадает со значениями, соответствующими концам и узлам кривой L . Функция $f(t_0)$ терпит разрыв первого рода в точке K , а ядро $K_1(t_0, t)$ имеет неинтегрируемую особенность в этой точке.

Пример 10.1.1. Пусть L является объединением отрезков $[0, 1]$ по осям OY и OX (рис. 10.1.3, б), т.е. $x=0, y=-t, t \in [-1, 0]$ и $x=t, y=0, t \in [0, 1]$. Пусть $\bar{U}_0 = \bar{i}$. Тогда $f(t_0) = \bar{U}_0 \bar{n}_{M_0} = 1, t_0 \in (-1, 0)$ и $f(t_0) = 0, t_0 \in (0, 1)$. Рассмотрим ядра $K(t_0, t)$ и $K_1(t_0, t)$ в окрестности начала координат, когда $t_0 \in (1, 0)$, а $t \in (0, 1)$. Тогда получим

$$K(t_0, t) = \frac{-t_0(t_0 - t)}{t_0^2 + t^2}, \quad K_1(t_0, t) = \left(\frac{-t_0}{t_0^2 + t^2} - \frac{1}{t_0 - t} \right) \frac{1}{2\pi}. \quad (10.1.15)$$

Теперь видно, что функция $K(t_0, t)$ ограничена в окрестности точки $O(0, 0)$, но не является непрерывной, а функция $K_1(t_0, t)$ неинтегрируема в окрестности этой точки. Решения же $\gamma(t)$ уравнения (10.1.7) имеют в точке O для данного примера особенность вида $\rho^{-1/3}$.

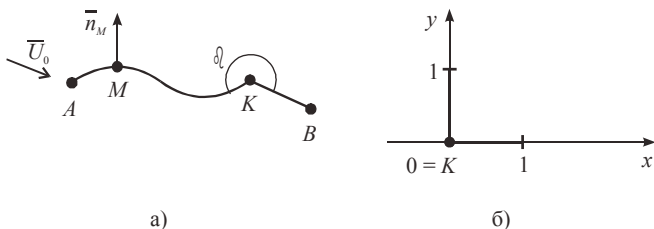


Рис. 10.1.3

Замечание 10.1.2. Если формально использовать уравнение (10.1.10) для слабоизогнутого профиля применительно к профилю с закрылком, т.е. когда закрылка $[q, B]$ (рис. 10.1.4) отклонен на малый угол и находится под малым углом атаки, то получим, что в уравнении (10.1.10) правая часть будет терпеть разрыв первого рода в точке q . Поэтому решение $\gamma(t)$ этого уравнения будет иметь в точке q логарифмическую особенность, что следует из результатов [70, 98].

Рассмотрим теперь обтекание тонкого профиля L у земли (рис. 10.1.5) потоком, параллельным земле. Тогда надо построить такой вихревой слой, чтобы возмущенные им скорости удовлетворяли условию непротекания на профиле и на земле.

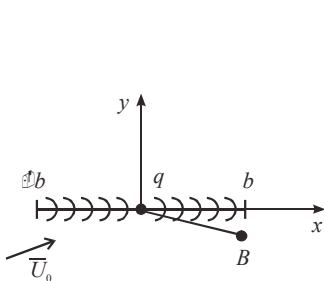


Рис. 10.1.4

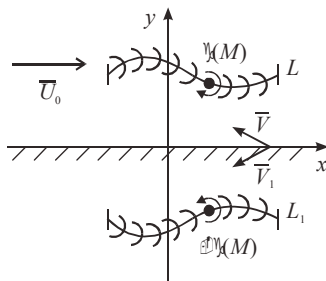


Рис. 10.1.5

Так как рассматриваемый набегающий поток не имеет нормальной составляющей на земле, то требуемый вихревой слой будем строить следующим образом. Пусть уровнем земли будет ось OX . Рассмотрим профиль L_1 в плоскости OXY , симметричный профилю L относительно оси OX . Если параметрическое представление для L будет $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, l]$, то для L_1 имеем $x_1 = x(s)$, $y_1 = -y(s)$. Расположим на профиле L вихревой слой интенсивности $\gamma(s)$, а на профиле L_1 – интенсивности $-\gamma(s)$. Тогда в силу формулы (10.1.3) скорость, возмущенная профилем L в точке $M_0 \notin L$ имеет вид

$$\bar{V}(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{[y_0 - y(s)]\bar{i} - [x_0 - x(s)]\bar{j}}{[y_0 - y(s)]^2 - [x_0 - x(s)]^2} \gamma(s) ds, \quad (10.1.16)$$

а скорость, возмущенная профилем L_1 в точке $M_0 \notin L_1$, – вид

$$\bar{V}_1(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{[y_0 + y(s)]\bar{i} - [x_0 - x(s)]\bar{j}}{[y_0 + y(s)]^2 - [x_0 - x(s)]^2} (-\gamma(s)) ds. \quad (10.1.17)$$

Тогда для точек оси OX ($M_0(0, x_0)$) получим

$$\bar{V}(M_0) + \bar{V}_1(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{-2y(s)\bar{i}}{[y(s)]^2 + [x_0 - x(s)]^2} \gamma(s) ds. \quad (10.1.18)$$

Таким образом, выбранный вихревой слой на профилях L и L_1 дает возмущенную скорость, удовлетворяющую условию непротекания земли. Следовательно, осталось выполнить условие непротекания на профиле L . Для этого функция $\gamma(s)$ должна быть решением уравнения

$$[\mathcal{V}(x(s_0), y(s_0)) + \mathcal{V}_1(x(s_0), y(s_0))] \bar{n}_{M_0} = -\mathcal{U}_0 \bar{n}_M, \quad (10.1.19)$$

т.е. уравнения

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{y'(s_0)[y(s_0) - y(s)] + x'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) - y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2} \gamma(s) ds + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{y'(s_0)[y(s_0) + y(s)] + x'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) + y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2} \gamma(s) ds = f(s_0), \quad (10.1.20) \\ & s_0 \in (0, l). \end{aligned}$$

Уравнение (10.1.20) также имеет бесконечно много решений, и поэтому опять можно рассматривать циркуляционное, бесциркуляционное и, если существует, безударное обтекание.

Наконец, рассмотрим *решетку профилей*, состоящую из системы отрезков $[-b, b] \times y_k$, где $y_k = kl$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, l – фиксированное положительное число, а $[-b, b]$ – отрезок оси OX . Пусть набегающий поток будет плоскопараллельным неограниченным. Поскольку при этом условия обтекания любого профиля одни и те же, интенсивность вихревого слоя на профилях зависит только от координаты x и не зависит от y_k , $k = 0, \pm 1, \dots$. Поэтому условие непротекания достаточно выполнить на одном из профилей, например, для профиля, расположенного на оси OX . Если обозначить \bar{V}_k – скорость в точке M_0 от k -го профиля, то условие непротекания θ -го профиля будет иметь вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_k^2} \gamma(x) dx = f(x_0), \quad x_0 \in (-b, b). \quad (10.1.21)$$

Используя понятие комплексного потенциала [41], можно показать, что

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + y_k^2} = \frac{1}{2l} \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_0 - x). \quad (10.1.22)$$

Поэтому уравнение (10.1.21) запишем следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} + \frac{1}{2l} \int_{-b}^b K(x_0, x) \gamma(x) dx = f(x_0), \quad (10.1.23)$$

где функция $K(x_0, x) = \frac{(x_0 - x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_0 - x) - \frac{l}{\pi}}{x_0 - x}$ является аналитической. Для этого

уравнения также можно искать решения, соответствующие циркуляционному, бесциркуляционному и безударному обтеканиям.

Пусть теперь профиль L является телесным без острой кромки, т.е. кривая L является простой замкнутой гладкой. Будем полагать, что параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда уравнение (10.1.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}} \gamma(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in [0, 2\pi], \quad (10.1.24)$$

$$K(t_0, t) = \frac{x'(t_0) \tilde{x}_2(t_0, t) + y'(t_0) \tilde{y}_2(t_0, t)}{\tilde{r}_{2,MM_0}^2 r'_{M_0}},$$

$$\tilde{x}_2(t_0, t) = \frac{x(t_0) - x(t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \quad \tilde{y}_2(t_0, t) = \frac{y(t_0) - y(t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}},$$

$$\tilde{r}_{2,MM_0}^2 = \tilde{x}_2^2(t_0, t) + \tilde{y}_2^2(t_0, t).$$

Функция $\tilde{x}_2(t_0, t)$ и $\tilde{y}_2(t_0, t)$ терпят разрывы первого рода, так как $\tilde{x}_2(t_0, t) \rightarrow 2x'(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ и $\tilde{x}_2(t_0, t) \rightarrow -2x'(t_0)$ при $t \rightarrow t_0 + 2\pi$, но функция \tilde{r}_{2,MM_0}^2 непрерывна в точке t_0 и не отображается в нуль на $[0, 2\pi]$, если $x'(t)$ и $y'(t)$ непрерывны на $[0, 2\pi]$ и $r'_M \neq 0$ на $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим функции

$$x_3(t_0, t) = \tilde{x}_2(t_0, t) - 2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0), \quad (10.1.25)$$

$$y_3(t_0, t) = \tilde{y}_2(t_0, t) - 2 \cos \frac{t_0 - t}{2} y'(t_0).$$

Так как $2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0) \rightarrow 2x'(t_0)$ для $t \rightarrow t_0$ и $2 \cos \frac{t_0 - t}{2} x'(t_0) \rightarrow -2x'(t_0)$ для $t \rightarrow t_0 + 2\pi$, то функции $x_3(t_0, t)$ и $y_3(t_0, t)$ непрерывны в точке t_0 . Таким образом, уравнение (10.1.24), а следовательно, и (10.1.7) может быть записано в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t_0 - t}{2} \gamma(t) dt + \int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(t_0, t) \gamma(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in [0, 2\pi], \quad (10.1.26)$$

$$\begin{aligned}\tilde{K}_1(t_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \left[A(t_0, t) - \frac{1}{2} \right] \operatorname{ctg} \frac{t_0 - t}{2} + B(t_0, t), \\ A(t_0, t) &= \frac{2r'_{M_0} r'_M}{\tilde{r}_{2, MM_0}^2}, \\ B(t_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{y'(t_0) \tilde{y}_3(t_0, t) + x'(t_0) \tilde{x}_3(t_0, t)}{\tilde{r}_{2, MM_0}^2 r'_M}, \\ \tilde{x}_3(t_0, t) &= \frac{x_3(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}, \quad \tilde{y}_3(t_0, t) = \frac{y_3(t_0, t)}{\sin \frac{t_0 - t}{2}}.\end{aligned}$$

Если $x''(t), y''(t) \in H$ на $[0, 2\pi]$, то $\tilde{K}_1(t_0, t) \in H$ на $[0, 2\pi]$.

Если L имеет точки нарушения гладкости (острые кромки), то орт касательной терпит в этих точках разрывы первого рода, а ядро $\tilde{K}_1(t_0, t)$, как и в показанном выше примере, может иметь в этих точках неинтегрируемые особенности.

Отметим следующее. Так как набегающий поток является потенциальным во всей плоскости, то для любого телесного профиля выполняется равенство

$$\int_L f(M) ds = 0 \quad (10.1.27)$$

для правой части уравнений (10.1.7), (10.1.26), следовательно, будут выполняться равенства

$$\int_L \frac{y'(s_0)[y(s_0) - y(s)] + x'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) - y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2} ds_0 = 0, \quad (10.1.28)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(t_0, t) dt_0 = 0. \quad (10.1.29)$$

Первое из них выполняется для любого $s \in [0, l]$, а второе – в том случае, если $t_0 = \frac{2\pi}{l} s_0$ для любого t .

Покажем еще, что для телесного профиля решение уравнений (10.1.7) определено с точностью до константы, т.е. что в этом уравнении константа является собственным решением. Действительно, пусть $\gamma(M) = C$, а функция $f(M_0)$ отлична от нуля. Тогда, как следует из (10.1.26), функция $f(M_0)$ принадлежит классу H на L (предполагаем, что x'' и $y'' \in H$ на L). Следовательно, с точностью до константы уравнение для скачка потенциала двойного слоя имеет гладкое решение, отличное от нуля и не равное константе $\gamma(M) = g'_s(M)$, поэтому $\gamma(M)$ не может быть константой. Пришли к противоречию.

Таким образом, имеем равенство

$$\int_L \frac{y'_{0s}(y_0 - y) + x'_{0s}(x_0 - x)}{r_{MM_0}^2} ds_M = 0, \quad M_0 \in L. \quad (10.1.30)$$

Как показывают систематические расчеты для обтекания различных телесных контуров, равенства (10.1.27), (10.1.28), (10.1.30) выполняются для любого замкнутого кусочно-гладкого контура.

Докажем теперь следующее утверждение.

Утверждение 10.1.1. Если телесный профиль моделируется вихревым слоем, то поле скоростей, равное сумме скоростей от набегающего потока и возмущенных скоростей, равно нулю внутри профиля.

Доказательство. Как известно [70], решение внешней задачи Неймана с помощью потенциала двойного слоя одновременно дает решение внутренней задачи Неймана для этого же замкнутого контура с теми же граничными условиями. Но так как в задачах обтекания $f(M_0) = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_0}$, то решением внутренней задачи Неймана будет также потенциал $-\Phi_0(M)$ от набегающего потока. Решения внутренней задачи Неймана могут отличаться только на константу [30, 113] в классе абсолютно интегрируемых функций, поэтому

$$\Phi(M) = -\Phi_0(M) + C, \quad M \in D^{(-)}. \quad (10.1.31)$$

Следовательно,

$$\text{grad}\Phi(M) = -\text{grad}\Phi_0(M), \quad M \in D^{(-)}. \quad (10.1.32)$$

или

$$\bar{V}(M) + \bar{U}_0(M) \equiv 0, \quad M \in D^{(-)}, \quad (10.1.33)$$

что и доказывает утверждение.

Заметим, что равенство (10.1.33) позволяет свести задачу обтекания телесного профиля при моделировании его вихревым слоем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно интенсивности вихревого слоя $\gamma(M)$. Действительно, переходя в равенстве (10.1.33) к точкам профиля L , получаем в пределе $(\bar{U}_0^-(M_0) = \bar{U}_0(M_0))$

$$\bar{V}^-(M) + \bar{U}_0(M) \equiv 0, \quad M_0 \in L. \quad (10.1.34)$$

Проектируя равенство (10.1.34) на орт касательного вектора $\bar{e}(M_0) = x'_{0s} \bar{i} + y'_{0s} \bar{j}$ к L в точке M_0 , получаем, учитывая формулу (10.1.4)

$$-\frac{1}{2} \gamma(s_0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \omega(s_0, s) \gamma(s) ds = f_1(s_0), \quad s_0 \in [0, l], \quad (10.1.35)$$

$$\omega(s_0, s) = \frac{x'(s_0)[y(s_0) - y(s)] - y'(s_0)[x(s_0) - x(s)]}{[y(s_0) - y(s)]^2 + [x(s_0) - x(s)]^2},$$

$$f_1(s_0) = -\bar{U}_0 \bar{e}_{M_0}.$$

Преобразуем функцию $\omega(s_0, s)$ следующим образом:

$$\omega(s_0, s) = \frac{x'(s_0) \frac{y_3(s_0, s)}{s_0 - s} - y'(s_0) \frac{x_3(s_0, s)}{s_0 - s}}{x_2^2(s_0, s) + y_2^2(s_0, s)}, \quad (10.1.36)$$

$$y_3(s_0, s) = y_2(s_0, s) - y'(s_0), \quad x_3(s_0, s) = x_2(s_0, s) - x'(s_0),$$

$$y_2(s_0, s) = \frac{y(s_0) - y(s)}{s_0 - s}, \quad x_2(s_0, s) = \frac{x(s_0) - x(s)}{s_0 - s}.$$

Формула (10.1.36) показывает, что если $x''(s)$ и $y''(s)$ принадлежат классу H на L , то ядро $\omega(s_0, s_0)$ также принадлежит этому классу на L , и

$$\omega(s_0, s_0) = \frac{y'(s_0)x''(s_0) - x'(s_0)y''(s_0)}{2}. \quad (10.1.37)$$

Так как

$$f_1(s_0) = -\bar{U}_0 \tau_{M_0} = -\text{grad } \Phi_0(s_0) \tau(s_0) = -\frac{\partial \Phi_0(s_0)}{\partial \tau_{M_0}} = -\frac{\partial \Phi_0(s_0)}{\partial s_0},$$

то выполняется равенство

$$\int_L f(s) ds = 0. \quad (10.1.38)$$

Рассуждения, аналогичные рассуждениям при получении формулы (10.1.30), показывают, что константа является собственным решением уравнения (10.1.35), т.е. справедливо равенство

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_L \omega(s_0, s) ds = 0. \quad (10.1.39)$$

Пример 10.1.2. Пусть L – окружность единичного радиуса с центром в начале координат: $x = \cos s$, $y = -\sin s$, и набегающий поток имеет скорость $\bar{U}_0 = \bar{i}$. Тогда уравнение (10.1.26) примет вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{s_0 - s}{2} \gamma(s) ds = \cos s_0, \quad s_0 \in [0, 2\pi], \quad (10.1.40)$$

а уравнение (10.1.35) – вид

$$-\frac{1}{2} \gamma(s_0) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(s) ds = \sin s_0. \quad (10.1.41)$$

Как следует из спектральной формулы для ядра Гильберта, для уравнения (10.1.40) (а для уравнения (10.1.41) проверяется непосредственно), что решением будет функция

$$\gamma(s) = -2 \sin s + C, \quad (10.1.42)$$

где C – произвольная константа.

Остановимся теперь на вопросах о выделении требуемого решения в задачах обтекания телесных профилей.

Если телесный профиль L является гладким (не имеет острых кромок), то для установившегося обтекания должен выполняться парадокс Даламбера [41, 107] об отсутствии циркуляции вокруг такого профиля. Поэтому единственное решение уравнений (10.1.7) и (10.1.35), требуемое в задачах обтекания, будет выделяться равенством

$$\int_L \gamma(s) ds = 0. \quad (10.1.43)$$

А вообще для этих уравнений единственное решение можно выделить или заданием значения интеграла от решения

$$\int_L \gamma(s) ds = C, \quad (10.1.44)$$

или заданием значения решения $\gamma(s)$ в некоторой точке M^* на кривой L , т.е.

$$\gamma(s^*) = C. \quad (10.1.45)$$

Пусть теперь телесный профиль имеет одну острую кромку B . При условии плавного обтекания относительные скорости частиц среды при подходе к точке B сверху и снизу профиля (рис. 10.1.2, б) должны быть равны (условие Кутта–Жуковского), т.е. $\bar{V}_{\text{ому}}^+(s_B - 0) = \bar{V}_{\text{ому}}^+(s_B + 0)$, а следовательно, скорость должна быть конечной. Однако в силу равенства (10.1.34) и формулы (10.1.4) для любой точки телесного профиля можно записать

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\text{ому}}^+(M_0) &= \bar{V}_{\text{ому}}^+(M_0) - \bar{V}_{\text{ому}}^-(M_0) = \\ &= \bar{V}^+(M_0) - \bar{V}^-(M_0) = \frac{1}{2} \gamma(M_0) \bar{r}(M_0). \end{aligned} \quad (10.1.46)$$

Следовательно, из условия Кутта–Жуковского в точке B получаем, что конечное значение в этой точке должна иметь интенсивность вихревого слоя $\gamma(B)$. Пусть внешний угол в точке B отличен от 2π , тогда в силу результатов [70] функция $\gamma(M) = g'_s(M)$ либо обращается в бесконечность, либо обращается в нуль в точке B . Так как $\gamma(B)$ конечно, то из предыдущего получаем $\gamma(B) = 0$.

Вывод. Условием плавного обтекания острой кромки B телесного профиля является равенство

$$\gamma(B) = 0. \quad (10.1.47)$$

Решив уравнение (10.1.7) при условии (10.1.47), затем сможем вычислить циркуляцию, создаваемую профилем, и другие аэродинамические характеристики.

Если телесный профиль L имеет несколько острых кромок (например, он является треугольником, ромбом или другой аналогичной фигурой), то единственное решение уравнения (10.1.7) можно выделить либо заданием значения интеграла от $\gamma(M)$ по L (например, взять условие бесциркулярности (10.1.43)) или указать, какая острая кромка обтекается плавно, т.е. на какой кромке $\gamma(M)$ обращается в нуль.

Применение метода дискретных вихрей к численному решению задач обтекания профилей и решетки профилей в данном параграфе продемонстрируем на примере тонкого слабоизогнутого профиля и решетки таких профилей.

Для удобства запишем уравнение *тонкого слабоизогнутого профиля* в виде (см. (10.1.10))

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = f(x_0), \quad x_0 \in [-b, b], \quad (10.1.48)$$

где $f(x_0) = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_0}$, \bar{U}_0 – скорость набегающего потока, а \bar{n}_{M_0} – орт нормали к верхней стороне профиля в точке $M(x_0, y(x_0))$, если $y = y(x)$, $x \in (-b, b)$, есть уравнение этого профиля.

Метод дискретных вихрей в данном случае состоит в следующем. Профиль заменяют вихревым слоем, который располагают на отрезке $[-b, b]$ оси OX (рис. 10.1.6, а). Его интенсивность не зависит от координаты Z , и ее обозначают $\gamma(x)$.

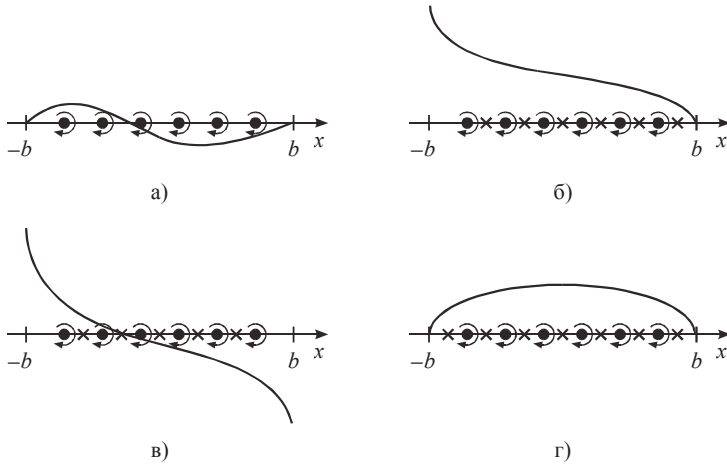


Рис. 10.1.6

Условие о непротекании профиля выполняют в точках отрезка $[-b, b]$, т.е. сумма нормальных составляющих скорости в точках отрезка от вихревого слоя и снесенной в эту точку скорости набегающего потока в точке профиля, проектирующейся в данную точку полосы, равна нулю. Вихревой слой, моделирующий профиль, заменяется бесконечно длинными прямолинейными вихревыми шнурами постоянной интенсивности Γ_k , уравнение которых $x = x_k = -b + kh$, $h = 2b/(n+1)$, $k = 1, \dots, n$, а граничное условие (10.1.6) непротекания профиля выполняется в расчетных точках $x_{0m} = x_m + h/2$, $m = 0, 1, \dots, n$. Нормальная составляющая скорости, индуцированной k -м вихрем в m -й расчетной точке, записывается в виде (см. (9.3.13))

$$V_{km} = \Gamma_k \omega_k^m = -\frac{\Gamma_k}{2\pi(x_{0m} - x_k)}. \quad (10.1.49)$$

Нормальная составляющая V_m скорости от всей системы дискретных вихрей в m -й расчетной точке будет

$$V_m = \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m. \quad (10.1.50)$$

Рассмотрим циркуляционное обтекание профиля (рис. 10.1.6, б). В этом случае эксперимент показывает [14], что вихревая интенсивность должна быть неограниченна у передней кромки (точка $-b$) и ограничена у задней кромки (точка b). Следовательно, в силу Б-условия метода дискретных вихрей ближайшим к передней кромке должен располагаться вихрь, а к задней кромке – расчетная точка, поэтому для расчетных точек надо брать номера $m = 1, \dots, n$. Выполняя в этих точках условие непротекания (10.1.6), получаем систему равенств

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = V_m^*, \quad V_m^* = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_{0m}}, \quad m = 1, \dots, n, \quad (10.1.51)$$

или, учитывая формулу (10.1.49)

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{x_{0m} - x_k} = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n. \quad (10.1.52)$$

Из результатов параграфа 2.3, следует, что если взять $\Gamma_k = \gamma_n(x_k)h$ (γ_n – приближенное значение γ), то система линейных алгебраических уравнений (10.1.52) аппроксимирует сингулярное интегральное уравнение (10.1.48).

В силу теоремы 6.1.1 получаем, что между решением системы (10.1.52) и точным значением интенсивности $\gamma(x)$, не ограниченной в точке $-b$ и ограниченной в точке b , выполняются соотношения (6.1.6)–(6.1.8).

При бесциркуляционном обтекании (рис. 10.1.6, в), когда интенсивность $\gamma(x)$ не ограничена на обеих кромках, Б-условие требует, чтобы крайними к обоим краям располагались дискретные вихри, т.е. в этом случае надо для расчетных точек брать $m = 1, \dots, n-1$. Использование условия непротекания в этих точках даст $n-1$ уравнений для n неизвестных циркуляций дискретных вихрей. Получаем недоопределенную систему. Доопределяется эта система с помощью условия бесциркуляционного обтекания. В результате этого получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad \sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad (10.1.53)$$

и, следовательно, здесь применима теорема 6.1.1 при $C=0$.

При безударном обтекании (рис. 10.1.6, г), когда интенсивность ограничена на обеих краях, Б-условие требует, чтобы крайними к обеим краям располагались расчетные точки, т.е. в этом случае надо для расчетных точек брать $m = 0, 1, \dots, n$. Использование условия непротекания в этих точках даст $n+1$ уравнений для n неизвестных циркуляций дискретных вихрей. Получаем переопределенную систему, причем, как правило, несовместную. Определенной ее делаем с помощью введения регуляризирующего фактора γ_{0n} (новой дополнительной неизвестной), т.е. рассматриваем систему

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = V_m^*, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (10.1.54)$$

и, следовательно, здесь применима также теорема 6.1.1.

Таким образом, теорема 6.1.1 дает полное математическое обоснование для тонкого профиля в стационарном безграничном потоке. Эта же теорема дает обоснование Б-условия метода дискретных вихрей (дискретного аналога гипотезы Кутта–Жуковского), примеры численных расчетов в некоторых конкретных случаях рассматривались выше (см. параграф 8.5).

Отметим, что неравенство (6.1.20) показывает, что суммарные аэродинамические характеристики по методу дискретных вихрей находятся с любой наперед заданной точностью.

Важная особенность метода дискретных вихрей: вид функции $\gamma(x)$, к которой должно приводить решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, определяется только взаимным расположением дискретных вихрей и расчетных точек, а не задается априори. Это особенно важно, когда приходится решать новые задачи аэродинамики, не исследованные еще математически.

Замечание 10.1.3. Если тонкий слабоизогнутый профиль моделировать не вихревым слоем, а слоем диполей, т.е. рассмотреть бесциркуляционную задачу, и уравнение (10.1.48) записать в виде

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{g(x)dx}{(x_0 - x)^2} = f(x_0), \quad (10.1.55)$$

где $\gamma(x) = g'(x)$, $x \in (-b, b)$, то численно его надо решать с помощью метода дискретных вихревых пар, который состоит в следующем.

Возьмем точки $x_k = -b + (k-1)h$, $h = 2b/n$, $k = 1, \dots, n+1$, и точки $x_{0m} = x_m + h/2$, $m = 1, \dots, n$. В каждой точке из пары точек (x_k, x_{k+1}) , $k = 1, \dots, n$, расположим по дискретному вихрю интенсивности $\hat{\Gamma}_k$ и $-\hat{\Gamma}_k$, соответственно, $\hat{\Gamma}_k = g_n(x_{0k})$ (рис. 10.1.7). Тогда выполнение условия непротекания в точках x_{0m} , $m = 1, \dots, n$, даст следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \hat{\Gamma}_k \hat{\omega}_k^m = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n, \quad (10.1.56)$$

где

$$\hat{\Gamma}_k = g_n(x_{0k}),$$

$$\hat{\omega}_k^m = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{(x_{0m} - x)^2} = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{x_{0m} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0m} - x_k} \right].$$

Теперь из теоремы 6.1.8 следует, что значения $\hat{\Gamma}_k = g_n(x_{0k})$, даваемые системой (10.1.56), равномерно сходятся к значениям точного решения $g(x_0)$ уравнения (10.1.55), т.е. получаем математическое обоснование метода дискретных вихревых пар.

Если систему (10.1.56) преобразовать в систему (10.1.53), то для интенсивностей дискретных вихрей Γ_k получим формулу

$$\Gamma_k = \hat{\Gamma}_k - \hat{\Gamma}_{k-1} = g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1}) = \int_{x_{0k-1}}^{x_{0k}} g_n'(x) dx, \quad k = 1, \dots, n+1, \quad (10.1.57)$$

где полагаем $x_{0-1} = -b$, $x_{0n+1} = b$, $g_n(x_{0-1}) = g_n(x_{0n+1}) = 0$.

Замечание 10.1.4. Рассуждения, проведенные в предыдущем замечании, показывают, что в методе дискретных вихрей, по которому написаны системы (10.1.51), (10.1.53), (10.1.54), можно полагать

$$\Gamma_k = \int_{x_{0k-1}}^{x_{0k}} \gamma_n(x) dx, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.1.58)$$

При таком подходе к рассмотрению Γ_k становится ясно, что в так понимаемом методе дискретных вихрей важно только взаимное расположение множества дискретных вихрей и расчетных точек. Крайние дискретные вихри могут лежать и на концах профиля (острых краях) (рис. 10.1.8 для бесциркуляционной задачи и сравни с рис. 10.1.6, в), причем можно показать, что теорема 6.1.1 опять даст математическое обоснование понимаемого таким образом метода дискретных вихрей.

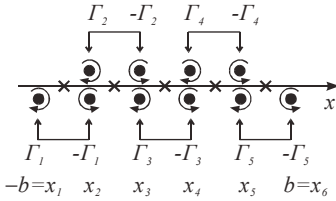


Рис. 10.1.7

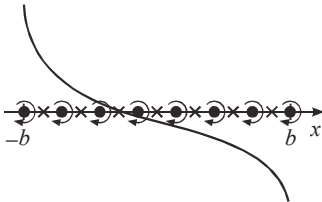


Рис. 10.1.8

Замечание 10.1.5. Из системы (10.1.52) видно, что метод дискретных вихрей есть специфический метод численного решения соответствующих сингулярных или гиперсингулярных (см. (10.1.55)) интегральных уравнений. Поэтому в дальнейшем в данном разделе для задач аэродинамики будем давать соответствующее интегральное уравнение, описывать соответствующую систему дискретных вихрей и писать требуемую систему линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим теперь тонкий профиль с закрылком (рис. 10.1.4). В этом случае нормальная составляющая скорости набегающего потока к поверхности профиля терпит в точке q отклонения закрылка разрыв первого рода. Поэтому в уравнении (10.1.48) правая часть терпит разрыв первого рода в точке q , а функция $\gamma(x)$ имеет в этой точке логарифмическую особенность. Используя замечание 6.1.4, видим, что найти интенсивность дискретных вихрей в данной задаче можно следующими способами.

1. Дискретные вихри и расчетные точки расположить так, чтобы точка q находилась посередине между ближайшими к ней дискретным вихрем и расчетной точкой. После этого в зависимости от типа задачи рассмотреть одну из систем (10.1.51), (10.1.53) или (10.1.54). В этом случае обоснование вычислительной схемы дает замечание 6.1.4.

2. Расчеты показывают, что более точные результаты в окрестности точки q получаются, если расчетные точки брать так, чтобы точка q была одной из них, и в этой точке взять полусумму $(V^*(q-0) + V^*(q+0))/2$ нормальных составляющих скорости от набегающего потока в точке слева и справа. Математического доказательства этого факта пока нет.

3. Если надо, чтобы на закрылке и остальной части профиля было по одинаковому числу вихрей (как, например, при подсчете шарнирных моментов закрылка), то следует воспользоваться замечанием 6.2.3.

Теперь рассмотрим обтекание стационарным плоскопараллельным потоком тонкого профиля, находящегося у земли (рис. 10.1.9). При этом профиль располагается, как и ранее, на прямой $y=0$, а земля описывается прямой $y=-H$. Метод дискретных вихрей в данном случае применяется следующим образом [14]. На профиле берем дискретные вихри и расчетные точки так же, как и ранее, еще берем дискретные вихри в точках $A_{kH} = (x_k, -2H)$ на плоскости OXY с интенсивностями $\Gamma_{kH} = -\Gamma_k$ для обеспечения непротекания линии $y = -H$. Выполняя условие непротекания в расчетных точках

и применяя формулу (10.3.13), получаем, что уравнение (10.1.20) для профиля у земли, которое в данном конкретном случае примет вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \gamma(x) \left[\frac{1}{x_0 - x} - \frac{x_0 - x}{(x_0 - x)^2 + 4H^2} \right] dx = V^*(x_0), \quad (10.1.59)$$

для циркуляционной задачи заменится следующей системой линейных алгебраических уравнений (рис. 10.1.9):

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m - \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^{Hm} = V_m^*, \quad m = 1, \dots, n, \quad (10.1.60)$$

где ω_k^m определено в (10.1.49), а

$$\omega_k^{Hm} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_{0m} - x_k}{(x_{0m} - x_k)^2 + 4H^2}.$$

Для бесциркуляционного и безударного обтеканий получим системы, аналогичные системам (6.2.5) и (6.2.6), так как уравнение (10.1.59) имеет вид уравнения (6.2.1).

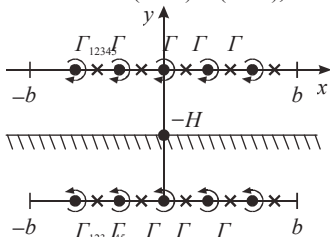


Рис. 10.1.9

Таким образом, теорема 10.2.1 дает математическое обоснование метода дискретных вихрей для стационарного обтекания профиля у земли.

При желании получить более точные расчеты у кромок надо воспользоваться интерполяционными методами, т.е. неравномерным расположением дискретных вихрей и расчетных точек. При этом лучше вначале расположить профиль на отрезке $[-1, 1]$ с помощью замены переменной $x = bt$, а потом воспользоваться результатами параграфа 10.3.

Наконец, рассмотрим решетку профилей, состоящую из системы отрезков $[-b, b] \times y_k$, где $y_k = kl$, $k = 0, \pm 1, \dots$, $l > 0$ – фиксированное число, $[-b, b]$ – отрезок оси OX . Как следует из формул (10.1.22) и (10.1.23), задача обтекания плоскопараллельным потоком этой решетки при моделировании поверхностей профилей вихревым слоем сведется к решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\frac{1}{2l} \int_{-b}^b \gamma(x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_0 - x) dx = V^*(x_0). \quad (10.1.61)$$

Теперь непрерывный вихревой слой заменим системой дискретных вихревых нитей, расположенных в точках (x_i, y_k) , $i = 1, \dots, n$, $k = 0, \pm 1, \dots$, интенсивность которых равна $\Gamma_i = \gamma(x_i)h$, а точки x_i выбраны, как и в (10.1.52). Условие непротекания будем выполнять в точках $x_{0j} = x_i + h/2$, $i = 0, 1, \dots, n$, на оси OX . Тогда для циркуляционного обтекания уравнение (10.1.61) заменится следующей системой:

$$\frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n \Gamma_i \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_{0j} - x_i) = V_j^*, \quad j = 1, \dots, n; \quad (10.1.62)$$

для бесциркуляционного обтекания – системой

$$\frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n \Gamma_i \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_{0j} - x_i) = V_j^*, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_i = 0, \quad j = n;$$

для безударного обтекания– системой

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \operatorname{cth} \frac{\pi}{l} (x_{0i} - x_i) = V_j^*, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (10.1.63)$$

Теорема 6.2.1 дает математическое обоснование метода дискретных вихрей для решетки профилей.

10.2. Телесный и проницаемый профили

Пусть контур L обтекаемого профиля задается параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, l]$, и находится в стационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Выполняя условие непротекания в точках $M_0(x_0, y_0) = M_0(x(t_0), y(t_0))$ контура L , приходим к уравнению (см. (10.1.7))

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{x'_{0,t}(x_0 - x) + y'_{0,t}(y_0 - y)}{\sqrt{x'^2_{0,t} + y'^2_{0,t}} \cdot r^2_{MM_0}} \gamma(t) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} dt = -\bar{U}_0 \bar{n}_{M_0} = f(t_0). \quad (10.2.1)$$

Если контур L является гладким разомкнутым (см. рис. 10.1.2, а), то уравнение (10.2.1) является сингулярным интегральным уравнением первого рода на отрезке вида (10.1.9), и, следовательно, метод дискретных вихрей в этом случае строится следующим образом. На отрезке $[0, l]$ параметра l берут каноническое разбиение, состоящее из множеств: $E = \{t_k, k = 1, \dots, n\}$, $t_k = kh$, $k = 1, \dots, n$, $h = l/(n+1)$, и $E_0 = \{t_{0m}, m = 0, 1, \dots, n\}$, $t_{0m} = t_m + h/2$, $m = 0, 1, \dots, n$. В точках $M_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \dots, n$, $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$ контура L помещаем дискретные вихри интенсивности Γ_k , а точки $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$, $m = 0, 1, \dots, n$, $x_{0m} = x(t_{0m})$, $y_{0m} = y(t_{0m})$ берем расчетными. Теперь так же, как для тонкого слабоизогнутого профиля, т.е. для уравнения (10.1.48) в зависимости от рассматриваемой задачи – циркуляционной, бесциркуляционной или безударной (если она осуществима) – уравнение (10.2.1) заменяем соответственно системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m = 1, \dots, n, \quad (10.2.2)$$

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad (10.2.3)$$

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad m = n,$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad (10.2.4)$$

где

$$\omega_k^m = -\frac{1}{2\pi} \frac{x'_{0m,t}(x_{0m} - x_k) + y'_{0m,t}(y_{0m} - y_k)}{r^2_{M_k M_{0m}} \sqrt{x'^2_{0m,t} + y'^2_{0m,t}}},$$

$$r^2_{M_k M_{0m}} = (x_{0m} - x_k)^2 + (y_{0m} - y_k)^2, \quad f_m = -\bar{U}(M_{0m}) \bar{n}_{M_{0m}}.$$

Система (10.2.2) дает решение уравнения (10.2.1), неограниченное на кромке профиля, соответствующей значению параметра $t=0$. Признаком существования безударного обтекания является стремление к нулю при $n \rightarrow \infty$ регуляризирующей переменной γ_{0n} .

В рассматриваемом случае теорема 10.2.1 дает математическое обоснование метода дискретных вихрей для гладкого разомкнутого профиля, описываемого системами (10.2.2)–(10.2.4). Эти системы получаются из выполнения условия непротекания от системы дискретных вихрей и набегающего потока в расчетных точках, выбор которых диктуется Б-условием метода дискретных вихрей.

Замечание 10.2.1. После решения систем (10.2.2)–(10.2.4) можно находить все аэродинамические характеристики обтекаемого профиля, используя в дискретном виде соответствующие формулы гл.9 в [70]. При этом, если в этих формулах используется функция $\gamma(x)$, то дискретизацию формулы удобнее проводить по точкам M_k и полагать $\gamma_k = \gamma(t_k) = \Gamma_k / \Delta S_k$, где ΔS_k – расстояние на контуре L между точками M_{0k-1} и M_{0k} , а если используется функция $g(t)$ ($\gamma = g'_s$), то дискретизацию формулы удобнее проводить по точкам M_{0k} и полагать $g_{0k} = \sum_{\lambda=1}^k \Gamma_\lambda$, так как $g(0) = 0$ в циркуляционной задаче и $g(0) = g(l) = 0$ в бесциркуляционной.

Замечание 10.2.2. Если контур L является простым разомкнутым, но кусочно-гладким, то точки M_k расположения дискретных вихрей надо выбирать так, чтобы угловые точки контура L входили в их число (рис. 10.2.1).



Рис. 10.2.1

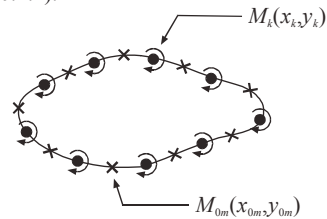


Рис. 10.2.2

Пусть теперь контур L является гладким замкнутым (рис. 10.2.2), т.е. $x(0) = x(l)$, $y(0) = y(l)$ и орг касательного вектора непрерывен. Тогда уравнение (10.2.1) является сингулярным интегральным уравнением с ядром Гильберта вида (10.1.26). Его решение определено с точностью до константы, которая определяется тем, что в аэродинамике в этом случае рассматривается бесциркуляционная задача, и поэтому

$$\int_L \gamma ds = 0. \quad (10.2.5)$$

В соответствии с результатами параграфа 6.5 для уравнения с ядром Гильберта метод дискретных вихрей в этом случае строится следующим образом. На отрезке $[0, l]$ теперь берем следующие два множества точек: $E = \{t_k, k=1, \dots, n\}$, $t_k = (k-1)h$, $k=1, \dots, n$, $h = l/n$ и $E_0 = \{t_{0m}, m=1, \dots, n\}$, $t_{0m} = t_m + h/2$, $m=1, \dots, n$. Теперь опять в точках $M_k(x_k, y_k)$ помещаем дискретные вихри интенсивности Γ_k , а точки $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$ берем расчетными точками. Следуя результатам параграфа 6.5, уравнение (10.2.1) заменяем следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m=1, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^n \Gamma_k = 0, \quad (10.2.6)$$

где ω_k^m – такая же, как в системах (10.2.2)–(10.2.4).

В этом случае также справедливы замечания 10.2.1, 10.2.2.

В качестве демонстрации замечания 10.2.2 для данного случая на рис. 10.2.3, 10.2.4 приведены расчеты присоединенных масс для эллипсов и прямоугольников, выполненные А. А. Михайловым (см. также [132]). На рис. 10.2.5 показана сходимость вычисления коэффициентов присоединенных масс эллипса по числу дискретных вихрей. Сплошная и пунктирная линии соответствуют вычисленным результатам и точному решению. Действие экрана на присоединенные массы квадрата показано на рис. 10.2.6. Вычисленные результаты и точное решение показаны крестиками и сплошной линией, соответственно.

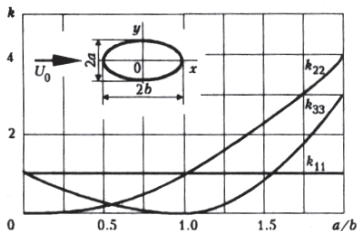


Рис. 10.2.3

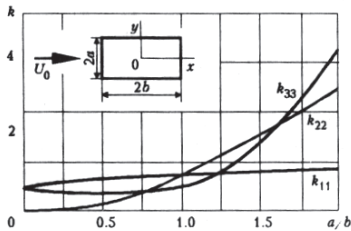


Рис. 10.2.4

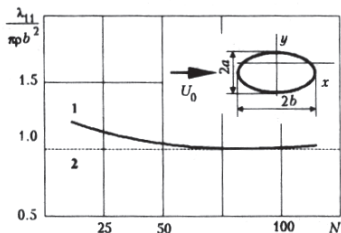


Рис. 10.2.5

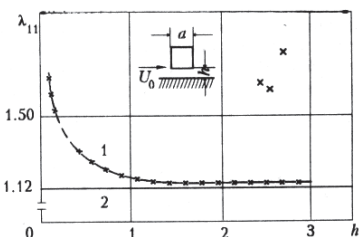


Рис. 10.2.6

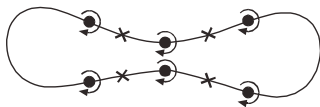


Рис. 10.2.7

Замечание 10.2.3. В соответствии с результатом, изложенным в замечании 2.3.5, при использовании метода дискретных вихрей с равномерным расположением дискретных вихрей (по крайней мере по параметру) для произвольного контура L надо следить за выполнением следующего положения. Различные дискретные вихри не должны находиться ближе друг к другу, чем расстояние от них до соседних к ним по кривой L (рис. 10.2.7). Если такое происходит, то надо увеличивать количество дискретных вихрей и расчетных точек до тех пор, пока эта ситуация не изменится.

В силу последнего замечания, если телесный профиль имеет "узкие" места (см. рис. 10.2.7) или острую кромку (см. рис. 10.1.2, б), то возможно, что непосредственно применить метод дискретных вихрей будет затруднительно – надо брать довольно большое число дискретных вихрей и расчетных точек. В этом случае иногда более удобно воспользоваться методом снесения граничных условий на некоторую срединную поверхность (см. §6.4 в [70]). Тогда задача нахождения поля скоростей сводится к

решению системы двух сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами на отрезке относительно неизвестных интенсивностей вихревого слоя $\gamma(t)$ и потенциала простого слоя $\mu(t)$, расположенных на этой срединной поверхности. При этом, если профиль симметричен, а срединная поверхность есть отрезок, то эта система распадается в систему двух независимых уравнений, в одном из которых неизвестной функцией является $\gamma(t)$, а в другой – $\mu(t)$. Полученные уравнения можно численно решать интерполяционными методами, изложенными в параграфе 8.1. К сингулярному интегральному уравнению второго рода сводится также задача для проницаемого профиля, которая имеет большое значение при исследовании парашютов и дельтапланов, где надо учесть проницаемость тканей, из которых они сделаны.

Поэтому теперь условие непротекания профиля (10.1.6) будет заменено на условие

$$\overline{V}\bar{n}_{M_0} + \overline{U}\bar{n}_{M_0} = W, \quad M_0 \in L, \quad (10.2.7)$$

где $W(M_0)$ – местная скорость протекания (проницания) потока через поверхность профиля по нормали \bar{n}_{M_0} в точке M_0 .

Чтобы замкнуть данную задачу, будем считать, что скорость протекания зависит только от перепада давления на поверхности [22, 104], т.е.

$$W(M_0) = f_0(\Delta P(M_0)). \quad (10.2.8)$$

Из теоремы Жуковского “в малом” [14] после линеаризации следует

$$\Delta p = \rho U \gamma(M_0), \quad (10.2.9)$$

где ρ – массовая среда, γ – интенсивность вихревого слоя, моделирующего поверхность обтекаемого профиля. Таким образом, выполняя граничное условие (10.2.7) проницаемости профиля, опять приходим к решению сингулярного интегрального уравнения вида

$$f_1(\gamma(t_0)) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t) dt}{t_0 - t} + \int_{-1}^1 K_1(t_0, t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in (-1, 1). \quad (10.2.10)$$

Функция $f_1(\gamma(t_0))$, вернее $f_0(\Delta p(M_0))$, обычно находится экспериментально для данного исследуемого материала, из которого сделан профиль. Можно выделить следующие три случая:

1) $f_1(\gamma(t_0)) \equiv 0$, когда отсутствует протекание поверхности, и уравнение (10.2.10) принимает вид хорошо известный в аэродинамике крыла [18, 41], т.е. вид (10.1.9);

2) $f_1(\gamma(t_0)) = a\gamma(t_0)$, где a – некоторая функция, характеризующая локальную степень протекания тела. Экспериментальные данные показывают, что для парашютных тканей соотношение (10.2.8) достаточно хорошо описывается линейной зависимостью [62]. Это обуславливает повышенный интерес к данному случаю;

3) $f_1(\gamma(t_0))$ – нелинейная функция. Численно уравнение (10.2.10) тогда решают итерационно с помощью метода дискретных вихрей. В монографии [22] приведены некоторые расчетные данные. Вопросы обоснования использованной там расчетной схемы пока остаются открытыми.

Примеры численного решения таких уравнений даны в параграфе 8.5 (см. также [151])

10.3. Профиль при наличии устройств отсоса внешнего потока

Отметим, что решения уравнения (10.1.7) в предыдущем параграфе в обоих случаях – разомкнутой и замкнутой кривой L – ищутся в классе абсолютно интегрируемых на L функций. Однако в аэродинамике появились задачи [28, 29, 149], когда решения уравнения (10.1.7) приходится искать в классе функций, имеющих в некоторой точке (или в конечном числе точек) особенность, которая интегрируема только в смысле главного значения по Коши.

В упомянутых работах это были задачи увеличения подъемной силы за счет эжектирования внешнего потока на верхней стороне профиля. Однако оказалось [153], что использование таких устройств на нижней стороне профиля позволяет управлять точкой торможения потока и организовывать безударное обтекание передней кромки профиля без отклонения предкрылков (т.е. без изменения геометрии крыла). Как известно [17, 21], на больших углах атаки из-за сдвига точки торможения на нижнюю сторону профиля начинается срыв пограничного слоя и, если точка отрыва располагается близко к передней кромке, этот срыв резко ухудшает аэродинамические характеристики крыла. Оказывается [153], что, как будет показано ниже, если за счет эжектирования точку торможения потока вернуть на переднюю кромку, то точка отрыва пограничного слоя отодвигается к задней кромке и аэродинамические характеристики крыла опять улучшаются.

Итак, перейдем к математической формулировке задач с эжекцией.

Пусть в точке $M_Q(x_Q, y_Q) \in L$ ($x_Q = x(t_Q)$, $y_Q = y(t_Q)$, $t_Q \in (0, l)$) происходит эжектирование потока с внешней стороны профиля (рис. 10.3.1), т.е. в точке M_Q имеется устройство для всасывания внешнего потока внутрь оболочки профиля. Моделировать эжектирование в точке M_Q будем стоком интенсивности Q , что согласуется с экспериментальными исследованиями [149]. Поле скоростей от стока имеет особенность в точке M_Q . Отсасывание потока внутрь оболочки профиля означает, что поле скоростей, которое возникает в данной задаче, имеет особенность в точке M_Q с внешней стороны профиля и не имеет особенности в этой точке с противоположной стороны профиля.

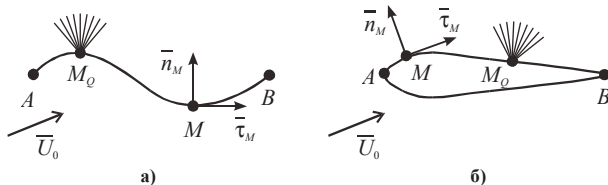


Рис. 10.3.1

Если контур L профиля является незамкнутой кривой, то внешней стороной профиля будем называть ту сторону, на которой происходит эжектирование потока. Профиль опять моделируем с помощью вихревого слоя интенсивности $\gamma(M)$. Теперь условие непротекания профиля (9.1.1) получит вид

$$\bar{V}\bar{n}_{M_0} = -\bar{V}_Q\bar{n}_{M_0} - \bar{U}_0\bar{n}_{M_0}, \quad (10.3.1)$$

где \bar{V} определена в (10.1.3), (10.1.4);

$$\bar{n}_{M_0} = \frac{-\bar{i}y'(t) + \bar{j}x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}},$$

$$\bar{V}_Q(M_0) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\bar{r}_{M_0 M_0}}{r_{M_0 M_0}^2},$$

$$\bar{V}_Q \bar{n}_{M_0} = \frac{Q}{2\pi} \frac{y'(t_0)x_1(t_0, t_0) - x'(t_0)y_1(t_0, t_0)}{r_{M_0 M_0}^2 r'_{M_0}},$$

$$x_1(t_0, t_0) = x(t_0) - x(t_0), \quad y_1(t_0, t_0) = y(t_0) - y(t_0).$$

Так же, как и для $\omega(s_0, s)$ в (10.1.35), можно показать, что если $x''(t), y''(t) \in H$ на $[0, l]$, то функция $\bar{V}_Q \bar{n}_{M_0}$ не имеет особенности в точке t_Q , более того, она принадлежит классу H в окрестности этой точки. Таким образом, и в этом случае функция $\gamma(M)$ является решением уравнения (10.1.7) или уравнений (10.1.9), (10.1.26), в которых правые части и регулярные ядра суть гладкие функции.

Посмотрим теперь, в каком классе функций необходимо решать эти уравнения в данной задаче. В окрестности точки M_Q на профиле со стороны, противоположной стороне размещения эжектора, поле скоростей не должно иметь особенностей. Так как сумма нормальных составляющих скоростей от вихревого слоя и стока в окрестности точки M_Q особенности не имеет с обеих сторон профиля, то с требуемой стороны профиля не должна иметь особенности в окрестности точки M_Q и сумма касательных составляющих этих скоростей. Следовательно,

$$\bar{V} \bar{\tau}_{M_0} + \bar{V}_Q \bar{\tau}_{M_0} = \psi(t), \quad (10.3.2)$$

где функция $\psi(t)$ не имеет особенности в окрестности точки t_Q . Но функция $\bar{V}_Q \bar{\tau}_{M_0}$ имеет вид

$$\bar{V}_Q \bar{\tau}_{M_0} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x'(t_0)x_1(t_0, t_Q) + y'(t_0)y_1(t_0, t_Q)}{r_{M_0 M_0}^2 r'_{M_0}}, \quad (10.3.3)$$

т.е. такой, как и ядро в уравнении (10.1.7). Поэтому, когда кривая L разомкнута (тонкий профиль), то

$$\bar{V}_Q \bar{\tau}_{M_0} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r'_{M_0}(t_0 - t_Q)} + D(t_0, t_Q), \quad (10.3.4)$$

а когда L – замкнутая кривая (телесный профиль), то

$$\bar{V}_Q \bar{\tau}_{M_0} = \frac{Q}{4\pi r'_{M_0}} \operatorname{ctg} \frac{t_0 - t_Q}{2} + D_1(t_0, t_Q). \quad (10.3.5)$$

Если $x''(t), y''(t) \in H$ на $[0, l]$, то функции $D(t_0, t_Q)$, $D_1(t_0, t_Q)$ не имеют в точке M_Q особенностей.

Таким образом, касательные скорости от стока имеют в точке M_Q особенность, интегрируемую только в смысле главного значения по Коши. Поэтому функция $\bar{V} \bar{\tau}_{M_0}$ с требуемой стороны профиля должна иметь в точке M_Q такое же представление, так как функция $\psi(t)$ в этой точке особенностей не имеет. Для касательных составляющих скоростей от вихревого слоя на профиле с внутренней стороны (в силу формулы (10.1.4)) имеем

$$\bar{V}\bar{\tau}_{M_0} = \bar{V}^-\bar{\tau}_{M_0} = -\frac{\gamma(t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_L \frac{x'(t_0)y_1(t_0,t) - y'(t_0)x_1(t_0,t)}{r_{MM_0}^2 r'_{M_0}} \gamma(t) r'_M dt. \quad (10.3.6)$$

Из формулы (10.3.6) видно, что множитель при $\gamma(t)$ под интегралом не имеет особенности при любом t_0 , и, более того, если $x''(t), y''(t) \in H$ на $[0, l]$, то он также принадлежит этому классу. Поэтому если возьмем функцию $\gamma(t)$, имеющую вид

$$\gamma(t) = \frac{Q}{\pi r'_{M_0}} \frac{1}{t - t_Q} + \eta(t), \quad (10.3.7)$$

когда профиль L тонкий, и

$$\gamma(t) = \frac{Q}{2\pi r'_{M_0}} \operatorname{ctg} \frac{t - t_Q}{2} + \eta_1(t), \quad (10.3.8)$$

когда L – телесный профиль ($\eta(t), \eta_1(t)$ принадлежат классу H на $[0, l]$), то интеграл в формуле (10.3.6) в точке M_Q особенности не имеет и, следовательно, выполняется равенство (10.3.2) с требуемой стороны профиля (рис. 10.3.1).

Таким образом, задача об эжектировании потока в точке M_Q на профиле требует решения уравнений (10.1.7), (10.1.9), (10.1.26) в классе функций вида (10.3.7), (10.3.8), имеющих в точке M_Q особенность, интегрируемую только в смысле главного значения по Коши. Такие решения этих уравнений, следуя [37], были названы сингулярными решениями.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $L = [-1, 1]$ на оси OX , и сток интенсивности Q помещен в точку $x_Q \in (-1, 1)$. Тогда $x = x$, $y = 0$, $x \in [-1, 1]$ параметрическое задание отрезка, т.е. $\bar{\tau} = \bar{i}$, $\bar{n} = \bar{j}$. Пусть набегающий поток имеет угол атаки α , т.е. $\bar{U}_0 = (\cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j})U_0$. Следовательно, $\bar{U}_0\bar{n}_{M_0} = U_0 \sin\alpha$, а $\bar{V}_Q\bar{n}_{M_0} = 0$, так как скорость от стока, помещенного на отрезок, в точках этого отрезка параллельна отрезку. Поэтому уравнение (10.3.1) получает вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = -U_0 \sin\alpha, \quad x_0 \in (-1, 1), \quad x_0 \neq x_Q, \quad (10.3.9)$$

т.е. имеет вид уравнения (10.1.10), для которого в работе [70] получены сингулярные решения

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x_0^2}(x_0-x_Q)} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}(x-x_Q)f(x)dx}{x-x_0} + \frac{A+Bx_0}{\sqrt{1-x_0^2}(x_0-x_Q)} = \\ &= -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x_0^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}f(x)dx}{x-x_0} + \frac{C}{\pi\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{B_1}{\sqrt{1-x_0^2}(x_0-x_Q)}; \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}} \frac{1}{x-x_Q} \int_{-1}^1 \frac{1+x}{1-x} \frac{f(x)(x-x_Q)dx}{x-x_0} - \frac{\sqrt{1-x_0}}{\sqrt{1+x_0}} \frac{A}{x_0-x_Q} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \frac{f(x)dx}{x-x_0} + \frac{B}{x_0-x_Q} \sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}}; \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= -\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\pi(x_0-x_Q)} \int_{-1}^1 \frac{(x-x_Q)f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} = \\ &= -\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)} - \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\pi(x_0-x_Q)} \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}; \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

где A, B, C, B_1 – произвольные константы для бесциркуляционного случая (если в (10.3.10) положить $C=0$), циркуляционного и безударного, соответственно, если в этих формулах принять $f(x_0) = -2U_0 \sin \alpha$. Анализируя эти формулы (а также используя общую теорию решения сингулярного уравнения на отрезке в классе сингулярных решений из [70]), можно сделать следующие выводы для тонкого профиля при наличии эжектирования.

Для данного набегающего потока и данного тонкого профиля можно определить интенсивность отсоса в точке x_Q , при которой осуществляется безударное обтекание, т.е. механического подстраивания тонкого профиля под поток для организации безударного обтекания можно избежать с помощью отсоса [80, 150, 153].

При циркуляционном обтекании тонкого профиля при наличии эжектирования циркуляция скорости вокруг профиля зависит и от интенсивности отсоса, и от места его расположения. Поэтому можно рассматривать задачу об оптимальном выборе местоположения и интенсивности отсоса на профиле для замены механического закрылка.

Пусть теперь L , как и в примере 10.1.2, является окружностью единичного радиуса с центром в начале координат и $\bar{U}_0 = \bar{i}$. Пусть в точке s_Q помещен сток интенсивности Q , тогда формула $\bar{V}_Q \bar{n}_{M_0}$ в (10.3.1) получит вид

$$\bar{V}_Q \bar{n}_{M_0} = \frac{Q}{4\pi}. \quad (10.3.13)$$

Следовательно, уравнение (10.3.1) запишется следующим образом

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s_0-s}{2} \gamma(s) ds = -\cos s_0 - \frac{Q}{4\pi}. \quad (10.3.14)$$

Заметим, что если обычно уравнение вида (10.3.14) всегда рассматривалось при условии обращения интеграла от правой части в нуль, то в данном случае это не так. Более того, покажем, что если L – телесный кусочно-гладкий профиль, а точка M_Q лежит на гладкой части L , то справедливо равенство

$$\int_L \bar{V}_Q \bar{n}_{M_0} ds_0 = \frac{Q}{2}, \quad (10.3.15)$$

которое в случае (10.3.13) очевидно выполняется. Действительно, возьмем в точке M_Q прямую линию P , касательную к L , и нарисуем окружность с центром в точке M_Q и такого радиуса R , что кривая L лежит внутри этого круга. Тогда очевидно, что количество жидкости, которое входит в сток через ту половину окружности, которая лежит с той же стороны от P , что и кривая L , равно $\frac{1}{2}Q$ [81]. Следовательно, вся эта жидкость

идет также и через кривую L , что и доказывает формулу (10.3.15). Таким образом, при наличии эжектирования на телесном профиле приходим к необходимости решать уравнение (10.1.7) в том случае, когда интеграл от правой части не равен нулю.

Используя формулу

$$\gamma(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s_0) \operatorname{ctg} \frac{s-s_0}{2} ds_0 + \frac{C}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-s_Q}{2} \int_0^{2\pi} f(s) ds \quad (10.3.16)$$

для решения уравнения (10.3.14), когда интеграл от правой части не равен нулю, получаем, что решением уравнения (10.3.14) будет функция

$$\gamma(s) = -2 \sin s + \frac{C}{2\pi} + \frac{Q}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{s-s_Q}{2}. \quad (10.3.17)$$

Из формулы (10.3.17) видно – в ней имеются два независимых параметра C и Q . Поэтому можно ставить задачи также с двумя независимыми параметрами. Например, искать решение, обращающееся в нуль в заданной точке (плавное обтекание острой кромки), и заданную циркуляцию скорости на профиле, или найти решение, обращающееся в нуль в двух различных точках – плавное обтекание острой кромки и получение точки торможения в заданной точке. Причем физически ясно, что если сток расположить очень близко от той точки, где надо создать точку торможения, то интенсивность отсоса потребует тоже незначительная (при любой, сколь угодно малой интенсивности отсоса, скорости от него в достаточно малой его окрестности довольно большие).

Для того чтобы исследовать, как управление точкой торможения влияет на отрыв пограничного слоя, воспользуемся теорией погранслоя, предложенной Прандтлем [101]. Более того, воспользуемся для плоских задач интегральными методами, основанными на теореме импульсов или теореме энергии. Эти методы являются полуэмпирическими и в них вводятся предположения на характер профиля скоростей и на распределение касательных напряжений на поверхности профиля.

Чтобы рассчитать пограничный слой, необходимо знать распределение скоростей (давлений) во внешнем потоке вокруг крыла (область A , рис. 10.3.2) на границе турбулентного пограничного слоя (области B). При этом предполагается, что в области A идеальная несжимаемая жидкость, а поле скоростей потенциально и поэтому для его расчета используется метод дискретных вихрей. Интегральное соотношение получено интегрированием уравнений импульса по оси s , связанной с линией движения внешнего потока [156]. Интегральное уравнение импульса в проекции на ось s имеет вид

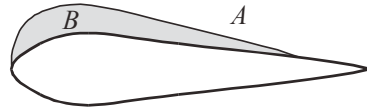


Рис. 10.3.2

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial Q_{11}}{\partial s} + (2+H) \frac{1}{h_1} Q_{11} \frac{1}{V_1} \frac{\partial V_1}{\partial s} = \frac{C_f}{2}, \quad (10.3.18)$$

где h_1 – коэффициент Ламе, V_1 – скорость внешнего невязкого потока на границе пограничного слоя, H является форм-параметром, C_f – коэффициент трения, Q_{11} – толщина пограничного слоя. Коэффициент трения, определенный Людвигом–Гильманом [115] определяется по формуле

$$C_f = 0,246 \cdot R_{Q_{11}}^{-0,268} \cdot 10^{-0,678H}, \quad (10.3.19)$$

где $R_{Q_{11}}$ – число Рейнольдса, определенное толщиной пограничного слоя и потерей скорости на границе пограничного слоя.

Большой градиент давления, возникающий на крыле, ведет к существенному изменению профиля скорости и, следовательно, форм-параметра H . Вот почему невозможно пренебречь изменением значения H при вычислении пограничного слоя и для его определения необходимо использовать дополнительное уравнение, которым могло бы быть *главное уравнение эжекции*. Это уравнение может быть получено на основе предположения, согласно которому толщина пограничного слоя увеличивается как ре-

зультат подмешивания газа из области невязкого течения в область турбулентного течения. Использованное уравнение эжекции имеет следующий вид:

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial s} (Q_{11} H_{\delta-\delta_1}) + (Q_{11} H_{\delta-\delta_1}) + \frac{1}{h_1} \frac{1}{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial s} = F(H_{\delta-\delta_1}), \quad (10.3.20)$$

где $F(H_{\delta-\delta_1}) = 0,0306(H_{\delta-\delta_1} - 3,0)^{-0,653}$ – функция, описывающая плотность потока газа из области невязкого течения; $H_{\delta-\delta_1}$ – главный форм-параметр [115].

Для численного решения уравнений (10.3.18) и (10.3.20) использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

Опишем теперь применение метода дискретных вихрей для расчета течения вокруг профиля [153]. Берем n дискретных вихрей и n расчетных точек, расположенных равномерно по длине дуги на контуре профиля, помещая первый дискретный вихрь в угловую точку профиля (рис. 10.3.3).

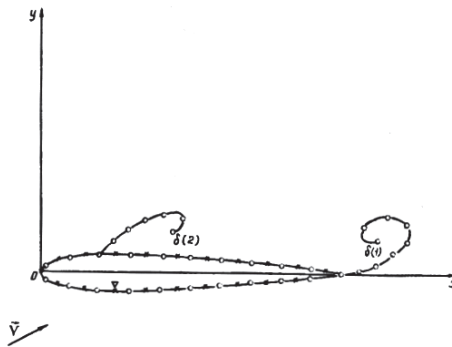


Рис. 10.3.3

Выполняя условие непротекания в расчетных точках, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i \omega_{ij} = 2\pi f_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10.3.21)$$

где Γ_i – циркуляция i -го дискретного вихря на профиле, а ω_{ij} – нормальная составляющая безразмерной скорости от вихря единичной интенсивности, находящегося на месте i -го вихря в j -й расчетной точке на профиле. Система (10.3.21) вырождена и в общем случае несовместна [70]. Для выделения единственного решения для уравнения обтекания профиля используется условие бесциркуляционности обтекания

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i = 0. \quad (10.3.22)$$

Но система уравнений (10.3.21) и (10.3.22) переопределена и несовместна. Ее решение нельзя получить выбрасыванием одного из уравнений в (10.3.21), так как в окрестности выбранного уравнения начинается осцилляция расчетов [70]. Поэтому эту систему решают с помощью введения регуляризирующей переменной γ_{0n} , т.е. надо рассмотреть систему

$$\gamma_{0n} + \sum_{i=1}^n \Gamma_i \omega_{ij} = 2\pi f_j, \quad j=1, \dots, n, \quad (10.3.23)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i = 0.$$

Сток, который моделирует эжектор, поместим в расчетной точке с номером j_1 и, естественно, в этой точке не выполняем условие непротекания. В этом случае число уравнений меньше числа неизвестных на единицу. В точке i_T , в которой мы хотим получить точку торможения потока (полная скорость потока в ней равна нулю), полагаем $\Gamma_{i_T} = 0$. Условие бесциркуляционности дает опять переопределенную систему (на одно уравнение). Роль регулизирующей переменной играет сток неизвестной интенсивности Q . Теперь, с учетом схода свободных вихрей с острой кромки и с точки отрыва пограничного слоя (см. рис. 10.3.3), требуемая система линейных алгебраических уравнений получает вид

$$Q \omega_{j_1} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_T}}^n \Gamma_i \omega_{ij} = 2\pi f_j - \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^r \delta_p^k \omega_{p,j}^{r-k+1},$$

$$j=1, \dots, n, \quad j \neq j_1, \quad r=0, 1, \dots, \quad (10.3.24)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_T}}^n \Gamma_i + \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^r \delta_p^k = 0,$$

где δ_p^k – циркуляции свободных вихрей из систем (1) и (2), $\omega_{p,j}^{r-k+1}$ – нормальная составляющая в j -й расчетной точке в r -й расчетный момент от дискретного свободного вихря (единичной интенсивности), сошедшего с соответствующей точки профиля в k -й расчетный момент.

Рассмотрим вначале безотрывную нестационарную задачу (свободные вихри сходят только с задней острой кромки). Предполагается, что весь вихревой слой, накапливающийся на острой кромке, состоит из свободных вихрей. В результате решения системы (10.3.24) (при отсутствии свободных вихрей) находим первый свободный вихрь в угловой точке (см. рис. 10.3.3). После определения скорости \bar{V} потока в нем передвигаем его без изменения интенсивности на расстояние $\Delta s = V\Delta t$ в направлении скорости (Δt – дискретный шаг по времени). В следующий расчетный шаг интенсивности свободных вихрей и их местоположения известны и опять решаем систему (10.3.24), потом передвигаем свободные дискретные вихри и т.д.

Задача расчета пограничного слоя с гладкой части профиля (см. систему (2) и рис. 10.3.3) имеет свои особенности, относящиеся к вычислению параметров пограничного слоя. Предполагается, что вихревой слой этой системы забирает всю завихренность пограничного слоя в область невязкого течения [17]. В первый момент после отрыва дискретный вихрь движется со скоростью, равной той, которая имеется в центре завихренности пограничного слоя. Достаточно большое значение скорости \bar{V} в области отрыва ведет к движению свободного дискретного вихря не по касательной к поверхности профиля, а под углом к ней, что существенно влияет на параметры потока в окрестности точки отрыва и на расположение этой точки. Скорость сошедшего вихря $\delta(2)$ может быть определена по формуле

$$U_{\delta(2)} = v_1 \left(\frac{H-1}{H+1} \right)^{(H-1)/2}, \quad (10.3.25)$$

где H – форм-параметр.

Интенсивность этого дискретного вихря может быть определена по формуле

$$\delta(2) = \varepsilon_\gamma \frac{\Delta t (v_l)^2}{2}, \quad (10.3.26)$$

где ε_γ учитывает присутствие зоны обратного течения позади места отрыва.

Далее свободные вихри систем (1) и (2) движутся по потоку, сохраняя свою интенсивность во времени. Чтобы более точно вычислить скорость вблизи поверхности профиля, вводится условие, препятствующее приближению дискретных вихрей друг к другу ближе, чем на меру дискретности расстояния между соседними дискретным вихрем и расчетной точкой.

При расчете с пограничным слоем вязкого течения надо дискретные вихри (моделирующие границу идеальной жидкости) размещать на внешней границе пограничного слоя. Однако методологические исследования показали, что эти дискретные вихри можно располагать на контуре профиля, так как толщина пограничного слоя не существенна.

Покажем теперь примеры расчета по изложенной модели. Были рассчитаны аэродинамические свойства профиля NACA-0012, для которого можно найти экспериментальные данные [4]. Во всех расчетах предполагалось, что профиль начинает движение с состояния покоя в момент $\tau = 0$ с постоянной скоростью \bar{V}_0 . Рис. 10.3.4, а) показывает поле скоростей при обтекании профиля при угле атаки $\alpha = 14^\circ$ в случае схода свободных вихрей только с острой кромки. Случай обтекания профиля при наличии стока в точке M_Q показан на рис. 10.3.4, б).

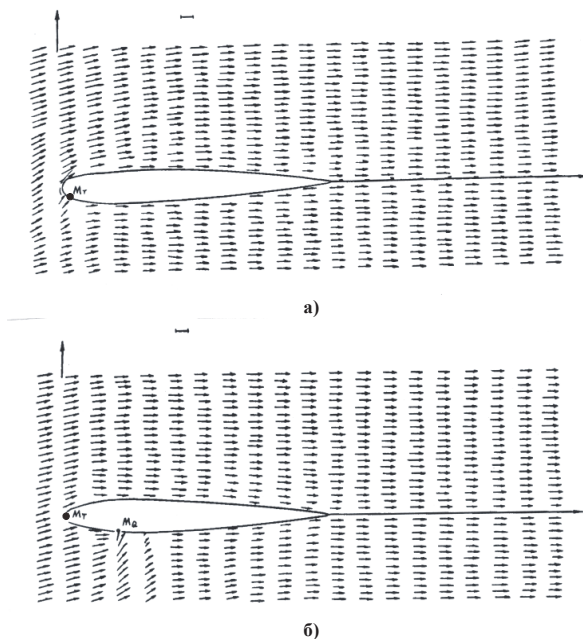


Рис. 10.3.4

Сравнение этих случаев при одном и том же угле атаки $\alpha = 14^\circ$ показывает, что обтекание носка профиля более плавное при наличии стока. В соответствии с вычислительным методом при отрыве потока с верхней гладкой части профиля вычисления были проделаны для обтекания профиля NACA на углах атаки α от 0 до 20° . Вычисления на этих углах атаки показали, что возможны два типа взаимодействия свободных вихревых пелен. На докритических углах атаки зона отрыва мала и вихревые следы с гладкой части и с угловой точки слабо взаимодействуют между собой. Можно видеть, что на малых углах атаки имеет смысл моделировать отрыв только с острой кромки, как показывает структура вихревых следов при $\alpha = 8^\circ$ (рис. 10.3.5). Предложенный численный метод позволяет получать аэродинамические характеристики профиля при отрывном обтекании на малых и больших углах атаки. В предыдущих подходах исследование аэродинамических характеристик отрывного обтекания на малых углах атаки представляло некоторые затруднения. На закритических углах атаки точка отрыва интенсивно смещается вперед к носку, зона отрыва растет и вихревые структуры имеют форму следа из чередующихся сгустков с попеременным сходом с задней и верхней частей профиля.

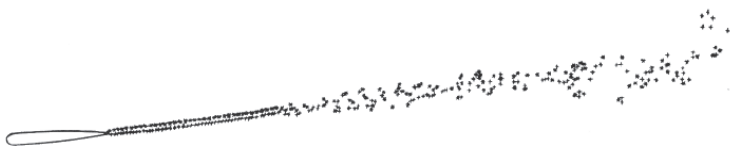


Рис. 10.3.5

В качестве примера показаны вихревые структуры позади профиля при $\alpha = 18^\circ$ (рис. 10.3.6, а). Включение эжекции позволяет сдвинуть точку отрыва ближе к задней кромке (рис. 10.3.6, б). Очевидно, в этом случае размеры сгустков вихревого слоя уменьшились.

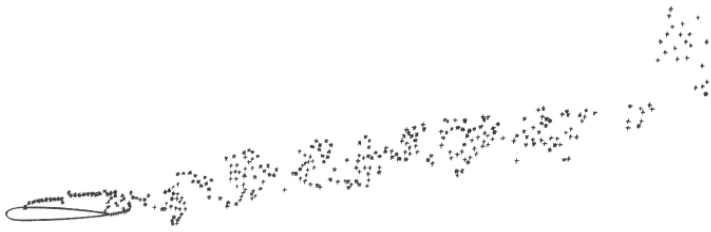
Сравнение аэродинамических характеристик при $\alpha = 18^\circ$ с эжекцией (рис. 10.3.7, сплошная кривая) и без эжекции (там же, штриховая кривая) показывает, что несущие свойства профиля при включении эжекции увеличиваются, а нестационарность (уровень осцилляции C_y^α) характеристики уменьшается.

Таким образом, предложенная математическая модель показала:

- а) использование эжекции позволяет улучшить обтекание передней кромки профиля и переместить точку торможения в необходимое положение;
- б) единым методом возможно изучение обтекания профиля в широком диапазоне углов атаки;
- в) возможны два вида взаимодействия вихревых пелен;
- г) включение эжекции позволяет переместить точку отрыва пограничного слоя к задней кромке профиля, улучшить несущие свойства и уменьшить их нестационарность.



а)



б)

Рис. 10.3.6

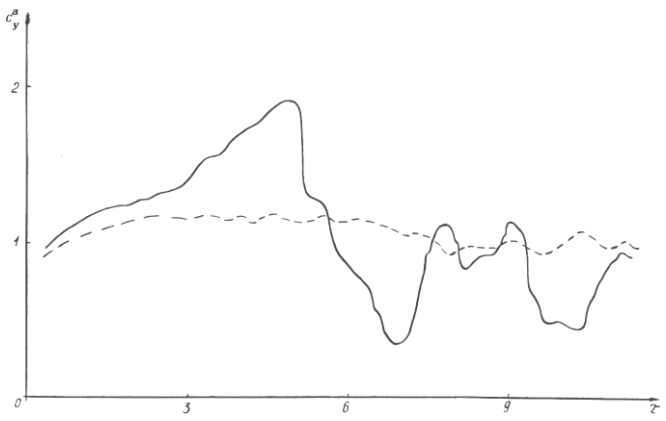


Рис. 10.3.7

Глава 11. Метод дискретных вихрей для плоских нестационарных задач

11.1. Линейная нестационарная задача для тонкого профиля. Гипотеза Кутта–Жуковского

В данном параграфе обтекаемый контур (профиль) σ_1 является слабоизогнутым, проектируется в отрезок $[-1, 1]$ на оси OX и на него набегают такой нестационарный поток под малым углом атаки α , что с задней кромки этого профиля ($x=1$) сходит пелена свободных вихрей интенсивности $\sigma(t)$, движущихся со средней скоростью U_0 по оси OX в положительном направлении. Если предположить, что U_0 (величина скорости) является константой, не зависящей от времени, то свободный вихрь, сошедший с профиля в момент $\tau < t$, к моменту времени t пройдет расстояние $U_0(t-\tau)$ и будет располагаться на оси OX в точке $1+U_0(t-\tau)$. Далее для простоты будем полагать $U_0 = 1$. При сделанных предположениях условие непротекания имеет вид [18]

$$\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x,t)dx}{x_0 - x} + \int_0^t \frac{\delta(\tau)d\tau}{x_0 - 1 - (t-\tau)} = 2\pi f(x_0, t), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad t \geq 0, \quad (11.1.1)$$

а условие бесциркуляционности – вид

$$\int_{-1}^1 \gamma(x,t)dx + \int_0^t \delta(\tau)d\tau = 0. \quad (11.1.2)$$

Как и в [18] покажем, что система уравнений (11.1.1), (11.1.2) имеет единственное решение. Из физических соображений ясно, что уравнение (11.1.1) относительно функции $\gamma(x,t)$ при данном t надо рассматривать в классе функций, обращающихся в бесконечность в точке $x=-1$ и являющихся ограниченными в точке $x=1$ (поток должен плавно сходиться с задней кромки, и поэтому $\gamma(1,t)$ не может быть неограниченной), т.е. уравнение (11.1.1) надо рассматривать относительно функции $\gamma(x,t)$ как сингулярное интегральное уравнение индекса $\kappa=0$. Поэтому, разрешая это уравнение относительно $\gamma(x,t)$, получаем

$$\begin{aligned} \gamma(x,t) &= f_1(x,t) + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{x-x_0} \int_0^t \frac{\delta(\tau)d\tau}{x_0 - 1 - (t-\tau)}, \\ f_1(x,t) &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{f(x_0,t)}{x-x_0} dx_0. \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

После перестановки интегралов и упрощений (см. [18]) получим

$$\gamma(x,t) = f_1(x,t) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\delta(\tau)d\tau}{1+(t-\tau)-x}. \quad (11.1.4)$$

Подставив выражение для $\gamma(x,t)$ из (11.1.4) в уравнение (11.1.2), после преобразований получим следующее интегральное уравнение для $\delta(t)$:

$$\int_0^t \frac{\sqrt{2}\delta(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{2+\sqrt{2+t-\tau}}} \delta(\tau)d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} f(x_0,t) dx_0. \quad (11.1.5)$$

Уравнение (11.1.5) имеет единственное решение, и если предположить непрерывную дифференцируемость функции $f(x_0, t)$ по t , то $\delta(t) = \frac{\psi(t)}{\sqrt{t}}$, где $\psi(t)$ – абсолютно непрерывная функция. Таким образом, если функция $f(x_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера на множестве $[-1, 1] \times [0, T]$ и непрерывно дифференцируема по t на этом множестве, то система уравнений (11.1.1), (11.1.2) имеет единственное решение.

Напомним теперь, что функция $\gamma(x, t)$ в уравнении (11.1.1) является интенсивностью суммарного вихревого слоя на профиле, состоящего из присоединенного вихревого слоя интенсивности $\gamma_+(x, t)$ и свободного вихревого слоя интенсивности $\gamma_-(x, t)$, пlyingщего по местной скорости над профилем и переходящем в свободный вихревой слой следа за профилем интенсивности $\delta(\tau)$. Причем ясно, что $\gamma(x, t) = \gamma_+(x, t) + \gamma_-(x, t)$, $\delta(t) = \lim_{x \rightarrow 1} \gamma_-(x, t)$. В нестационарной задаче гипотезой Кутта–Жуковского для присоединенного вихревого слоя называют предположение об обращении в нуль интенсивности присоединенного вихревого слоя в той угловой точке профиля σ_1 , с которой сходит вихревая пелена свободных вихрей. В данной линейной нестационарной задаче гипотеза Кутта–Жуковского состоит в условии $\gamma_+(x, t) \equiv 0$ при $t > 0$, что будет справедливо, если будет доказано равенство

$$\delta(t) = \lim_{x \rightarrow 1} \gamma(x, t), \quad t > 0. \quad (11.1.6)$$

Последнее равенство докажем, следуя работе [100]. Для этого заметим, что из результатов [98] следует обращение в нуль при $x \rightarrow 1$ функции $f_1(x, t)$ в равенстве (11.1.4). Рассмотрим теперь интеграл

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \frac{1-x}{\sqrt{1+x}} \int_0^t \frac{\sqrt{2+t-\tau}}{t-\tau} \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau[1+(t-\tau)-x]}}.$$

Введем функцию

$$I_2(x, \tau, t) = \int_0^\tau \frac{d\lambda}{\sqrt{t-\lambda} \sqrt{\lambda[1+(t-\tau)-x]}} = \frac{1}{\sqrt{1-x} \sqrt{1-x+t}} \left\{ \arcsin A(x, \tau, t) - \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$A(x, \tau, t) = \frac{\frac{t^2}{4} + \left(\frac{t}{2} + 1 - x\right) \left(\frac{t}{2} - \tau\right)}{\frac{t}{2}(t - \tau + 1 - x)}.$$

Проинтегрировав в I_1 по частям, получим

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}\psi(t)}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_0^t \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] [\psi(\tau) \sqrt{2+t-\tau}]_\tau d\tau. \quad (11.1.7)$$

Далее имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\psi(t) \sqrt{2}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} = \frac{\psi(t)}{\sqrt{t}} = \delta(t). \quad (11.1.8)$$

Докажем, что второе слагаемое в (11.1.7) стремится к нулю при $x \rightarrow 1$. Для этого заметим, что для заданного произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_{t-\delta_2}^t \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] [\psi(\tau)\sqrt{2+t-\tau}]'_\tau d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.1.9)$$

Запишем теперь $A(x, \tau, t)$ в следующем виде

$$A(x, \tau, t) = \frac{\frac{t}{2}[t-\tau+(1-x)] - (1-x)\tau}{\frac{t}{2}[t-\tau+(1-x)]}. \quad (11.1.10)$$

Теперь видно, что для $\tau \in [0, t - \delta_2]$ можно взять такое число $x_0(\varepsilon)$, близкое к 1, что для всех $x \in (x_0(\varepsilon), 1)$ величина $A(x, \tau, t)$ будет настолько близка к 1, что будет справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_0^{t-\delta_2} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] [\psi(\tau)\sqrt{2+t-\tau}]'_\tau d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.1.11)$$

Из формул (11.1.4), (11.1.7)–(11.1.9), (11.1.11) следует, что для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $x_0(\varepsilon)$, что для всех $x \in (x_0(\varepsilon), 1)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+t}} \int_0^t \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin A(x, \tau, t) \right] [\psi(\tau)\sqrt{2+t-\tau}]'_\tau d\tau \right| < \varepsilon$$

и, следовательно, выполняется равенство (11.1.6).

Итак, доказано, что в линейной нестационарной задаче для тонкого профиля на кромке, с которой сходит вихревая пелена, накапливается только свободный вихревой слой. Из этого следует, что при дискретизации задачи в методе дискретных вихрей первый свободный дискретный вихрь не надо сдвигать с профиля. Поэтому дискретную вихревую схему будем строить несколько иначе, чем в [18, 132]. Пусть профиль занимает отрезок $[-1, 1]$ на оси OX . Расположим дискретные вихри на нем в точках $x_i = -1 + (i-1)h$, $h = 2/n$, $i = 1, \dots, n+1$, а расчетные точки – в точках $x_{0j} = x_j + h/2$, $j = 1, \dots, n$. Так как предполагается, что свободные вихри, сходя с точки $x = 1$, движутся в следе вдоль оси OX со средней постоянной скоростью U_0 , то изменение всего вихревого слоя будем наблюдать через такие промежутки времени Δt , за которые свободный дискретный вихрь проходит расстояние h , т.е. требуем выполнения равенства

$$U_0 \Delta t = h, \quad (11.1.12)$$

и, следовательно, $\Delta t = h/U_0$. Для простоты будем полагать $U_0 = 1$. Поэтому координата свободного вихря, сошедшего с профиля в момент t_s в расчетный момент t_r , определяется как

$$\xi_{sr} = 1 + (t_r - t_s). \quad (11.1.13)$$

Пусть циркуляция дискретного вихря в точке x_i в расчетный момент r будет Γ_{ir} , а циркуляции свободных вихрей, сошедших к этому времени с профиля, будут Λ_s , $s = 1, \dots, r$. Таким образом, получаем, что $\Lambda_r = \Gamma_{n+1, r}$, $r = 1, 2, \dots$. Выполняя условие о непротекании профиля в расчетных точках x_{0j} , $j = 1, \dots, n$, получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Gamma_{ir} \omega_i^j + \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_s \omega_{sr}^j = -V_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (11.1.14)$$

где ω_i^j – нормальная составляющая скорости в расчетной точке, индуцируемая вихрем единичной интенсивности, помещенным в точке x_i , а ω_{sr}^j – индуцируемая вихрем единичной интенсивности, помещенным в точке ξ_{sr} .

В системе (11.1.14) неизвестными в расчетный момент r являются Γ_{ir} , $i = 1, \dots, n+1$, так как $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{r-1}$ будут определены в предыдущие расчетные моменты и потом с течением времени не изменяются (это свободные вихри). Следовательно, в этой системе есть $n+1$ неизвестных и n уравнений. Дополним рассматриваемую систему уравнением, являющимся дискретным аналогом условия Томсона о неизменности циркуляции по жидкому контуру, охватывающему профиль и след. Если профиль начал двигаться из состояния покоя, то это уравнение будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Gamma_{ir} + \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_s = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (11.1.15)$$

Таким образом, для решения задачи надо рассматривать систему уравнений (11.1.14) и (11.1.15).

Полагая $\Gamma_{ir} = \gamma_{ir} h$, $\Lambda_s = \delta(t_s) \Delta t$ и учитывая формулу (9.3.13), эту систему уравнений записываем в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_{ir} h}{x_{0j} - x_i} + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\delta(t_s) \Delta t}{x_{0j} - 1 - (t_r - t_s)} = -2\pi V_j^*, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (11.1.16)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{ir} h + \sum_{s=1}^{r-1} \delta(t_s) \Delta t = 0, \quad r = 1, 2, \dots,$$

В силу результатов о квадратурных формулах для сингулярного интеграла на отрезке система (11.1.16) аппроксимирует систему интегральных уравнений (11.1.1) и (11.1.2), которая имеет единственное решение. Перепишем систему (11.1.16) в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_{ir} h}{x_{0j} - x_i} = -2\pi V_j^* - \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\delta(t_s) \Delta t}{x_{0j} - 1 - (t_r - t_s)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (11.1.17)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \gamma_{ir} h = -\sum_{s=1}^{r-1} \delta(t_s) \Delta t, \quad r = 1, 2, \dots$$

Матрица системы (11.1.17) имеет такой же вид, как в бесциркуляционном обтекании тонкого профиля, и поэтому она разрешима при любом $r = 1, 2, \dots$. Разрешая систему (11.1.17) и вспоминая, что $\gamma_{n+1,r} = \delta(t_r)$, а $h = \Delta t$, получаем, что система (11.1.17) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений, которая аппроксимирует систему уравнений [18, 79, 132]

$$\gamma(x, t) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{f(x_0, t) dx_0}{x-x_0} + \quad (11.1.18)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\delta(\tau) d\tau}{1+(t-\tau)-x},$$

$$\delta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(t, s) \delta(s) ds = -\sqrt{2} \frac{U_y(0)}{\sqrt{t}} - \sqrt{2} \int_0^t \frac{U_y'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$K(t, s) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)} \sqrt{2+z(t-s)} [\sqrt{2+z(t-s)+\sqrt{2}}]}. \quad (11.1.19)$$

Уравнение (11.1.19) имеет единственное решение, так как является уравнением Вольтерра второго рода. В работе [79] доказана сходимость решения системы (11.1.17) к решению $\gamma(x, t)$, $\delta(t)$ системы интегральных уравнений (11.1.18) и (11.1.19).

11.2. Нелинейная нестационарная задача для произвольного кусочно-гладкого контура

Будем рассматривать обтекание простого кусочно-гладкого контура L , который может быть разомкнутым или замкнутым. Так как рассматривается обтекание идеальной жидкостью, то места схода вихревых пелен будем считать фиксированными в некоторых его угловых точках (включая, возможно, и его концы). Пусть это будут точки M_1^*, \dots, M_p^* . Моделировать обтекаемый контур L будем вихревым слоем.

Так как для линейной нестационарной задачи доказана гипотеза Кутта–Жуковского [79, 100] о том, что *присоединенный вихревой слой на обтекаемом контуре обращается в нуль при подходе к точке, с которой сходит вихревая пелена свободных вихрей*, то будем считать, что эта гипотеза выполняется и в нелинейной нестационарной задаче. В силу этого контур L будем заменять системой дискретных вихрей так, чтобы все угловые точки (а следовательно, и точки M_1^*, \dots, M_p^*) были бы точками расположения дискретных вихрей. Дискретные вихри, располагаемые в точках M_1^*, \dots, M_p^* , будем считать свободными. Рассматриваемую нестационарную задачу будем дискретизировать не только по пространству, но и по времени. Пусть шаг по времени будет $\Delta\tau$. Тогда в целом расчетная схема для нелинейной нестационарной задачи будет выглядеть следующим образом (рис. 11.2.1).

В первый расчетный момент дискретные вихри располагаются только на контуре и их интенсивности не известны. Выполняя условие непротекания в расчетных точках (которых на единицу меньше, чем неизвестных дискретных вихрей, если контур простой разомкнутый (рис. 11.2.1, а) и которых столько же, сколько дискретных вихрей, если контур простой замкнутый (рис. 11.2.1, б) и добавляя условие Томсона, получаем систему линейных алгебраических уравнений (добавляя регуляризирующую переменную, если контур простой замкнутый, чтобы число уравнений и число неизвестных в системе линейных уравнений было одинаково), из решения которой найдем интенсивности дискретных вихрей на контуре.

Во второй расчетный момент свободные дискретные вихри (располагающиеся в точках M_1^*, \dots, M_p^* , на рис. 11.2.1 они обозначены кружками) сдвигаются в поток по местной скорости ∇ на величину $|\nabla|\Delta\tau$ без изменения своей циркуляции, которая уже известна. Таким образом, во второй расчетный момент дискретные вихри неизвестной интенсивности располагаются на контуре и по

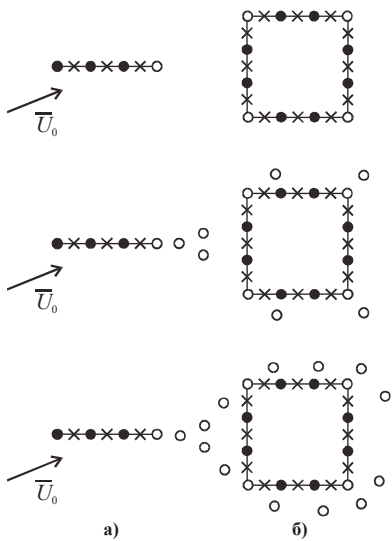


Рис. 11.2.1

одному дискретному свободному вихрю известной интенсивности располагается вблизи каждой из точек M_1^*, \dots, M_p^* . Опять выполняя условие непротекания в расчетных точках и добавляя условие Томсона, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных циркуляций дискретных вихрей на контуре, решая которую и найдем эти неизвестные величины.

В третий расчетный момент опять все свободные дискретные вихри сдвигаются по местной скорости V на величину $|V|\Delta\tau$, а на контуре располагаются опять дискретные вихри неизвестной интенсивности, и весь вычислительный процесс повторяется. Такой процесс повторяется до тех пор, пока не будут достигнуты желаемые результаты.

Для написания конкретного алгоритма введем следующие обозначения. Обозначим Γ_{ir} , $i=1, \dots, n$, – циркуляции дискретных вихрей на контуре в r -й расчетный момент, а Λ_{vs} , $v=1, \dots, p$, $s=1, \dots, r-1$ – циркуляции свободных дискретных вихрей, располагавшихся в точках M_1^*, \dots, M_p^* , соответственно, в s -й расчетный момент ($\Lambda_{is} = \Gamma_{is}$, $i=k_1, \dots, k_p$, где k_1, \dots, k_p – номера дискретных вихрей на контуре, располагающихся в точках M_1^*, \dots, M_p^* в момент s). Тогда из условия непротекания контура в расчетных точках и условия Томсона о сохранении циркуляции по жидкому контуру, охватывающему контур и след, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_L \gamma_{0n} + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} \omega_i^j &= -U_0(M_{0j}) \pi_{M_{0j}} - \sum_{v=1}^p \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_{vs} \omega_{vs}^r, \\ j=1, \dots, n-1 \quad \text{при} \quad \eta_L &= 0, \quad j=1, \dots, n \quad \text{при} \quad \eta_L = 1, \quad r=1, 2, \dots, \\ \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} &= - \sum_{v=1}^p \sum_{s=1}^{r-1} \Lambda_{vs}, \quad r=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

где $\eta_L = 0$, если контур L – простой разомкнутый, и $\eta_L = 1$, если L – простой замкнутый, ω_i^j – нормальная составляющая скорости V_i^j от дискретного вихря интенсивности единица, расположенного в точке M_i на контуре L в расчетной точке M_{0j} , а ω_{vs}^r – нормальная составляющая скорости V_{vs}^r в той же точке M_{0j} от свободного дискретного вихря интенсивности единица, расположенного в точке M_{vs}^r в r -й расчетный момент, сошедшего с точки M_v^* в s -й расчетный момент, $s=1, 2, \dots, r-1$. Для нахождения радиуса-вектора $r_{M_{vs}^r}$ точки M_{vs}^r , получаем уравнение

$$\begin{aligned} r_{M_{vs}^r} &= r_{M_{vs}^{r-1}} + \Delta t \left(\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir-1} V_i^{M_{vs}^{r-1}} + \sum_{\mu=1}^p \sum_{\lambda=1}^{r-2} \Lambda_{\mu\lambda} V_{\mu\lambda}^{M_{vs}^{r-1}} \right), \\ r_{M_{vs}^r} &= r_{M_v^*}, \quad v=1, \dots, p; \quad s=1, \dots, r-1; \quad r=s+1, s+2, \dots \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

При этом предполагаем, что дискретный вихрь в точке своего расположения индуцирует нулевую скорость.

Из рассуждений для бесциркуляционного обтекания контура следует, что система (11.2.1) невырождена для любого $r=1, 2, \dots$.

Если предположить, что след также является кусочной-гладкой кривой, а распределенная интенсивность вихревого слоя на нем принадлежит классу H^* на кривой расположения следа, то тогда система (11.2.1) аппроксимирует при $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (t – фиксировано) систему интегральных уравнений

$$\int_L \gamma(M, t) \omega^*(M_0, M) ds_M + \int_{\sigma} \delta(\mu) \omega^*(M_0, M(t, \mu)) ds_{\mu} = -U_0 \bar{n}_{M_0}, M_0 \in L, \quad (11.2.3)$$

$$\int_L \gamma(M, t) ds_M + \int_{\sigma} \delta(\mu) ds_{\mu} = 0, \quad (11.2.4)$$

где

$$\omega^*(M_0, M) = \varpi(M_0, M) \cdot \bar{n}_{M_0},$$

$$\varpi(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2},$$

а \bar{n}_{M_0} – орг нормали к кривой L в точке M_0 , а система (11.2.2) – дифференциальное уравнение

$$\frac{dr(t, \tau)}{dt} = V(t, \tau), \quad r(\tau, \tau) = r(M^*), \quad t \geq \tau, \quad (11.2.5)$$

где $r(t, \tau)$ – радиус-вектор точки, в которой располагается свободный вихрь в момент t сошедший с соответствующей угловой точки в момент τ .

Однако строгих математических доказательств этих утверждений о структуре следа, о поведении распределенной интенсивности вихревого следа нет, так же, как нет никаких математических доказательств сходимости численного решения рассматриваемой задачи к точному (если оно существует). Любое продвижение теории в этих вопросах было бы очень интересным и полезным. Надежду на то, что такое продвижение теории возможно, дает обширный численный эксперимент, проведенный многими исследователями [8, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 131, 132, 144, 152, 153].

Приведем теперь некоторые результаты, полученные на основе описанной в данном параграфе математической модели.

На рис. 11.2.2 и 11.2.3 представлено поле скоростей течения вокруг неподвижного квадрата при симметричном и несимметричном отрывном обтекании [132], соответственно; на рис. 11.2.4 – поле скоростей течения вокруг здания в моменты времени $\tau = 0.5$, (а); $\tau = 2.5$ (б); $\tau = 5.0$ (в); и изменение скорости потока в порыве (г); на рис. 11.2.5 и рис. 11.2.6 приведены распределения давления по поверхностям квадрата и ромба, соответственно. На рис. 11.2.5 сплошная линия – вычисленные значения, • – экспериментальные данные из [108], о – экспериментальные данные из [42]. На рис. 11.2.6 сплошная линия – вычисленные значения, • – экспериментальные данные из [42].

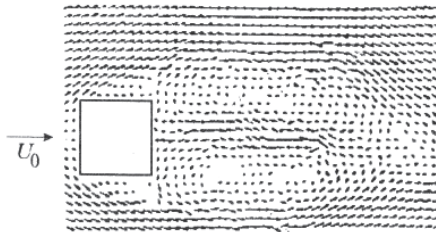


Рис. 11.2.2

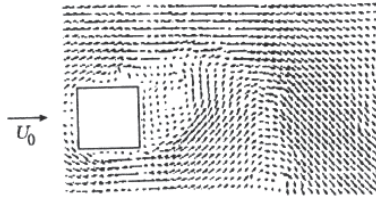


Рис. 11.2.3

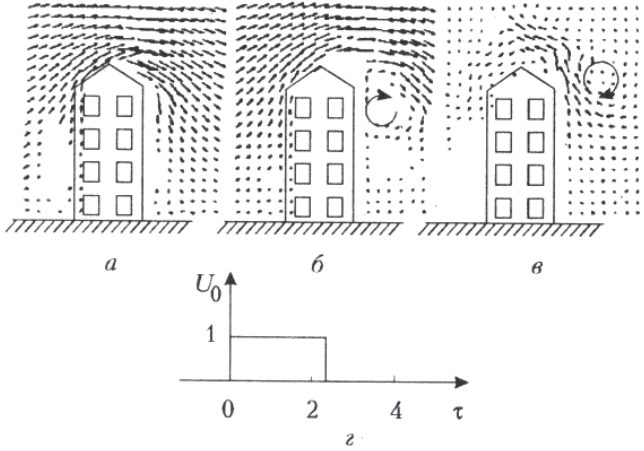


Рис. 11.2.4

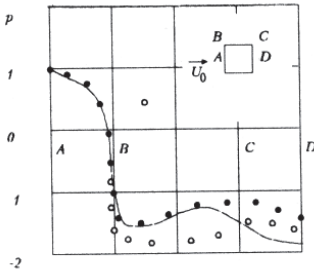


Рис. 11.2.5

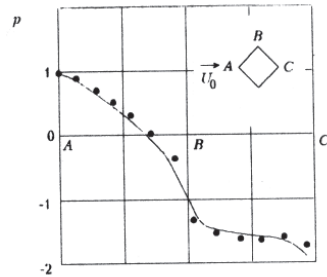


Рис. 11.2.6

11.3. Моделирование обтекания профиля с эжекцией и выдувом струи

Рассмотрим нелинейную задачу нахождения аэродинамических характеристик крыла самолета, находящегося в потенциальном потоке идеальной несжимаемой невесомой жидкости. Будем изучать плавное обтекание непроницаемого профиля (крыла

бесконечного размаха), мгновенно приведенного в движение с постоянной скоростью \bar{U}_0 из состояния покоя. Возмущения, вызванные в жидкости движущимся крылом и выдуваемой струей, должны затухать при бесконечном удалении от поверхности крыла и струи. Устройство отсоса внешнего потока будем моделировать стоком интенсивности Q_1 , размещенного в точке M_q на контуре профиля. Полагаем, что задан расход Q_2 жидкости через поверхность σ выходного отверстия сопла, из которого вытекает струя, имеющая своими границами кривые σ_1 и σ_2 (напоминаем, что рассматривается плоская нестационарная задача).

Теперь опишем математически поставленную выше в данном параграфе задачу аэродинамики.

Так как набегающий поток предполагается потенциальным во всей плоскости, то возмущенное контуром L и струей поле скоростей тоже будем предполагать потенциальным во внешней к контуру L и струе области D^+ [81] (рис. 11.3.1).

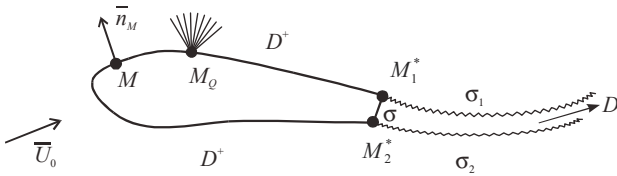


Рис. 11.3.1

Тогда задача нахождения возмущенного поля скоростей сводится к нахождению функции $\Phi(M, t)$, для которой выполняются следующие условия:

- 1) она удовлетворяет уравнению Лапласа в области D^+ :

$$\Delta \Phi(M, t) = 0, \quad M \in D^+; \quad (11.3.1)$$

- 2) возмущенные потенциал и поле скоростей стремятся к нулю при удалении на большое расстояние от контура L и кривых σ_1 и σ_2 :

$$\Phi(M, t), |\nabla \Phi(M, t)| \rightarrow 0 \quad (11.3.2)$$

при $\rho(M, L \cup \sigma_1 \cup \sigma_2) \rightarrow \infty$;

- 3) сток интенсивности Q_1 в точке $M_q \in L$ индуцирует скорости

$$V_q(M, t) = \frac{Q_1(t)}{2\pi} \frac{r_{MM_q}}{r_{MM_q}^2}; \quad (11.3.3)$$

- 4) на контуре L должно выполняться условие непротекания

$$\left. \frac{\partial \Phi(M_0, t)}{\partial n_{M_0}} \right|_L = -\bar{U}_0(M_0) \cdot n_{M_0} - V_q(M_0, t) \cdot n_{M_0}, \quad M_0 \in L, \quad M_0 \neq M_q; \quad (11.3.4)$$

- 5) границы струи – кривые σ_1 и σ_2 должны удовлетворять условию отсутствия перепада давления P и нормальных составляющих скоростей

$$P^+(M_0) = P^-(M_0), \quad \frac{\partial \Phi^+(M_0, t)}{\partial n_{M_0}} = \frac{\partial \Phi^-(M_0, t)}{\partial n_{M_0}}, \quad M_0 \in \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad (11.3.5)$$

где знаки «+» и «-» определяются направлением вектора n_{M_0} ;

6) на острых краях выходного сопла, с которых сходят вихревые пелены σ_1 и σ_2 , должно выполняться условие Кутта–Жуковского о конечности скоростей, т.е. $\nabla\Phi(M, t)$ ограничен в окрестности точек M_1^* и M_2^* , являющихся острыми краями, в любой момент $t > 0$;

7) должно выполняться условие заданного расхода $Q_2(t)$ жидкости через поверхность (кривую) σ выходного сопла:

$$\int_{\sigma} \left[\frac{\partial\Phi(M, t)}{\partial\bar{n}_M} + (U_0(M) + V_q(M)) \cdot \bar{n}_M \right] ds_M = Q_2(t) \quad (11.3.6)$$

для $t \geq 0$, где ds_M – дифференциал длины дуги кривой σ по координатам точки M .

Функцию $\Phi(M, t)$ будем искать в виде потенциала двойного слоя на кривых L и σ_1, σ_2 :

$$\begin{aligned} \Phi(M_0, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial\bar{n}_M} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} g(M, t) ds_M + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial\bar{n}_{M_i}} \ln \frac{1}{r_{M M_i(t, \tau)}} g_i(M_i(t, \tau), t) ds_{i, M_i(t, \tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq t, \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

где $g(M, t)$ – плотность потенциала в точке M контура L в момент t (контур L не меняется во времени), а $g_i(M_i(t, \tau), t)$ – плотность потенциала в точке $M_i(t, \tau)$ кривой σ_i в момент t . Точка $M_i(t, \tau)$ – это точка расположения в момент t частицы жидкости, сошедшей с точки M_i^* в момент τ , т.е. должно удовлетворяться условие

$$M_i(\tau, \tau) = M_i^*, \quad i = 1, 2. \quad (11.3.8)$$

В двумерных задачах аэродинамики удобно ввести понятие распределенной вихревой интенсивности γ на кривой L и δ_i на кривых $\sigma_i, i = 1, 2$, являющихся производными по длине дуги соответствующих кривых от плотности потенциалов, т.е.

$$\gamma(M, t) = g'_L(M, t), \quad \delta_i(M_i(t, \tau), t) = g'_{\sigma_i}(M_i(t, \tau), t). \quad (11.3.9)$$

При этом удобно при решении задач аэродинамики рассматривать поверхности разрыва касательных скоростей как предельный случай вихревого слоя. Таким образом, контур L профиля моделируется вихревым слоем интенсивности $\gamma(M, t)$, $M \in L$, $M \neq M_q$. Так как, по определению и по физическим соображениям, границы струи σ_1 и σ_2 не создают перепада давления (на них удовлетворяются условия (11.3.5)) и плотность жидкости вне и внутри струи одинакова, то кривые σ_1 и σ_2 можно заменить свободными вихревыми слоями, в которых свободные вихри, сошедшие с точек M_1^* и M_2^* , двигаются по траекториям частиц жидкости, с которыми они совпадают без изменения своей интенсивности [67]. Поэтому для вихревой интенсивности на пеленах $\delta_i, i = 1, 2$, имеем

$$\delta_i(M_i(t, \tau), t) = \delta_i(\tau). \quad (11.3.10)$$

Для скорости движения свободного вихря $\delta_i(\tau)$, расположенного в точке $M_i(t, \tau)$ с радиусом-вектором $r_i(t, \tau) = x_i(t, \tau)\bar{i} + y_i(t, \tau)\bar{j}$ и движущегося по местной скорости частицы жидкости, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_i(t, \tau)}{dt} &= \int_L \vec{V}_\gamma(M, M_i(t, \tau)) \cdot \gamma(M, t) ds_M + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \int_0^t \vec{V}_{\sigma_j}(M_j(t, \tau'), M_i(t, \tau)) \delta_j(\tau') \sqrt{x_{j,\tau'}^2(t, \tau') + y_{j,\tau'}^2(t, \tau')} d\tau' + \\ &+ \vec{U}_0(M_i(t, \tau)) + \vec{V}_q(M_i(t, \tau), t), \quad i=1,2, \quad 0 \leq \tau \leq t \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

при выполнении начального условия (см. (11.3.8))

$$\vec{r}_i(\tau, \tau) = r(M_i^*), \quad i=1,2, \quad (11.3.12)$$

где $r(M_i^*)$ – радиус вектор точки M_i^* , а вектор $\vec{V}_\gamma(M, M_0)$ определяется законом Био-Савара [81]

$$\vec{V}_\gamma(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_1(M, M_0)\vec{i} - x_1(M, M_0)\vec{j}}{r_{MM_0}^2},$$

где $x_1(M, M_0) = x(M_0) - x(M)$, $y_1(M, M_0) = y(M_0) - y(M)$.

Аналогично определяются вектора $\vec{V}_{\delta_i}(M, M_0)$. В обозначениях формулы (11.3.11) условие непротекания (11.3.4) примет вид

$$\begin{aligned} \pi_{M_0} \cdot \int_L \vec{V}_\gamma(M, M_0) \gamma(M, t) ds_M &= -\vec{U}_0(M_0) \pi_{M_0} - \vec{V}_q(M_0, t) \pi_{M_0} - \\ &- \pi_{M_0} \cdot \sum_{i=1}^2 \int_0^t \vec{V}_{\delta_i}(M_i(t, \tau), M_0) \delta_i(\tau) \sqrt{x_{i,\tau}^2(t, \tau) + y_{i,\tau}^2(t, \tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

$$M_0 \in L, \quad M_0 \neq M_q \in L.$$

Так как профиль начал движение с состояния покоя, то в силу теоремы Томсона [81] о сохранении циркуляции скорости по любому контуру, охватывающему вихревые слои, получим, что в любой момент t должно выполняться равенство

$$\int_L \gamma(M, t) ds_M + \sum_{j=1}^2 \int_0^t \delta_j(\tau) \sqrt{x_{j,\tau}^2(t, \tau) + y_{j,\tau}^2(t, \tau)} d\tau = 0, \quad t \geq 0. \quad (11.3.14)$$

Условие заданного расхода жидкости (11.3.6) примет теперь вид

$$\begin{aligned} \int_L \left[\pi_{M_0} \cdot \int_L \vec{V}_\gamma(M, M_0) \gamma(M, t) ds_M + \vec{U}_0(M_0) \pi_{M_0} + \vec{V}_q(M_0, t) \pi_{M_0} + \right. \\ \left. + \pi_{M_0} \cdot \sum_{i=1}^2 \int_0^t \vec{V}_{\delta_i}(M_i(t, \tau), M_0) \delta_i(\tau) \sqrt{x_{i,\tau}^2(t, \tau) + y_{i,\tau}^2(t, \tau)} d\tau \right] ds_{M_0} = Q_2(t). \end{aligned} \quad (11.3.15)$$

В [70] показано, что в момент τ схода свободного вихря с точки M_i^* , $i=1,2$, его интенсивность определяется равенством

$$\delta_i(\tau) = \gamma(M_i^*, \tau). \quad (11.3.16)$$

Таким образом, система интегро-дифференциальных уравнений (11.3.11)–(11.3.16) должна быть решена относительно интенсивности вихревого слоя $\gamma(M, t)$ на L и неизвестных кривых σ_i , $i=1,2$, являющихся границами струи. Надо подчеркнуть, что в [70] показана необходимость нахождения функции $\gamma(M, t)$ в классе функций, имеющих в точке M_q особенность вида $1/(s-q)$ в любой момент t , когда $Q_1 \neq 0$.

Так как система уравнений (11.3.11)–(11.3.16) аналитически не решается, то ее надо решать численно. В аэродинамике был разработан метод дискретных вихрей численного решения таких систем [21, 70]. Будем рассматривать нестационарный процесс

в дискретные моменты времени $t_\nu = \nu\Delta t$, где ν – расчетный момент времени и Δt – шаг по времени. В каждый расчетный момент ν вихревой слой, моделирующий профиль L , заменяется системой из N дискретных вихрей $\Gamma_{i,\nu} = \gamma(M_i, t_\nu)h$, где h – расстояние по кривой между точками расположения вихрей. Боковые границы струи σ_1 и σ_2 моделируются двумя системами свободных дискретных вихрей $\Delta_{1,m}, \Delta_{2,m}$, $m = 1, \dots, \nu$, каждый из которых отрывается от кромок выходного сопла в расчетные моменты $m = 1, \dots, \nu$. Так как свободные дискретные вихри не меняют свою интенсивность во времени, то в расчетный момент ν неизвестными являются только циркуляции вихрей $\Gamma_{i,\nu}$, $i = 1, \dots, N$, и $\Delta_{1,\nu}, \Delta_{2,\nu}$, так как циркуляции вихрей $\Delta_{1,m}, \Delta_{2,m}$, $m = 1, \dots, \nu - 1$, известны из предыдущих расчетных шагов. Дискретные вихри $\Gamma_{i,\nu}$, $i = 1, \dots, N$, распределяются на контуре профиля по закону, который обеспечивает их более плотное расположение на участках контура профиля с маленьким радиусом кривизны [145]. Расчетные точки $M_{0,j}$, $j = 1, \dots, N + 1$, в которых выполняется условие непротекания (11.3.4), расположены между соседними дискретными вихрями на профиле. Точки M_i расположения дискретных вихрей и расчетные точки $M_{0,j}$ выбираются так, что точка M_q является одной из расчетных точек $M_{0,j}$ и соответствующие квадратурные суммы сходятся к значениям интегралов. Для того чтобы выполнить условие (11.3.6), сечение σ выходного сопла разбивается на p равных участков длины $\Delta\sigma_j$, $j = 1, \dots, p$. Расчетная точка $A_{0,j}$, $j = 1, \dots, p$, выбирается в геометрическом центре каждого участка $\Delta\sigma_j$. В этой точке нормальная к $\Delta\sigma_j$ компонента скорости от набегающего потока и системы особенностей определена. Для того чтобы найти неизвестные циркуляции в каждый расчетный момент, мы должны решить следующую систему линейных алгебраических уравнений, которые соответствуют интегральным уравнениям (11.3.11)–(11.3.16):

$$\sum_{i=1}^N \omega(M_i, M_{0,j}) \Gamma_{i,\nu} + \sum_{k=1}^2 \omega(M_{k,\nu}^v, M_{0,j}) \Delta_{k,\nu} = -2\pi U_0 \pi_{M_{0,j}} - Q_{1,\nu} \omega(M_{0,j}, M_{0,j}) - \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{m=1}^{\nu-1} \omega(M_{k,m}^v, M_{0,j}) \Delta_{k,m} \right], \quad j = 1, \dots, N + 1, \quad j \neq j_q, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (11.3.17)$$

$$\sum_{j=1}^p \left[\sum_{i=1}^N \omega(M_i, A_{0,j}) \Gamma_{i,\nu} + \sum_{k=1}^2 \omega(M_{k,\nu}^v, A_{0,j}) \Delta_{k,\nu} \right] \Delta\sigma_j = 2\pi Q_{2,\nu} - \sum_{j=1}^p \left[\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{m=1}^2 \omega(M_{k,m}^v, A_{0,j}) \Delta_{k,m} \right) + 2\pi U_0 \pi_{A_{0,j}} + Q_{1,\nu} \omega(M_{0,j}, A_{0,j}) \right] \Delta\sigma_j, \quad A_{0,j} \in \sigma, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (11.3.18)$$

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_{i,\nu} + \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{m=1}^{\nu} \Delta_{k,m} \right) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (11.3.19)$$

где $Q_{1,\nu}, Q_{2,\nu}$ – безразмерные коэффициенты интенсивностей отсоса и расхода в струе соответственно в момент $\nu = 1, 2, \dots$; $\omega(M_i, M_{0,j}), \omega(M_i, A_{0,j})$ – нормальные компоненты безразмерных скоростей в расчетных точках профиля $M_{0,j}$ и выходного сопла $A_{0,j}$ соответственно, которые индуцированы дискретными вихрями $\Gamma_{i,\nu}$; $\omega(M_{k,m}^v, M_{0,j}),$

$\omega(M_{k,m}^V, A_{0j})$ – нормальные компоненты безразмерной скорости в тех же точках M_{0j} и A_{0j} , которые индуцированы свободными дискретными вихрями $\Delta_{k,m}$ в момент ν ; $\omega(M_{0j_q}, M_{0j})$, $\omega(M_{0j_q}, A_{0j})$ – нормальными компонентами безразмерной скорости в точках M_{0j} и A_{0j} соответственно, которые индуцированы источником интенсивности $Q_{1\nu}$; U_0 – скорость набегающего потока.

Когда все циркуляции $\Gamma_{i,\nu}$, $i=1, \dots, N$, и $\Delta_{k,m}$, $k=1, 2$, $m=1, 2, \dots, \nu$, определены в момент $t = t_\nu$, скорость в произвольной точке M_0 пространства определена суперпозицией известных скоростей U_0 , $V_q(M_0, t_\nu)$ и скоростей, индуцированных дискретными вихрями:

$$V(M_0, t) = U_0 + V_q(M_0, t) + \sum_{i=1}^N V_\gamma(M_i, M_0) \Gamma_{i,t} + \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{m=1}^{\nu} V_{\delta_k}(M_{k,m}^V, M_0) \Delta_{k,m} \right). \quad (11.3.20)$$

Если мы знаем абсолютную скорость потока в произвольной точке поверхности профиля, то, используя интеграл Коши–Лагранжа, определяем коэффициент давления в этой точке

$$P(M_0, t) = \frac{P^*(M_0, t) - P_0}{\rho \frac{U_0^2}{2}} = 1 - V^2(M_0, t) - 2 \frac{\partial \Phi(M_0, t)}{\partial t}. \quad (11.3.21)$$

Мы должны подчеркнуть, что в добавление к представленным гидродинамическим эффектам энергетической механизации обтекание профиля в данной задаче сопровождается воздействием силы реакции струи, что дает вклад в моменты

$$R_j(t) = -2 \int_{\sigma} V(M, t) V_{n\sigma}(M, t) ds_M, \quad M \in \sigma. \quad (11.3.22)$$

и в силы реакции отсоса

$$R_{qj}(t) = -Q_1(t) \cdot V(M_q, t), \quad (11.3.23)$$

где M_q – точка расположения отсоса.

Метод, описанный в настоящей книге, является логическим продолжением методов, описанных в статьях [152, 153], в которых дано построение математических моделей, систем интегро-дифференциальных уравнений обтекания профиля с устройствами отсоса и методы их численного решения. Для отработки методов решения этого класса задач с целью проверки их надежности мы получили точное решение задачи стационарного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью цилиндра единичного радиуса с отсосом внешнего потока на нем. На основе результатов работы [70] можно показать, что это решение дается формулой

$$\gamma(\varphi) = 2 \sin \varphi + \frac{Q_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_q - \varphi}{2} + C, \quad (11.3.24)$$

где φ_q – точка единичной окружности, в которой расположен отсос. Если обтекание цилиндра бесциркуляционное, то получаем $C=0$ в (11.3.24). Используя формулу (11.3.24), получаем выражение для определения циркуляции дискретных вихрей, которые моделируют поверхность цилиндра

$$\Gamma_i = 2 + 2 \cos(\alpha - \psi_i) - \frac{Q_1}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\psi_i - \psi_{0j_q}}{2} \right|, \quad (11.3.25)$$

где ψ_i – угол в направлении часовой стрелки между положительным направлением оси OX и радиусом-вектором, направленным в i -й дискретный вихрь, ψ_{0j_q} – угловая координата точки расположения отсоса с интенсивностью Q_1 , а α – угол атаки набегающего потока.

На рис. 11.3.2 показана распределенная интенсивность вихревого слоя $\gamma(\psi)$ на бесконечном цилиндре – интенсивности, определенные по формуле (11.3.24) (сплошная кривая) и по методу расчета обтекания двумерного тела с отсосом [70] (экспериментальные точки) при угле атаки внешнего потока $\alpha = 6^\circ$ и при равномерном разбиении контура цилиндра на $N = 71$ частей без отсоса ($Q_1 = 0$) (рис. 11.3.2, а) и с отсосом известной интенсивности $Q_1 = 0,05$, расположенного в расчетной точке $\psi_{0j_q} = 305^\circ$ (рис. 11.3.2, б). Видно, что решение, полученное методом дискретных вихрей, хорошо согласуется с точным решением.

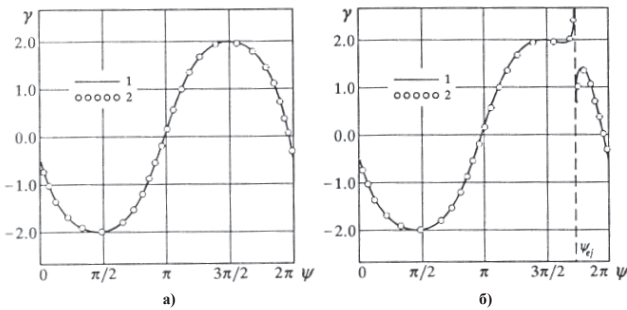


Рис. 11.3.2

Теперь опишем метод расчета характеристик обтекания профиля нестационарным потоком, когда отсасываемый воздух проходит через сопло в струю и эта струя действует как жидкий закрылок. Как пример использования описанного выше метода мы рассчитали аэродинамические характеристики симметричного профиля $NACA-0012$ для версий: 1) без использования энергетической механизации; 2) с использованием только отсоса на верхней поверхности; 3) с использованием комбинации отсоса и струи. Исследования были выполнены на докритических углах атаки, чтобы оценить эффективность использованных устройств, определить коэффициент подъемной силы C_y в скоростных координатах при наличии точки отсоса x_{0j_q} интенсивности Q_1 , угла наклона выдува струи в области задней кромки θ и коэффициента расхода струи Q_2 . Рис. 11.3.3, а показывает зависимости $C_y = f(x)$ для профиля без энергетической механизации (кривая 1), с отсосом внешнего потока в точке $x_{0j_q} = 0,94$ интенсивности $Q_1 = 0,05$ (кривая 2) и комбинации отсоса с выдувом струи с задней кромки под углом $\theta = 30^\circ$ для $Q_1 = 0,05$ и $\theta = 0,05$ (кривая 3). Видим, что устройство отсос-струя наиболее эффективно. Наибольший коэффициент подъемной силы в этом случае является следствием совместного благоприятного воздействия отсоса и струи на обтекание верхней поверхности.

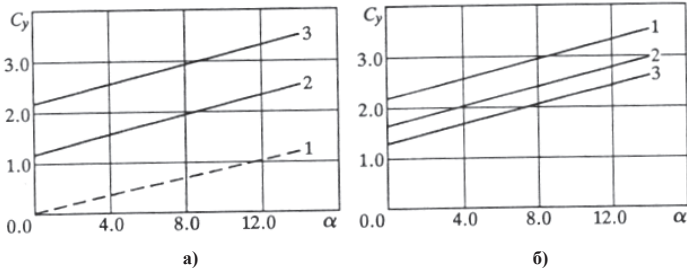


Рис. 11.3.3

Поток замедляется на поверхности профиля позади точки отсоса, и его положительный градиент давления увеличивается резко. Вытекание струи с задней кромки меняет течение главного потока и изменяет локальный угол атаки вследствие действия подсосывания струи, частично уменьшая замедление потока позади точки отсоса на верхней поверхности профиля, и увеличивает давление на нижней поверхности. Действие отсоса и струи на характер обтекания профиля NACA-0012 можно увидеть из структуры распределения давления на его поверхности (рис. 11.3.4). Кривая 1 соответствует распределению давления на поверхности профиля при наличии отсоса и струи, кривые 2 и 3 – распределению давления на поверхности профиля при наличии только отсоса и без энергетической механизации соответственно. Очевидно, что подходящее расположение точки отсоса потока на докритических углах атаки есть область вблизи задней кромки, потому что положительное действие отсоса существует в большей части верхней поверхности профиля (рис. 11.3.3., б), кривая 1 соответствует $x_{0j_q} = 0,94$, кривые 2 и 3 – $x_{0j_q} = 0,43$ и $x_{0j_q} = 0,09$). Увеличение коэффициента расхода отсоса и выдува струи ведет к увеличению полезного действия на верхней поверхности вследствие ускорения потока.

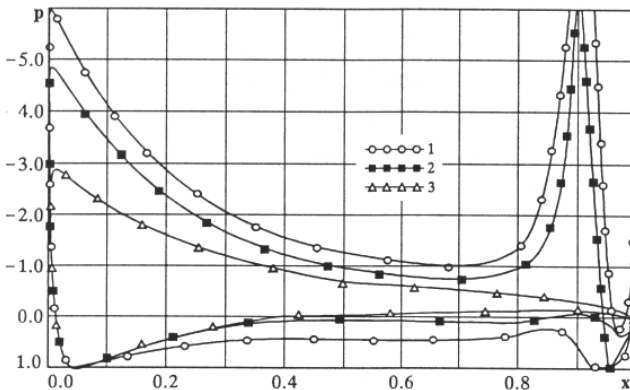


Рис. 11.3.4

Кроме того, возрастание Q_2 увеличивает энергетические свойства струи, ведет к изменению формы струи и, следовательно, к изменению течения главного потока в значительной степени, особенно в кормовой части профиля. Рис. 11.3.5 дает зависимости $C_y = f(\alpha)$ для значений коэффициентов расхода: $Q_1 = 0,0$ и $Q_2 = 0,0$; $Q_1 = 0,05$ и $Q_2 = 0,05$; $Q_1 = 0,1$ и $Q_2 = 0,1$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно).

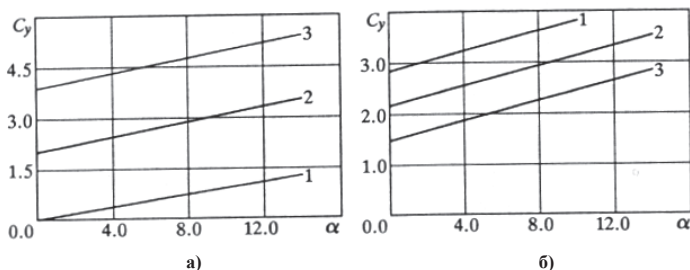


Рис. 11.3.5

Как было замечено выше, течение струи действует в области задней кромки как жидкий закрылок с его типичным эффектом на структуру обтекания тела. Результаты исследования зависимости несущих свойств профиля от угла выдува струи даны на рис. 11.3.5, б (кривая 1 соответствует углу выдува $\theta = 45^\circ$, кривые 2 и 3 – углам $\theta = 30^\circ$ и $\theta = 15^\circ$).

Таким образом, описанная математическая модель обтекания профиля с энергетической механизацией для двумерного потока идеальной жидкости и численный метод позволяют нам достаточно аккуратно оценить эффективность этих устройств для увеличения подъемной силы и определения геометрических и кинетических параметров профиля в широкой области полетных режимов.

11.4. Моделирование обтекания колеблющегося профиля вблизи твердых границ

Колебательные движения крыльевых поверхностей встречаются во многих областях техники. Среди наиболее важных – колебания лопаток турбомашин, колебательные движения лопаток несущих винтов вертолетов, а также реактивных закрылков и механических сервозакрылков. Очень важным является расчет и предотвращение флаттера в авиации и ракетостроении, а в судостроении большой интерес представляет флаттер гидрокрыльев. Во многих случаях колебания происходят вблизи твердых границ. Задача о колеблющемся крыле актуальна также в связи с решением проблемы создания машущего движителя.

Большинство существующих в настоящее время теоретических методов расчета нестационарных гидроаэродинамических характеристик крыльев и крыльевых систем основаны на линеаризованных теориях, предполагающих малость рабочих углов атаки, амплитуд колебаний, деформаций поверхности крыла. Между тем для практики существенный интерес представляют данные из области вне применимости линеаризованной теории.

Рассмотрим плоскую задачу о нестационарном колебательном движении тонкого профиля в идеальной несжимаемой жидкости [48–51, 54–61, 133–137]. Профиль движется в плоскости xOy прямолинейно в горизонтальном направлении с постоянной скоростью и одновременно совершает вертикальные колебания по гармоническому закону, кроме того, профиль может совершать вращательные колебания вокруг некоторой точки. С задней острой кромки профиля сходит вихревая пелена. За счет колебаний профиль может создавать силу, направленную в сторону поступательного движения – силу тяги.

Теоретическая модель течения строится при таких предположениях:

- поверхности профиля и твердых границ предполагаются непроницаемыми;
- на задней кромке выполняется постулат Кутта–Жуковского: скорость жидкости конечна, а давление непрерывно;
- сходящую с задней кромки профиля вихревую пелену считаем бесконечно тонкой поверхностью тангенциального разрыва скорости жидкости; форма этой поверхности заранее неизвестна;
- на бесконечном расстоянии от профиля и вихревой пелены жидкость покоится; возмущения скорости, вносимые движущимся профилем и вихревой пеленой, убывают по мере удаления от профиля и пелены и стремятся к нулю на бесконечности;
- до начала движения профиля вихрей в жидкости не было, т.е. течение было безвихревым.

В силу последнего условия при сделанных предположениях относительно жидкости справедлива теорема Лагранжа о том, что течение всюду вне профиля и вихревой пелены будет оставаться безвихревым и во все последующие моменты времени. Таким образом, физическая постановка задачи позволяет использовать математический аппарат теории потенциальных течений.

Пусть D – область пространства вне профиля, вихревой пелены и твердых границ. Совокупность границ области D в момент времени τ обозначим как $\Sigma(\tau) = L_s(\tau) \cup \sigma(\tau) \cup L_t$, где $L_s(\tau)$ – граница профиля, $\sigma(\tau)$ – вихревая пелена, L_t – твердые границы. Скорость движения точек профиля относительно неподвижной системы координат обозначим $\mathcal{W}(M, \tau)$ ($M \in L_s$).

Так как течение в D безвихревое, то при любом τ существует потенциал скорости $\Phi(x, y, \tau)$, такой, что

$$\mathcal{V}(M, \tau) = \nabla \Phi(M, \tau), \quad M \in D,$$

и, как следует из уравнения неразрывности,

$$\nabla^2 \Phi(M, \tau) = 0, \quad M \in D. \quad (11.4.1)$$

Потенциал Φ должен удовлетворять следующим граничным условиям:

– условию непроницаемости на границе профиля

$$(\nabla \Phi, \bar{n}) = (\mathcal{W}, \bar{n}), \quad M \in L_s(\tau); \quad (11.4.2)$$

– условию непроницаемости на твердых границах

$$(\nabla \Phi, \bar{n}) = 0, \quad M \in L_t; \quad (11.4.2')$$

– условию непрерывности давления и нормальной составляющей скорости на вихревой пелене

$$(\nabla \Phi, \bar{n})_+ = (\nabla \Phi, \bar{n})_-, \quad P_+ = P_-, \quad M \in \sigma(\tau); \quad (11.4.3)$$

– условию затухания возмущений скорости на бесконечном удалении от профиля и вихревой пелены

$$\lim_{R-R_\Sigma \rightarrow \infty} |\nabla \Phi| = 0, \quad (11.4.4)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$;

– условию Кутта–Жуковского на задней выходной кромке профиля

$$(\nabla\Phi, \vec{n})_+ = (\nabla\Phi, \vec{n})_-, \quad P_+ = P_-, \quad M = L_k. \quad (11.4.5)$$

Из физической постановки задачи следуют начальные условия:

– в начальный момент времени вихревой пелены нет, т.е. полностью известны все границы области течения:

$$\Sigma(\tau_0) = L_S \cup L_t \quad (11.4.6)$$

– в начальный момент времени известен потенциал на границах

$$\Phi(M, \tau_0) = \Phi_0(M), \quad M \in \Sigma(\tau_0). \quad (11.4.7)$$

Так как движение начинается из состояния покоя, то можно положить $\Phi_0 = 0$.

Пусть $\vec{r}(M, \tau)$, $M \in \sigma(\tau)$ – радиус-вектор точек вихревой пелены при $\tau > \tau_0$, а $\vec{r}_0(M, \tau_0)$, $M \in \sigma(\tau_0)$ описывает точку появления пелены в начальный момент времени. Тогда можно записать:

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau}(M, \tau) = \vec{V}_{\Sigma_f}, \quad \tau > \tau_0, \quad (11.4.8)$$

$$\vec{r}(M, \tau) = \vec{r}_0(M, \tau_0), \quad \tau = \tau_0, \quad (11.4.9)$$

где $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{i} \frac{dx}{d\tau} + \vec{j} \frac{dy}{d\tau}$, а \vec{V}_{Σ_f} – скорость жидких частиц, принадлежащих вихревой пелене. Задача Коши (11.4.8), (11.4.9) служит для определения искоемых координат свободной вихревой поверхности.

Если потенциал возмущенной скорости найден из решения сформулированной выше нелинейной начально-краевой задачи (11.4.1)–(11.4.9), то давление в любой точке M области D определяется, как известно, интегралом Коши–Лагранжа уравнений движения Эйлера. В неподвижной системе координат в безразмерном виде и при отсутствии внешних массовых сил можно записать

$$P(M, \tau) = -V^2(M, \tau) - 2 \frac{\partial \Phi(M, \tau)}{\partial \tau}, \quad M \in D. \quad (11.4.10)$$

Определив перепад давления на поверхности профиля, можно найти все необходимые динамические характеристики – коэффициенты сил, моментов, а также коэффициент мощности и коэффициент полезного действия (КПД).

Потенциал скорости будем искать методом особенностей в виде

$$\Phi(M_0, \tau) = \int_{\Sigma(\tau)} q(M, \tau) G(r_{MM_0}) dS_M, \quad M_0 \in D, \quad (11.4.11)$$

где g – плотность потенциала, функция G удовлетворяет уравнению Лапласа, M – точка на границе Σ , $r_{MM_0} = |\vec{r}_{MM_0}|$ – длина вектора \vec{r}_{MM_0} . Функция G представляет собой в общем случае суперпозицию потенциалов гидродинамических особенностей. Она должна обеспечить все свойства искомого потенциала скорости, вытекающие из физической постановки задачи. В число необходимых свойств потенциала в нашем случае входят наличие тангенциального разрыва скорости на границах профиля и свободной вихревой пелене, а также затухания возмущений скорости на бесконечности. Такими свойствами обладают потенциалы двойного слоя (слоя диполей) и слоя вихрей. Выполнение всех остальных условий задачи можно добиться за счет плотности потенциала – функции g . Подстановка (11.4.11) в граничные условия дает для отыскания распределения плотности g по совокупности границ Σ интегральные уравнения. Так как Σ содержит и твердые границы раздела сред L_t , то интегральные уравнения необходимо

записывать и на L_t , что в силу бесконечности L_t значительно усложняет задачу. Поэтому условие на твердой границе (11.4.2') в случае прямолинейных границ будем удовлетворять с помощью метода зеркальных отражений. При этом отпадает необходимость в распределении потенциала по твердой границе, а функция G будет построена таким образом, чтобы условие (11.4.2') удовлетворялось автоматически при любой плотности g на $L_s \cup \sigma$.

Рассмотрим для простоты изложения вначале задачу (11.4.1)–(11.4.7) без учета условия (11.4.2'), т.е. изолированный профиль в безграничной жидкости. Искомый потенциал скорости (11.4.11) будем представлять в виде потенциала двойного слоя

$$\Phi(M_0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} g(M, \tau) \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) dS_M, \quad M_0 \in D. \quad (11.4.12)$$

Потенциал (11.4.12) и его производные обладают следующими предельными свойствами на границах (см. параграфы 7.2, 7.3):

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(M_0, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} g(M, \tau) \frac{(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M)}{r_{MM_0}^2} dS_M \pm \frac{1}{2} g(M_0, \tau), \quad M_0 \in L_s \cup \sigma, \quad ((11.4.13), \text{a}) \\ \nabla \Phi_{\pm}(M_0, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} g'_{S_M}(M, \tau) \frac{(y_0 - y)\bar{i} - (x_0 - x)\bar{j}}{r_{MM_0}^2} dS_M \pm \\ &\pm \frac{1}{2} (x'_{S_{M_0}} \bar{i} + y'_{S_{M_0}} \bar{j}) g'_{S_{M_0}}(M_0, \tau), \quad M_0 \in L_s \cup \sigma. \end{aligned} \quad (11.4.13, \text{б})$$

Здесь предполагается, что границы L_s и σ заданы параметрически: $x = x(s)$, $y = y(s)$, а $x'_{S_{M_0}}$, $y'_{S_{M_0}}$ и $g'_{S_{M_0}}$ – производные по параметру s в точке M_0 .

Далее будем использовать обозначение

$$\gamma(M, \tau) = g'_{S_M}(M, \tau). \quad (11.4.14)$$

Отметим, что выражение для градиента φ совпадает с выражением для градиента потенциала вихревого слоя интенсивности $\gamma(M, \tau) = q'_{S_M}(M, \tau)$, непрерывно распределенного по тем же границам.

Запишем граничное условие (11.4.2) в виде интегрального уравнения относительно функции γ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_s \cup \sigma} \gamma(M, \tau) \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} dS_M = (\bar{W}(M_0, \tau), \bar{n}_{M_0}), \quad M_0 \in L_s. \quad (11.4.15)$$

Решение сингулярного интегрального уравнения вида (11.4.15), как известно [37, 98], не единственно. Для выделения единственного решения необходимо указать класс функций, в котором ищется решение. Класс функций определяется физической постановкой задачи.

В качестве условия, обеспечивающего единственность решения, используем условие постоянства циркуляции скорости по любому замкнутому жидкому контуру, охватывающему профиль и след (теорема Томсона (лорда Кельвина)). С учетом (11.4.13, б) получим

$$\int_{L_s \cup \sigma} q'_{S_M}(M, \tau) dS_M = \text{const}, \quad (11.4.16)$$

или

$$\int_{L_s \cup \sigma} \gamma(M, \tau) dS_M = \text{const} . \quad (11.4.17)$$

Так как движение начиналось из состояния покоя, то $\text{const} = 0$.

Отметим, что выполнение постулата Кутта–Жуковского (11.4.5) сводится к однозначному заданию циркуляции по любому замкнутому контуру, охватывающему тело. Следовательно, при выполнении (11.4.17) условие Кутта–Жуковского будет выполняться при любом $\tau > \tau_0$.

Прежде чем приступить к решению уравнения (11.4.15), отметим одно важное свойство функции g , следующее из общей постановки задачи для потенциала скорости.

Через произвольную точку M_0 на границе вихревой пелены σ проведем произвольный замкнутый жидкий контур. В соответствии с теоремой Томсона, при сделанных нами предположениях о характере движения жидкости, циркуляция скорости по этому контуру со временем не изменяется. Поэтому можно записать

$$\frac{d}{d\tau} \oint \mathcal{V} \cdot \delta r = \frac{d}{d\tau} \oint \nabla \Phi \cdot \delta r = \frac{d}{d\tau} \oint \delta \Phi = \frac{d}{d\tau} (\Phi_- - \Phi_+) = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\tau} [\Phi] = 0, \quad M_0 \in \sigma(\tau).$$

Это равенство означает, что в точках вихревой пелены скачок потенциала не зависит от времени и представляет собой функцию только координат этих точек.

Но из (11.4.13 а) следует, что

$$[\Phi(M, \tau)] = g(M, \tau).$$

Таким образом, можно записать, что

$$\frac{dg}{d\tau} = 0, \quad M \in \sigma(\tau), \quad (11.4.18)$$

т.е. плотность двойного слоя на свободной границе зависит только от геометрических координат точек вихревой пелены.

Это значит, что g для каждой движущейся точки вихревой пелены, связанной с фиксированными жидкими частицами, достаточно определить один раз в момент схода этой точки с крыла. Во все последующие моменты времени g для этих частиц будут иметь прежние значения. Функция γ для точек $M \in \Sigma_f(\tau)$ может быть определена дифференцированием $\gamma(M, \tau) = g'_{S_M}(M, \tau)$ по длине дуги вихревой пелены, если последняя определена.

Таким образом, в уравнении (11.4.15) и соотношении (11.4.17) интегралы можно разбить на суммы интегралов по профилю и вихревой пелене, последние из которых можно вынести в правую часть, как известные в каждый момент времени. Получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_s} \gamma(M, \tau) \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} dS_M = (\mathcal{W}(M_0, \tau), \bar{n}_{M_0}) - \quad (11.4.19)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \gamma(M, \tau) \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} dS_M, \quad M_0 \in \Sigma_s,$$

$$\int_{L_s} \gamma(M, \tau) dS_M = - \int_{\sigma} \gamma(M, \tau) dS_M . \quad (11.4.20)$$

Таким образом, решение краевой задачи (11.4.1)–(11.4.7) для уравнения Лапласа сводится к сингулярному интегральному уравнению вида (11.4.28) (для безграничной жидкости). Решение его при условии (11.4.29) позволяет однозначно определить функцию γ , являющуюся вихревой интенсивностью. Все кинематические и динамические характеристики течения могут быть определены затем через γ .

Плотность потенциала g определяется интегрированием уравнения (14.4.23):

$$g(M, \tau) = \int_0^{s(M)} \gamma(M_0, \tau) ds_{M_0}, \quad (11.4.21)$$

где $s(M)$ – дуговая абсцисса текущей точки M , отсчитываемая для определенности от входной кромки профиля.

Вихревой слой на профиле по общепринятой терминологии в нестационарной теории крыла будем называть суммарным, а на вихревой пелене – свободным. Динамические характеристики профиля, определяемые перепадом давления, зависят от интенсивности суммарного вихревого слоя.

Расчет перепада давления на профиле на основе интеграла Коши–Лагранжа удобнее проводить в подвижной системе координат, связанной с профилем. Применяя выражение (14.4.10) к разным сторонам профиля, получаем

$$\Delta P(M, \tau) = V_{o+}^2(M, \tau) - V_{o-}^2(M, \tau) - 2 \frac{\partial'}{\partial \tau} [\Phi],$$

или

$$\Delta P(M, \tau) = (\bar{V}_{o+}(M, \tau) + \bar{V}_{o-}(M, \tau))(\bar{V}_{o+}(M, \tau) - \bar{V}_{o-}(M, \tau)) - 2 \frac{\partial'}{\partial \tau} g(M, \tau), \quad (11.4.22)$$

где $\frac{\partial'}{\partial \tau}$ означает дифференцирование в подвижной системе координат, а V_o – относительная скорость жидкости.

С учетом формул (14.4.22) равенство (14.4.31) примет вид

$$\Delta P(M, \tau) = 2(\bar{V}_{o_s}(M, \tau), \gamma(M, \tau)\xi) - 2 \frac{\partial'}{\partial \tau} g(M, \tau), \quad M \in L_s, \quad (11.4.23)$$

где $\bar{V}_{o_s} = \frac{1}{2}(\bar{V}_{o+}(M, \tau) + \bar{V}_{o-}(M, \tau))$, ξ – единичный вектор касательной к кривой L_s , а первое слагаемое в правой части – скалярное произведение.

Для учета влияния границ раздела сред в гидроаэродинамике крыла применяются различные методы в зависимости от условий задачи. Наиболее часто используются методы построения функций влияния точечных особенностей – метод разложения по фундаментальным решениям, метод разложения по собственным функциям и метод конформных отображений. В случае движения крыла вблизи плоской твердой поверхности (экрана) функция влияния точечного вихря наиболее просто может быть получена методом зеркальных отражений, относящимся к методам разложения по фундаментальным решениям уравнения Лапласа. Граничное условие непротекания на твердой границе будет выполняться, если в точке, зеркально отраженной относительно вихря, расположить такой же вихрь, но с интенсивностью противоположного знака.

Таким образом, при движении профиля вблизи твердой плоской стенки необходимо построить симметричный относительно стенки вихревой слой с такой же по величине плотностью, как и у исходного профиля, но противоположной по знаку, и рассматривать движение двух симметричных вихревых слоев в безграничной жидкости.

Интегральное уравнение (14.4.28) записано для профиля в безграничном потоке.

С использованием метода зеркальных отражений соответствующее уравнение для профиля вблизи твердой плоской стенки будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{L_S} \gamma(M, \tau) \left[\frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}^*} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}^*}}{r_{M_0M^*}^2} \right] dS_M = (\overline{W}(M_0, \tau), \bar{n}_{M_0}) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma(\tau)} \gamma(M, \tau) \left[\frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}}}{r_{MM_0}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(x_0 - x)x'_{S_{M_0}^*} + (y_0 - y)y'_{S_{M_0}^*}}{r_{M_0M^*}^2} \right] dS_M, \quad M_0 \in L_S \end{aligned} \quad (11.4.24)$$

где M^* – точка, симметричная точке M относительно стенки.

В отличие от уравнения (11.4.28) ядро уравнения (11.4.33) содержит дополнительное регулярное слагаемое, которое не усложняет общее решение.

В случае наличия двух границ – твердых плоских и параллельных стенок канала – потенциал от вихря также можно построить методом отражения. Он будет иметь вид бесконечного ряда по фундаментальным решениям. Например, если вихрь с циркуляцией Γ расположен в середине канала ширины H , то, выбрав начало координат в точке расположения вихря, можно записать выражение для комплексно-сопряженной скорости потенциала от бесконечной цепочки вихрей:

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z - inH} = -\frac{\Gamma}{2iH} \operatorname{csch} \frac{\pi z}{H}. \quad (11.4.25)$$

Если вихрь расположен не симметрично относительно стенок канала, то получим две бесконечных цепочки отраженных вихрей, сдвинутых друг относительно друга. Пусть h – отстояние вихря от одной из стенок канала, тогда комплексно-сопряженная скорость течения будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - i2nH} - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - 2i(h + mH)} = \\ &= \frac{i}{2H} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2H} - \frac{i}{2H} \operatorname{cth} \frac{\pi(z - i2h)}{2H}. \end{aligned} \quad (11.4.26)$$

Компоненты скорости жидкости $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, x_0, y_0)$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, x_0, y_0)$, индуцируемые вихрем, расположенным в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, определяются выделением из (11.4.35) действительной и мнимой части после естественной замены координаты z на $z - z_0$ и h на $H/2 - y_0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \operatorname{Re} \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2H} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi}{H}(x_0 - x)} \sin \frac{\pi}{H}(y_0 - y)}{1 - 2e^{\frac{\pi}{H}(x_0 - x)} \cos \left[\frac{\pi}{H}(y_0 - y) \right] + e^{\frac{2\pi}{H}(x_0 - x)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\frac{\pi}{H}(x_0-x)} \sin \frac{\pi}{H}(y_0+y)}{1 - 2e^{\frac{\pi}{H}(x_0-x)} \cos \left[\frac{\pi}{H}(y_0+y) \right] + e^{\frac{2\pi}{H}(x_0-x)}} \right\}; \quad (11.4.27)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\operatorname{Im} \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2H} \left\{ \frac{1 - e^{\frac{\pi}{H}(x_0-x)} \cos \frac{\pi}{H}(y_0-y)}{1 - 2e^{\frac{\pi}{H}(x_0-x)} \cos \left[\frac{\pi}{H}(y_0+y) \right] + e^{\frac{2\pi}{H}(x_0-x)}}} - \frac{1 - e^{\frac{\pi}{H}(x_0-x)} \cos \frac{\pi}{H}(y_0+y)}{1 - 2e^{\frac{\pi}{H}(x_0-x)} \cos \left[\frac{\pi}{H}(y_0+y) \right] + e^{\frac{2\pi}{H}(x_0-x)}}} \right\}. \quad (11.4.28)$$

Отметим, что в случае более сложных границ (непрямолинейные границы, границы с изломом, выступы, впадины и др.) эффективным является применение метода конформных отображений физической плоскости течения на вспомогательную плоскость, в которой потенциал течения находится легко. При этом отображающая функция в ряде случаев может быть построена аналитически, в общем случае отображение можно осуществить с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца.

Рассмотрим далее численное решение поставленной задачи.

Изложим вначале общую схему решения начально-краевой задачи (14.4.1)–(14.4.9). Основная ее особенность в том, что неизвестна и должна быть определена форма свободной границы вихревой пелены. Если для какого-то момента времени она известна, то потенциал течения находится из решения краевой задачи (14.4.1)–(14.4.5). Ее решение сводится к сингулярному интегральному уравнению (14.4.28) ((14.4.33) для ограниченной жидкости) с условием (14.4.29). Таким образом, общее решение может основываться на уже известной схеме перехода по временным слоям с последовательным определением на каждом из них вихревой пелены и потенциала течения.

Численное решение задачи Коши (14.4.8)–(14.4.9) для определения координат точек границы вихревой пелены будем проводить методом Эйлера с переменным шагом по времени:

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} + V_{\sigma}^{(k-1)} \Delta \tau^{(k)}, \quad \tau = \tau_k, \quad k=1,2,\dots, \quad (11.4.29)$$

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{r}_0(M, \tau_0), \quad \tau = \tau_0, \quad (11.4.30)$$

где $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots$ – последовательность расчетных моментов времени; $\Delta \tau^{(k)} = \tau_k - \tau_{k-1}$ – шаг по времени; $r^{(k)}$ и $\bar{r}^{(k-1)}$ – радиус-вектора жидкой частицы на границе вихревой пелены в моменты времени τ_k и τ_{k-1} ; $V_{\sigma}^{(k-1)}$ – скорость этой жидкой частицы в момент времени τ_{k-1} .

Уравнение (14.4.28) будем решать методом дискретных вихрей. Область интегрирования – кривые L_s и σ – разобьем на N_s и $N_{\sigma}(\tau)$ элементарных участков L_{s_k} и σ_k соответственно, а интегралы заменим суммами интегралов:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K_s} \int_{L_{s_k}} \frac{y'_{SM_0}(y_0-y) + x'_{SM_0}(x_0-x)}{r_{MM_0}^2} \gamma(M, \tau) dS_M =$$

$$= (\overline{W}(M_0, \tau), \overline{n}_{M_0}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_{\sigma}(\tau)} \int_{\sigma_k} \frac{y'_{SM_0}(y_0 - y) + x'_{SM_0}(x_0 - x)}{r_{MM_0}^2} \gamma(M, \tau) dS_M, \quad M_0 \in L_S. \quad (11.4.31)$$

Интегралы по элементарным участкам под знаками сумм – это нормальные скорости, индуцируемые в точке $M_0 \in L_S$ вихревыми слоями, распределенными по этим участкам. Здесь также предполагается, что при $N_s \rightarrow \infty$ и $N_{\sigma}(\tau) \rightarrow \infty$ влияние вихревого слоя каждого элементарного участка эквивалентно влиянию дискретного вихря, расположенного в некоторой точке на этом участке, с циркуляцией, равной циркуляции скорости по этому участку. В результате вместо (14.4.40) можно записать

$$\sum_{k=1}^{N_s} V_{nS_k}(M_0, \tau) \Gamma_{s_k}(\tau) = -2\pi W_n(M_0, \tau) - \sum_{k=1}^{N_{\sigma}(\tau)} V_{n\sigma_k}(M_0, \tau) \Gamma_{\sigma_k}, \quad (11.4.32)$$

где

$$V_{nS_k}(M_0, \tau) = \frac{y'_{SM_0}(y_0 - y_{s_k}) + x'_{SM_0}(x_0 - x_{s_k})}{r_{M_k M_0}^2}, \quad (11.4.33)$$

($V_{n\sigma_k}(M_0, \tau)$ определяется аналогично); $(x_{s_k}, y_{s_k}) = M_{S_k}$ и $(x_{\sigma_k}, y_{\sigma_k}) = M_{\sigma_k}$ – точки расположения вихрей, не совпадающие с точками $(x_0, y_0) = M_0$; $\Gamma_{s_k}(\tau)$ и Γ_{σ_k} – циркуляции скорости по элементарным участкам L_{S_k} и σ_k :

$$\Gamma_{s_k}(\tau) = \int_{L_{S_k}} \gamma(M, \tau) dS_M, \quad \Gamma_{\sigma_k} = \int_{\sigma_k} \gamma(M) dS_M. \quad (11.4.34)$$

Условие теоремы Томсона (14.4.29) с учетом (14.4.43) примет вид

$$\sum_{k=1}^{N_s} \Gamma_{s_k}(\tau) = - \sum_{k=1}^{N_{\sigma}(\tau)} \Gamma_{\sigma_k}. \quad (11.4.35)$$

Уравнения (14.4.41) и (14.4.44) теперь содержат N_s неизвестных циркуляций Γ_{s_k} . Удовлетворяя уравнению (14.4.41) в $N_s - 1$ точках M_{0j} на S_s , получаем совместно с (14.4.44) замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения Γ_{s_k} :

$$\sum_{k=1}^{N_s} V_{ns_k}(M_{0j}, \tau) \Gamma_{s_k}(\tau) = 2\pi W_n(M_{0j}, \tau) - \sum_{k=1}^{N_{\sigma}(\tau)} V_{n\sigma_k}(M_{0j}, \tau) \Gamma_{\sigma_k}, \quad j = \overline{1, N_s - 1}, \quad (11.4.36)$$

$$\sum_{k=1}^{N_s} \Gamma_{s_k}(\tau) = - \sum_{k=1}^{N_{\sigma}(\tau)} \Gamma_{\sigma_k}.$$

После решения системы (14.4.45) вихревую интенсивность γ будем определять на основе следующего допущения в (14.4.43) – интегралы по элементарным участкам Σ_{s_k} заменим простейшими квадратурами (с учетом сделанного перехода к отрезку

$[0, 1]$): $\Gamma_k(\tau) = \gamma_k(\tau) \frac{1}{N}$, откуда

$$\gamma_k(\tau) = N \Gamma_k(\tau). \quad (11.4.37)$$

Как показывают расчеты, сделанное допущение оправдано – упрощается численный алгоритм, кроме того, линейная или параболическая интерполяция γ не приводит к ощутимому увеличению точности решения в данном случае.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На рис. 11.4.1 показаны картины вихревых следов, полученные в результате численной и физической визуализации. Дано сопоставление приведенных к единому масштабу расчетной и физической картин течения в ближнем следе за изолированным колеблющимся крылом. Амплитуда угловых колебаний $\theta = 3.8^\circ$, число Струхала $p^* = 9$. Приведено пять последовательных кадров за полпериода, характеризующих динамическую картину течения. Наблюдается достаточно хорошее качественное и количественное соответствие, что характеризует достоверность расчетного метода.

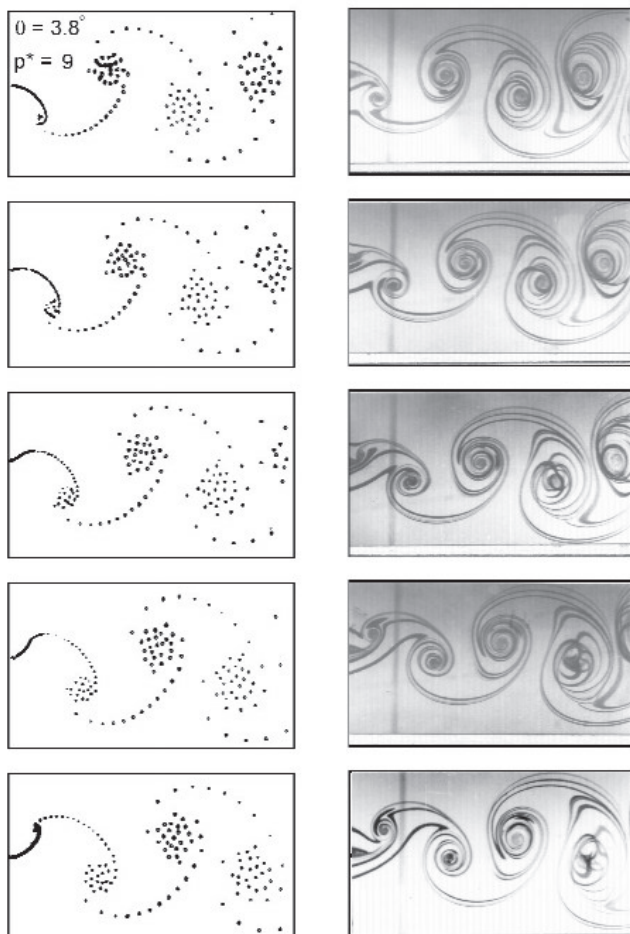


Рис. 11.4.1

На рис. 11.4.2 показана расчетная и экспериментальная картины вихревого следа за колеблющимся крылом вблизи твердой плоской стенки при относительном отстоянии от стенки точки, вокруг которой совершаются колебания, $h = 0.25$. Как видно, теоретическая модель качественно достаточно хорошо описывает образование наблюдаемых в физическом эксперименте «косых вихревых дорожек».

На рис. 11.4.3 – вихревой след за колеблющимся крылом в канале при симметричном расположении крыла. Относительная ширина канала $h = 0.5$. Стенки канала приводят к деформации вихревого следа и более быстрому его разрушению.

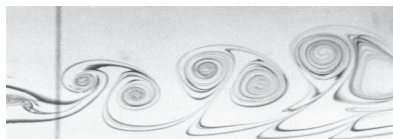
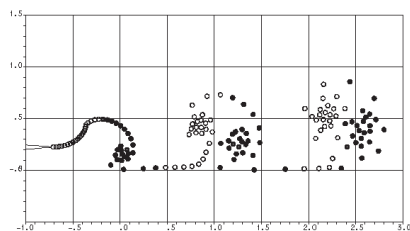


Рис. 11.4.2

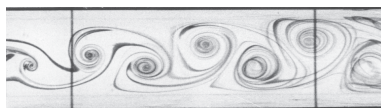
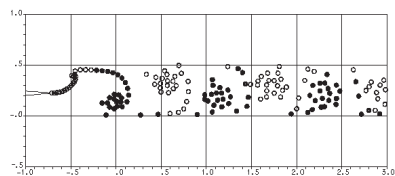


Рис. 11.4.3

11.5. Моделирование взаимодействия системы колеблющихся крыльев

Рассматривается [49, 51, 54] взаимодействия системы крыльев, в схеметипа «биплан» (Рис.11.5.1.,Рис.11.5.2.)и в схеме типа «тандем» (Рис.11.5.3.),находящихся во внешнем потоке. При движении двух крыльев, (по теории движителя) наибольший интерес представляют случаи, при которых пульсации поперечных и продольных сил системы минимизируются (т.е. система движется с практически постоянной скоростью при минимальных поперечных колебаниях движителя). Кроме того, режимы колебаний крыльев влияют на достижение максимальных значения силы тяги и к.п.д.



Рис.11.5.1.

Структура следа при синфазных колебаниях профилей, в схеме типа «биплан».



Рис.11.5.2.

Структура следа при колебаниях в противофазе профилей, в схеме типа «биплан».



Рис.11.5.3.

Структура следа при колебании Профилей в схеме типа «тандем».

Ниже приведены результаты моделирования [51] взаимодействия системы крыльев, в схемах типа «биплан» и типа «тандем», в потоке, в двумерной постановке. При численном моделировании рассматривались чисто поступательные колебания профилей системы:

$$y_i = a_i \cos(p_i^* \tau + \psi_i), i=1,2, \quad (11.5.1)$$

где a_i – амплитуда колебаний, ψ_i – угол сдвига по фазе колебаний, $p_i^* = \frac{p_i \cdot b}{U_0}$ – число

Струхала, $p_i = 2\pi\nu$ – безразмерная частота для i – го профиля.

11.5.1. Нелинейное взаимодействие системы крыльев (схема типа «биплан»)

Рассматривались бесконечно тонкие крылья, с расстоянием между планами большими 0.3 хорды крыла [51, 54].

Такое приближение выбрано потому, что телесность профилей начинает сказываться на малых расстояниях между планами ($H < 0.3b$). Это значение было установлено [] путём сравнения расчётных данных для бесконечно тонких профилей с данными для взаимодействующих профилей NASA-OO12.

Ниже приведена структура следа при различных сдвигах в фазе колебаний одного профиля по отношению к другому (Рис. 11.5.4., а)–з):

а) $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$; б) $\psi_1 = 45^\circ, \psi_2 = 0^\circ$; в) $\psi_1 = 90^\circ, \psi_2 = 0^\circ$; г) $\psi_1 = 135^\circ, \psi_2 = 0^\circ$;

д) $\psi_1 = 180^\circ, \psi_2 = 0^\circ$; е) $\psi_1 = 225^\circ, \psi_2 = 0^\circ$; ж) $\psi_1 = 270^\circ, \psi_2 = 0^\circ$; з) $\psi_1 = 135^\circ, \psi_2 = 0^\circ$ (г);

$p_1^* = p_2^* = 2\pi, a_1 = a_2 = 0.05, H = 0.4$.

Из Рис. 11.5.4. а) ($\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = 0^\circ$), видно, что след за бипланом напоминает обращённую вихревую дорожку, характерную для одиночного крыла (Рис. 11.4.1.). Видно, как происходит захват вихрем большей интенсивности, вихря меньшей интенсивности.

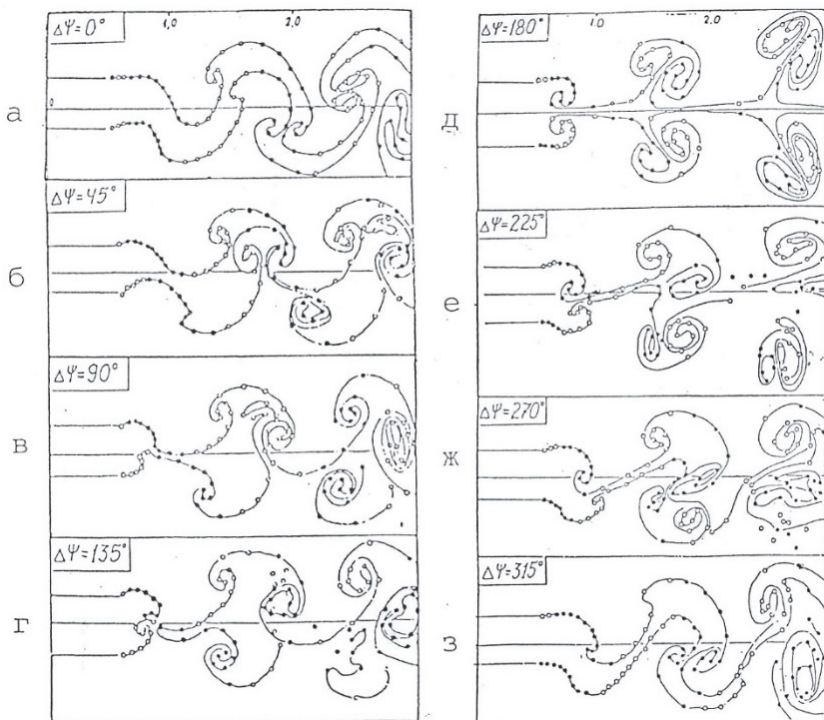


Рис.11.5.4.

Расчетная структура следа при различных сдвигах в фазах колеблющихся профилей.

Видно, как структура следа изменяется при изменении $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$ (рис. 4.2.1, б–з). При увеличении $\Delta\psi$ от 0° до 180° наблюдается переход «вихревого следа» от обращённой дорожки Кармана для системы $\Delta\psi = 0^\circ$, (рис. 4.2.1,а), к двум взаимно отталкивающимся, вследствие взаимодействия вихрей противоположного знака, «вихревым структурам» ($\Delta\psi = 180^\circ$, рис. 4.2.1,д). В последнем случае каждая из дорожек аналогична дорожке, образованной при движении колеблющегося одиночного профиля вблизи экрана. Режимы при $\Delta\psi = 0^\circ$ и $\Delta\psi = 180^\circ$ считаются основными, а все остальные переходными. В переходных режимах наблюдается разрушение вихревых структур при взаимодействии вихревых пелен сходящих с разных крыльев.

Структура течения вблизи профилей, колеблющихся в противофазе, в схеме биплан ($\Delta\psi_1 = 180^\circ$, $p_1^* = p_2^* = 2\pi$, $a_1 = a_2 = 0.05$, $H = 0.4$) представлена на рис.4.2.4 (а)- векторное поле скоростей, б)- изолиний возмущенных поперечных скоростей, в) - изолинии возмущенных продольных скоростей) [51].

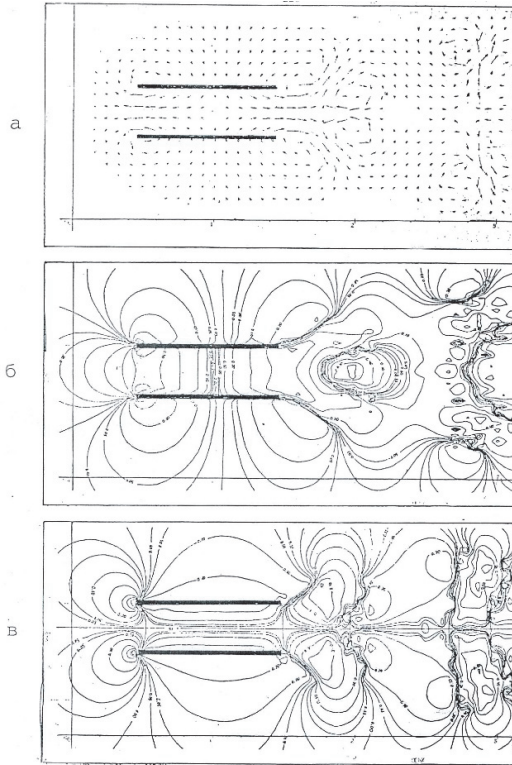


Рис. 11.5.5.

Векторное поле и изолинии продольных и поперечных составляющих течения вблизи колеблющихся профилей в схеме биплан

11.5.2. Нелинейное взаимодействие системы крыльев (схема типа «тандем»)

Рассмотрим теперь систему двух профилей, расположенных один за другим (схема тандем). На рис. 11.5.3 (лабораторный эксперимент) [51, 54] видно, как задний профиль сталкивается с вихревой структурой сходящей в след с переднего профиля. Численное моделирование демонстрирует, как взаимодействие крупномасштабного вихря с движущимся профилем вызывает пульсации сил. Ниже (на Рис.11.5.6.) представлены характеристики поля течения при движении профилей в схеме тандем, для случаев: $p_1^* = p_2^* = 1.5\pi$, $a_1 = a_2 = 0.08$, $H = 0$, $\Delta = 1.1$ (расстояние между передними кромками профилей).

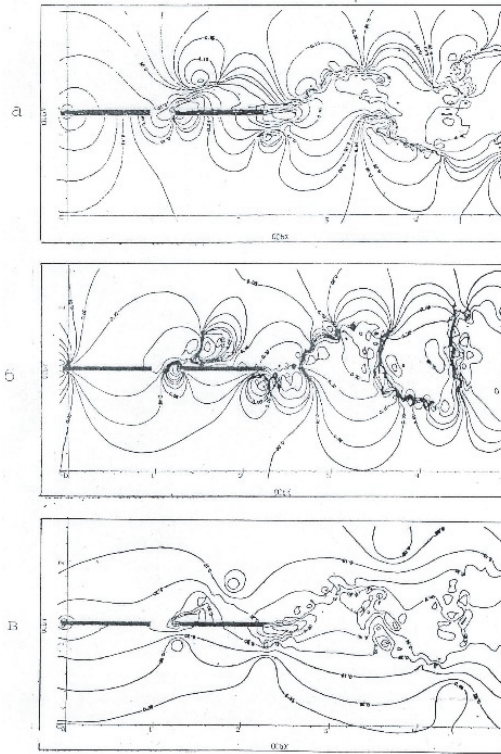


Рис.11.5.6. Изолинии возмущенных скоростей

Представленные (на Рис.11.5.6.) изолинии характеристик дают возможность понять общие закономерности вихревых (циркуляционных, в модельном случае) течений вблизи системы профилей типа тандем ($p_1^* = p_2^* = 1.5\pi, a_1 = a_2 = 0.08, H = 0, \Delta = 1.2$).

Отметим, что решение задачи для схемы тандем в рамках линейной теории в отдельных случаях принципиально невозможно. Так, в работе [51] показано, что при решении задачи в рамках линейной теории получается парадоксальный результат, когда задний профиль полностью уничтожает интенсивность свободной пелены переднего, что приводит к нулевому значению силы тяги. Выходом из этой ситуации может служить только решение задачи в рамках нелинейной теории.

11.6. Моделирование струйных течений

В плоскости XOY рассмотрим область Ω , ограниченную твердой границей $\sigma = \cup \sigma_i$:

$$\sigma_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2$$

и заполненную идеальной несжимаемой жидкостью (рис. 11.6.1). Из сопла диаметром d вытекает струя, границы которой будем моделировать вихревыми пеленами σ_1^* и σ_2^* , которые сходят из острых кромок A_1 и A_2 . Они заданы уравнениями:

$$\sigma_i^*(x, y, t) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma^* = \cup \sigma_i^*.$$

В области Ω всюду, кроме вихревых пелен σ_i^* , существует

потенциал скорости Φ , который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y, t) = 0, (x, y) \in \Omega \setminus (\sigma \cup \sigma^*). \quad (11.6.1)$$

Граничными условиями для уравнения (11.6.1) будут условия на границах σ , σ^* и на жидкой границе σ_s в некотором сечении сопла, а также на бесконечности:

- 1) условие непротекания на твердых границах σ_i

$$(\nabla \Phi(x, y, t), \bar{n}_i) = 0, (x, y) \in \sigma_i, i = 1, 2, \quad (11.6.2)$$

- 2) расход жидкости через сопло d

$$\int_{\sigma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = Q(t); \quad (11.6.3)$$

- 3) неизменность во времени потенциала на бесконечности и затухание возбужденной границей скорости

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_{\text{гп}} \rightarrow \infty} \nabla \Phi = 0, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_{\text{гп}} \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0; \quad (11.6.4)$$

- 4) отсутствие перепада нормальной скорости на вихревых пеленах σ_i^* :

$$[\nabla \Phi(x, y, t) \cdot \bar{n}] = 0, (x, y) \in \sigma_i^*. \quad (11.6.5)$$

Следствием всех сделанных предположений относительно свойств среды будет условие постоянства циркуляции по произвольному жидкому контуру l_0 (теорема Томсона):

$$\int_{l_0} \nabla \Phi \cdot \tau(s) ds = \text{const}. \quad (11.6.6)$$

Дополнительным условием будет условие конечности скорости в точках A_1 и A_2 :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_{A_i}, y_{A_i})} \nabla \Phi(x, y, t) = W_{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad (11.6.7)$$

начальное условие

$$\nabla \Phi = 0, \quad t = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (11.6.8)$$

Положим

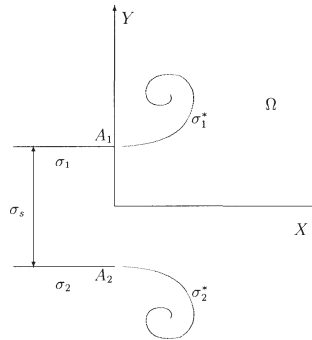


Рис. 11.6.1

$$Q(t) = 0, \quad t < 0,$$

$$Q(t) = Q_\infty, \quad t \geq 0.$$

Сформулированная задача является задачей Неймана для потенциала Φ и имеет единственное (с учетом (11.6.6)) решение $\Phi = \Phi(x, y, t)$, откуда однозначно определяется поле скорости:

$$W = \nabla \Phi$$

Из условия движения вихревых пелен по траекториям частиц жидкости для нахождения их координат будем иметь систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i^*(t, t^*)}{dt} = W_x(x_i^*(t, t^*), y_i^*(t, t^*))$$

$$\frac{dy_i^*(t, t^*)}{dt} = W_y(x_i^*(t, t^*), y_i^*(t, t^*)), \quad (x_i^*, y_i^*) \in \sigma_i^*, \quad i = 1, 2$$

Начальными условиями для системы (11.6.9) будут:

$$x_i^*(t^*, t^*) = x_{A_i}, \quad y_i^*(t^*, t^*) = y_{A_i}, \quad i = 1, 2. \quad (11.6.10)$$

Вихревой слой σ моделируется системой N присоединенных вихрей интенсивности $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$, равномерно (с шагом Δl) размещенных на границе, а вихревые пелены σ_i^* – свободными вихрями $\delta_i^{(1)s}$, которые сходят в поток в каждый расчетный момент времени τ_s из точек A_1 и A_2 и дальше двигаются, не изменяя своей циркуляции.

Задача решается в безразмерном виде. За характерные величины приняты расход жидкости Q_∞ и диаметр сопла d . Безразмерные величины имеют вид:

$$\tau = \frac{tQ_\infty}{d^2}, \quad \bar{w} = \frac{Wd}{Q_\infty}, \quad x' = \frac{x}{d}, \quad y' = \frac{y}{d}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{Q_\infty},$$

$$\Gamma_{\Sigma\mu}^r = \frac{\Gamma_{\Sigma\mu}^r}{Q_\infty}, \quad \delta_i^{(1)s} = \frac{\delta_i^{(1)s}}{Q_\infty}$$

(далее штрихи будем опускать).

Выполнения условия непротекания в любой момент времени τ_r будем требовать в контрольных точках (x_v, y_v) , размещенных посередине между присоединенными вихрями. Считаем, что вихри в начальный момент времени в потоке отсутствуют, а за жидкостный контур l_0 возьмем контур, который охватывает все вихри в потоке. Тогда константа в условии (11.6.6) будет равняться нулю. Из условий (11.6.2), (11.6.3) и (11.6.6) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно циркуляции присоединенных вихрей $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$ в каждый расчетный момент времени τ_r :

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r a_{\mu\nu} = -(w_{k\nu}^r n_{x\nu} + w_{l\nu}^r n_{y\nu}), \quad \nu = \overline{1, N}, \quad (11.6.11)$$

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r = \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \delta_i^{(1)s},$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{\mu=1}^{N+2} w_{x\mu}(B_j) \Gamma_{\Sigma\mu}^r + \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^2 w_{xsi}(B_j) \delta_i^{(1)s} \right) \Delta S_j = Q(\tau_r), \quad (11.6.12)$$

где
$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}(v_{x\mu\nu}n_{x\nu} + v_{y\mu\nu}n_{y\nu});$$

$v_{x\mu\nu}, v_{y\mu\nu}$ – функции координат; w_{Ix}^r, w_{Iy}^r – соответственно продольная и поперечная скорости в контрольной точке, возбужденные свободными вихрями; B_j – точки в сечении σ_s (рис. 11.6.2); $w_{x\mu}(B_j)$ – продольная скорость в точке B_j , вызванная системой вихрей $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$; $w_{isx}(B_j)$ – продольная скорость в точке B_j от системы вихрей $\delta_i^{(1)s}$.

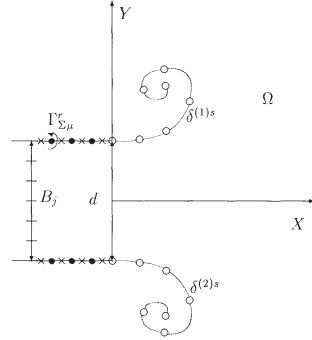


Рис. 11.6.2

Для нахождения новых координат свободных вихрей решается система:

$$\frac{dx_i^s(\tau, \tau_s)}{d\tau} = w_{isx}^r(x^s(\tau, \tau_s), y^s(\tau, \tau_s)), \quad (11.6.13)$$

$$\frac{dy_i^s(\tau, \tau_s)}{d\tau} = w_{isy}^r(x^s(\tau, \tau_s), y^s(\tau, \tau_s)), \quad s = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2,$$

$w_{is}^r = (w_{isx}^r, w_{isy}^r)$ – скорость свободного вихря $\delta_i^{(1)s}$ в момент времени τ_r , возбужденная всей системой вихрей. Начальными условиями для уравнения (11.6.13) будут

$$x_i^s(\tau_s, \tau_s) = x_{A_i}, \quad y_i^s(\tau_s, \tau_s) = y_{A_i}, \quad s = \overline{1, r}, \quad i = 1, 2. \quad (11.6.14)$$

Функция тока в любой точке потока является суммой функций тока всех вихрей и вычисляется по формуле

$$\psi(x, y, \tau) = - \sum_{i=1}^{N+2+2r} \frac{\Gamma_i(\tau)}{4\pi} \ln((x - x_i(\tau))^2 + (y - y_i(\tau))^2). \quad (11.6.15)$$

В любой точке потока, которая не является точкой вихря, можно определить давление по интегралу Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} = F(t),$$

где $F(t)$ – функция, зависящая от времени и одинаковая для всей области. Чтобы ее определить, зададим условия на бесконечности

$$p \rightarrow p_\infty, \quad \text{при} \quad |\vec{r} - \vec{r}_\Gamma| \rightarrow \infty.$$

Учитывая (11.6.4), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{W^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho}. \quad (11.6.16)$$

Отсутствие перепада давления на вихревой пелене σ^*

$$[p] = 0, \quad (x, y) \in \sigma^*,$$

является следствием ее движения по траекториям частиц жидкости.

Введем коэффициент давления $c_p = (p - p_\infty) / \left(\frac{1}{2} \rho Q_\infty^2\right)$ и, учитывая безразмерные значения для потенциала и скорости, получаем

$$c_p(x, y, \tau) = -w^2(x, y, \tau) - 2 \frac{\partial \varphi(x, y, \tau)}{\partial \tau}. \quad (11.6.17)$$

В каждый момент времени τ_r в потоке находятся $N+2$ присоединенных вихрей $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$, которые моделируют сопло, и $2r$ свободных вихрей $\delta_i^{(1)s}$, которые сошли в поток в предшествующие моменты времени из точек A_1 и A_2 . Циркуляция присоединенных вихрей зависит от времени. Свободные вихри изменяют только свои координаты. Для нахождения частной производной по времени от потенциала запишем потенциал в виде

$$\varphi(x, y, \tau) = \sum_{\mu=1}^{N+2} \frac{\Gamma_{\Sigma\mu}^r(\tau)}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-x_\mu}{y-y_\mu} \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \frac{\delta_i^{(1)s}}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-x_i^s(\tau)}{x-x_i^s(\tau)} \right) + C.$$

Найдем частную производную:

$$\frac{\partial\varphi(x, y, \tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{N+2} \frac{\partial\Gamma_{\Sigma\mu}^r(\tau)}{\partial\tau} \left(\operatorname{arctan} \frac{x-x_\mu}{y-y_\mu} \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \frac{\delta_i^{(1)s}}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\operatorname{arctan} \frac{x-x_i^s(\tau)}{x-x_i^s(\tau)} \right) \right). \quad (11.6.18)$$

Учитывая, что $\partial x_i^s(\tau)/\partial\tau = w_{ix}^s(\tau)$, а $\partial y_i^s(\tau)/\partial\tau = w_{iy}^s(\tau)$ ($w_i^r = (w_{ix}^r, w_{iy}^r)$ – скорость свободного вихря $\delta_i^{(1)s}$), имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^{N+2} \frac{\partial\Gamma_{\Sigma\mu}^r}{\partial\tau} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-x_\mu}{y-y_\mu} \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=1}^r \delta_i^{(1)s} \left\{ -\frac{y-y_i^s(\tau)}{(x-x_i^s(\tau))^2 + (y-y_i^s(\tau))^2} w_{ix}^s + \frac{x-x_i^s(\tau)}{(x-x_i^s(\tau))^2 + (y-y_i^s(\tau))^2} w_{iy}^s \right\}. \quad (11.6.19)$$

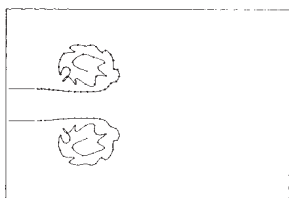


Рис. 11.6.3

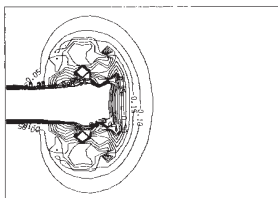


Рис. 11.6.4

Давление в любой момент времени τ_r находилось для предшествующего момента времени τ_{r-1} по формуле (11.6.17).

Приведем некоторые результаты расчетов [52, 53]. На ис. 11.6.3 изображены вихревые пелены, которые моделируют границы струи при $\tau=5$. Они полностью симметричны относительно оси OX . Картина давления при $\tau=10$ (изобары) при истечении плоской струи в неограниченное пространство изображена на рис. 11.6.4. Вихри создают область разрежения, которая распространяется вместе с развитием течения. Коэффициент давления во всей области струи отрицательный, т. е. давление меньше давления на бесконечности. На рисунке изобары изображены с шагом 0.05. Градиент давления уменьшается в направлении OX (уменьшается плотность изобар). В области

свободной вихревой пелены образуются замкнутые структуры с постоянным давлением, причем на границах этих структур наблюдается значительное изменение давления. Оно тем больше, чем ближе к оси OX структура. При переходе через свободные вихревые пелены давление не изменяется. На сопле происходит скачок давления. В центральной части струи давление равно давлению в невозмущенном потоке.

Симметрия распределения давления и картины вихрей с течением времени нарушается. На рис. 11.6.5 изображено распределение свободных вихрей при $\tau = 40$. Образуются концентрированные области завихренности разного знака. Слой смешения, который моделируется дискретными вихрями, расширяется вдоль оси OX . В среднем участке струи течение безвихревое. Распределение изобар тоже теряет симметричный характер (рис. 11.6.6). В середине струи образуются периодические области разрежения, которые отвечают изгибам струи (рис. 11.6.5). Масштабы этих периодических структур имеют порядок диаметра сопла. На внутренней части слоя смешения градиент давления будет наибольшим. Картина вихрей в момент времени $\tau = 120$ изображена на рис. 11.6.7. На начальном участке концентрированные области отрицательной и положительной завихренности чередуются, не смешиваясь между собою. Более близко к фронту струи происходит активное перемешивание вихрей противоположной циркуляции. На значительных участках струи завихренность отсутствует вообще. Струя сильно расширилась по оси OY за счет инжекции неподвижной жидкости. Инжекция происходит благодаря снижению давления в струе по сравнению с давлением окружающей жидкости. Жидкость переходит из области с более высоким давлением в область более низкого давления.

На рис. 11.6.8 изображены линии тока затопленной струи в момент времени $\tau = 20$. Вихревые пелены, которые моделируют границы струи, неустойчивы. Они распадаются на отдельные вихри, которые собираются по обе стороны от сопла в концентрированные области завихренности, что закручивает окружающую жидкость в два крупномасштабных симметричных вихря с противоположной циркуляцией. Вихри имеют форму неправильных цилиндров, направленных поперек потока. Жидкость в этих вихрях движется с разной скоростью (что видно из плотности линий тока). Видно, что ближе к оси струи (оси OX) скорость движения этих вихрей будет больше.

Данные структуры перемещаются вглубь потока. При этом происходит их деформация. Вихри увеличиваются за счет втягивания жидкости из окружающе-



Рис. 11.6.5

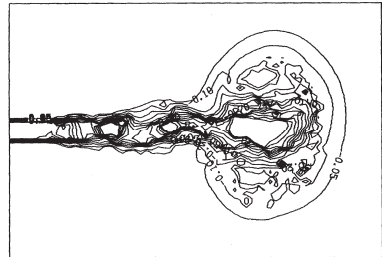


Рис. 11.6.6

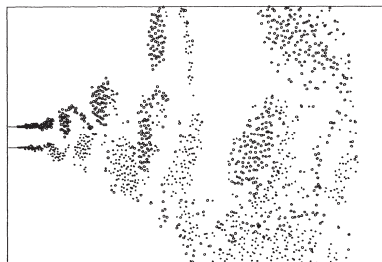


Рис. 11.6.7

го пространства. Вследствие колебания струи нарушается их симметрия. Скорость конвекции когерентных вихрей с течением времени непрерывно уменьшается. Если на отрезке времени от $\tau=30$ до $\tau=40$ средняя скорость движения наибольших вихревых образований приблизительно составляет $u_c \approx 0.5W_\infty$, то в пределах времени от $\tau=60$ до $\tau=70$ $u_c \approx 0.35W_\infty$.

При больших моментах времени происходит процесс инжекции неподвижной жидкости в струю. Движение средней части струи приобретает колебательный характер. В колебательный процесс втягивается также жидкость, которая поступает в струю из окружающего пространства. В областях впадин, за счет колебания струи, с увеличением амплитуды, образуются новые вихревые структуры. Таким образом, часть жидкости, которая находится возле границы струи, втягивается в колебательный процесс, а другая часть – закручивается в большие вихри, которые перемещаются вглубь потока.

На рис. 11.6.9 изображены линии тока при $\tau=90$. Вдоль струи амплитуда колебаний нарастает. Количество жидкости, которое принимает участие в колебаниях, увеличивается за счет инжекции. В областях со значительной кривизной линии тока образуются новые вихревые структуры разного масштаба. Движение жидкости, полученное в рамках такого моделирования, не является хаотичным, наблюдается периодичность в колебаниях струи и размещении крупномасштабных вихрей, которые чередуются по обе стороны от центральной части. Такая периодичность и регулярность с течением времени нарушается, значительное расширение струи и уменьшение скорости конвекции больших вихрей приводит к затуханию частоты колебаний струи.

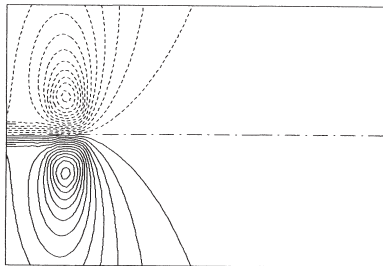


Рис. 11.6.8

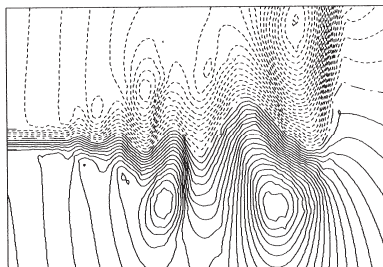


Рис. 11.6.9

Глава 12. Вычислительные технологии на основе дискретных особенностей для плоских нестационарных задач

12.1. О физических аспектах постановки задач аэродинамики

В общем случае, движение жидкости вне подвижных непроницаемых границ $L_d(t)$ сопровождается возникновением на острых (угловых и концевых) кромках непроницаемой границы возникновением вихрей и их отрывом. В том случае, когда сошедшие вихревые структуры представляют собой тонкие вихревые слои (толщина которых много меньше характерного размера задачи), они могут быть формализованы как бесконечно тонкие, непроницаемые вихревые пленки – поверхности разрыва поля касательных скоростей. При такой формализации, рассматриваются уже не вихревое течение в области, а течение с поверхностями разрыва касательной скорости. В таком случае вихревое течение приближается (в интегральном смысле) циркуляционным течением, а поверхности разрыва поля скорости интерпретируются как новообразовавшиеся непроницаемые подвижные границы области течения. Приведенные выше (9.1.1)-(9.1.6) или (11.6.1)-(11.6.10), традиционные постановки начально-краевой задачи является больше физическими, нежели математическими. Для построения вычислительных технологий требуется не только более общая, но и более строгая постановка задач (с выделением классов функций), учитывающая основные факторы физического (аэродинамического) процесса:

- Отрывное течение, во всех точках сопряжения обтекаемых границ с новообразованными отрывными реализуется в соответствии с условием отрыва Бриллюэна-Вилла [52]: «...Кривая состоящая из контура препятствия и свободной границы в точке отрыва имеет точку возврата или непрерывную касательную (с кривизной равной кривизне контура препятствия), в зависимости от того, совпадает или не совпадает точка отрыва с критической точкой потока...»
- При отрывном обтекании, условие Жуковского-Чаплыгина, удовлетворяется естественным образом, что исключает нефизичные, бесконечные значения скоростей на острых концевых и угловых кромках непроницаемой обтекаемой границы (общая граница, уже состоящая из обтекаемой поверхности и отрывной, теперь является гладкой);
- Теорема Кельвина: «При баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных сил с однозначным потенциалом циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру не изменяется»;
- Постулируется «вмороженность» вихрей в среду, что подразумевает, при возникновении отрыва «стекании» в след складок вихревой поверхности, тем самым порождая новые элементы границы;
- В условиях теоремы Кельвина, изменение циркуляции, по замкнутому контуру, охватывающему только обтекаемую границу, вызывает изменение циркуляции в следе за счет порождения новых элементов следа на обтекаемой границе;
- Условие непрерывности давления при переходе через поверхность разрыва скорости должно быть сведено к дифференциальному условию для искомой функции на неизвестной подвижной поверхности разрыва скорости;

12.2. О постановках математических задач аэродинамики

Для определения циркуляционного течения идеальной несжимаемой жидкости для всех точек $\vec{r} = (x, y, z)$ области D^+ , вне подвижных границ $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ (где $L_d(t)$ - обтекаемая граница, движение которой задается, $L_v(t)$ - свободная граница из вихревых слоев в следе в виде поверхностей разрыва касательных скоростей), ставится задача для нахождения функции (от координат и времени) - потенциала $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ для которого скорость $\vec{V} = \nabla \varphi$ и потенциал удовлетворяет уравнению и краевым условиям

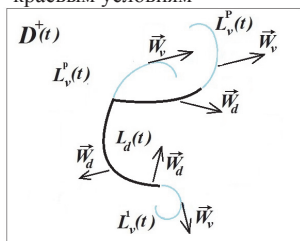


Рис.12.2.1.

$$\text{при } t \geq t_0: \Delta \varphi = 0, \text{ для } \vec{r} \in D^+, \quad (12.2.1)$$

с краевыми условиями на подвижных границах:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\vec{r}_d} = (\vec{W}_d, \vec{n}) \Big|_{\vec{r}_d}, \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t), \quad (12.2.2)$$

с краевыми условиями на неизвестной свободной границе:

$$\left. \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \right|_{r_v} = \left. \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \right|_{r_v}, \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (12.2.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi^+ - \varphi^-) \Big|_{r_v} = 0, \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t), \quad (12.2.4)$$

$$\text{с условиями для внешней задачи: } \lim_{|\vec{r}-\vec{r}_L| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{U}_\infty. \quad (12.2.5)$$

Условия для внутренней задачи задаются на некотором (проницаемом) участке границы $L_Q \in L_d(t)$ (на входе в область D^+):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\vec{r}_Q} = W_{Qn}, \text{ для } \vec{r} = \vec{r}_Q \in L_Q, \quad (12.2.5^*)$$

либо задается мгновенный расход через сечение $L_Q \in L_d(t)$:

$$Q = \int_{L_Q} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad \text{для } \vec{r} = \vec{r}_Q \in L_Q, \quad (12.2.5^{**})$$

$$\text{и с начальными условиями, при } t = t_0: L_d(t_0) = L_{od}, L_v(t_0) = L_{ov}, \quad (12.2.6)$$

Решение φ задачи рассматривается в классе $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\bar{D}^+(t))$,

$$\text{т.е. } |\nabla \varphi| < \infty \text{ на } L(t), \quad (12.2.7)$$

Условие (12.2.7) эквивалентно условию Кутта-Жуковского на острых краях и изломах контура $L_d(t)$, которое естественно реализуется при отрыве - возникновении на острых краях - окончаниях и изломах контура $L_d(t)$ новых элементов свободной границы $L_v(t)$.

Следует отметить, что задача (12.2.1)-(12.2.7), с условиями Неймана (12.2.2) на $L_d(t)$, с условиями с условиями Неймана (12.2.3) и типа Дирихле (12.2.4), на $L_v(t)$, а так же с условиями (12.2.5) на ∞ является внешней нелинейной задачей со свободной, подвижной границей $L_v(t)$. Особенность таких задач состоит в том, что на

неизвестной свободной границе, для ее определения, задаются сразу два условия (12.2.3)-кинематическое и (12.2.4)-динамическое. Движение, неизвестной свободной границы $L_v(t)$, определяется полем скоростей $\vec{V} = \nabla \varphi$, определяемого из решения самой задачи (12.2.1) - (12.2.7).

Для определения формы области $\bar{D}^+(t)$ должно быть определено изменение во времени геометрии движущейся границы $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Причем, изменение $L_d(t)$ задается, или определяется из задачи Коши при заданной правой части

$$\frac{d\vec{r}_d}{dt} = \vec{W}_d(\vec{r}_d, t), \quad (12.2.8)$$

с начальными условиями при $t = t_0 : L_d(t_0) = L_{0d}, \quad (12.2.9)$

а изменение свободной границы $L_v(t)$ определяется из решения задачи Коши для частиц $\vec{r}_v = (x_v(t), y_v(t), z_v(t))$ которые и формируют границу $L_v(t)$ и определяют ее движение:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \quad (12.2.10)$$

с начальными условиями при $t = t_0 : L_v(t_0) = L_{0v}, \quad (12.2.11)$

где правая часть (12.2.11) $\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla \varphi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla \varphi^-(\vec{r}_v, t)) \quad (12.2.12)$

удовлетворяет условию (12.2.3), т.к. определяется из решения задач (12.2.1)-(12.2.11).

Решение задач (12.2.1)-(12.2.7) и (12.2.8), (12.2.9), в выделенном классе функций (12.2.7) возможно при выполнении условий гладкости границ. Гладкость границ области, в задаче, обеспечивается учетом основным фактором физического процесса – возникновением отрыва, удовлетворяющих критерию Вилля: формирующаяся поверхность разрыва скоростей в точке отрыва от обтекаемой поверхности имеет касательную совпадающую с касательной к обтекаемой поверхности. Таким образом, условие Кутта-Жуковского на всех изломах и концах границ выполняется, при естественном возникновении отрывов.

Решение задач (12.2.1)-(12.2.9) относительно потенциала $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$, в деформирующейся области $D^+(t)$ с подвижной границей $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ позволяет определить распределение давления в области течения и вычислять динамические характеристики на ее границах, используя интегральное соотношение Коши-Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} \quad (12.2.13)$$

12.3. О математических моделях плоских нестационарных течений

12.3.1. Интегральные представления моделей.

Решение плоской математической задачи (12.2.1)-(12.2.9) о нестационарном обтекании непроницаемых подвижных границ $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$, в деформирующейся области $D^+(t)$ имеет математическую модель, которая (в терминах ТФКП) имеет интегральные представления (с параметрической зависимостью от t):

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \\ &= \bar{U}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}(z, t) &= u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \\ &= \bar{U}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Математическая модель (12.3.1), (12.3.2) – является решением для задач (12.2.1)-(12.2.9), и будет рассматриваться в качестве приближенного (в интегральном смысле) решения для вихревого течения.

12.3.2. Математические постановки задач для моделей в интегральных представлениях.

Математическая модель в виде интегральных представлений (12.3.1), (12.3.2) определяется подинтегральной функцией и формой границ - контуров $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ на которых они определены. Для нахождения подинтегральных функций и кинематики подвижных границ необходимо удовлетворение краевых условий (12.2.2), (12.2.3), (12.2.4), на соответствующих элементах границы $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$.

Так, краевые условия (12.2.2) и задача Коши (12.2.8), (12.2.9) сводятся к системе интегро-дифференциальных уравнений (12.3.4), (12.3.5) которые должны решаться совместно.

На $L_d(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} z &= \omega_d(t) \in L_d, t \geq t_0 : \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f_d(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \bar{W}_d n(\omega_d) - \bar{U}_\infty n(\omega_d) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f_v(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\}, \quad (12.3.3) \\ \int_{L_d(t)} f(\omega_d, t) d\omega_d &= - \int_{L_v(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} z &= \omega_d(t) \in L_d(t), t > t_0, \\ \frac{d\bar{\omega}_{dv}}{dt} &= \bar{W}_d(\omega_d(t)), \\ t = t_0 : L_d(t_0) &= L_{d0}. \end{aligned} \right. \quad (12.3.4)$$

На $L_v(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_v(t) \in L_v(t), t > t_0, \\ \frac{d\bar{\omega}_v}{dt} = \bar{U}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t) d\omega}{\omega_v - \omega} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f_v(\omega, t)}{\omega_v - \omega} d\omega, \\ t = t_0 : L_v(t_0) = L_{v0}, \end{array} \right. \quad (12.3.5)$$

в точке сопряжения L_v и L_d : выполняется $f_v(\omega_d, t) = f_d(\omega_v, t)$,

Решение задач (12.3.3)-(12.3.5) позволяет для всех $z \in \bar{D}^+(t)$, определять давление из интеграла Коши-Лагранжа (12.2.10):

$$P(z, t) = P_\infty - \rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) + \frac{\bar{V}(z, t) \cdot \overline{\bar{V}(z, t)}}{2} - \frac{U_\infty \cdot \bar{U}_\infty}{2} \right\}, \quad (12.3.6)$$

В силу изменчивости области с заранее неизвестной формой части границ, получить решение задачи возможно только численным методом.

12.4. Дискретные математические модели и элементы вычислительных технологий для плоских нестационарных течений

12.4.1. Дискретизация интегральных представлений.

В плоском случае, будут рассматриваются аналитические функции, в области с кусочно-гладкой границей, допускающий разбиение на совокупность граничных элементов $L = \sum_{j=1}^M L_j$, интегральное представление вида

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega, \quad (12.4.1)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (12.4.2)$$

Утверждается, что справедлива [13] следующая:

Теорема 12.4.1 Пусть аналитическая по z функция имеет интегральное представление вида (12.4.1), (12.4.2), где f непрерывная функция точек кусочно-гладкого контура L , тогда для $\forall z : |z - \omega| > \rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega| > 0$, $\exists M$ (число) и $\exists E, E_0$ (согласованное разбиение контура $L = \sum_{j=1}^M L_j$, $\omega_{j-1} \omega_j = L_j$, $\omega_{0j} \in L_j$), что справедлива замена интегральных представлений (12.4.1), (12.4.2) дискретизированным (квадратурным) представлением:

$$\Phi_0(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O(\varepsilon) \quad (12.4.3)$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n}\right), \quad (12.4.4)$$

$$\text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad \Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \quad (12.4.5)$$

Доказательство. Действительно, в силу тождеств

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega \quad (12.4.6)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} d\omega \quad (12.4.7)$$

Для последних слагаемых правой части которых, в условиях теоремы, когда справедливы оценки

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2} \quad (12.4.8)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi \rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right) \quad (12.4.9)$$

В силу чего, при $L = \sum_{j=1}^M L_j$:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2}, \quad (12.4.10)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(z - \omega)^n} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi \rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right), \quad (12.4.11)$$

$$\text{где } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad \Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}.$$

Выбор числа M и разбиения $L = \sum_{j=1}^M L_j$ так, что

$$\left| \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1 \quad (12.4.12)$$

и доказывает теорему. Так, при $n = 1$ и $f \in H(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, интегральное представление (12.4.2) является интегралом типа Коши, для которого на контуре справедливы теоремы главы 9, который используется для построения метода дискретных вихрей.

12.4.2. Элементы вычислительных технологий для плоских течений

Следует обратить внимание на интегральное представление с логарифмическим ядром в левой части (12.4.1), где подинтегральное выражение является многозначной

функцией с точкой ветвления $\omega \in L_{ab}$. В правой части равенства (12.4.3), представленная сумма комплексных логарифмов (погрешностью пренебрегаем). Равенство, для любой точки z считается вполне определенным и имеет место при условии, что для многозначных функций $\ln(z - \omega)$ выбрана ее ветвь и задан разрез, проходящий вдоль контура L_{ab} . Для выделения выбранной ветви форма разреза безразлична, но для выделения непрерывного (в области) значения функции удобно, чтоб разрез проходил вдоль моделируемого контура. Однако, если для левой части равенства можно условиться – считать разрыв проходящим вдоль контура L_{ab} (Рис.12.4.1.а), то для системы вихрей система разрезов будет проходить по лучам (На Рис.12.4.1.б) соединяющим точки $\omega_{0j} \in L_{ab}$ с бесконечно удаленной точкой (∞).

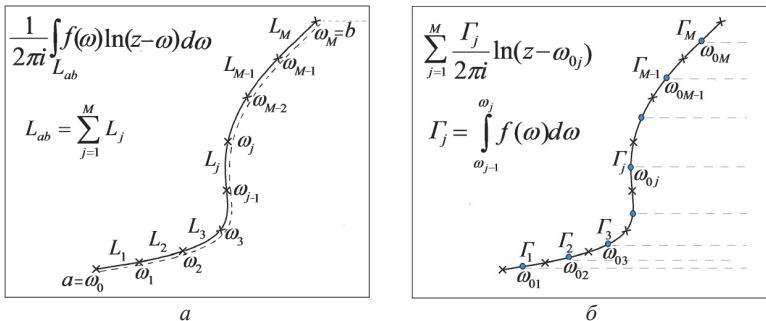


Рис. 12.4.1. – Линия (линии) разреза выделяющие область однозначности.
 а –вдоль контура, для интегрального представления; б –по лучам, для дискретного представления.

Одна из проблем метода дискретных вихрей состоит в невозможности определения непрерывного значения характеристической функции во всей области, вне моделируемого (системой дискретных вихрей) контура (оставаясь, при этом, в «терминологии» метода дискретных вихрей).

Если для интегрального представления (12.4.1) (имеющего смысл потенциала- характеристической функции) и можно условиться, что разрез в области совпадает с контуром, то при вычислении потенциала- характеристической функции в аддитивном представлении (12.4.3), Рис. 12.4.1 б, направления разрезов представляет систему лучей для всей системы дискретных вихрей.

Проблема метода дискретных вихрей – система разрывов значений функции, в значительной части области вне контура, которую невозможно устранить изменением числа дискретных вихрей. Проблема разрывности значений функции вне контура может быть разрешена преобразованием, позволяющим выделять однозначную ветвь и положение единственного разреза в области, для многозначной функции, определенной на произвольном криволинейном контуре [124, 125].

12.4.3. Алгоритм выделения однозначной ветви и положения разреза многозначной функции для линейного контура

Для упорядоченной системы дискретных вихрей (аппроксимирующих) интегральное представление (12.4.3) допустимо преобразование вида (12.4.9) – переход к представлению в виде системы вихревых пар [124, 125] и суммарного вихря:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^j \frac{\Gamma_k}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) \quad (12.4.13)$$

Считается (условно), что линия разреза (совпадающая с линией контура), выделяющая область однозначности для функции, порожденной системой вихревых пар (Рис. 12.4.2.а) формируется из системы разрезов между элементами каждой вихревой пары.

В результате преобразования системы вихревых пар и суммарного вихря

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i} \left(\frac{\ln(z - \omega_{0j+1} + \omega_{0j+1} - \omega_{0j}) - \ln(z - \omega_{0j+1})}{\omega_{0j+1} - \omega_{0j}} \right) + \frac{\sum_{j=1}^M \Gamma_j}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}) \quad (12.4.14)$$

к системе диполей и суммарного вихря

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k}{2\pi i (z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (12.4.15)$$

получим

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i (z - \omega_j)} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0M}), \quad (12.4.16)$$

где $\omega_j = 0.5(\omega_{0j+1} + \omega_{0j})$, $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j$, $D_j = (\omega_{0j+1} - \omega_{0j}) \sum_{k=1}^j \Gamma_k$ (12.4.17)

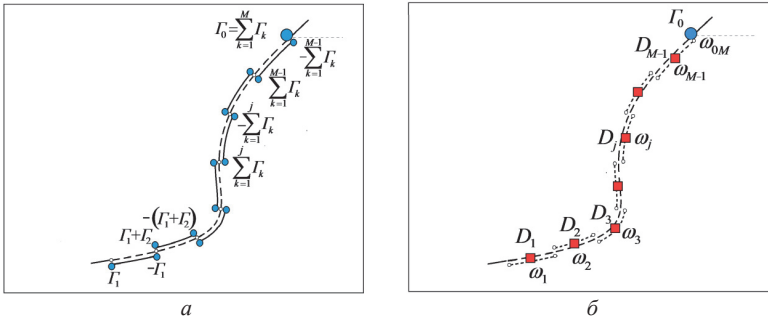


Рис. 12.4.2. – Линия разреза выделяющие область однозначности.
а – для системы вихревых пар и суммарного вихря; б – для системы диполей и суммарного вихря.

Для суммы дискретных вихрей

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (12.4.18)$$

действительная часть имеет вид суммы многозначных функций с точками ветвления (x_{0j}, y_{0j}) , $j = 1, M$

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}. \quad (12.4.19)$$

Мнимая часть имеет вид суммы однозначных функций с логарифмическими особенностями в точках (x_{0j}, y_{0j}) , $j = \overline{1, M}$ (или логарифмической функцией от произведения с особенностями в те-же точках)

$$\psi(x, y) = \text{Im} \Phi(z) = -\sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi} \ln((x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2)^{0.5} = \ln \left(\prod_{j=1}^M ((x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2)^{\frac{\Gamma_j}{4\pi}} \right) \quad (12.4.20)$$

Для той же функции, с представлением в виде суммы диполей и логарифма

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{D_j}{2\pi i(z-\omega_{0j})} + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \text{Ln}(z-\omega_{0M}) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (12.4.21)$$

действительная часть имеет вид суммы однозначных функций с особенностями (полюса) и одним многозначным арктангенсом, с точкой ветвления (x_{0M}, y_{0M}) :

$$\varphi(x, y) = \text{Re} \Phi(z) = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x-x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} \right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \text{arctg} \frac{y-y_{0M}}{x-x_{0M}} \quad (12.4.22)$$

Мнимая часть имеет представление в виде суммы диполей и логарифма:

$$\psi(x, y) = \text{Im} \Phi(z) = -\sum_{j=1}^{M-1} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1} - x_{0j})(x-x_j) + (y_{0j+1} - y_{0j})(y-y_j)}{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2} \right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln((x-x_{0M})^2 + (y-y_{0M})^2)^{0.5} \quad (12.4.23)$$

12.4.4. Алгоритм преобразования для выделения однозначной ветви и разреза многозначной функции (заданной на произвольном контуре).

Случай произвольного контура может быть сведен к системе связанных «ветвистых» контуров. «Ветвистый» контур отличается от предыдущего случая (простого контура) перенумерацией дискретных вихрей на контуре, в зависимости от индекса «ветви».

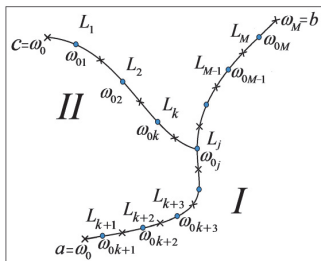


Рис. 12.4.3а) – Разбиение «ветвистого контура»

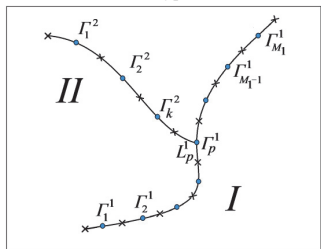


Рис. 12.4.3 б) – Перенумерация вихрей на «ветвистом контуре»

Ветви на «ветвистом контуре» разделяются по уровням I – первичный (основной) и II – вторичный. Изначально заданную нумерацию вихрей на «ветвистом контуре» необходимо изменить в зависимости от индекса ветви, таким образом, чтоб вихрь в точке ветвления входил в число вихрей как на основном, так и на вторичном контуре.

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) \quad (12.4.24)$$

Перенумерация вихрей на «ветвистом контуре» (Рис. 12.4.3 б), выполнена таким образом, чтоб узловой вихрь (в точке ветвления) входил в число вихрей на вторичном контуре. Число вихрей на каждой ветви определяются числами M_j , $j = \overline{1, 2}$. Причем, общее число вихрей $M = M_1 + M_2 - 1$ (т.к. узловой вихрь считается дважды).

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_j^2) \quad (12.4.25)$$

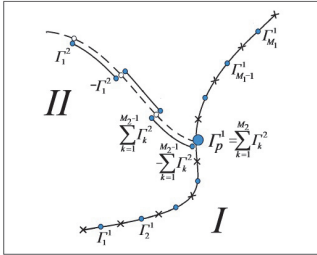


Рис. 12.4.3. г) – Преобразование от вихрей к вихревым парам на вторичной ветви «ветвистого контура»

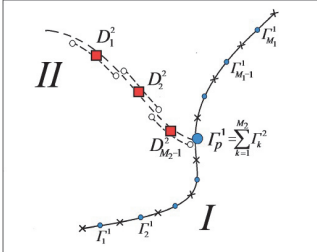


Рис. 12.4.3. д) – Преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви «ветвистого контура»

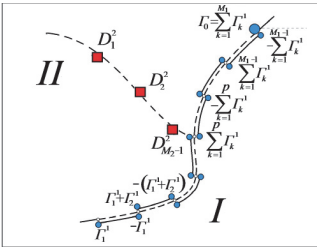


Рис. 12.4.3. е) – Преобразование от вихрей к вихревым парам на основной ветви «ветвистого контура»

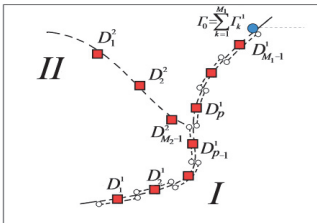


Рис. 12.4.3. ж) – Преобразование от вихревых пар к диполям основной ветви «ветвистого контура»

На Рис.12.4.3г, представлено преобразование от вихрей к вихревым парам на вторичной ветви «ветвистого контура»

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_2} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_k^2}{2\pi i} (\ln(z - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2)) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} L_n(z - \omega_{0M_2}^2) \end{aligned} \quad (12.4.26)$$

Далее, преобразование от вихревых пар к диполям на вторичной ветви «ветвистого контура»

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_2} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \alpha_{0j}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\alpha_{0j+1}^2 - \alpha_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i} \left(\frac{\ln(z - \alpha_{0j+1}^2 + \alpha_{0j+1}^2 - \alpha_{0j}^2) - \ln(z - \alpha_{0j+1}^2)}{\alpha_{0j+1}^2 - \alpha_{0j}^2} \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} L_n(z - \alpha_{0M_2}^2) \end{aligned} \quad (12.4.27)$$

Или, иначе

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_2} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \alpha_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\alpha_{0j+1}^2 - \alpha_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \alpha_j^2)} + \frac{\Gamma_{M_2}^2}{2\pi i} L_n(z - \alpha_{0M_2}^2) \quad (12.4.28)$$

Причем, в силу того, что

$$\omega_j^2 = 0.5(\omega_{0j+1}^2 + \omega_{0j}^2) \quad \omega_{0p}^2 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{и}$$

$$\Gamma_p^1 = \Gamma_0^2 = \sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2, \quad (12.4.29)$$

суммарный вихрь попадает в первое слагаемое правой части (23):

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_j^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\alpha_{0j+1}^2 - \alpha_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \omega_j^2)} \quad (12.4.30)$$

Далее, выполняются преобразования от вихрей к вихревым парам на основной ветви «ветвистого контура»

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi i} (\ln(z - \alpha_{0j}^1) - \ln(z - \alpha_{0j+1}^1)) + \frac{\Gamma_{M_2}^1}{2\pi i} \ln(z - \alpha_{0M_2}^1) + \\ & + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\alpha_{0j+1}^1 - \alpha_{0j}^1) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi i (z - \omega_j^2)} \end{aligned} \quad (12.4.31)$$

Дальнейшие преобразования от вихревых пар к диполям основной ветви «ветвистого контура»

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^{M_1} \Gamma_k^1 \left(\ln(z - \omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) - \ln(z - \omega_{0j+1}^1) \right)}{2\pi} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi(z - \omega_j^2)} \quad (12.4.32)$$

приводит к выражению для $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{(\omega_{0j+1}^1 - \omega_{0j}^1) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^1}{2\pi(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{(\omega_{0j+1}^2 - \omega_{0j}^2) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^2}{2\pi(z - \omega_j^2)} \quad (12.4.33)$$

$$\text{где } \omega_j^1 = 0.5(\omega_{0j+1}^1 + \omega_{0j}^1) \quad \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{и } \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1 \quad (12.4.34)$$

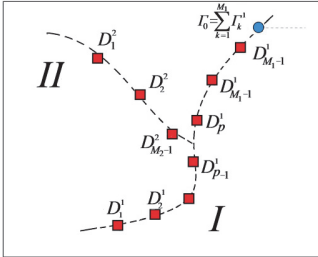


Рис. 12.4.3.з – Распределение диполей и суммарного вихря на «ветвистом контуре»

Окончательно, представление в виде суммы диполей и суммарного вихря на «ветвистом контуре» принимает вид

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi(z - \omega_j^2)}, \quad (12.4.35)$$

$$\text{где } \Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j = \Gamma_0^1 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1 \quad D_j^p = (\omega_{0j+1}^p - \omega_{0j}^p) \sum_{k=1}^j \Gamma_k^p, \quad p = 1, 2, \quad (12.4.36)$$

а общее число диполей будет равно $M_1 + M_2 - 2$.

Для аддитивного представления в виде суммы диполей и логарифма

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi(z - \omega_j^1)} + \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi(z - \omega_j^2)} \quad (12.4.37)$$

действительная часть представима в виде:

$$\varphi(x, y) = \text{Re } \Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(x - x_j^1) - (x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) + \quad (12.4.38)$$

$$+ \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \arctg \frac{y - y_{0M_1}^1}{x - x_{0M_1}^1} + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_k^2}{2\pi} \left(\frac{(y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(x - x_j^2) - (x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right)$$

мнимая часть представима в виде:

$$\psi(x, y) = \text{Im } \Phi(z) = - \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{\Gamma_k^1}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1}^1 - x_{0j}^1)(x - x_j^1) + (y_{0j+1}^1 - y_{0j}^1)(y - y_j^1)}{(x - x_j^1)^2 + (y - y_j^1)^2} \right) - \quad (12.4.39)$$

$$- \frac{\Gamma_0^1}{2\pi} \ln((x - x_{0M_1}^1)^2 + (y - y_{0M_1}^1)^2)^{0.5} - \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{\Gamma_k^2}{2\pi} \left(\frac{(x_{0j+1}^2 - x_{0j}^2)(x - x_j^2) + (y_{0j+1}^2 - y_{0j}^2)(y - y_j^2)}{(x - x_j^2)^2 + (y - y_j^2)^2} \right)$$

В приведенном алгоритме разделение ветвей контура на основную и вторичную условно. Его может выполнить и любым иным способом. Произвол в выборе ветвей на контуре, выборе начала и направления обхода контуров влияют только на численные значения распределенных диполей и положение суммарного вихря (от которого выполняется разрез). Замкнутость контура также не влияет на алгоритм преобразования системы дискретных вихрей в систему диполей и суммарный вихрь, но выбор начала и конца контуров определяет положение стогового вихря и как следствие – положение линии разреза в области.

12.4.5. Дискретные представления моделей (как функций комплексной переменной)

Для численного решения задач аэрогидромеханики в постановке (12.3.3), (12.3.4), может быть использован метод дискретных особенностей, основанный на дискретизации (в соответствии с условиями Теоремы 12.4.1.) интегральных представлений (12.3.1), (12.3.2):

$$\Phi(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \bar{U}_\infty z + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}(t)) + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln(z - \omega_s^p(t)) \quad (12.4.40)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \bar{U}_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i(z - \omega_{0j}(t))} + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i(z - \omega_s^p(t))}, \quad (12.4.41)$$

12.4.6. Дискретные представления моделей (как функций действительных переменных)

Метод дискретных особенностей (МДО) в терминах действительного переменного позволяет выделить потенциал течения (как сумму потенциала набегающего потока, потенциала обтекаемого контура, потенциала вихревого следа), функцию тока (как сумму функций тока от набегающего потока, от обтекаемого контура, от вихревого следа), вектор скорости (как сумму скоростей от набегающего потока, от обтекаемого контура, от вихревого следа) и дискретное представление для теоремы Кельвина:

$$\varphi(x, y, t) = xu_\infty + yv_\infty + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0j}(t)}{x - x_{0j}(t)} \right) + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_s^p(t)}{x - x_s^p(t)} \right), \quad (12.4.42)$$

$$\psi(x, y, t) = yu_\infty - xv_\infty - \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \ln \left[(x - x_{0j}(t))^2 + (y - y_{0j}(t))^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi} \ln \left[(x - x_s^p(t))^2 + (y - y_s^p(t))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.4.43)$$

$$\vec{V}(x, y, t) = \vec{U}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \delta_i^p \vec{V}_i^p(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)), \quad (12.4.44)$$

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p = \Gamma_0 = \text{const} \quad (12.4.45)$$

$$\text{где} \quad \vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t), y_{0j}(t)) = \left(\frac{y_{0j}(t) - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x - x_{0j}(t)}{2\pi R_j^2} \right), \quad (12.4.46)$$

$$R_j = \max \left\{ r_j, \sqrt{(x - x_{0j}(t))^2 + (y - y_{0j}(t))^2} \right\} \quad (12.4.47)$$

12.4.7. Математические постановки задач для дискретных моделей.

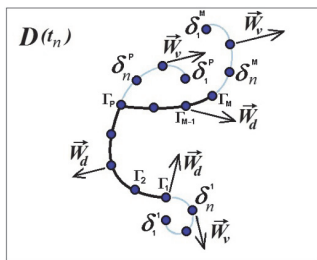


Рис. 12.4.4 – Система дискретных особенностей (вихрей) распределена на «ветвистом контуре»

Математическая модель в виде дискретных представлений (12.4.42) – (12.4.47) определяется дискретными вихрями, распределенными на границе $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Для определения их интенсивностей и их положения в области необходимо удовлетворение краевых условий (12.2.2) в виде системы интегральных уравнений (12.3.3) совместно с решением задач Коши (12.3.4), (12.3.5). Так, при $t \geq t_0$

На $L_d(t)$ система интегральных уравнений (12.3.3) сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) (\vec{V}_j(x_k(t_n), y_k(t_n), x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)), \vec{n}(x_k, y_k)) = \\ & = -(\vec{W}_d, \vec{n}(x_k, y_k)) - (\vec{V}_\infty, \vec{n}(x_k(t_n), y_k(t_n))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p (V_i^p(x_k(t_n), y_k(t_n), x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)), \vec{n}(x_k(t_n), y_k(t_n))), k = \overline{1, M-1} \\ & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) = - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p \end{aligned} \right. \quad (12.4.48)$$

Изменение контура $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ и изменение правой части в (12.4.42 – 12.4.44) определяется из решения задач Коши:

На $L_d(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & npu \quad t > t_0 : \\ & \left(\frac{dx_{0j}(t)}{dt}, \frac{dy_{0j}(t)}{dt} \right) = \vec{W}_d(x_{0j}(t), y_{0j}(t)), \quad j = \overline{1, M}, \\ & \vec{W}_d(x_{0j}(t), y_{0j}(t)) = \vec{V}(x_{0j}(t), y_{0j}(t), t), \\ & npu \quad t = t_0 : (x_{0j}(t_0), y_{0j}(t_0)) \in L_d(t_0). \end{aligned} \right. \quad (12.4.49)$$

На $L_v(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & npu \quad t > t_0 : \\ & \left(\frac{dx_i^p(t)}{dt}, \frac{dy_i^p(t)}{dt} \right) = \vec{W}_v(x_i^p(t), y_i^p(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, P}, \\ & \vec{W}_v(x_i^p(t), y_i^p(t)) = \frac{1}{2} (\vec{V}^+(x_i^p(t), y_i^p(t), t) + \vec{V}^-(x_i^p(t), y_i^p(t), t)), \\ & \text{для } m = \overline{1, i}, \quad npu \quad t = t_{m-1} : (x_m^p(t_m), y_m^p(t_m)) = (x_{0p}(t_{m-1}), y_{0p}(t_{m-1})), \delta_m^p = \Gamma_p(t_{m-1}). \end{aligned} \right. \quad (12.4.50)$$

Решение задач (12.4.48)-(12.4.50) находится численными методами. В результате, для каждого момента времени $t = t_n$ определяются положение и геометрическая форма границ $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$, определяется распределение интенсивностей вихрей

$\Gamma_j(t_n)$, $j = \overline{1, M}$, на контуре и вихрей δ_i^p , $i = \overline{1, n}$; $p = \overline{1, P}$. в следе. Через распределение кинематических характеристик (12.4.42)-(12.4.44), определяется безразмерное давление, полученное из интеграла Коши-Лагранжа (12.3.6).

$$c_p(x, y, t_n) = 1 - \frac{V^2(x, y, t_n)}{U_\infty^2} - \frac{2}{U_\infty^2} \frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} \quad (12.4.51)$$

а также распределение всех необходимых динамических характеристик.

Ниже приведен алгоритм решения задачи с заданной последовательностью вычислений.

12.5. Алгоритмы вычислительных технологий для математических моделей плоских нестационарных течений

12.5.1. Последовательность вычислений при моделировании нестационарного обтекания подвижного, деформирующегося контура (этапы I-VI)

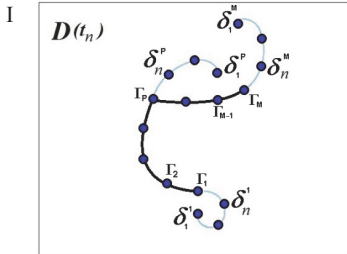


Рис.12.5.1.

Пусть для момента времени $t = t_n$ известно положение и геометрическая форма границ $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$, распределение интенсивностей вихрей $\Gamma_j(t_n)$, $j = \overline{1, M}$, на контуре и вихрей δ_i^p , $i = \overline{1, n}$; $p = \overline{1, P}$. в следе и распределение всех кинематических и динамических характеристик. $\varphi(x, y, t_n) = const$, $\psi(x, y, t_n) = const$, $\vec{V}(x, y, t_n)$, $c_p(x, y, t_n)$, в соответствии с (12.4.42)-(12.4.44).

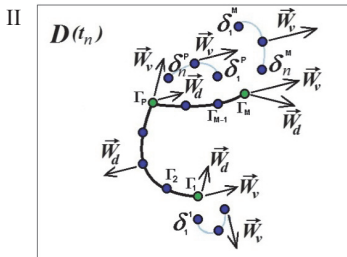


Рис.12.5.2.

Далее, для этого же момента времени $t = t_n$, вычисляются скорости $\vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n))$, определяющие перемещения всех точек контура $L_d(t_n)$ и, в соответствии с (12.4.44), скорости $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) = \vec{V}(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$ перемещения всех точек контура $L_v(t_n)$.

При определении скоростей, во всех p - точках отрыва - концевых и угловых точках контура $L_d(t_n)$ (являющимися точками сопряжения контуров $L_d(t_n)$ и $L_v(t_n)$), следует учесть то, что $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \neq \vec{W}_d(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$.

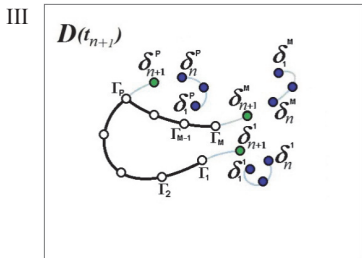


Рис.12.5.3.

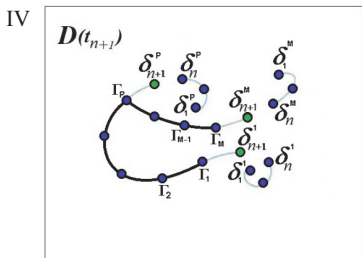


Рис.12.5.4.

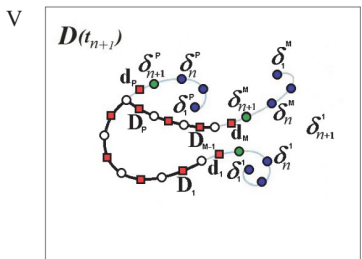


Рис.12.5.5.

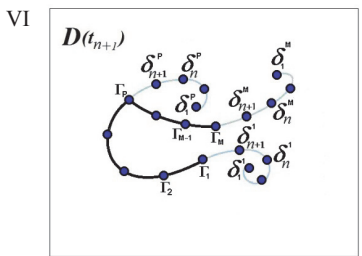


Рис.12.5.6.

Далее, для момента времени $t = t_{n+1}$, определяется новое положение и форма границ $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$, т.е., для всех точек \vec{r} границы $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ численно решаются задачи Коши (12.4.49), (12.4.50), причем, шаг по времени $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ выбирается так, чтоб «сетка разбиения» на $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$, в p -точках отрыва сохраняла равномерность $\max |d\vec{r}_{n+1}^p| = |\vec{r}_{n+1}^p - \vec{r}_n^p| \leq \Delta = \max_p \Delta_p$

Для этого же момента времени ($t = t_{n+1}$), при уже известном положении и форме границ $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ и известных значениях интенсивностей δ_i^p ($i = \overline{1, n+1}$; $p = \overline{1, P}$), из решения системы линейных алгебраических уравнений (12.4.48) определяются новые значения интенсивностей вихрей $\Gamma_j(t_{n+1})$, ($j = \overline{1, M}$) находящихся на сместившемся контуре .

На данном этапе (при $t = t_{n+1}$, при уже известных параметрах задачи, для этого момента времени), выполняются преобразования (представленные в разделе.12.4) вихревой системы (12.4.25) (на контуре) в дипольную (12.4.32), что позволяет вычислять кинематические характеристики

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = const, \psi(x, y, t_{n+1}) = const, \vec{V}(x, y, t_{n+1}),$$

и динамические (12.4.51) характеристики $c_p(x, y, t_n)$

Так как, к моменту времени $t = t_{n+1}$, после проведения всех необходимых расчетов, становятся известны все параметры задачи (данный этап аналогичен этапу I). Для продолжения моделирования, на следующем временном промежутке выполняется переход к этапу I.

Замечание

Вычисление интенсивностей вихрей $\Gamma_j(t_n)$, ($j = \overline{1, M}$) и вихрей δ_i^p , ($i = \overline{1, n}$; $p = \overline{1, P}$) на контуре $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$ позволяют получить представления (12.4.43)- (12.4.45), и формальное представление производной от потенциала по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^M \frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) + \sum_{p=1}^P \frac{\dot{\delta}_n^p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})) \right) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

входящие в выражение для определения безразмерного давления (12.4.51). Вычисление характеристик течения с использованием выражений (12.4.42) возможно только для ограниченного множества задач - задач обтекания границ с простой (прямолинейной) геометрией (Рис.11.6.1). Для задач обтекания границ более сложной формы (Рис.12.5.1) возникают проблемы с неустраимыми разрывами значений функции вне контура $L = L_d + L_v$, описанные в Разделе 12.4. Так, первые два слагаемые в правой части выражения (12.5.1) содержат разрывные функции, что не позволяет его использовать для вычисления производной в (12.5.1).

Из-за наличия неоднозначных функций-арктангенсов в (12.5.1), за обтекаемым контуром произвольной формы образуется «зона тени» (состоящая из системы неустраимых разрывов Рис.12.4.1.б), в которой не могут быть вычислены производные и зависящие от их значения динамические и кинематические характеристики течения.

Для разрешения данной проблемы необходимо выполнить преобразования в (12.5.1), которые базируются на требованиях теоремы Кельвина [81]:

«При баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных сил с однозначным потенциалом циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру не изменяется». В силу чего, для дискретных представлений (12.4.42) - (12.4.44) имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \right) = 0 \quad (12.5.2)$$

В такой формулировке учитывается постулат о «вмороженности» вихрей в среду, что подразумевает «стекание» в след складок вихревой поверхности (поверхностей разрывов скоростей), порождающих новые элементы границы. Порождаемый обтекаемой границей новый (вихревой) элемент представляет собой элемент разрыва в поле скорости – приращение циркуляции. В условиях теоремы Кельвина, изменение циркуляции, по замкнутому контуру, охватывающему только обтекаемую границу, вызывает изменение циркуляции в следе за счет порождения отрыва новых элементов следа на обтекаемой границе. Циркуляция скорости по контуру охватывающему фиксированный материальный объем с уже сформированным следом, при баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных, сил с однозначным потенциалом, не изменяется. В силу чего, справедливо

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \right) = \sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t) + \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p = 0 \quad (12.5.3)$$

Выше приведенное, можно сформулировать в виде следствия

Следствие

При отрывном обтекании, в условиях теоремы Кельвина, изменение циркуляции в следе компенсируется изменением циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру, охватывающему только обтекаемую границу.

$$\sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t_n) = - \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p \quad (12.5.4)$$

Разрешить проблему вычисления производной (12.5.1) позволит

Теорема 12.5.1.

Непрерывное значение производной по времени (12.5.1) от дискретного представления (12.4.42), с разрывными функциями вида имеет представление вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} (\vec{D}_j, \vec{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1}))) + \sum_p (\vec{d}_p, \vec{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

$$\text{Где } \begin{cases} \vec{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) \mathcal{Q}_j \\ \vec{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p) \mathcal{Q}_p \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}) \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases}. \quad (12.5.5)$$

Таким образом, производная (12.5.1) от потенциала (12.4.43) имеет дипольное представление (12.5.4) с векторными интенсивностями. В качестве доказательства рассмотрим преобразование.

12.5.2. Алгоритм преобразования дискретных особенностей.

Алгоритм преобразования потенциала системы дискретных вихрей в потенциал системы диполей приведен в Разделе 12.4. Из (12.5.1) видно, что возможно представление для производной, в котором изменения циркуляции на обтекаемом контуре компенсируется порождением новых циркуляций в следе, вызванных отрывом (12.5.3). На Рис.12.5.9 представлено преобразование «вихрей-производных» к системе «диполей» через систему «дискретных вихревых пар». В преобразованиях учтены движение (деформация) границ, сохранение циркуляции в следе и порождение новой циркуляции в следе за счет отрыва.

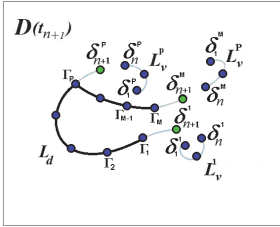


Рис.12.5.7.
Распределение вихрей на $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ при отрыве.

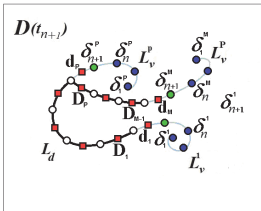


Рис.12.5.8.

Распределение вихрей и диполей на $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ при отрыве.

В соответствии с (12.5.3)

Рис.12.5.9.а) Определяются значения производных от интенсивностей распределенных на контуре $L_d(t_{n+1})$ и оторвавшихся от $L_d(t_{n+1})$ и пополнивших $L_v(t_{n+1})$ новообразованных вихрей

$$\dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) = (\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n)) / (t_{n+1} - t_n), \quad \dot{\delta}_{n+1}^p = \delta_{n+1}^p / (t_{n+1} - t_n)$$

Рис.12.5.9.б) Формируются «дискретные вихревые пары» из оторвавшихся вихрей и вносятся «поправки» в значения производных от интенсивностей вихрей на контуре $L_d(t_{n+1})$: $\hat{q}_j = \hat{q}_i(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_j(t_{n+1})$ $\hat{q}_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\delta}_{n+1}^p$

Рис.12.5.9.в) Переобозначение: выделение оторвавшихся «вихревых пар» и присоединенных «вихрей» на контуре $L_d(t_{n+1})$

Рис.12.5.9.г) Формирование «дискретных вихревых пар» из производных от вихрей на контуре $L_d(t_{n+1})$: $Q_1 = \hat{q}_1, \quad Q_i = \sum_{k=1}^i \hat{q}_k \quad i=1,2,\dots,M-1$

Рис.12.5.9.д) Формирование системы «диполей» из «дискретных пар» производных от вихрей на контуре $L_d(t_{n+1})$:

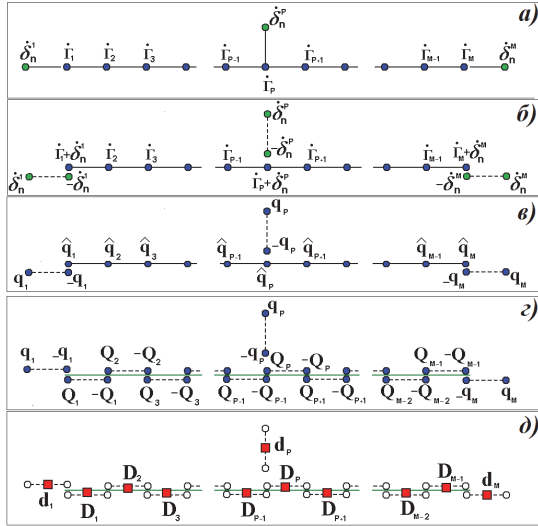


Рис.12.5.9.

Схема преобразования системы вихрей в систему диполей при отрыве на $L_d(t_{n+1})$, в развертке.

При таком построении, выражение (12.5.1) для производной от потенциала примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_j(t_{n+1})}{x - x_j(t_{n+1})} \right) - \frac{Q_j}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0j+1}(t_{n+1})}{x - x_{0j+1}(t_{n+1})} \right) \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) - \frac{q_p}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_{0p}(t_{n+1})}{x - x_{0p}(t_{n+1})} \right) \right\} - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \left(\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})) \right) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (12.5.6)$$

При замене первых двух слагаемых в (12.5.6) их дипольным эквивалентом, с учетом (12.5.5) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_n)}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \frac{Q_j}{2\pi} \frac{(\bar{y}_j - y)(x_{0j+1} - x_{0j}) + (x - \bar{x}_j)(y_{0j+1} - y_{0j})}{(x - \bar{x}_j)^2 + (y - \bar{y}_j)^2} \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^P \left\{ \frac{q_p}{2\pi} \frac{(\bar{y}_n^p - y)(x_{0p} - x_n^p) + (x - \bar{x}_n^p)(y_{0p} - \bar{y}_n^p)}{(x - \bar{x}_n^p)^2 + (y - \bar{y}_n^p)^2} \right\} - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \left(\vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)), \vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n)) \right) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)), \vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \right) \end{aligned} \quad (12.5.7)$$

Что, в обозначениях (12.5.5), дает выражение для производной (12.5.1) в виде (12.5.4). Проведенные преобразования позволяют определять значения динамических характеристик через (12.4.52) для момента времени $t = t_{n+1}$.

Представленные преобразования составляют основу вычислительных технологий для дискретных особенностей.

12.5.3. Тестовые результаты применения вычислительных технологий

Ниже, представлены результаты вычисления распределенных динамических характеристик - давления вблизи передней кромки крыла самолета АН-124 (Рис.12.5.10.), и эпюры нагрузок в сечении высотного сооружения сложной формы (Рис.12.5.11.).

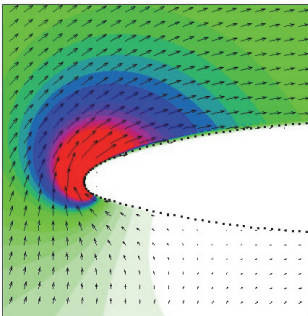


Рис.12.5.10.

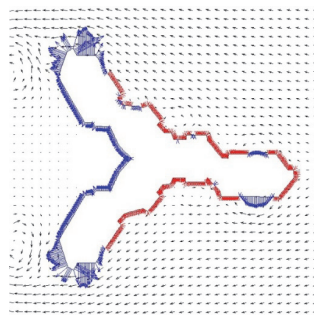


Рис.12.5.11.

На приведенных ниже рисунках представлены результаты моделирования нестационарного обтекания плоской пластинки. Показано влияние различных эффектов (вкладов от: модуля скорости, движения следа, изменения циркуляции на пластинке и явления отрыва).

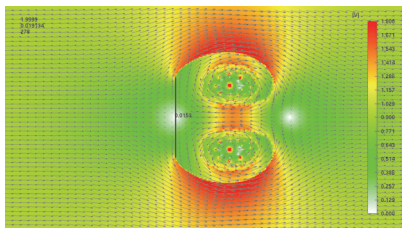


Рис.12.5.12. Распределение векторного поля скорости и скалярного поля - модуля скорости $|V|$ в области течения при $t=2$

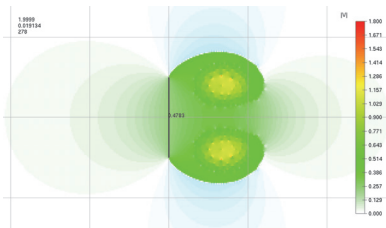


Рис.12.5.13. Распределение «конвективной» части $\frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}$ при $t=2$.

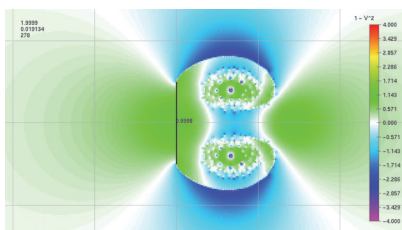


Рис.12.5.14. Распределение величины $1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$ при $t=2$.

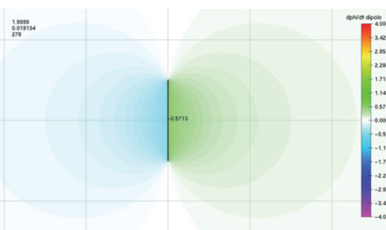


Рис.12.5.15. Распределение «дипольной» части $\frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t}$ при $t=2$.

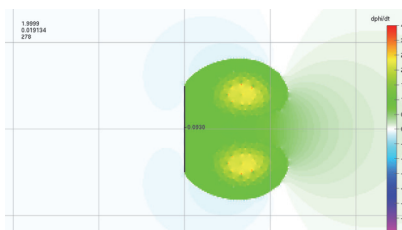


Рис.12.5.16. Распределение итогового значения производной $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ при $t=2$.

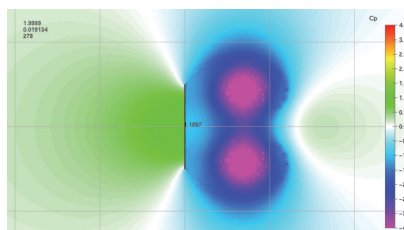


Рис.12.5.17. Распределение коэффициента $C_p(x, y, t)$ при $t=2$.

Ниже представлены мгновенные векторные и скалярные поля гидродинамических течений в плоских каналах (Рис.12.5.18., Рис.12.5.19.) сложной геометрии с препятствиями [133, 134, 157].

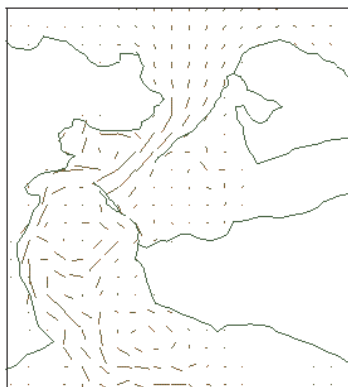


Рис.12.5.18.

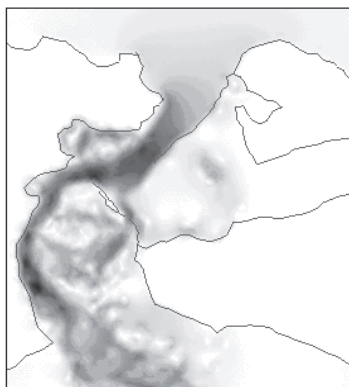


Рис.12.5.19.

Результаты расчетов иллюстрируют возможности представленных вычислительных технологий для решения проблемы определения характеристик отрывного течения, в областях с движущейся (деформирующейся) непроницаемой границей.

12.6. Моделирование вращательного движения системы крыльев

В предыдущих разделах рассматривались аэрогидродинамические эффекты движущихся (колеблющихся, с разными амплитудами) крыльев в безграничном потоке. Однако, для широкого спектра практических приложений уже недостаточно знать характеристики только поступательных или колебательных движений крыльев. Существуют технические системы, использующие вращательное движение крыльев вокруг оси параллельной передней кромке крыла. К таким системам можно отнести, например, движитель (пропеллер Фохта-Шнейдера, Рис. 12.6.1.) применяемый в судостроении для сверхманевренных судов и ветроротор типа Дарье (Рис. 12.6.2.), применяемый в ветроэнергетике.

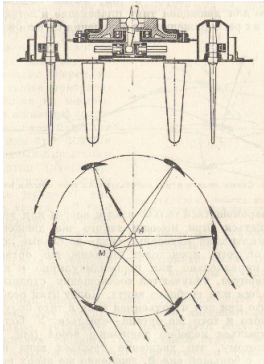


Рис. 12.6.1.

Схема двигателя Фохта–Шнейдера

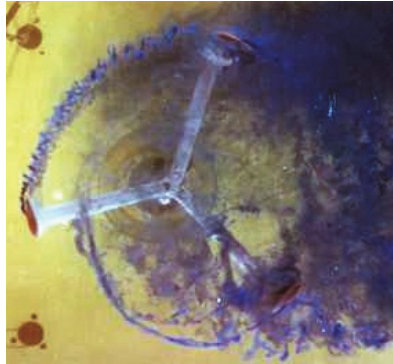


Рис. 12.6.2.

Вихреобразование за ротором типа Дарье.

Анализ структуры течения вокруг трехмерного ротора с вертикальной осью позволяет рассматривать его как систему из N крыльев большого удлинения вращающихся вокруг общей оси, что дает возможность использовать гипотезу плоских сечений. В силу сделанных предположений трехмерный ротор рассматривается в виде системы подвижных тонких крыльев-контуров вращающихся в двумерной области (Рис. 12.6.3.).

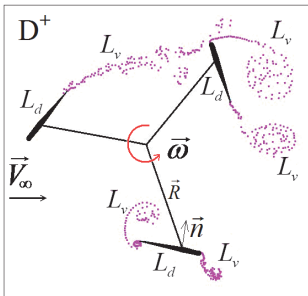


Рис. 12.6.3.

Схема ротора с подвижными крыльями-лопастями

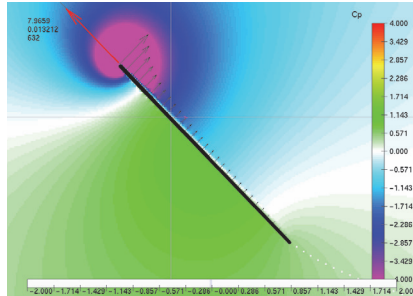


Рис. 12.6.4.

Подсасывающая сила, эпюры нагрузок и поле давления вокруг тонкого крыла

В математической модели ротора с вращающимися тонкими крыльями ключевым элементом является вращающаяся лопасть - крыло движущееся вокруг общей оси причем, с возможностью вращения вокруг собственной оси. Лопасть представляется в воде тонким крылом, у которого задняя кромка считается острой, а передняя кромка считается сглаженной (закругленной). На передней кромке, при ее безотрывном обтекании, возникает подсасывающая сила, дающая свой вклад в силы, действующие на крыло (Рис. 12.6.4.).

В силу того, что режим обтекания вращающегося крыла является нестационарным и отрывным, в математической модели ротора с вращающимися тонкими крыльями предполагается, что отрыв вихрей на лопастях реализуется на кромках крыльев (лопастей):

- на задней кромке – постоянно;
- на передней (сглаженной) кромке – периодически (как только возникают благоприятные для отрыва вихрей условия).

Благоприятным условием отрыва вихрей считается превышение критического значения $\beta_0 = 30^\circ$ (локального) угла атаки γ крыла к относительной скорости потока. Мгновенный локальный угол атаки определяется по формуле [55]:

$$\gamma = \arccos \left\{ \frac{-\vec{V}_{\text{вих}} \cdot \vec{e}}{|\vec{V}_{\text{вих}}|} \right\} \quad (12.6.1)$$

При $|\gamma| > \beta_0$, на передней кромке возникает отрыв вихрей и подсосывающая сила принимает нулевое значение. При этом режиме на крыло действует только сила, определяемая перепадом давления на крыле.

Ниже (Рис.12.6.5.) представлен результат моделирования отрывного обтекания, на протяжении одного оборота, ротора с одной лопастью, которая жестко закреплена под углом $\alpha_0 = 10^\circ$ к касательной к окружности вращения.

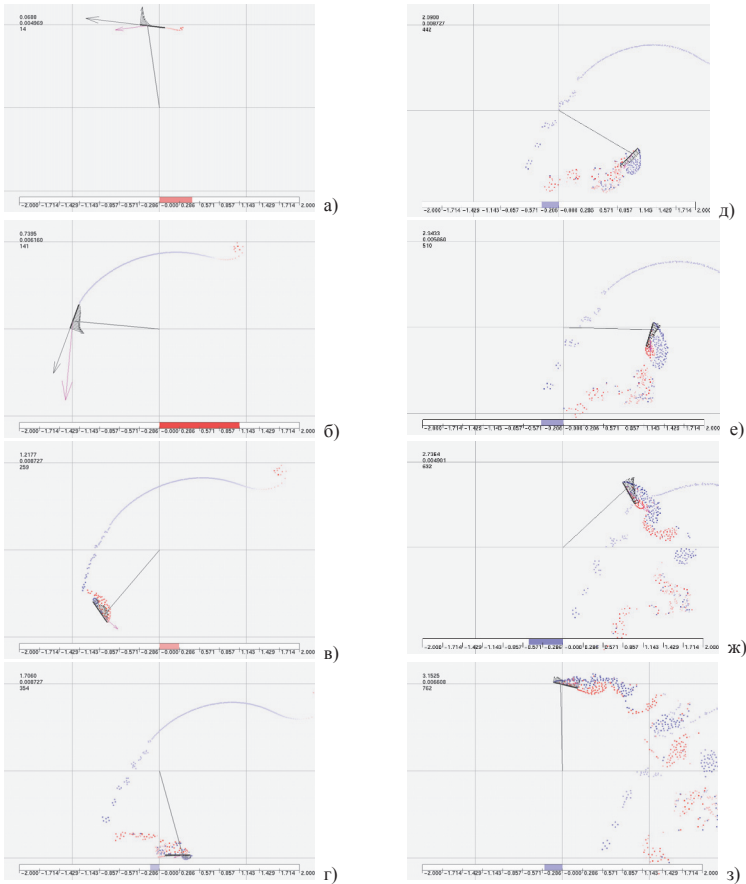


Рис. 12.6.5. Вихреобразование при обтекании вращающегося крыла и возникновение момента на оси однолопастного ротора при $\lambda = 1.5$

Под каждым рисунком отображен момент на оси вращения при разных положениях крыла.

На рис.12.6.5. хорошо видно вихреобразование в момент перекладки лопасти на том участке траектории, где она движется по потоку. Моментные характеристики ротора существенно зависят от мгновенной ориентации движущейся лопасти – крыла по отношению к набегающему потоку (в относительной системе координат Рис. 12.6.6.).

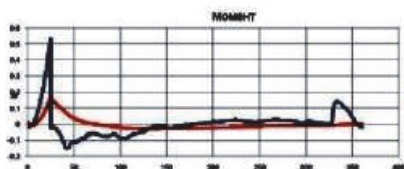


Рис. 12.6.6.

Момент для ротора с фиксировано закрепленной лопастью, при $\lambda = 1,5$

При возникновении подсосывающей силы на крыле, на оси ротора появляется положительный момент. Поэтому, принципиальным для ротора, является выбор закона управления лопастями, уменьшающий время существования отрывного режима. Схема такого управления представлен на Рис. 12.6.7.

Предполагается, что управление всеми лопастями ротора должно привести к увеличению общего момента относительно его оси вращения.

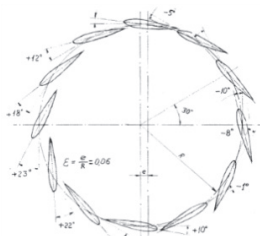


Рис. 12.6.7.

Изменения угла установки при повороте лопасти

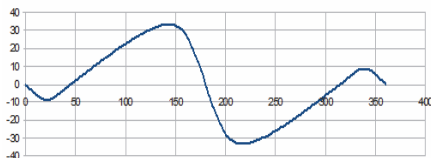


Рис. 12.6.8.

Закон управления лопастью - изменение угла атаки $\alpha = \alpha(\gamma)$ установки крыла относительно касательной к окружности вращения

Причем, активное управление лопастями – крыльями (Рис. 12.6.7.), должно привести к изменению структуры течения вокруг ротора, предназначенного для преобразования энергии потока в энергию вращения.

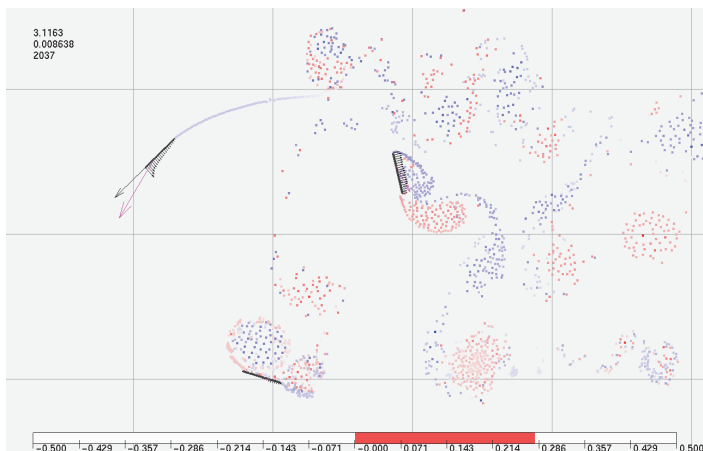


Рис. 12.6.9
Вихревое поле течения и силы, действующие на лопасти, $t = 3,1163$

В математической модели ротора предусмотрена возможность использования произвольного количества лопастей – крыльев. Так, на Рис.12.6.9. представлено поле распределения вихрей в следе за ротором с наиболее популярной трехлопастной компоновкой.

Структура вихревого следа за ротором позволяет провести качественный анализ и оценить эффективность преобразования энергии потока во вращательную энергию ротора.

Ниже представлены результаты моделирования работы ротора с тремя лопастями для случая жесткого крепления лопастей под углом $\gamma = 10^\circ$ (Рис. 12.6.10.) и с использованием закона $\gamma = \gamma(\theta)$ управления лопастями (Рис. 12.6.11.). Коэффициент быстроходности λ изменялся от 1,0 до 1,8 с шагом 0,2. Результаты представлены в виде визуализированного вихревого следа за ротором. Возникновение когерентных вихревых структур зависит от коэффициента быстроходности ротора и от закона изменения угла установки лопасти. По мере увеличения коэффициента быстроходности видно, что след за ротором становится все более хаотичным (рис.6.3.4.), а энергоэффективность ротора падает.

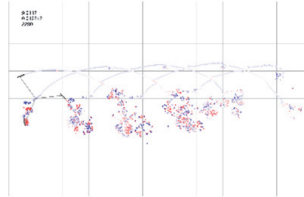
Структурированное вихреобразование вызывает торможение потока в следе за ротором и поддерживает устойчивый перепад давления, определяющий режим работы ротора, а формирование когерентных вихревых структур свидетельствует об эффективной утилизации энергии потока. Наиболее интенсивные вихри образуются в момент перекладки лопасти. Причем, перекладка лопасти за короткий интервал времени вследствие интенсивного вращения лопасти вокруг точки вращения создает вихревые структуры как на задней, так и на передней кромке. При неоптимальном управлении лопастями, в разные моменты времени вращения возникают пульсации давления во всей области течения, что вызывает скачки в значениях момента сил.

λ

1.0



а)

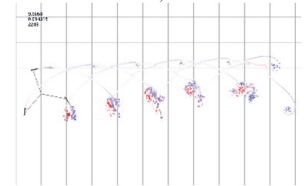


а)

1.2



б)

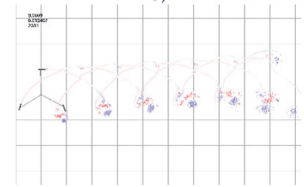


б)

1.4

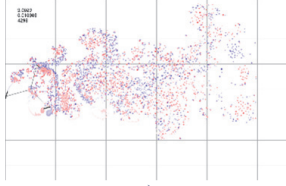


в)

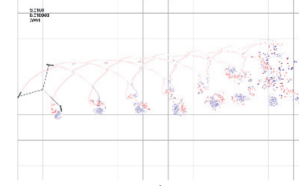


в)

1.6



г)

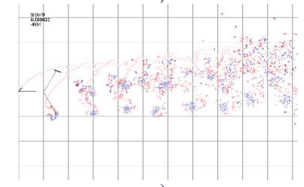


г)

1.8



д)



д)

Рис.12.6.10.

Лопасты закрепленные фиксировано

Рис. 12.6.11.

Лопасты управляемые

Закономерности формирования и эволюции следа за ротором с управляемыми лопастями, условия образования когерентных вихревых структур, позволяют визуально оценить эффективность ротора.

Установлено, что существуют законы управления лопастями ветроротора, которые существенно повышают его энергоэффективность в практически актуальном низкоскоростном диапазоне коэффициента быстроходности (при $\lambda < 2$, рис.12.6.12.).

Сравнение эффективностей ветро/гидроэнергетических установок разных типов представлено на Рис.12.6.12. Круглыми маркерами выделены характеристики ротора с вертикальной осью и управляемыми лопастями. Квадратными маркерами выделены характеристики ротора с вертикальной осью с фиксированными лопастями. Видно, что коэффициент использования ветра для ротора с фиксированными лопастями мало отличается от такого же параметра для низкоскоростного многолопастного ротора с горизонтальной осью (Dutchmultibladeturbine).

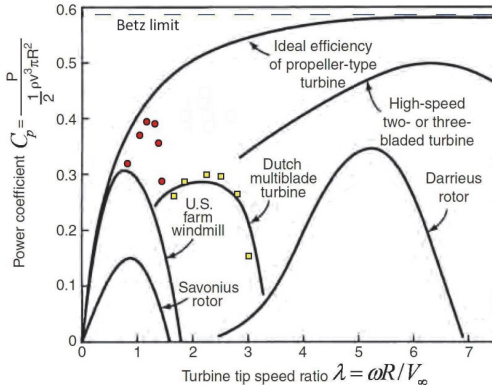


Рис. 12.6.12.

Сравнение эффективностей ветро/гидроэнергетических установок разных типов. Круглыми маркерами выделены характеристики ротора с вертикальной осью и управляемыми лопастями

Математические модели и вычислительные технологии использовались при проведении предпроектных исследований конструкции ротора с вертикальной осью, построенного по схеме с изменяемым углом установки лопасти (патент Украины №84139 от 10.10.2008). Особенность конструкции такого ротора (рис. 12.6.14 состоит в том, что во время вращения его (Рис.12.6.10., Рис.6.2.7) и тем самым – геометрический угол атаки.

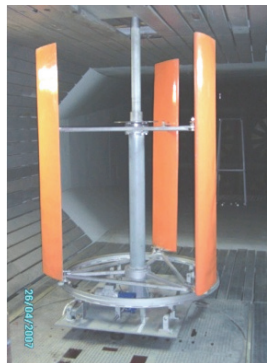


Рис. 12.6.14.

Натурная модель ротора с вертикальной осью и управляемыми лопастями в аэродинамической трубе Национального авиационного университета Украины, г.Киев.

Глава 13. Метод дискретных вихрей в пространственных задачах

13.1. Линейная стационарная задача

Рассмотрим прямоугольное крыло–пластину, лежащую в плоскости OXZ и занимающую прямоугольник $\sigma = [-b, b] \times [-l, l]$. Пусть имеется установившийся поток со скоростью U_0 . Если угол атаки достаточно мал, то в циркуляционной задаче можно считать [14], что след за крылом располагается в его плоскости и занимает полосу $\sigma = [-b, b] \times [-l, l]$. Будем моделировать крыло и след вихревым слоем. Следуя §7.1 в [70] несложно показать, что задачу для нахождения интенсивности вихревого слоя можно свести к решению интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{-b-l}^{b+l} \frac{\gamma(x, z)}{(z_0 - z)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dz dx = f(x_0, z_0), \quad (13.1.1)$$

$$x_0 \in (-b, b), \quad z_0 \in (-l, l),$$

относительно составляющей по размаху вихревого слоя на крыле.

Численно рассматриваемая аэродинамическая задача была решена в [14] методом дискретных прямоугольных подковообразных вихрей следующим образом. Вихревой слой, моделирующий крыло и его след, заменяем системой дискретных прямых подковообразных вихрей $\Pi_{ik} = \Pi(A_{ik}, A_{ik+1})$ интенсивности $\Gamma_{ik} = \gamma(x_i, z_{0k})h_1$, где $A_{ik} = A(x_i, z_k)$, $x_i = -b + ih_1$, $h_1 = 2b/(n+1)$, $i = 1, \dots, n$, $x_{0i} = x_i + h_1/2$, $z_k = -l + (k-1)h_2$, $h_2 = 2l/N$, $k = 1, \dots, N+1$, $z_{0k} = z_k + h_2/2$. Схема расположения прямых подковообразных вихрей (волнистые линии) и расчетных точек (x) для трехмерного прямоугольного крыла для циркуляционной задачи приведена на рис. 13.1.1.

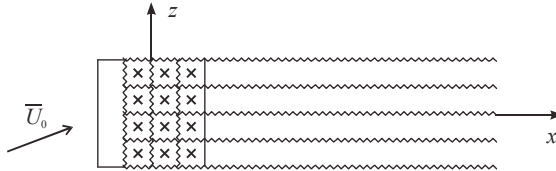


Рис. 13.1.1

Выполняя условие непротекания в расчетных точках, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \Gamma_{ik} \omega_{ik}^{jm} = -U_y, \quad j = 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N, \quad (13.1.2)$$

где

$$\omega_{ik}^{jm} = \frac{K_2(x_i, z_{k+1}, x_{0j}, z_{0m})}{(x_{0j} - x_i)(z_{0m} - z_{k+1})} - \frac{K_2(x_i, z_k, x_{0j}, z_{0m})}{(x_{0j} - x_i)(z_{0m} - z_k)},$$

$$K_2(x, z, x_0, z_0) = x_0 - x + \sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}.$$

Используя результаты §15.4 в [70], видим, что система (13.1.2) аппроксимирует интегральное уравнение (13.1.1). Эта система получается из уравнения (13.1.1) следующим образом: уравнение (13.1.1) берем в каждой расчетной точке $M_{0j,0m}$, $j = 1, \dots, n$,

$m=1, \dots, N$, потом к интегралу в уравнении применяем квадратурные формулы типа рассмотренных в 5.1 (см. также §16.4 в [70]).

Заметим, что сечение вихревой схемы, изображенной на рис. 16.1.1, по расчетным точкам вдоль хорды крыла (параллельно оси X) дает вихревую схему для тонкого профиля в циркуляционной задаче.

Теперь, эквивалентным образом преобразовывая систему (13.1.2) для прямых подковообразных вихрей, можно показать [18, 132], что она аппроксимирует:

1) интегральное уравнение, любое решение которого обращается в нуль на боковых краях;

2) интегральное уравнение, любое решение которого обращается в нуль на задней кромке и в бесконечность – на передней кромке крыла.

Действительно, запишем вначале систему (13.1.2) в виде

$$\sum_{k=1}^N 2 \left(\sum_{i=1}^j \gamma(x_i, z_{0k}) h_i \right) \left(\frac{1}{(z_{0m} - z_{k+1})} - \frac{1}{(z_{0m} - z_k)} \right) = \Omega(x_{0j}, z_{0m}), \quad (13.1.3)$$

$$j = 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N,$$

где

$$\Omega(x_i, z_{0m}) = - \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^N \gamma(x_\nu, z_{0\mu}) h_\nu \left[\frac{r_{\nu, \mu+1}(x_{0j}, z_{0m}) - |x_{0j} - x_\nu|}{(x_{0j} - x_\nu)(z_{0m} - z_{\mu+1})} - \frac{r_{\nu, \mu}(x_{0j}, z_{0m}) - |x_{0j} - x_\nu|}{(x_{0j} - x_\nu)(z_{0m} - z_\mu)} \right] - 4\pi U_y,$$

$$r_{\nu, \mu}(x_{0j}, z_{0m}) = \sqrt{(x_{0j} - x_\nu)^2 + (z_{0m} - z_\mu)^2}.$$

Используя теорему 6.1.8 и переходя к пределу при $n, N \rightarrow \infty$, $0 < R_1 < n/N < R_2 < +\infty$, получаем, что система (13.1.3), а потому и система (13.1.2) аппроксимирует интегральное уравнение

$$2 \int_{-b}^{x_0} \gamma(x, z) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \psi_l(z, z_0) \left[\int_{-b-l}^b \int_{-l}^l \frac{\gamma(x, \tau)}{(z_0 - \tau)^2} \times \right. \quad (13.1.4)$$

$$\left. \times \left(\frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 - (z_0 - \tau)^2}} - \text{sign}(x_0 - x) \right) dx d\tau + 4\pi U_y \right] dz_0,$$

$$\text{sign}(x_0 - x) = \begin{cases} 1, & x_0 \geq x, \\ -1, & x_0 < x, \end{cases}$$

$$\psi_l(z, z_0) = \sqrt{l^2 - z_0^2} \int_{-l}^z \frac{d\tau}{\sqrt{l^2 - \tau^2} (\tau - z_0)}.$$

Видно, что выполняются тождества

$$\psi_l(-l, z_0) \equiv \psi_l(l, z_0) \equiv 0, \quad (13.1.5)$$

из которых следует

$$\int_{-b}^{x_0} \gamma(x, l) dx = \int_{-b}^{x_0} \gamma(x, -l) dx \equiv 0,$$

или

$$\gamma(x, -l) \equiv \gamma(x, l) \equiv 0. \quad (13.1.6)$$

Соотношения (13.1.6) и доказывают утверждение 1. Аналогично доказывается и второе утверждение.

Таким образом, если система (13.1.2) для прямых подковообразных вихрей разрешима и последовательность ее решений сходится, то в пределе эти решения дадут функцию $\gamma(x, z)$ с требуемыми свойствами на кромках крыла. Далее будет показано, что эта система невырождена.

Теперь рассмотрим бесциркуляционное обтекание того же прямоугольного крыла. В этом случае циркуляция по любому контуру, охватывающему крыло, равна нулю и, следовательно, для составляющей $\gamma(x, z)$ по оси Z вихревого слоя, моделирующего крыло, должно выполняться условие

$$\int_{-b}^b \gamma(x, z) dx = 0, \quad z \in (-l, l). \quad (13.1.7)$$

В [14] для численного решения этой задачи был применен метод дискретных подковообразных вихрей, с помощью которого ранее там же была решена циркуляционная задача. Теперь Б-условие требует, чтобы крайними ко всем кромкам (в частности, к задней) ближайшими располагались дискретные вихри (рис. 13.1.2), так как при подходе к задней кромке $\gamma(x, z)$ в этой задаче также обращается в бесконечность. Поэтому дискретная вихревая схема в этой задаче будет иметь вид, изображенный на рис. 13.1.2, т.е. в каждом сечении по расчетным точкам параллельно оси X имеем дискретную вихревую схему для бесциркуляционной задачи для профиля.

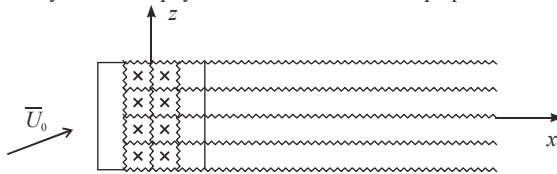


Рис. 13.1.2

Выполняя условие непротекания в расчетных точках $M(x_{0j}, z_{0m})$, $j=1, \dots, n-1$, $m=1, \dots, N$, и учитывая в дискретном виде соотношение (13.1.7), получаем, что для решения поставленной задачи надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных циркуляций Γ_{ik} , $i=1, \dots, n$, $k=1, \dots, N$, дискретных вихрей

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \Gamma_{ik} \omega_{ik}^{jm} = -U_y, \quad j=1, \dots, n-1, \quad m=1, \dots, N, \quad (13.1.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{im} = 0, \quad j=n, \quad m=1, \dots, N.$$

Эта система аппроксимирует систему интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \int_{-l}^l \frac{\gamma(x, z)(x_0 - x)}{(z_0 - z)^2 \sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}} dx dz = -U_y, \quad (13.1.9)$$

$$\int_{-b}^b \gamma(x, z_0) dx \equiv 0, \quad x_0 \in (-b, b), \quad z_0 \in (-l, l).$$

Теперь опять с помощью эквивалентных алгебраических преобразований можно показать, что система (13.1.8) аппроксимирует:

1) интегральное уравнение вида (13.1.4), и поэтому для его решения опять выполняется условие (13.1.6);

2) интегральное уравнение, любое решение которого обращается в бесконечность на передней и задней кромках.

Так как система (13.1.8) определяет только составляющую $\gamma_z(x, z)$ по оси Z вихревого слоя, а в бесциркуляционной задаче надо знать и составляющую $\gamma_x(x, z)$ по оси X этого слоя, то можно воспользоваться соотношением

$$\frac{\partial \gamma_z(x, z)}{\partial z} = -\frac{\partial \gamma_x(x, z)}{\partial x}. \quad (13.1.10)$$

Для бесциркуляционной задачи система интегральных уравнений (13.1.9) эквивалентна уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l}^l \frac{g(x, z) dx dz}{[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} = f(x_0, z_0) = -U_y, \quad (13.1.11)$$

$$x_0 \in (-b, b), \quad z_0 \in (-l, l).$$

Функция $g(x, z)$, являющаяся решением уравнения (13.1.11), обращается в нуль на всех кромках крыла.

Найдя функцию $g(x, z)$, определим сразу обе составляющие вихревого слоя на крыле по формулам

$$g'_x(x, z) = \gamma_z(x, z); \quad g'_z(x, z) = -\gamma_x(x, z), \quad (13.1.12)$$

откуда следует равенство (13.1.10).

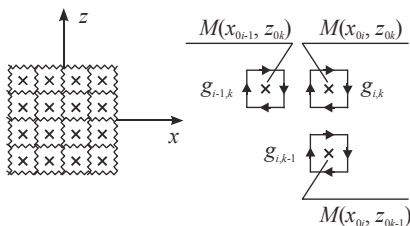


Рис. 13.1.3

Последнее замечание в применении к непрерывному вихревому слою приводит к следующей модели. Так как вихревой слой имеется только на крыле, то удобно его аппроксимировать дискретными замкнутыми вихревыми рамками (рис. 13.1.3) $\Pi_{0,i,k} = \Pi(A_{i,k}, A_{i,k+1}, A_{i+1,k+1}, A_{i+1,k})$ с циркуляцией $g_{i,k} = g(x_{0i}, z_{0k})$, состоящими из вихревых отрезков $(A_{i,k}, A_{i,k+1})$, $(A_{i,k+1}, A_{i+1,k+1})$, $(A_{i+1,k+1}, A_{i+1,k})$, $(A_{i+1,k}, A_{i,k})$, $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$. Из рис. 13.1.3 и дискретизации формул (13.1.12) видно, что

$$\gamma_z(x_i, z_{0k}) h_1 = \Gamma_{ik} = \frac{g(x_{0i}, z_{0k}) - g(x_{0i-1}, z_{0k})}{h_1} h_1, \quad (13.1.13)$$

так как отрезок $[A_{i,k}, A_{i,k+1}]$ входит в состав дискретных вихрей $\Pi_{0,i-1,k}$ и $\Pi_{0,i,k}$ с разными направлениями циркуляции на них – в первой с отрицательным направлением (по отношению к оси Z), а во второй – с положительным направлением. Аналогично имеем

$$\gamma_x(x_{0i}, z_k) h_2 = -\frac{g(x_{0i}, z_{0k}) - g(x_{0i}, z_{0k-1})}{h_2} h_2. \quad (13.1.14)$$

При этом полагаем, что $g(x_{0i-1}, z_{0k}) = 0$ при $i = 0$ и $k = 1, \dots, N$ и $g(x_{0i}, z_{0k-1}) = 0$ при $k = 1$ и $i = 0, 1, \dots, n$.

Из соотношений (13.1.13) и (13.1.14) следует

$$g(x_{0j}, z_{0m}) = \sum_{i=0}^j \gamma_z(x_i, z_{0m}) h_1 = \sum_{k=1}^m \gamma(x_{0j}, z_k) h_2, \quad (13.1.15)$$

где $j = 0, 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, N$.

Граничное условие о непротекании крыла будем выполнять в расчетных точках (x_{0j}, z_{0m}) , $j = 0, 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, N$, что дает систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^N g_{i,k} \omega_{i,k}^{j,m} = -U_y, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N, \quad (13.1.16)$$

где $\omega_{i,k}^{j,m}$ – множитель при $j\Gamma$ в формуле (13.3.20) при $x_0 = x_{0j}$, $x_1 = x_i$, $x_2 = x_{j+1}$, $z_0 = z_{0m}$, $z_1 = z_k$, $z_2 = z_{k+1}$.

Воспользовавшись формулой (12.3.21), систему (13.1.16) запишем в виде

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^N g(x_{0i}, z_{0k}) \frac{1}{4\pi} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_{x_i}^{x_{j+1}} \frac{dx dz}{[(x_{0j} - x)^2 + (z_{0m} - z)^2]^{3/2}} = -U_y, \quad (13.1.17)$$

$$j = 0, 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N.$$

Из результатов 6.3 следует, что система (13.1.17) аппроксимирует интегральное уравнение (13.1.11).

Покажем, что система (13.1.17) является невырожденной, так как для матрицы системы выполняется признак Адамара – модуль диагонального члена в каждой строке больше суммы модулей остальных членов этой строки. Действительно, если $(x_i, z_k) \neq (x_j, z_m)$, то

$$a_{i,k}^{j,m} = \frac{1}{4\pi} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_{x_i}^{x_{j+1}} \frac{dx dz}{[(x_{0j} - x)^2 + (z_{0m} - z)^2]^{3/2}} > 0, \quad (13.1.18)$$

а если $i = j$, $k = m$, то из формул (13.3.20) и (13.3.21) получаем, что

$$a_{j,m}^{j,m} = \frac{1}{4\pi} \int_{z_m}^{z_{m+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx dz}{[(x_{0j} - x)^2 + (z_{0m} - z)^2]^{3/2}} < 0. \quad (13.1.19)$$

Сумма всех элементов $a_{i,k}^{j,m}$ строки (j, m) в матрице системы (13.1.17) будет

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^N a_{i,k}^{j,m} = \frac{1}{4\pi} \int_{-b-1}^b \int_{-l}^l \frac{dx dz}{[(x_{0j} - x)^2 + (z_{0m} - z)^2]^{3/2}} < 0. \quad (13.1.20)$$

Таким образом, из формул (13.1.18)–(13.1.20) получаем

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N a_{i,k}^{j,m} < -a_{j,m}^{j,m} = |a_{j,m}^{j,m}|. \quad (13.1.21)$$

Неравенство (13.1.21) и означает выполнение признака Адамара.

Так как для любых чисел a_i и b_i справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = -\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) (b_{i+1} - b_i), \quad (13.1.22)$$

где полагаем $b_{n+1} = 0$, то система (13.1.8) эквивалентна системе вида (13.1.17) и поэтому также невырождена.

Замечание 13.1.1. В работе [78] с помощью понятия обобщенного оператора Фурье доказана следующая теорема.

Теорема 13.1.1. Если в уравнении (13.1.11) $b=l$, т.е. крыло является квадратом, а в системе (13.1.16) $h_1 = h_2$, т.е. $n = N$, то между решением системы (13.1.16) и единственным решением интегрального уравнения (13.1.11) выполняется соотношение

$$|g_{i,k} - g(x_{0i}, z_{0k})| = \theta(x_{0i}, z_{0k}), \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (13.1.23)$$

где величина $\theta(x_{0i}, z_{0k})$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) для всех точек $M(x_{0i}, z_{0k})$, находящихся на расстоянии δ от границы крыла,

$$\theta(x_{0i}, z_{0k}) < A |\ln h|^{9/4} h^{1/4 - \varepsilon_1}, \quad (13.1.24)$$

где $0 < \varepsilon_1 < 1/4$;

- 2) для всех точек $M(x_{0i}, z_{0k})$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \theta(x_{0i}, z_{0k}) h^2 \rightarrow 0 \quad (13.1.25)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 13.1.2. Рассуждениями, аналогичными для рассуждений относительно системы (13.1.8), можно показать, что система линейных алгебраических уравнений (13.1.2) для циркуляционной задачи обтекания прямоугольного крыла также невырождена.

13.2. Линейная стационарная задача для крыла произвольной формы в плане

В данном параграфе рассмотрим крыло конечного размаха сложной формы в плане и схематизированный летательный аппарат. Численно эта задача решена в [14] с помощью косых подковообразных вихрей.

Вначале возьмем плоское крыло, имеющее вид канонической трапеции σ (см. рис. 13.2.1). Возьмем отображение F прямоугольника $D = [0,1] \times [-l, l]$ плоскости OXZ на область σ , определяемое формулой

$$\begin{cases} x = x(x^1, z) = x^1 [x^+(z) - x^-(z)] + x^-(z), \\ z = z, \end{cases} \quad (13.2.1)$$

где $x^-(z) = a^0 + zb^0$, $x^+(z) = a^1 + zb^1$, $x^+(z) > x^-(z)$, $z \in [-l, l]$, $x^1 \in [0,1]$.

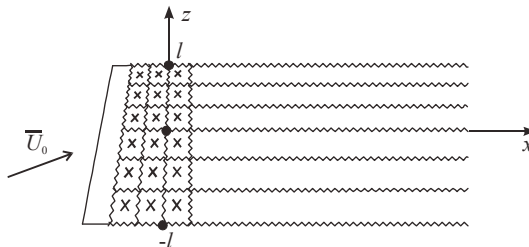


Рис. 13.2.1

На прямоугольнике D возьмем каноническое разбиение на прямоугольники и канонические расчетные точки, определяемые точками $B_{i,k}^1(x_i^1, z_k)$, $B_{i,0k}^1(x_i^1, z_{0k})$, $B_{i,0k}(x_{i,0k}, z_{0k})$ и $B_{0i,0k}(x_{0i,0k}, z_{0k})$, а на крыле σ — точки $B_{i,k}(x_{i,k}, z_k)$, $B_{i,0k}(x_{i,0k}, z_{0k})$ и

$B_{0i,0k}(x_{0i,0k}, z_{0k})$, являющиеся образами точек на прямоугольнике D (см. параграф 5.4). Через Π_{ik} обозначим косою подковообразный вихрь, у которого присоединенным является вихрь $(B_{i,k}, B_{i,k+1})$, а интенсивность $\Gamma_{ik} = \gamma(x_{i,0k}, z_{0k})J(z_{0k})h_1$, где $J(z_{0k}) = x^+(z) - x^-(z)$ – якобиан отображения, задаваемого формулой (13.2.1).

Выполняя условие непротекания крыла σ в расчетных точках $B_{0j,0m}(x_{0j,0m}, z_{0m})$, $j=1, \dots, n$, $m=0, 1, \dots, N$ (рис. 13.2.1), для решения рассматриваемой циркуляционной задачи рассмотрим следующую систему

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^N \Gamma_{ik} \omega_{ik}^{jm} = -V_{jm}^*, \quad j=1, \dots, n, \quad m=0, 1, \dots, N, \quad (13.2.2)$$

где

$$\omega_{ik}^{jm} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{z_{0m} - z_{k+1}} - \frac{1}{z_{0m} - z_k} + \frac{r(B_{i,k+1}, B_{0j,0m})}{\lambda_{0j,0m,j}(z_{0m} - z_{k+1})} - \frac{r(B_{i,k}, B_{0j,0m})}{\lambda_{0j,0m,j}(z_{0m} - z_k)} \right],$$

$$r(B_{i,k}, B_{0j,0m}) = \sqrt{(x_{0j,0m} - x_{i,k})^2 + (z_{0m} - z_k)^2},$$

$$\lambda_{0j,0m,j} = (x_{0j}^1 - x_j^1)J(z_{0m}).$$

Можно показать [70], что система (13.2.2) аппроксимирует сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\gamma(x, z)}{(z_0 - z)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dx dz = -V^*(x_0, z_0). \quad (13.2.3)$$

Аналогично тому, как и в параграфе 5.4, можно показать [18, 132], что система (13.2.2) метода косых подковообразных вихрей для циркуляционной задачи обтекания канонической трапеции:

- 1) невырождена;
- 2) аппроксимирует интегральное уравнение, любое решение которого обращается в нуль на боковых кромках;
- 3) аппроксимирует интегральное уравнение, любое решение которого обращается в нуль на задней кромке и в бесконечность – на передней кромке трапеции σ .

Этим самым будет показано, что метод косых подковообразных вихрей выделяет то решение уравнения (13.2.3), которое соответствует физической картине рассматриваемой задачи.

Замечание 13.2.1. Если одна из боковых кромок трапеции σ вырождается в точку, т.е. поверхность σ представляет собой треугольник, то аппроксимация квадратными суммами в (13.2.2) интеграла в (13.2.3) удовлетворяет соотношению вида (13.1.24), а будет ли выполняться соотношение вида (13.1.25), т.е. выполняется ли интегральная сходимость, пока неизвестно.

Для решения бесциркуляционной задачи обтекания канонической трапеции σ при использовании косых подковообразных вихрей, как и в 13.1, надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений [18, 21, 23, 131, 132]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^N \Gamma_{ik} \omega_{ik}^{jm} = -V_{jm}^*, \quad j=1, \dots, n-1, \quad m=0, 1, \dots, N, \quad (13.2.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{im} = 0, \quad j=n, \quad m=0, 1, \dots, N.$$

Отметим, что для бесциркуляционной задачи уравнение (13.2.3), дополненное условием

$$\int_{x^-(z)}^{x^+(z)} \gamma(x, z) dx \equiv 0, \quad z \in [-l, l], \quad (13.2.5)$$

эквивалентно уравнению

$$\int_{-l}^l \int_{x^-(z)}^{x^+(z)} \frac{g(x, z) dx dz}{[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} = -V^*(x_0, z_0), \quad (13.2.6)$$

$x_0, z_0 \in \sigma$

где

$$g(x, z) = \int_{x^-(z)}^x \gamma(x, z) dx. \quad (13.2.7)$$

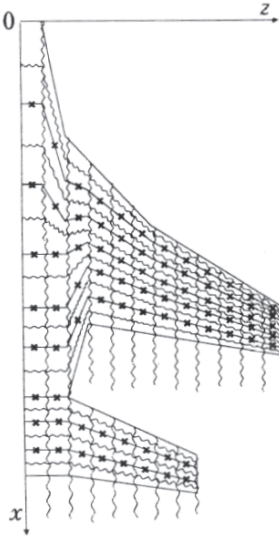


Рис. 13.2.2

должно быть таким, как на рис. 13.2.1. Выполняя условие непротекания в расчетных точках, получим систему n уравнений относительно n неизвестных циркуляций дискретных вихрей (n – общее число дискретных вихрей на всей несущей поверхности). При решении бесциркуляционной задачи вихревой слой на поверхности σ лучше моделировать замкнутыми четырехугольными вихревыми рамками аналогично тому, как это показано на рис. 13.1.3. Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе.

13.3. Бесциркуляционное обтекание произвольной поверхности

В бесциркуляционных задачах вихревой слой возникает только на несущей поверхности. В общем случае несущая поверхность не является плоской, и поэтому моделировать вихревой слой подковообразными вихрями уже не представляется возмож-

ным. К настоящему времени наиболее распространено моделирование вихревого слоя в пространственных бесциркуляционных задачах дискретными замкнутыми четырехугольниками и треугольными вихревыми рамками. Выбор замкнутых вихревых рамок и расчетных точек лучше производить с помощью выбора соответствующей координатной сетки на всей поверхности σ или отдельных ее частей. Тогда четырехугольные дискретные вихревые рамки (которые могут вырождаться в треугольные, как, например, на сфере в ее полюсах, рис. 13.3.1, а) состояются из кусков координатных линий, а расчетные точки выбираются в центрах по координатам этих вихревых рамок. Если поверхность σ состоит из нескольких частей, на каждой из которых имеется своя координатная сетка (рис. 13.3.1, б), то на линиях соединения этих частей вихревые рамки должны иметь общие стороны.

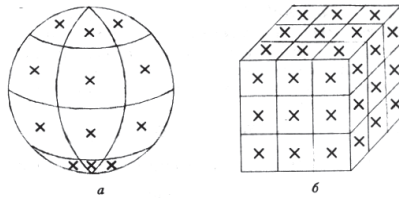


Рис. 13.3.1

Пусть имеется n дискретных замкнутых вихревых рамок интенсивности Γ_k , $k=1, \dots, n$, и в каждой из них выбрано по одной расчетной точке M_{0k} , $k=1, \dots, n$. Тогда, выполнив условие непротекания в расчетных точках, получим систему n уравнений относительно n неизвестных циркуляций Γ_i вихревых рамок

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m = -U_0(M_{0m}) n_{M_{0m}}, \quad m=1, \dots, n, \quad (13.3.1)$$

где ω_k^m – сумма нормальных составляющих скоростей в расчетной точке M_{0m} от вихревых отрезков, составляющих k -ю вихревую дискретную рамку. Если воспользоваться замечанием 9.3.1, то видим, что Γ_k есть скачок потенциала двойного слоя постоянной интенсивности Γ_k на поверхности σ_k , ограниченной k -й рамкой. Таким образом, система уравнений (13.3.1) должна аппроксимировать сильно сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} g(M) \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) d\sigma_M = -U(M_0) n_{M_0}, \quad M_0 \in \sigma. \quad (13.3.2)$$

Теперь систему (13.3.1) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^n g_k \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial n_M} \frac{\partial}{\partial n_{M_{0m}}} \left(\frac{1}{r_{MM_{0m}}} \right) d\sigma_M = -U(M_{0m}) n_{M_{0m}}, \quad M_{0m} \in \sigma. \quad (13.3.3)$$

В силу результатов параграфа 5.3, строго доказанных для плоской поверхности σ , для интеграла из уравнения (13.3.2) получаем, что для g_k надо брать условие

$$g_k = g(M_{0k}), \quad k=1, \dots, n. \quad (13.3.4)$$

Пусть теперь поверхность σ является простой незамкнутой (например, поверхность куба без одной грани), тогда уравнение (13.3.2) имеет единственное решение и, повторяя рассуждения, проведенные для системы (13.1.16), можно показать: если выполняется условие

$$(\pi_M, \pi_{M_0})r_{MM_0}^2 - 3(\pi_{M_0}, r_{MM_0})(\pi_M, r_{MM_0}) > 0 \quad (13.3.5)$$

для любых двух точек M и M_0 на поверхности σ , а также условие

$$(\pi_{M_0m}, r_{MM_0}, d\sigma_k) \geq 0 \quad \text{или} \quad \leq 0 \quad (13.3.6)$$

для любых m и k , где $d\sigma_k$ – дифференциал длины дуги в точке M на контурах L_k или L поверхностей σ_k и σ , направление на которых задается формулой (12.3.2), то система уравнений (13.3.3) является невырожденной, т.е. однозначно разрешимой [46].

Пусть теперь поверхность σ является простой замкнутой (например, сфера, поверхность куба или любой другой гомеоморфный, кусочно-гладкий образ сферы). Так как нормальная производная от потенциала двойного слоя постоянной плотности равна нулю для точек кусочно-гладкой замкнутой поверхности [113], то система (13.3.2) в этом случае является вырожденной. Напомним, что решение интегрального уравнения (13.3.2) в рассматриваемом случае определено с точностью до константы, причем в задачах аэродинамики эта константа не существенна, т.е. ее можно выбирать произвольно. Поэтому систему (13.3.1) преобразуем следующим образом. Возьмем интенсивность одной из вихревых рамок равной нулю, например, $\Gamma_n = 0$ (расчеты показывают, что выбор этой рамки не влияет на результаты нахождения аэродинамических характеристик [76]). Тогда система (13.3.1) при этом условии станет переопределенной и в общем случае несовместной. Поэтому введем регуляризирующую переменную γ_{0n} и рассмотрим систему

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_k \omega_k^m = -V_m^*, \quad m = 1, \dots, n. \quad (13.3.7)$$

Как показано в [46], система (13.3.7) при выполнении условий (13.3.5) и (13.3.6) является невырожденной.

Можно также вместо задания интенсивности одной из вихревых рамок равной нулю полагать равным нулю сумму интенсивностей всех рамок, т.е. рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \omega_k^m &= -V_m^*, \quad m = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \Gamma_k &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.8)$$

В качестве примера конкретных расчетов по изложенной в данном параграфе схеме рассмотрим уравнение вида (13.3.2) на сфере $C_{R=1}$ радиуса единица с центром в начале координат, заданную в сферических координатах

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \cos \theta, \end{cases}$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Напомним, что в [70] получено спектральное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}} K_0(M, M_0) Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M &= -\frac{n(n+1)}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \\ (\theta_0, \varphi_0) &\in C_{R=1}, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (13.3.9)$$

где $K_0(M, M_0) = \frac{\partial}{\partial \bar{m}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{m}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right)$, а $Y_n(\theta, \varphi)$ – сферическая функция порядка n (см. параграф 6.4).

Теперь систему вида (13.3.8) для сферы построим следующим образом. На отрезке $[0, 2\pi]$ возьмем точки $\varphi_k = (k-1)h$, $h = 2\pi/(2n) = \pi/n$, $k = 1, \dots, 2n+1$, и точки $\varphi_{0k} = \varphi_k + h/2$, $k = 1, \dots, 2n$, а на отрезке $[0, \pi]$ – точки $\theta_k = (k-1)h$, $h = \pi/n$, $k = 1, \dots, n+1$, и $\theta_{0k} = \theta_k + h/2$, $k = 1, \dots, n$. Тогда линии $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, \dots, 2n+1$, и $\theta = \theta_k$, $k = 1, \dots, n+1$ разобьют прямоугольник $I = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ на прямоугольники $I_{i,k}$ с центрами в точках $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$, $i = 1, \dots, 2n$, $k = 1, \dots, n$. Образ прямоугольника $I_{i,k}$ на сфере C_R будем обозначать $\sigma_{i,k}^*$ (на единичной сфере $\sigma_{i,k}$), а образ точки $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$ – $M_{0i,0k}$. Тогда система (13.3.8) примет вид

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n g_n(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} K_0(M, M_{0j,0m}) d\sigma_M = f(M_{0j,0m}), \quad (13.3.10)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n g_n(M_{0i,0k}) \Delta\sigma_{i,k} = 0, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad m = 1, \dots, n,$$

где $\Delta\sigma_{i,k}$ – площадь поверхности $\sigma_{i,k}$.

Если теперь справа в (13.3.9) взять $n=1$ ($f(M_0) = -(2/3)Y_1(\theta_0, \varphi_0)$), то точным решением будет $g(M) = Y_1(\theta, \varphi) + A$, где A – произвольная константа. Возьмем в $Y_1(\theta, \varphi)$ коэффициенты $A_{0,1} = A_{1,1} = B_{0,1} = B_{1,1} = 1$, тогда получим $Y_1(\theta, \varphi) = \cos\theta + (\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда следует, что

$$\int_{C_{R=1}} Y_1(\theta, \varphi) d\sigma_M = \int_0^\pi d\theta \left[\int_0^{2\pi} (\cos\theta + (\cos\varphi + \sin\varphi)\sin\theta) d\varphi \right] = 0. \quad (13.3.11)$$

Таким образом, решением уравнения (13.3.9) при $n=1$ и условии

$$\int_{C_{R=1}} g(M) d\sigma_M = 0 \quad (13.3.12)$$

будет функция $g(M) = Y_1(\theta, \varphi)$.

Положим теперь в системе (13.3.10) $f(M_0) = -(2/3)Y_1(\theta_0, \varphi_0)$ и найдем $g_n(M_{0i,0k})$. Найденные значения сравним со значениями $g(M_{0i,0k}) = Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})$. Полученные результаты приведены в таблице 13.3.1, где по столбцам размещены следующие величины:

- 1) разбиение по $\theta \in [0, \pi]$;
- 2) разбиение по $\varphi \in [0, 2\pi]$;
- 3) значение $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n |g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i})| \Delta\sigma_{i,k}$;
- 4) значение $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n |Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})| \Delta\sigma_{i,k}$;
- 5) значение $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n |g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) - Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})| \Delta\sigma_{i,k}$;
- 6) значение $\max_{(i,k)} |g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) - Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})|$.

Таблица 13.3.1

1	2	3	4	5	6
10	20	11.1044	10.9591	0.1522	0.0570
15	30	10.9765	10.9107	0.0722	0.0404
20	40	10.9398	10.9018	0.0440	0.0311
25	50	10.9171	10.8918	0.0307	0.0253
30	60	10.9087	10.8903	0.0234	0.0213
35	70	10.9017	10.8877	0.0188	0.0184
40	80	10.8977	10.8865	0.0156	0.0162
45	90	10.8949	10.8857	0.0134	0.0144

Таким образом, из столбца 6 видна равномерная по всем расчетным точкам сходимость решения системы (13.3.10) к точному значению решения уравнения (13.3.9) при условии (13.3.12).

Так как для соответствующего гиперсингулярного интегрального уравнения на окружности не только решение СЛАУ вида (13.3.10) сходится равномерно по всем расчетным точкам к его решению, но и соответствующие квадратурные формулы сходятся к значению интеграла, то была надежда на аналогичный результат на сфере. Однако численный эксперимент с квадратурами на сфере показал, что это не так.

13.4. Задача нестационарного обтекания кусочно-гладких поверхностей

Рассмотрим плохообтекаемое тело, движущееся в жидкой среде, заполняющей все безграничное пространство. Тело имеет ребра L_p , $p=1,2,\dots,N$, которые являются линиями нарушения гладкости поверхности тела. Обтекание такого тела сопровождается, как правило, отрывом потока с его поверхности. Жидкость будем считать идеальной несжимаемой, а отрыв потока – происходящим с некоторых линий L_p .

Введем стандартные в аэродинамике прямоугольные системы координат: подвижную, связанную с телом, $OXYZ$ и неподвижную относительно невозмущенной среды $O_0X_gY_gZ_g$ (рис. 13.4.1). Положение точек поверхности σ тела в неподвижной системе координат определяется уравнением

$$F(M, t) = 0.$$

Здесь t – время, $M = M(x, y, z)$ – точка поверхности тела.

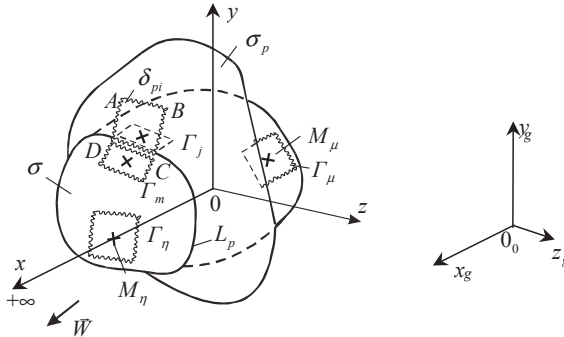


Рис. 13.4.1

Линии L_p , $p=1,2,\dots,m$, $m \leq N$, схода вихревых пелен σ_p с поверхности σ считаем, как отмечалось, известными.

Поле возмущенных поверхностями σ и σ_p скоростей считаем потенциальным, т.е.

$$V_{\Sigma}(M, t) = \nabla \Phi_{\Sigma}(M, t),$$

где $\Phi_{\Sigma}(M, t)$ – потенциал возмущенных скоростей.

Из уравнения неразрывности следует, что потенциал скоростей является гармонической функцией вне поверхности тела σ и вихревых поверхностей σ_p . Тогда поле давлений в произвольной точке пространства определяется интегралом Коши–Лагранжа, который в данном случае запишем в виде

$$p(M_0, t) = p_{\infty} = \rho \left[\frac{\partial \Phi_{\Sigma}(M_0, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} V_{\Sigma}^2(M_0, t) \right],$$

где p_{∞} – давление невозмущенного потока на бесконечности. Возмущения полагаем убывающими на бесконечности, т.е. выполняются условия (12.1.4) при

$$\rho \left(M, \sigma \cup \bigcup_{p=1}^m \sigma_p \right) \rightarrow \infty.$$

Искомое воздействие жидкости на обтекаемое тело определяется интегрированием давления по поверхности σ

$$R = - \int_{\sigma} p_+(M, t) \cdot n_M(t) d\sigma,$$

где $p_+(M, t)$ – значение давления в точке $M \in \sigma$ при подходе к ней извне, а $n_M(t)$ – орт внешней нормали к σ в точке M в момент t .

Таким образом, решение задачи обтекания тела опять сводится к отысканию потенциала возмущенных скоростей $\Phi_{\Sigma}(M, t)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа (12.1.3) в области D^+ и следующим граничным условиям:

1) на поверхности σ – условию непротекания

$$\frac{\partial \Phi_{\Sigma}(M_0, t)}{\partial n_{M_0}(t)} = W(M_0, t) \cdot n_M(t), \quad M_0 \in \sigma, \quad (13.4.1)$$

где $W(M_0, t)$ – скорость движения точек поверхности σ ,

2) на бесконечности – условию убывания возмущений (12.1.4) при

$$\rho \left(M, \sigma \cup \bigcup_{p=1}^m \sigma_p \right) \rightarrow \infty;$$

3) на свободной вихревой пелене, т.е. на поверхностях σ_p , $p=1, \dots, m$ – кинематическому условию совместимости течения и условию отсутствия перепада давлений (12.1.6);

4) на изломах поверхности σ , с которых сходят вихревые пелены, выполняется гипотеза Кутта–Жуковского о конечности скоростей.

Сформулированную выше задачу об отрывном обтекании удобно решать в связанной системе координат для случая обращенного движения, т.е. когда тело неподвижно, а на него набегающий поток со скоростью $W(M, t)$, $M \in R^3$, $t \geq 0$. Будем считать, что форма тела со временем не меняется. Тогда граничное условие (13.4.1) о непротекании поверхности тела в связанной системе координат запишется в следующем виде:

$$V_{\Sigma}(M_0, t) \cdot n_{M_0} + W(M_0, t) \cdot n_{M_0} = 0, \quad (13.4.2)$$

где $V_{\Sigma}(M_0, t)$ – скорость, возмущенная телом и его вихревым следом в точке M_0 в момент t .

Поверхность тела σ и сходящие с нее вихревые пелены σ_p будем моделировать вихревыми слоями. Скорость, индуцированную в некоторой точке M в момент t этими вихревыми образованиями, будем обозначать соответственно $V(M, t)$ и $V_p(M, t)$, $p = 1, 2, \dots, m$. Тогда уравнение (13.4.2) в точке M_0 поверхности σ запишется так:

$$V(M_0, t) \cdot \bar{n}_{M_0} + \sum_{p=1}^m V_p(M_0, t) \cdot \bar{n}_{M_0} = -W(M_0, t) \cdot \bar{n}_{M_0}. \quad (13.4.3)$$

Обозначим \bar{r}_M – радиус-вектор точки M . Естественно, что для выполнения кинематического условия отсутствия перепада нормальных скоростей в точках вихревых пелен σ_p , достаточно, чтобы их точки двигались по местной скорости. Таким образом, для точки $M_p(t, \tau)$, сошедшей с кривой L_p в момент τ , в момент t должно выполняться условие

$$\frac{d\bar{r}_{M_p}(t, \tau)}{dt} = V(M_p(t, \tau), t) + \sum_{p=1}^m V_p(M_p(t, \tau), t) + W(M_p(t, \tau), t), \quad (13.4.4)$$

при выполнении начального условия

$$\bar{r}_{M_p}(\tau, \tau) = r_{M_p}, \quad (13.4.5)$$

где M_p – точка кривой L_p на поверхности σ , с которой сошла вихревая частица в момент τ и которая в момент t перешла в точку $M_p(t, \tau)$ вихревой поверхности σ_p .

Скорости в выражениях (13.4.3) и (13.4.4) будем находить как градиенты потенциала двойного слоя, расположенного соответственно на поверхностях σ и σ_p , $p = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} V_p(M_0, t) &= \nabla_{M_0} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \cdot g(M, t) \right) d\sigma_M, \\ V_p(M_0, t) &= \nabla_{M_0} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_p(t, \tau')}} \left(\frac{1}{r_{M_p(t, \tau')M_0}} \right) \cdot g_p(M_p, \tau') \right) d\sigma_{M_p(t, \tau')}, \end{aligned} \quad (13.4.6)$$

где $g(M, t)$ – значение интенсивности двойного слоя в точке M поверхности σ в момент t , $g_p(M_p, \tau')$ – значение его в точке $M_p(t, \tau')$ поверхности σ_p в момент t , т.е. значение $g_p(M_p, \tau')$ зависит только от момента схода τ' и не зависит от текущего момента (см. [70]).

Формулы для $V(M_p(t, \tau), t)$ и $V_p(M_p(t, \tau), t)$ в уравнении (13.4.4) получаются из соответствующих формул в равенствах (13.4.6) заменой точки M_0 на точку $M_p(t, \tau)$.

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (13.4.3) и (13.4.4) относительно неизвестных функций $g(M, t)$ и $g_p(M_p, t)$, $0 \leq \tau \leq t$, и к нахождению поверхностей σ_p свободных вихревых пелен. Уравнение (13.4.3) при изложенном подходе нахождения скоростей $V(M_0, t)$ и $V_p(M_0, t)$ является двумерным гиперсингулярным интегральным уравнением 1-го рода относительно функций $g(M, t)$ и $g_p(M_p, t)$, $0 \leq \tau \leq t$, с особенностью вида $1/r_{MM_0}^3$. Интеграл при этом надо понимать в смысле конечного значения по Адамару [1] или в смысле интеграла от обобщенных функций. Так как поверхность σ , как поверхность тела, является замкнутой, а

$\nabla(M_0, t) \cdot \vec{n}_{M_0}$ является нормальной производной от гармонической функции на кусочно-гладкой замкнутой поверхности, то [26]

$$\int_{\sigma_p} \nabla(M_0, t) \cdot \vec{n}_{M_0} = 0. \quad (13.4.7)$$

Практически решение системы уравнений (13.4.3) и (13.4.4) осуществляется численно с помощью метода дискретных замкнутых вихревых рамок [70, 132]. При этом эта система интегро-дифференциальных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.). Из равенства (13.4.7) следует, что в данном случае с.л.а.у. будет вырождена. Так как значения $g(M, t)$ в данной задаче нужны с точностью до константы, то интенсивность одной из N вихревых рамок, моделирующих поверхность тела, будем полагать равной нулю [70], а для решения полученной переопределенной и в общем несовместной с.л.а.у. применим метод регуляризирующих переменных [70].

При численном решении задачи полагаем, что жидкость из состояния покоя в момент времени $t = 0$ начинает двигаться с постоянной скоростью W с образованием за телом вихревых пелен. Введем безразмерное время t^* следующим образом

$$t^* = |W|t/b$$

где b – характерный линейный размер тела, а t – фактическое время, прошедшее с начала движения жидкости.

В нулевой момент времени ($t^* = 0$) вихревой след отсутствует, и решается задача о бесциркуляционном обтекании тела. В этом случае с.л.а.у., выражающая условие непротекания поверхности σ в N расчетных точках M_ν , имеет следующий вид

$$\lambda_N + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq q}}^N \Gamma_\mu a_{\nu\mu} = -\omega_{n\nu}, \quad \nu = 1, \dots, N. \quad (13.4.8)$$

Здесь λ_N – регуляризирующая переменная; $\Gamma_\mu = \Gamma_{\mu+} / (|W|b)$ – безразмерная циркуляция μ -й вихревой рамки ($\Gamma_{\mu+}$ – размерная циркуляция); q – номер рамки с нулевой циркуляцией; $a_{\nu\mu}$ – безразмерная функция [70], определяемая взаимным положением точек M_ν и M_μ на поверхности σ ; $\omega_{n\nu} = W_{n\nu} / W$ – безразмерная нормальная составляющая скорости невозмущенного потока в точке M_ν .

При $t^* > 0$ на расчетном шаге k с i -го участка линии L_p поверхности σ сходит в поток вихревая рамка (см. рис. 16.4.1). Величина ее безразмерной циркуляции δ_{pi}^k полагается равной разности циркуляции соответствующих вихревых рамок, примыкающих к i -му участку линии L_p , которые берутся из предыдущего расчетного шага:

$$\delta_{pi}^k = \Gamma_m^{k-1} - \Gamma_j^{k-1}.$$

Это выражение означает, что вихревой слой на поверхности σ при подходе к линии схода L_p состоит из свободных вихрей, которые полностью за расчетный интервал безразмерного времени Δt^* сходят в поток¹. При этом направление схода в поток свободных вихрей не постулируется, а рассчитывается по вектору местной скорости. Это означает, что положение угловых точек A и B сошедшей в поток вихревой рамки δ_{pi}^k (см. рис. 13.4.1) определяется следующим образом:

¹ В данном случае это наша гипотеза. Ее математическое доказательство было бы очень серьезной задачей, достойной решения.

$$\bar{F}_A = \bar{F}_D + \mathcal{V}^*(D) \cdot \Delta t^*, \quad \bar{F}_B = \bar{F}_C + \mathcal{V}^*(C) \cdot \Delta t^*,$$

где $\mathcal{V}^*(D)(\mathcal{V}^*(C)) = \mathcal{V}(D)/W(\mathcal{V}(C)/W)$ – безразмерная скорость, вычисленная соответственно в точках D и C .

На расчетном шаге система уравнений (13.4.8) вследствие схода в поток свободной вихревой пелены будет иметь вид

$$\lambda_N + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq q}}^N \Gamma_\mu^k \alpha_{\nu\mu} = -\omega_{\nu\nu} - \sum_{p=1}^m \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{s=1}^k \delta_{pi}^s \alpha_{pi}^{k-s+1}, \quad \nu = 1, \dots, N, \quad (13.4.9)$$

где N_p – число продольных полос в p -й вихревой пелене.

Неизвестные циркуляции вихревых рамок, моделирующих поверхность тела, на каждом расчетном шаге определяются из решения системы уравнений (13.4.9). Отметим, что в данном случае отпадает необходимость включать в расчетную схему условие о постоянстве циркуляции по замкнутым контурам, охватывающим обтекаемое тело и его вихревой след. Это условие удовлетворяется автоматически в силу способа схематизации. В результате уменьшается размерность решаемой системы уравнений [21, 70].

После определения циркуляции Γ , $\mu = 1, \dots, N$, можно рассчитать нестационарную аэродинамическую нагрузку, действующую на тело, а также определить мгновенные значения аэродинамических коэффициентов. Действительно, покажем, как это сделать.

Коэффициент давления в произвольной расчетной точке M_μ на поверхности σ определяется интегралом Коши–Лагранжа, который можно записать следующим образом [3, 21]:

$$p_\mu = \frac{P_{\mu+} - P_{\infty-}}{\rho W^2 / 2} = 1 - v_\mu^2 - 2 \frac{\partial \varphi_{\mu+}}{\partial \tau}. \quad (13.4.10)$$

Здесь v_μ – безразмерная относительная скорость потока в рассматриваемой точке; $\varphi_\pm = \Phi_\pm / |W|b$ – безразмерный потенциал течения (индексы «+» и «-» относятся к разным сторонам поверхности σ).

Запишем выражение (13.4.10) в следующей форме:

$$p_\mu = 1 - v_\mu^2 - 2 \frac{\partial(\varphi_{\mu+} - \varphi_{\eta+})}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial \varphi_{\eta+}}{\partial \tau}, \quad (13.4.11)$$

где $\varphi_{\eta+}$ – потенциал течения в η -й расчетной точке, выбранной за опорную (см. рис. 13.4.1).

Обозначим $\Delta\varphi$ – скачок потенциала при переходе через поверхность σ в некоторой расчетной точке. Тогда можно написать

$$(\varphi_{\mu+} - \varphi_{\eta+}) = (\varphi_{\mu-} - \varphi_{\eta-}) + (\Gamma_\mu - \Gamma_\eta) \quad (13.4.12)$$

так как $\Delta\varphi(M) = \Gamma$.

Продифференцировав это выражение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{\mu+} - \varphi_{\eta+}) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{\mu-} - \varphi_{\eta-}) + \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_\mu - \Gamma_\eta).$$

Учитывая, что разность потенциалов $(\varphi_{\mu-} - \varphi_{\eta-})$ по постановке задачи не зависит от времени, приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{\mu+} - \varphi_{\eta+}) = \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_\mu - \Gamma_\eta).$$

Для расчетного шага k это выражение будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_{\mu+} - \varphi_{\eta+}) = \frac{\Gamma_{\mu}^k - \Gamma_{\mu}^{k-1} - \Gamma_{\eta}^k + \Gamma_{\eta}^{k-1}}{\Delta \tau}.$$

В свою очередь, значение $\varphi_{\eta+}$ можно определить следующим образом:

$$\varphi_{\eta+} = \varphi_{\infty} + \int_{+\infty}^{x_{\eta}} v_x dx, \quad (13.4.13)$$

где φ_{∞} – потенциал скорости невозмущенного потока на ∞ , x_{η} – координата опорной точки M_{η} .

Продифференцировав (13.4.13), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\eta+} = \int_{+\infty}^{x_{\eta}} \frac{\partial v_x}{\partial t} dx. \quad (13.4.14)$$

Этот интеграл определяется численно.

Таким образом, все величины, входящие в (13.4.11), определены, и в каждый расчетный момент может быть вычислено распределение коэффициента давления p по поверхности σ тела. Тогда в связанной системе координат можно определить коэффициенты аэродинамических сил и моментов [21]

$$\begin{aligned} C_X &= -\sum_{\mu=1}^N p_{\mu} \cos(n, x)_{\mu} \Delta \sigma_{\mu}, & m_X &= \sum_{\mu=1}^N p_{\mu} [Z_{\mu} \cos(n, y)_{\mu} - Y_{\mu} \cos(n, z)_{\mu}] \Delta \sigma_{\mu}, \\ C_Y &= -\sum_{\mu=1}^N p_{\mu} \cos(n, y)_{\mu} \Delta \sigma_{\mu}, & m_Y &= \sum_{\mu=1}^N p_{\mu} [X_{\mu} \cos(n, z)_{\mu} - Z_{\mu} \cos(n, x)_{\mu}] \Delta \sigma_{\mu}, \\ C_Z &= -\sum_{\mu=1}^N p_{\mu} \cos(n, z)_{\mu} \Delta \sigma_{\mu}, & m_Z &= \sum_{\mu=1}^N p_{\mu} [Y_{\mu} \cos(n, x)_{\mu} - X_{\mu} \cos(n, y)_{\mu}] \Delta \sigma_{\mu}. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta \sigma_{\mu}$ – площадь, охватываемая вихревой рамкой μ ; $\cos(n, x)_{\mu}$ и т.д. – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ в расчетной точке $M_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu})$ с безразмерными координатами.

По описанной выше схеме в качестве примера исследуем отрывное обтекание куба в случае, когда вектор скорости невозмущенного потока W нормален к одной из граней куба, а отрыв потока происходит со всех его ребер. Начало системы координат $OXYZ$ поместим в центр куба и выполним расчет с интервалом безразмерного времени $\Delta \tau = 0,25$.

На рис. 13.4.2 показана форма вихревой пелены за кубом при $\tau = 6$. Видно, что устойчивые вихревые поверхности сохраняются только в непосредственной близости от куба (зона A). Здесь вихревая структура определяется в основном устойчивыми вихревыми пеленами, сходящими с ребер передней грани куба (в этой вихревой поверхности на рис. 13.4.2 сделан условный вырыв). Вихревые пелены, сходящие с отдельных граней, практически сразу разрушаются и не имеют упорядоченной поверхности. Почти сразу же за кубом происходит полное разрушение всех вихревых пелен и наблюдается хаотическое перемежающееся течение (зона B на рис. 13.4.2).

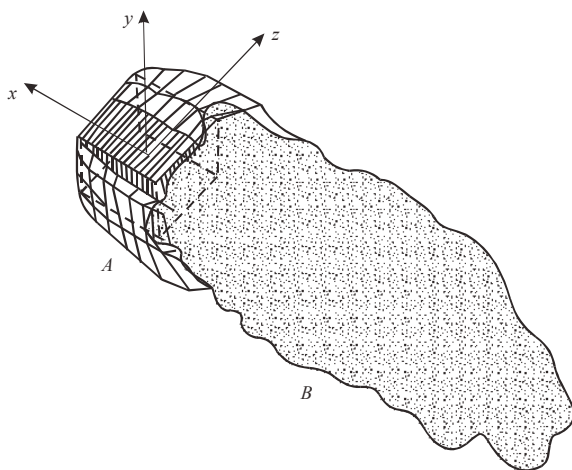


Рис. 13.4.2

На рис. 13.4.3 при $\tau=6$ приведено векторное поле скоростей, вычисленное в продольной плоскости OXY . Видно, что это поле за кубом представляет собой нестационарное вихревое течение, а сверху и снизу от куба поток упорядочен.

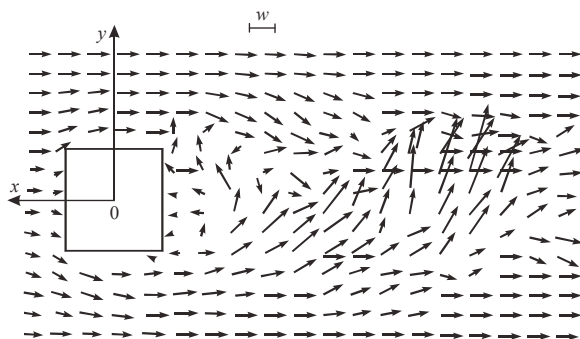


Рис. 13.4.3

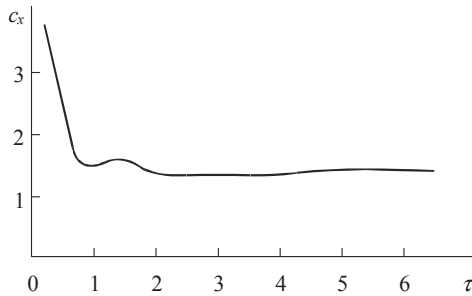


Рис. 13.4.4

На рис. 13.4.4. приведена зависимость от τ коэффициента сопротивления куба C_x (кривая). Здесь же точкой нанесено значение величины C_x для куба, полученное в весовом эксперименте [123]. Видно, что уже при $\tau > 2$ расчетное значение C_x слабо изменяется и при этом наблюдается удовлетворительное согласование с экспериментом.

13.5. Моделирование колебания крыла конечного размаха

Рассмотрим колебательные движения тонкого жесткого крыла конечного размаха. Введем связанную с крылом левую систему координат $Oxyz$, начало которой совместим с точкой пересечения передней кромки с корневой хордой крыла, ось Ox направим вдоль этой хорды, а ось Oz совместим с плоскостью крыла.

В данном разделе ограничимся случаем симметричных плоских крыльев сложной формы в плане с прямыми кромками. Форма в плане таких крыльев полностью определяется тремя характерными безразмерными параметрами:

– удлинением:

$$\lambda = \frac{l^2}{S},$$

– сужением

$$\eta^* = \frac{b}{b_k}, \quad (13.5.1)$$

– углом стреловидности передней кромки:

$$\chi_0 = \arctg \frac{dx_0(z)}{dz}.$$

В формулах (13.5.1) S – площадь крыла; l – размах; b – длина корневой хорды; b_k – длина концевой хорды, $x_0(z)$ – уравнение передней кромки. Если через $x_1(z)$ обозначить общий вид уравнения задней кромки, то можно записать для угла стреловидности задней кромки:

$$\chi_1 = \arctg \frac{dx_1(z)}{dz},$$

причем $\chi_1 = \chi_1(\lambda, \eta^*, \chi_0)$

Пусть длина b является характерным линейным размером. В соответствии с методом численного моделирования, изложенным в п. 13.4, заменим поверхность крыла S системой вихревых рамок. При этом, в силу симметрии задачи, будем рассматривать только правую половину крыла. Разобьем полукрыло на m полос одинаковой ширины линиями, параллельными оси Ox , и n панелей, делящих корневую и концевую хорды на n равных участков с длинами $\frac{b}{n}$ и $\frac{b_K}{n}$, соответственно (см. Рис. 13.5.1).

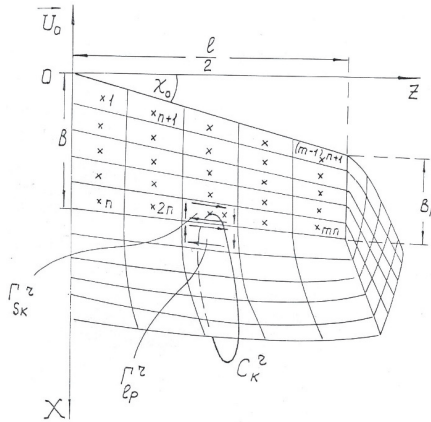


Рис. 13.5.1

Пусть контур каждой из $m \times n = N_S$ получившихся трапеций представляет собой вихревую рамку L_{S_K} с циркуляцией Γ_{S_K} . За положительное направление Γ_{S_K} будем принимать такое, что при обходе рамки вдоль вихревого вектора $\vec{\gamma}_{S_K}$ в направлении, показанном на Рис. 13.5.1, циркуляция скорости по замкнутому жидкому контуру C_K , пересекающему поверхность σ_{S_K} , которую ограничивает рамка, будет осуществляться по правилу правого винта. Таким образом, при выборе положительной нормали к S , совпадающей по направлению с ортом \vec{j} , вектор скорости \vec{w}_{S_K} индуцированный рамкой в точке $M_0 \in \sigma_{S_K}$ будет противоположен этой нормали. При этом тройка $\vec{\gamma}_{S_K}, \vec{n}_{S_K}, \vec{w}_{S_K}$ будет правой.

Полагаем, что движение началось мгновенно из состояния покоя, моделировался мгновенный старт крыла из состояния покоя под углом атаки $\alpha = 30^\circ$ (сплошные линии). Предполагается, что срыва потока с передней кромки не происходит.

Геометрические параметры модельных крыльев:

крыло 1: $\lambda = 0,5; \chi_0 = 0^\circ; \eta^* = 1$ (Рис. 13.5.2.);

крыло 2: $\lambda = 1; \chi_0 = 0^\circ; \eta^* = 1$; (Рис. 13.5.3.);

крыло 3: $\lambda = 2; \chi_0 = 0^\circ; \eta^* = 1$ (Рис. 13.5.4.);

крыло 4: $\lambda = 4$; $\chi_0 = 0^\circ$; $\eta^* = 1$ (Рис. 13.5.5.).

крыло 5: $\lambda = 4$; $\chi_0 = 30^\circ$; $\eta^* = 2,3$ (Рис. 13.5.6.).

На Рис. 13.5.2.-Рис. 13.5.6. представлены результаты компьютерной визуализации ближнего следа за крыльями сложной формы в плане, колеблющимися с амплитудой $a = 0,2$ и частотой $p^* = 2,2$, по прошествии времени $\tau = 6$. Серым цветом представлены участки вихревой пелены, сошедшие с боковых кромок, черным – с задней. Во всех случаях крыло прошло 6 хорд и сделало 2 цикла колебаний. Представлены диаметрическая проекция, вид сверху и сбоку. Обращаем внимание на то, что на рисунках визуализированы только продольные вихревые шнуры. На рисунках, где крылья изображены только сверху, средние рисунки соответствуют случаю, когда при расчете учитывался отрыв с задней и боковых кромок, а строилась только пелена, сошедшая с задней кромки. Нижний рисунок – для случая отрыва только с задней кромки. Форма следа сбоку напоминает след за колеблющимся крылом бесконечного размаха, причем, с ростом удлинения, это сходство увеличивается.

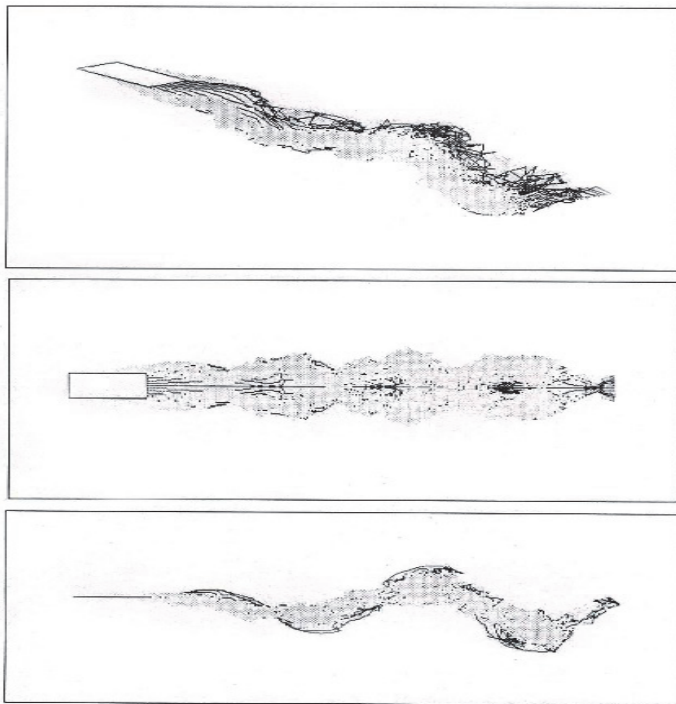


Рис. 13.5.2

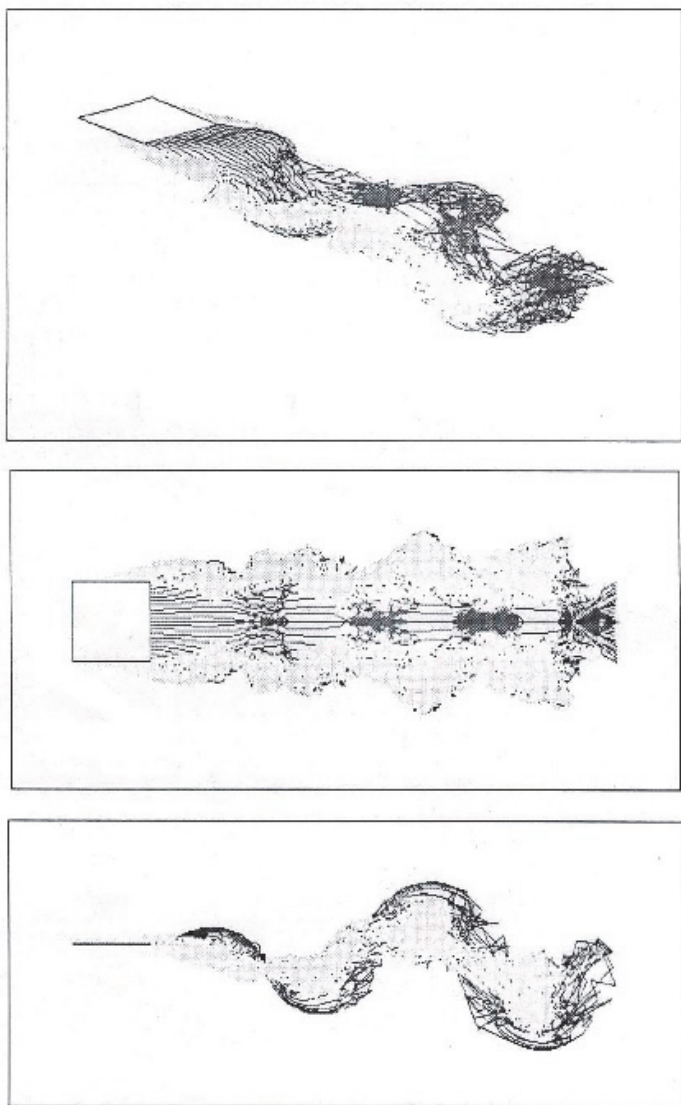


Рис. 13.5.3

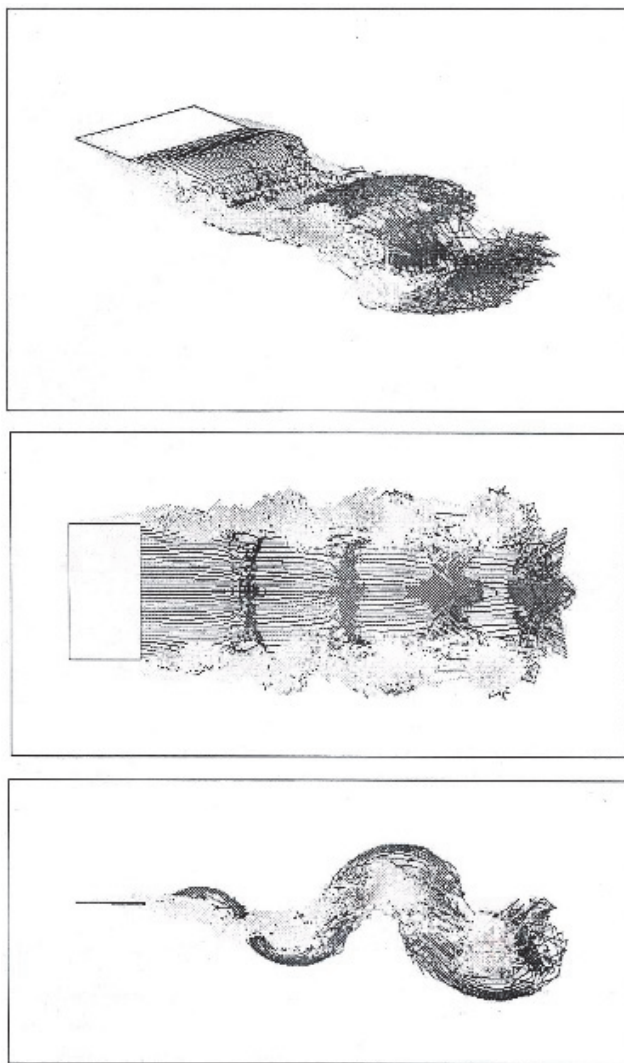


Рис. 13.5.4

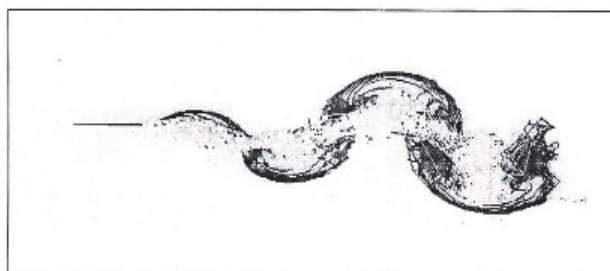
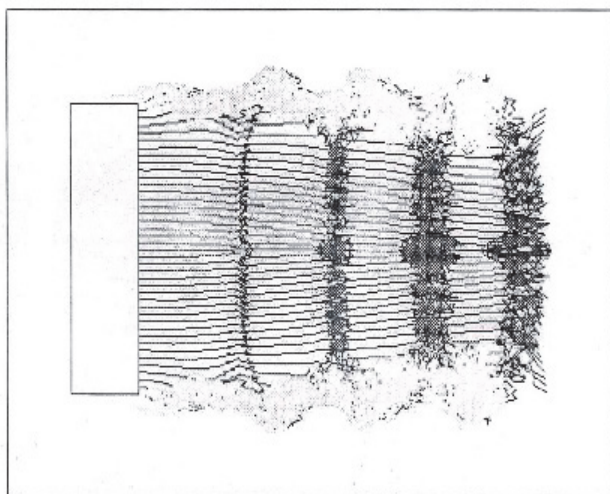
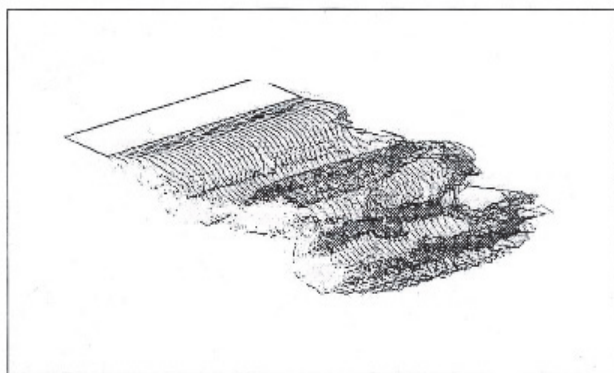


Рис. 13.5.5

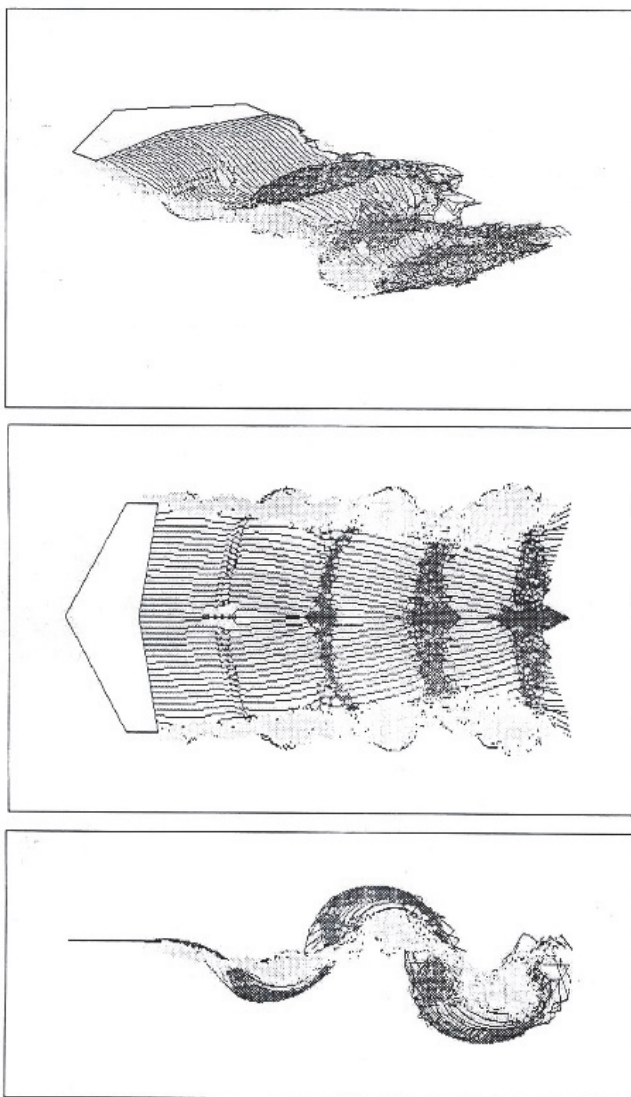


Рис. 13.5.6

Рассматривая результаты компьютерной визуализации ближнего следа за крыльями сложной формы (Рис. 13.5.2.-Рис. 13.5.6.), следует обратить внимание на форму следа в плане. При колебаниях крыльев различных удлинений наблюдаются характерные зоны, соответствующие полуциклам колебаний. Каждая зона представляет собой аналог вихревой трубки, на которую натянута вихревая поверхность.

Схематично вихревой след за колеблющимся крылом конечного размаха можно представить в виде дорожки из сцепленных вихревых колец эллиптической формы. Каждое из колец наклонено по отношению к плоскости крыла, при этом знаки углов наклона чередуются. Наблюдается интересная особенность по мере увеличения удлинения крыла – кольца сближаются, образуя более компактную структуру.

Сравнительный анализ формы следа в плане для различных режимов обтекания показывает, что влияние боковых вихревых жгутов приводит к расширению и некоторому «размыванию» следа (следствие конвективного взаимодействия в следе). Интересно, что для случая колебания крыла бионической формы в плане (стреловидного крыла) это свойство боковых жгутов проявляется меньше (Рис. 13.5.6.). Исследование изменения топологии вихревых образований представляет собой отдельную интересную задачу. Такая задача требует детализации геометрических особенностей поверхностей-границ, и как следствие -увеличения дискретизации поверхностей (с одновременным повышением точности метода решения задачи Коши), что часто влечет за собой неоправданное увеличение вычислительных затрат.

На Рис. 13.5.7. (вид сверху), показана формы вихревой пелены при старте из состояния покоя несущей поверхности сложной формы, обтекаемыми под углом атаки $\alpha = 15^\circ$.

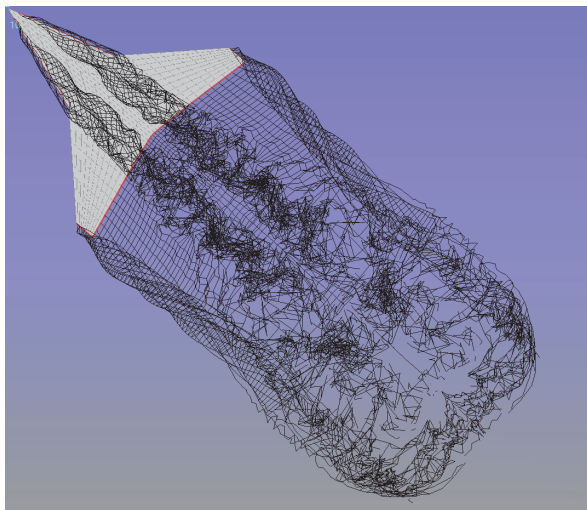


Рис. 13.5.7 $\tau = 5.0$

Видно, что оторвавшиеся вихревые поверхности сохраняют относительно устойчивую форму только в непосредственной близости (на расстоянии порядка характерного размера несущей поверхности) от кромок пластинки, до последующего взаимодействия с элементами других поверхностей (так же, как и при обтекании куба). Хорошо заметно локальное проявление неустойчивости дискретизированной вихревой поверхности именно вблизи элементов других поверхностей, находящихся на расстоянии порядка шага сетки (равного размеру вихревой рамки – меры дискретности метода).

13.6. Моделирование струйных течений

На Рис.13.6.1. Рис.13.6.2.представлены результаты численного моделирования формирования вихревой поверхности в потоке, над верхним срезом модельной конструкции эллиптической формы (пример моделей открытого - Рис. 13.6.1. и полуоткрытого Рис.13.6.2.стадионов). При моделировании формирования отрыва хорошо видно нарушение гладкости вихревой поверхности в силу не соответствия меры дискретности метода (размера рамки при разбиении поверхности) масштабу физического эффекта. А именно: не соответствии величины шага сетки локальной кривизне элементов моделируемой вихревой поверхности.

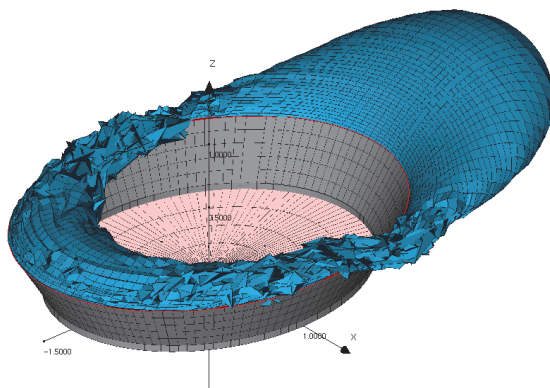


Рис. 13.6.1

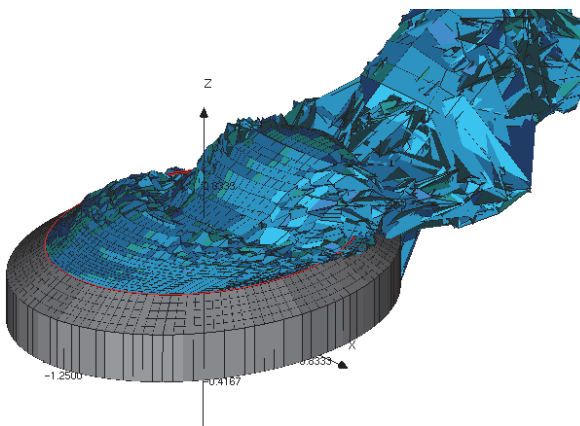


Рис. 13.6.2

Тем не менее (несмотря на вычислительные погрешности), на Рис.13.6.2. хорошо видно формирование периодических волн на вихревой поверхности, которые демонстрируют наличие низкочастотных пульсаций давления на срезе отверстия.

На Рис.13.6.3.-Рис.13.6.8. представлены результаты численного моделирования эффекта инверсии (трансформации сечения) затопленной струи, иногда называемого «кроссовер». Струя выделялась поверхностью разрыва скоростей. Моделирование формирования и эволюции затопленной струи, так же, осуществлялось методом вихревых рамок. Эффекты вязкости при численном моделировании не учитывались. Поверхностное натяжение отсутствует. Интенсивность проявления эффекта зависит только от угла сужения в конфузоре.

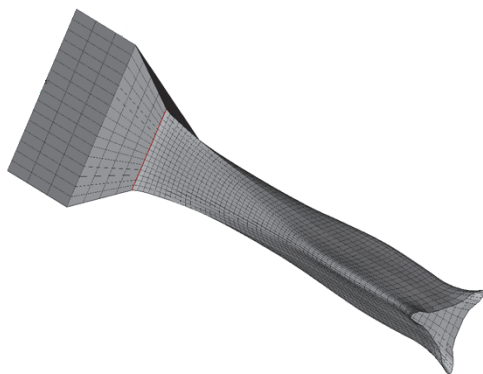


Рис. 13.6.3
Струя из треугольного конфузора

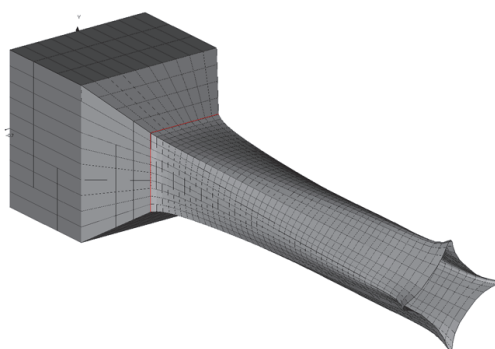


Рис. 13.6.4
Струя из четырехугольного конфузора

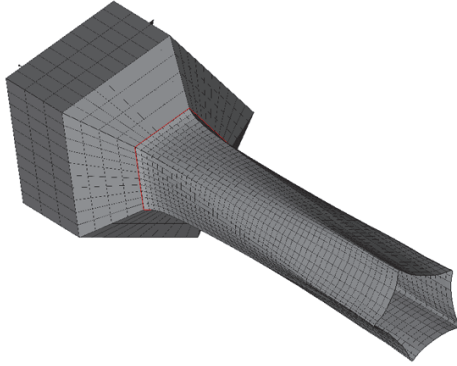


Рис. 13.6.5
Струя из пятиугольного конфузора

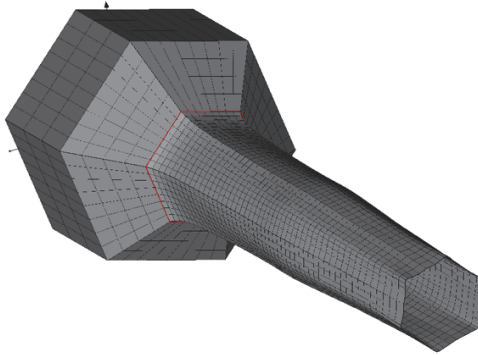


Рис. 13.6.6
Струя из шестиугольного конфузора

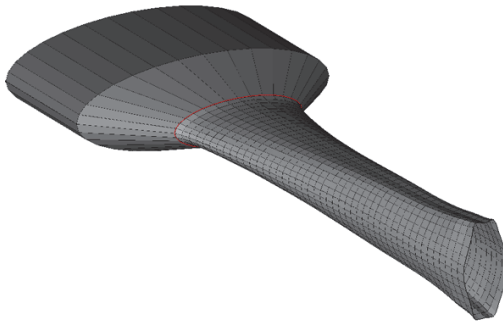


Рис. 13.6.7
Струя из эллиптического конфузора

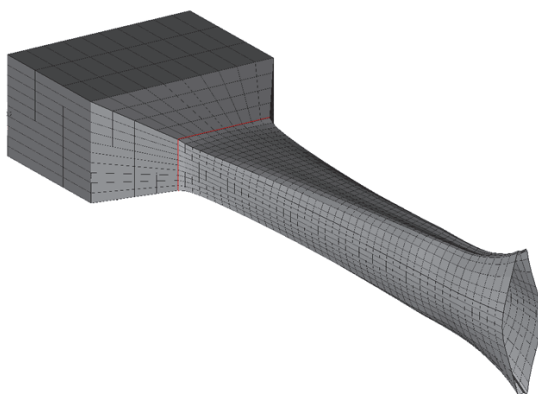


Рис. 13.6.8
Струя из прямоугольного конфузора

Послесловие

Исходя из теоретических положений метода дискретных особенностей и опыта его применения (метода дискретных вихрей, в частности) можно сделать выводы:

1) для двумерных течений, применение метода дискретных особенностей, безусловно, демонстрирует удовлетворительную эффективность. В качестве иллюстрации эффективности метода дискретных особенностей и вычислительных технологий, представлены фрагменты комплексных теоретических и экспериментальных исследований подвижных крыльев и систем крыльев, выполняющих функцию движителя или преобразователя энергии в безграничной среде и вблизи твердых границ в широком диапазоне кинематических и геометрических параметров.

2) для трехмерных течений, применение вихревых систем с линейными вихревыми элементами (типа вихревых рамок) имеет, как ряд достоинств, так и ряд недостатков.

К достоинствам, можно отнести:

- «экономичность», при описании поверхности и вихревого следа;
- описание вихревого следа и поверхности тела в единой «терминологии»;
- удобство перехода (без дополнительных преобразований и вычислений) от вихревых особенностей, моделирующих тело, к особенностям, моделирующим след;
- широкий спектр решаемых задач, за счет возможности применения метода для решения задач обтекания системы тел сложной формы с большим количеством (групп) элементов.

К недостаткам вихревых схем (для пространственных течений), основанных на линейных вихревых элементах (замкнутых и незамкнутых), можно отнести:

- нарушение «физичности» моделируемого процесса при сильном растяжении вихревых отрезков в дальнем следе;
- проницаемость вихревыми элементами препятствий в следе;
- невозможность моделирования обтекания препятствий, находящихся в следе, без дополнительной редискретизации локального участка вихревой пелены;
- сложности моделирования обтекания препятствий, находящихся в следе, в силу необходимости дополнительной редискретизации вихревых элементов (проблема огибания препятствия вихревой пеленой);
- несоответствие масштаба вихревых элементов (меры дискретности метода) локальным кривизнам эволюционирующей поверхности;
- раннее развитие вычислительной неустойчивости моделируемого процесса, вызванной развивающимся во времени несоответствием масштабов вихревых элементов характерным размерам моделируемых вихревых структур.

Учитывая вышеприведенные достоинства и недостатки метода дискретных вихрей, дальнейшее развитие и применение метода дискретных особенностей, для трехмерных задач следует связывать с новыми элементами вихревых методов, – вихрями (точечными дискретными особенностями) и вычислительными технологиями построенными на их основе. Такая постановка вопроса требует продолжения исследований и математического обоснования сходимости вычислительных методов, уже для трехмерных задач.

Список литературы

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М., Наука, 1978. – 353с.
2. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок.-М.: Издательство Московского университета, 2006.-184с.
3. *Апаринов В.А., Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А.* Расчет нестационарных аэродинамических характеристик тел при отрывном обтекании // ЖВМ и МФ. – 1988. – Т. 24, №1. – С.1558–1566.
4. *Атлас аэродинамических характеристик профилей.* – М.: ЦАГИ, 1940.
5. *Афендикова Н.Г., Лифанов И.К.* О сингулярном интегральном уравнении второго рода с кратными интегралами типа Коши // Изв. Вузов. Сер. Математика. –1986, №8.– С.3–9.
6. *Афендикова Н.Г., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф.* К численному решению сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши и Гильберта. ИТЭФ. Препр. №73. / Москва.–1986. – 21 с.
7. *Афендикова Н.Г., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф.* О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. –1987. Т. XXIII, №8. – С.1392–1402.
8. *Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В.* Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.–С.-Петербург: Физматлит, 2000. – 624 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т.II. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
11. *Белоцерковский С.М.* Исследования по аэродинамике современных несущих поверхностей. – Дис. ... д-ра техн. наук. – М., 1955.
12. *Белоцерковский С.М.* Подковообразный вихрь при неустановившемся движении // ПММ. – 1955. – т. XIX, вып.2. – С.159–164.
13. *Белоцерковский С.М.* Пространственное неустановившееся движение несущей поверхности // ПММ. –1955. – Т. XIX, вып.4. – С. 410–420.
14. *Белоцерковский С.М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: Наука, 1965. – 244с.
15. *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – М., 1995. – 367 с
16. *Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хланов Н. В.* Моделирование на ЭВМ плоских турбулентных струй // ДАН СССР, 1985. Т. 282, N3.
17. *Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М.* Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
18. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
19. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А.* Моделирование на ЭВМ отрывного обтекания профилей с угловыми точками // ДАН СССР, 1985. Т. 285, №6. С.1348–1352.
20. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Михайлов А.А.* Расчет бесциркуляционного обтекания произвольных тел // Ученые записки ЦАГИ. 1987. Т. XVIII, №5. С.1–10.

21. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
22. Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Исследование парашютов и дельтапланов на ЭВМ. – М.: Машиностроение, 1987. – 240 с.
23. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. – М.: Наука, 1975. – 424 с.
24. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. II. – М.: Наука, 1962.
25. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. – М.: «Мир»-1964г. 466с.
26. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
27. Бушуев В.И., Демидов В.В., Лифанов И.К. К расчету аэродинамических характеристик летательного аппарата со струйно-эжекторной механизацией. НММ по аэродинамике летательных аппаратов. Ч. II. – М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1980. – С.15–21.
28. Бушуев В.И., Лифанов И.К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений в классе сингулярных функций и задача отсоса потока в аэродинамике. Труды XVIII чтений К. Э. Циолковского. Секция «Авиация и воздухоплавание». – М., 1983. – С.32–37.
29. Бушуев В.И., Лифанов И.К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений в классе сингулярных функций и задача отсоса потока в аэродинамике // ЖВМ и МФ. – 1986, №10. – С.1572–1577.
30. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложениях. – М.: ТОО «Янус», 2001. – 508 с.
31. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М. «Мир», 1986, 113с.
32. Вітько В.П., Кондратенко О.В., Черний Д.І. Чисельне моделювання еколого-аераційної ситуації в масивах висотної міської забудови// Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. – Київ: КУ-2002, Вип. 2, с.272-277.
33. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
34. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2000. – 90 с.
35. Гандель Ю.В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // ТФФА и их приложения. – Харьков: Выща школа. – 1983. – №40. – С.33–36.
36. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // ТФФА и их приложения. – Харьков: Выща школа. – 1982. – №38. – С.15–18.
37. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
38. Гиневский А.С., Желанников А.И. Вихревые следы самолетов. – М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2008, – 172с.
39. Головенко А.Д., Голубев С.А., Черний Д.И. Вычислительные особенности нестационарных аэродинамических задач // Журнал обчислювальної і прикладної математики., №1 т(104) 2011, с.с.24-39.
40. Головенко А.Д., Довгий С.А., Клименкова И.А., Черний Д.И. Моделирование аэродинамических полей при прогнозировании нестационарных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки // «Вісник Харківського національного університету», Вип. 13, № 890, Харьков, квітень 2010, с. 37–46.
41. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 480 с.
42. Голубев С.А., Каян В.П., Лебедь А.Г., Черний Д.И. Характеристики вихревого течения за ротором Дарье // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дис-

- кретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009).-Часть 2, Харьков-Херсон, 2009, с.382.
43. Горлин С.М. Экспериментальная аэродинамика. – М.: Высшая школа, 1970.
 44. Горелов Д.И., Методы решения плоских краевых задач теории Крыла. - Новосибирск: Изд-во СО РАН. – 2000. – 215 с.
 45. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. III, ч.2. – М. –Л.: ГТТИ, 1934. – 320 с.
 46. Дворак А.В. Невырожденность матрицы дискретных вихрей в задачах пространственного обтекания. Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – Москва, 1986. Вып.1313. – С. 441–453.
 47. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. ГОСТ 20058-80. М.: Гос. комитет СССР по стандартам, 1981.
 48. Довгий С.А. Численный расчет гидродинамических характеристик колеблющегося крыла конечного размаха // Математические методы МЖГ. Днепрпетровск, 1982. – С. 156 – 161.
 49. Довгий С.А. Исследования вихревых течений за колеблющимися крыльями // Наука – механике. Киев, 1983. – С. 109 – 116.
 50. Довгий С.А. Нестационарная нелинейная гидроаэродинамика колеблющихся крыльев в ограниченных потоках // Дисс. ... д.ф.-м.н. Киев: Ин-т гидромеханики НАН Украины, 1996. – 335 с.
 51. Довгий С.А. Аэрогидродинамика движущихся крыльев. - Киев: ООО «Издательство «Юстон», 2016. – 276 с.
 52. Довгий С.А. Еволюція вихорвих структур в атмосфері та водних потоках. – Київ, 1997. – 119 с.
 53. Довгий С. О., Буланчук Г. Г. Чисельне моделювання динаміки когерентних вихорвих структур в плоскому затопленому струмені // Доповіді НАН України, 1998. №12.– С. 59 – 62.
 54. Довгий С. О., Копейка О. В. Влияние твердой поверхности на гидродинамические характеристики двух колеблющихся крыльев при их нелинейном взаимодействии // Бионика, Вып. 24, 1990. №12.– С. 28 – 33.
 55. Довгий С.А., Лебедь А.Г., Черний Д.И. Об управлении аэродинамическими характеристиками в ветроэнергетических системах.// XXVI International Conference “PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES” (PDMU-2015), Abstracts, August 24-28, 2015, Odessa, Ukraine, Kyiv- 2015, p.79-80.
 56. Довгий С.А., Лебедь А.Г., Черний Д.И. Вычислительные технологии на основе метода дискретных особенностей для задач течения жидкостей с подвижными границами.//Труды XVII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015), 8-13 июня 2015, Харьков-Сумы, Издательство: «Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина» 2015, с.90-91.
 57. Довгий С.А., Лифанов И. К. Методы решения интегральных уравнений. – К. “Наукова думка,” 2002, -343с.
 58. Довгий С.А., Черний Д.И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологии компьютерного моделирования.//14 Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічно безпечно, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», 5-9 жовтня 2015р., Пуша-Водиця, Київ, 2015, Збірник наукових праць, с.5-9.
 59. Довгий С.О., Черний Д.І. Обчислювальні технології (на основі МДО) для комп’ютерного моделювання.// Матеріали XXI Всеукраїнської наукової конференції: «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (APAMCS-2015), присвяченої 80-річчю професора Й.В.Людкевича, 40-річчю заснування факультету

прикладної математики, 20-річчю заснування кафедри інформаційних систем, Львів 24-25 вересня 2015р., Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка.-2015, с.147-148.

60. *Довгий С. О., Черний Д. И.* О точности решения нестационарных гидродинамических задач при использовании МДО // Труды X Международного симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики “МДОЗМФ’2001” – г. Херсон. – 2001. – С. 116 – 120.
61. *Довгий С. О., Шеховцов А. В.* Усовершенствованный метод дискретных вихрей // Киев, 1995. (Деп. рук. / ИГМ НАН Украины, ГНТБ Украины, 16.07.95., № 1692, Ук. 95. – 9 с.
62. *Ефремов И.И.* Обтекание тонкого проницаемого профиля потоком несжимаемой жидкости // Прикл. механика. – 1978, №14.
63. *Захаров Е.В., Давыдов А.Г., Халева И.В.* Интегральные уравнения с ядрами Адамара в задачах дифракции. // Актуальные вопросы прикладной математики. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – С.118–127.
64. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* приближенные методы высшего анализа. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1952. – 696 с.
65. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
66. *Корнейчук А.А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. В книге «Численные методы решения диф. и инт. уравнений и квадратурные формулы». – М.: Наука, 1964. – С.64–74.
67. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч.I и II. – М.: Физматгиз, 1963.
68. *Кудряцев Л.Д.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988. Т.1. – 712 с.
69. *Лаверньев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
70. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
71. *Лифанов И.К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // ДАН СССР. –1980. – Т. 255, №5. – С.1046–1050.
72. *Лифанов И.К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши // ДАН СССР. – 1978. – Т.239, №2. – С. 265–268.
73. *Лифанов И.К.* О численном решении сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. XVII, №12.
74. *Лифанов И.К.* Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью // Оптимальные методы вычислений и их применение. – Пенза. – 1985. – С.38–44.
75. *Лифанов И.К., Матвеев А.Ф.* Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения на отрезке с переменными коэффициентами: Препр. №185 / ИТЭФ. – Москва, 1983. – 17 с.
76. *Лифанов И.К., Михайлов А.А.* К расчету безотрывного и отрывного обтекания тел // Труды ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1986. Вып.1313. – С.137–145.
77. *Лифанов И.К., Полонский Я.Е.* Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений // ПММ. 1975/ – Т. 39, №4. – С.742–746.
78. *Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Обобщенный оператор Фурье и его применение в обосновании метода дискретных вихрей // Матем. Сборник. – 1992. – Т.183, №5. – С. 79–114.

79. *Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Линейная нестационарная задача для профиля и уравнения Абеля // Вопросы кибернетики «Численный эксперимент в прикладной аэродинамике». – М., 1986. – С.23–46.
80. *Лифанов И.К., Тыртышиников Е.Е.* Тёплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения // Вычислительные процессы и системы (под ред. Марчука Г.И.). – М.: Наука, 1990. – Вып. 7. – С. 94–273.
81. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
82. *Лузин Н.Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1951. – 552 с.
83. *Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г.* Толковый словарь математических терминов. – М.: Просвещение, 1965. – 540 с.
84. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
85. *Матвеев А.Ф.* О построении приближенного решения сингулярного интегрального уравнения второго рода // ДАН СССР. – 1989. – Т.307. – С.1046–1050.
86. *Матвеев А.Ф.* О построении решения сингулярного интегрального уравнения с заданным порядком на бесконечности: Препр. №94 / ИТЭФ. – Москва, 1986. – 12 с.
87. *Матвеев А.Ф.* О приближенном решении сингулярного интегрального уравнения на отрезке // Докл. АН СССР. – 1988. – Т.298, №2. – С. 281–285.
88. *Матвеев А.Ф.* О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений прямым методом с произвольным выбором точек коллокации: Препр. №181 / ИТЭФ. – Москва, 1985. – 19 с.
89. *Матвеев А.Ф.* Приближенное решение некоторых сингулярных интегродифференциальных уравнений: Препр. №83 / ИТЭФ. – М., 1982. – 32 с.
90. *Матвеев А.Ф., Моляков Н.М.* Применение прямого метода механических квадратур для решения сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши: Препр. №103 / ИТЭФ. – М., 1988. – 37 с.
91. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физ.-мат., 1962. – 256 с.
92. *Мусаев Б.И.* К вопросу обоснования метода механических квадратур для полного интегрального уравнения на отрезке: Препр. №001 / Ин-т физики АН Азерб.ССР. – Баку, 1988. – 22 с.
93. *Мусаев Б.И.* К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Сингулярные интегральные операторы. – Баку: Азерб. гос. ун-т, 1986. – С.33–61.
94. *Мусаев Б.И.* О приближенном решении сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений // Сингулярные интегральные операторы. – Баку: Азерб. гос. ун-т, 1987. – С.77–90.
95. *Мусаев Б.И.* О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений: Препр. №17 / Ин-т физики АН Азерб. ССР. – Баку, 1986. – 48 с.
96. *Мусаев Б.И.* Приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения на отрезке. – Баку: Ин-т кибернетики АН Аз.ССР, 1985. – 34 с. Деп. в ВИНТИ, 23.10.85, №7377-85.
97. *Мусаев Б.И.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений при отрицательном индексе методом механических квадратур // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 298, №2. – С.286–290.
98. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.:Наука, 1968. –512 с.
99. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.
100. *Полтавский Л.Н.* К условию Чаплыгина-Жуковского в линейной нестационарной задаче для профиля // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. – Вып. 1313. – С. 419–423.
101. *Прандтль Л.* Механика вязких жидкостей. Т. 3. – М. –Л.: Оборонгиз, 1939.
102. *Правалов И.И.* Интегральные уравнения. – М. –Л.: ОНТИ, 1935. – 248 с.

103. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
104. *Рахматулин Х.А.* Обтекание проницаемого тела // Вестник МГУ. Физ.-мат. серия. – 1950. – №3.
105. *Риман И.С., Крепс Р.Л.* Присоединенные массы тел различной формы в плане // Тр. ЦАГИ, 1947. – Вып. 635.
106. *Санкидзе Д.Г.* О равномерной оценке приближения сингулярных интегралов с Чебышевской весовой функцией суммами интерполяционного типа // Сообщения АН Груз. ССР, 1974. – Т. 75, №1. – С. 53–55.
107. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Ч. II. – М.: Наука, 1973. – 584 с.
108. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
109. *Случановская З.П.* Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Сб. научных тр. Ин-та механ. МГУ. – М., 1973. – №24.
110. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1981. – Т. 4, ч. II. – 552 с.
111. *Старк И.* Обобщенная квадратурная формула для интеграла Коши // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – №9. – С. 244–245.
112. *Суетин П.К.* Классические ортогональные полиномы. – М.: Наука, 1980. – 364 с.
113. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
114. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
115. *Трехмерные течения в пограничном слое.* – М.: ЦАГИ. Обзоры, 1987. №674.
116. *Турчак Л.И.* Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
117. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. – М.: Физматгиз, 1958. – 608 с.
118. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. – М.: Физматгиз, 1959. – 808 с.
119. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. – М.-Л.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
120. *Фломбойм А.В., Довгий С.А., Черний Д.И.* Моделирование эффекта «кроссовера» для затопленных струй // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009).- Часть 2, Харьков-Херсон, 2009, с.440-442
121. *Фломбойм О.В., Черний Д.И.* Обчислювальні особливості моделювання струменевих ефектів та вихрових структур // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – Київ: КУ-2008, Вип. 2,- с.124-129.
122. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.
123. *Худяков Г.Е.* Исследование аэродинамических характеристик цилиндров квадратного сечения // Научн. тр. Ин-та механ. МГУ. – М.: 1973. – №24. – С.61–67.
124. *Черний Д.И.* Метод и алгоритм вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон-2007, С.319-322.
125. *Черний Д.И.* О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально-краевых задач с подвижными границами. // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007, Харьков-Херсон-2007, С.315-318.
126. *Черний Д.И.* Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами // Обчислювальна та прикладна математика. - Київ: Київський університет. – 1997. – Вип. 2(82). – С.112-123.

127. Черний Д.И. Вычислительные технологии компьютерного моделирования для систем прогнозирования.// XXVI International Conference “PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES” (PDMU-2015), Abstracts, August 24-28, 2015, Odessa, Ukraine, Kyiv- 2015, p.150.
128. Черний Д.И., Гаркуша В.И., Рижинко А.И., Каптур О.Ф. Програмна система для дослідження аерогідродинамічних процесів.//Наукові розробки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.-Частина 1. Природничі науки.- Київ: ВПЦ “Київський університет” – 2009, с.137.
129. Шешко М.А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. Вузов. Математика. – 1976, №12. – С.108–118.
130. Anfinogenov A.Yu. and Lifanov I.I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1992. – №7. – P.387–404.
131. Belotserkovskii S.M. Study the unsteady surfaces using the computer // Ann. Rew. Fluid Mech. – 1977. – 9. – P. 469–494.
132. Belotserkovskii S.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices. – Boca Raton, CRC Press.– 1993. – 452 p.
133. Cherniy D.I. The vortex model of circulation flow in sea channel.// IUTAM Symposium “150 Year of Vortex Dynamics”, Denmark Technical University, Lyngby & Copenhagen, Denmark, 2008.// Proceedings of an IUTAM Symposium held at the Technical University of Denmark, Oktober 12-16, 2008, Springer,p.5.
134. Cherniy D., Dovgij S., Meleshko V. The Vortex Model of a Viscid Wall’s Layer // IUTAM Symposium on “Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function”, Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan, p.p. 126-127.
135. Dovgij S.A. Non-linear effects in hydrodynamics of an oscillating wing // Euromech-272, Aussois, France. – 1991. - P. 36 – 43.
136. Dovgij S.A. Non-linear Nonsteady Effects in the Hydrodynamics of the Oscillating Wing // AGARD Report 872. High Speed Body Motion in Water. 1998. – Pp. 5-1 – 5-9.
137. Dovgij S.A., Shekhovtsov A.V. An Improved Method of Discrete Vortices for Non-Stationary Problem // Journal of Mathematical Sciences. – Mai 2001. – V. 104, N 6. – P. 1615–1627.
138. Elliott D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc(-1,1). // J. of Integral Equations and Applications. – 1989, 2, №1. – P.59–94.
139. Elliott D. Orthogonal polynomials associated with singular integral equations having a Cauchy kernel // SIAM J. Numer. Anal. – 1982. – V.13, N6. – P.1041–1052.
140. Elliott D. Rates of convergence for the method of classical collocation for singular integral equations // SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – V.21, N1.
141. Elliott D. Some aspects of numerical analysis of singular integral equations. // SIAM J. Numer. Anal.. – 1982. – V.9. –P. 41–54.
142. Elliott D. The classical collocation method for singular Integral Equations // SIAM J.Numer. Anal. – 1982. – V.19, №4. – P.816–832.
143. Erdogan F.E., Gupta G.D. and Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. // Method of Analysis and solutions of Crack Problems Leyder: Noordhoff intern. Publ. – 1973. – P.368–425.
144. Gaidenko V.I. and Lifanov I.K. On the mathematical model for nonlinear stationary aerodynamic problems // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1993. – V.8, N4. – P.285–296.

145. *Gulyaev V.V., Lifanov I.K. and Misko V.A.* Mathematical model of the flow around airfoil with high-lift devices // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1996. – V.11, N2. – P.155–166.
146. *Junghanns P., Silbermann B.* Local theory of the collocation method for the approximate solution of singular equations // Integral Equations and Operator Theory. – 1984. – V.7. – P.791–807.
147. *Junghanns P., Silbermann B.* Numerical Analysis of the Quadrature Method for Solving Linear and Nonlinear Singular Integral Equations. – Karl-Marx-Stadt. – 1988.
148. *Junghanns P., Silbermann B.* Zur Theorie der Noherungsverfahren fur singular Integralgleichungen auf Intervallen // Math. Nachr. – 1981. – V.103. – P.199–244.
149. *Koenig D.G., Falariski M.D.* Aerodynamic characteristics of large-scale model with a swept and augmented jet. – NACA TMX 62029. – 1972.
150. *Lifanov I.K.* Singular solutions of singular integral equations and flow ejecting for an arbitrary contour // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1989. – V. 4, N3, P. 239–252.
151. *Lifanov I.K., Matveev A.F. and Molyakov V.M.* Flowaround permeable and thick airfoils and numerical solution of singular integral equations // Russian J. Numer. Anal. and Math. Modelling. – 1992. – V.7, N2. P.109–144.
152. *Lifanov I.K., Mikhailov A.A. and Titsky S.V.* External flow entrainment and boundary layer separation control for thick airfoil // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. – 1991. – V. 6, N4. – P.325–334.
153. *Lifanov I.K., Mikhailov A.A. and Titsky S.V.* Mathematical modeling of airfoil flowing control by ejection // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1990. – V.5, N3. –P. 209–220.
154. *Lifanov I.K., Poltavskii L.N.* Quadrature formulaes for the Adamard integral over a curvilinear surface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1998. – V.13, N1. P. 27–44.
155. *Lifanov I.K., Ponarin L.N., Setukha A.V.* Mathematical modeling of the rotor of a helicopter with ejection devices // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1999. – V.14, N3. P. 237–264.
156. *Three-dimensional Turbulent Boundary Layers* (Eds. H.H.Fernholz and E.Krause). –Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag. – 1982.
157. *Vyacheslav V. Meleshko, Dmytro I. Cherniy, Stanislav A.Dovgiy* The circulation model of vortex flow of a viscid wall layer.// 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, August 19-24, 2012, Beijing, China; Abstract Book (23-rd ICTAM 2012, Beijing, China), p.101.

Науково-навчальне видання

*Станіслав Олексійович Довгий
Іван Кузьмич Ліфанов
Дмитро Іванович Черній*

**МЕТОД СИНГУЛЯРНИХ
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ**

Рецензенти:

Бар'яхтар Віктор Григорович, д.ф.-м.н., академік НАН України
Гуржій Олександр Андрійович, д.ф.-м.н.

(Російською мовою)

Підписано і здано до друку 26.01.2016. Формат 60x84 1/16.

Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Офсетний друк.

Ум. друк. арк. 22,09. Учет.-изд. арк. 23,75.

Тираж 500. Замовлення №

Надруковано в ТОВ "Видавництво "Юстон"
01034, г. Київ, ул. О. Гончара, 36-а т: (044) 360-22-66, www.yuston.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 497 від 09.09.2015 р.