ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

1. *Властивості доозначень.* В попередніх лекціях розглядалась система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (1)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ - n-вимірна вектор-функція, яка є кусково-неперервною в області G, $(x,t) \in G$, $G \subset R^{n+1}$. Поряд з системою (1) розглядалась система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u_1(x,t),...,u_r(x,t)), \qquad (2)$$

де $x \in R^n$, f – n-вимірна неперервна по сукупності змінних вектор функція, $u_i(x,t)$ – є розривними відповідно на множинах M_i, $i = \overline{1,r}$. В результаті доозначення поняття розв'язку для вказаних систем приходимо до диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t). \qquad (3)$$

При цьому для системи (1) права частина (3) вибиралась в наступних формах:

$$F(x,t) = \overline{co}\left\{ \lim_{y \to x} f(y,t) : (y,t) \notin M \right\}, \; t = const, \qquad (4)$$

$$F(x,t) = \overline{co}\{\lim_{\substack{s \to t \\ y \to x}} f(y,s) : (y,s) \notin M\}, \qquad (5)$$

$$F(x,t) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N, t), \qquad (6)$$

а для системи з керуванням (2) у вигляді

$$F(x,t) = f(x,t,W_1(x,t),...,W_r(x,t)), \qquad (7)$$

$$F(x,t) = \overline{co} f(x,t,W_1(x,t),...,W_r(x,t)), \qquad (8)$$

де $W_i(x,t)$ - замкнені множини можливих значень функції $u_i(x,t)$ в точці (x,t), $i = 1,2,...,r$, при цьому можливі два варіанти

1) множина $W_i(x,t)$ містить всі точки, граничні для будь-яких послідовностей $V_k \in W_i(x_k,t)$

2) $W_i(x,t)$ складається з граничних точок послідовності

$$V_k \in W_i(x_k,t_k), \lim_{k \to +\infty} t_k = t, \lim_{k \to +\infty} x_k = x, k = 1,2,... .$$

Множина $F(x,t)$-непорожня, обмежена, замкнена, а у випадках (4)-(6), (8) - опукла. Розглянемо властивості деяких доозначень.

Лема 1. При доозначенні (4) многозначна функція $F(x,t)$ є β- неперервною по x, а при доозначеннях (5), (7), (8) – по x і t.

Доведення. Для (4) та (5) твердження випливає з теореми 2 (лекція 4). Функції $W_i(x,t)$ при $p = x(t)$ і (7) є β–неперервні за теоремою 3 (лекція 4). Тоді для (8) за теоремою 1 (лекція 4) має місце β- неперервність. Лему доведено.

Задача 19. Які з доозначень (3)-(8) задовольняють основним умовам і чому?

Покажемо, що функцію (4) можна замінити на β–неперервну по x, t функцію (5), якщо для кожної з областей G_i неперервності функції $f(x,t)$ виконується у*мова* γ, яка полягає у наступному: для області G_i при майже всіх t перетин границі області площиною $t = const$ співпадає з границею перетину області тією ж площиною, тобто

$$(\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$$

при майже всіх t. Позначення M_t означає перетин множини M площиною $t = const$.

Приклад. Область G має вигляд (рис.1)

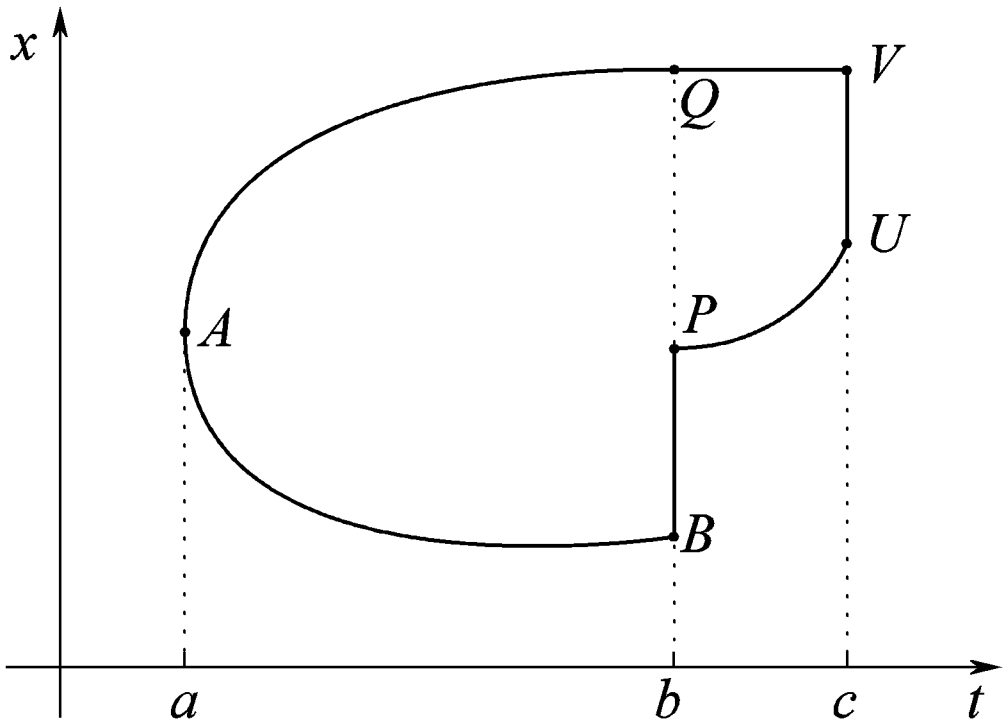

Рис. 1

Умова $(\partial G)_t = \partial(G_t)$ не виконується в наступних точках:

1) $t = a : G_a = \varnothing$,[1] $(\partial G)_a = \{A\}$;
2) $t = b : G_b = (P, Q), \partial(G_b) = \{P, Q\}, (\partial G)_b = [B, P] \cup \{Q\}$;
3) $t = c : G_c = \varnothing, (\partial G)_c = [U, V]$.

Отже, умова γ для області G виконується. Умова γ виконується для широкого класу областей. Нехай

$$H(x,t) = \left\{ \lim_{y \to x} f(y,t) : t = const \right\}, \; H_0(x,t) = \{ \lim_{\substack{s \to t \\ y \to x}} f(y,s) \}.$$

Лема 2. Якщо області неперервності функції $f(x,t)$ задовольняють умові γ, то при майже всіх t виконується співвідношення $H_0(x,t) = H(x,t)$.

Доведення. Умова $(\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$ виконується для всіх $t \notin T_i$, $\mu T_i = 0$. Виберемо точку (x,t), таку, що $t \notin T_0 = \bigcup_i T_i$. Якщо $(x,t) \in G_i$, то в цій точці $H_0(x,t) = H(x,t) = \{ f(x,t) \}$. Якщо (x,t) лежить на границі G_i або кількох таких областей, то для будь-якого $v \in H_0(x,t)$ виконується

$$v = \lim f(x_k, t_k), x_k \to x, t_k \to t,$$

де $\{(x_k, t_k)\} \subset G_i$, тобто послідовність пар належить одній області. Так як $(x,t) \in (\partial G_i)_t = \partial(G_{it})$, то в G_{it} знайдеться послідовність $\{(t, x_m^0)\}$, така, що $(t, x_m^0) \to (t, x)$.

[1] так як G-область, відкрита множина, і не містить своєї границі

Функція $f(x,t)$ – кусково неперервна, тому $v = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,t_k) = \lim\limits_{m\to\infty} f(t,x_m^0) \in H(x,t)$. Отже, $H_0(x,t) \subset H(x,t)$. Включення $H(x,t) \subset H_0(x,t)$ очевидне. Лему доведено.

Наслідок 1. При умові γ розв'язки диференціальних включень

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t) = coH(x,t),$$

$$\frac{dx}{dt} \in F_0(x,t) = coH_0(x,t)$$

співпадають. Функція $F_0(x,t) = coH_0(x,t)$ є β- неперервною по x, t.

Доведення. В силу леми 2 $F_0(x,t) = F(x,t)$ майже при всіх t. За теоремою 2 (лекція 4) многозначні відображення $H_0(x,t)$, $F_0(x,t)$є β–неперервними. Наслідок доведено.

Виходячи з властивостей доозначень з правою частиною (4), (5), (8), питання існування розв'язку стійкості, неперервної залежності від початкових умов та правої частини для системи диференціальних рівнянь з розривною правою частиною може бути проаналізовано на основі теорем лекцій 5 і 6. Для диференціального включення (3) з правою частиною (6), тобто, у випадку доозначення Філіппова, теорема про існування розв'язку задачі Коші формулюється наступним чином.

Теорема 1. Нехай в області G вектор-функція $f(x,t)$ вимірна і майже скрізь $\|f(x,t)\| \le m(t)$, $m(t)$-інтегрована функція. Тоді для довільної точки $(x_0,t_0) \in G$ існує розв'язок диференціального включення (3) з правою частиною (6) при умові $x(t_0) = x_0$ і він визначений по меншій мірі на відрізку $[t_0 - d, t_0 + d]$, де d є таким, що циліндр $\| x - x_0 \| \le r$, $\| t - t_0 \| \le d$ весь міститься всередині G, $r = \max\{\int\limits_{t_0-d}^{t_0} m(s)ds;\ \int\limits_{t_0}^{t_0+d} m(s)ds\}$. При вказаних умовах розв'язок може бути продовжений до границі області G.

2. Єдність розв'язку. Для систем диференціальних рівнянь з розривною правою частиною вводиться поняття правої та лівої єдиності.

Означення. Говорять, що для системи диференціальних рівнянь (1) виконується *права єдиність* в точці $(x_0,t_0) \in D$, якщо існує момент $t_1 > t_0$, такий, що кожні два розв'язки системи (1), які задовольняють умові $x(t_0) = x_0$, співпадають при $t \in [t_0,t_1]$ або на тій частині цього відрізку, на якій вони обидва визначені. Для (1) має місце *права єдиність в області* D (відкритій або замкненій), якщо для довільної точки $(x_0,t_0) \in D$ кожні два розв'язки, що задовольняють умові $x(t_0) = x_0$, співпадають на кожному відрізку $t \in [t_0,t_1]$, на якому вони обидва існують і проходять в цій області. Аналогічно визначається *ліва єдиність* в точці і в області – єдиність при $t_1 \le t \le t_0$.

Задача 20. Довести, що: з правої єдиності в кожній точці області D випливає права єдиність в D; з правої єдності в області D випливає права єдиність в кожній внутрішній точці цієї області.

Праву частину диференціального включення (3) будемо розглядати у вигляді (4) і (5)

Теорема 2. Нехай права частина $f(x,t)$ системи диференціальних рівнянь (1) в області $\mathfrak{A}$ розривна тільки на множині M міри нуль і існує така інтегрована функція $l(t)$, що для майже всіх точок (x,t) і (y,t) з $\mathfrak{A}$ при $\varepsilon_0 > 0$, $\|x - y\| < \varepsilon_0$ справджуються нерівності

$$\| f(x,t)\| < l(t),$$

$$\big(x - y,\ f(x,t) - f(y,t)\big) \le l(t)\|x - y\|^2. \qquad (9)$$

Тоді для (1) при доозначеннях (4), (5) має місце права єдиність в області D.

Доведення. З (9) випливає, що для майже всіх t та будь-яких x^*, y^* виконується нерівність

$$(x^* - y^*, v - w) \le l(t)\left\|x^* - y^*\right\|^2. \qquad (10)$$

Тут v і w–довільні значення з множини V і W граничних значень функції $f(x,t)$ при $x \to x^*$ та $x \to y^*$ відповідно. Нерівність (10) збережеться, якщо умову $v \in V$ замінити $v \in \overline{co}V$,а умову $w \in W$ – на $w \in \overline{co}W$. Тоді в силу доозначень (4), (5) та нерівності (10) на розв'язках диференціального включення (3)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 = \left(x(t) - y(t), \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}y(t)\right) \le l(t)\left\|x(t) - y(t)\right\|^2.$$

Позначимо $z(t) = x(t) - y(t)$. Тоді майже скрізь $\dfrac{d\left\|z(t)\right\|^2}{dt} \le 2l(t)\left\|z(t)\right\|^2$ і тому

$$\frac{d}{dt}(\left\|z(t)\right\|^2 e^{-L(t)}) \le 0, \qquad (11)$$

де $L(t) = \int_{t_0}^{t} l(s)ds$. Абсолютно неперервна функція $\gamma(t) = \left\|z(t)\right\|^2 e^{-L(t)}$ у силу (7) не зростає. Так як $z(t_0) = 0$, то $z(t) = x(t) - y(t) = 0$ майже скрізь, $t \ge t_0$. Теорему доведено.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.