РОЗДІЛ 4
АНАЛІЗ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ: ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ.

1. Основні положення. Нехай $X \subset R^n$ - фазовий простір і задана система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Тут $x \in X$, $t \in R^1$. Позначимо $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок системи при умові $x(t_0) = x_0$. Задана множина $I_t \subset X \times R^1$ і оператор $A_t : I_t \to J_t$, $J_t \subset X \times R^1$. Процес відбувається наступним чином: точка (x_0, t_0) в силу системи (1) переходить в момент t в точку $(x(t), t)$, $x(t) = x(t, x_0, t_0)$. Рух здійснюється до моменту $t = t_1 > t_0$, такого, що $(x(t_1), t_1) \in J_t$. В момент t_1 точка $P_1 = (x(t_1), t_1)$ переходить в точку $A_{t_1}(P_1) = (\hat{x}(t_1), t_1) \in J_{t_1}$ і рухається далі по кривій $(x(t), t)$, де $x(t) = x(t, \hat{x}(t_1), t_1)$, в силу системи до того часу, поки знову не попаде в множину I_{t_2} в деякий момент $t_2 > t_1$. Далі під дією оператора A_t точка $P_2 = (x(t_2), t_2)$ переходить в точку A_{t_2} $P_2 = (\hat{x}(t_2), t_2) \in J_{t_2}$ і рухається далі по кривій $(x(t), t)$, $x(t) = x(t, \hat{x}(t_2), t_2)$, до тих пір, поки не вийде на множину I_t. Математично цей процес прийнято записувати так:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (x,t) \notin I_t, \tag{1}$$

$$\Delta x \Big|_{(x,t) \in I_t} = A_t x - x. \tag{2}$$

Тут $\Delta x = x(t+0) - x(t-0)$. Співвідношення (1)-(2) називаються *системою диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.*

Означення. Розв'язком (1), (2) називається функція $\varphi(t)$, що задовольняє (1) поза множиною I_t і яка має розриви першого роду в точках I_t зі скачками $\Delta x = \varphi(t+0) - \varphi(t-0) = A_t \varphi(t-0) - \varphi(t-0)$.

Можливі наступні варіанти: розв'язок співвідношень (1), (2)

-не підпадає миттєвому впливу, тобто інтегральна крива системи рівнянь (1) не перетинає множину I_t, або перетинає її в нерухомих точках оператора A_t.

-підпадає миттєвому впливу скінчену кількість разів.

-підпадає миттєвому впливу зліченну кількість разів – інтегральна крива перетинає I_t в зліченій кількості точок, що не є нерухомими точками оператора A_t.

Серед розв'язків, що розглянуті в останньому випадку, виділяють розв'язки, що:

а) проковтуються множиною I_t, (тобто залишаються в I_t починаючи з деякого моменту $t_1 > t_0$);

б) мають в I_t точку скупчення.

Рух у випадку а) по траєкторії, що проковтнулась множиною I_t є, починаючи з деякого моменту, послідовним перекиданням відображуючої точки $P_t = (x(t), t)$ з положення $(x(t_1), t_1)$ в положення $(A_{t_1} x(t_1), t_1)$, далі в $(A_{t_1}^2 x(t_1), t_1)$, а з нього в $(A_{t_1}^3 x(t_1), t_1)$ і так далі. В б) рух по траєкторії, що має точку скупчення в I_t, є рухом, який при наближенні до деякого

моменту $t_1 > t_0$ злічене число разів попадає і покидає множину I_t і тому цей рух не можна продовжити до моменту $t = t_1$. В реальних системах в околі точки $t = t_1$ у випадку б) відбувається народження якісно нового типу руху, або це може означати, що модель невірно описує фізичний процес. При розгляді систем з імпульсним впливом виникають ті ж задачі, що і для звичайних диференціальних рівнянь (проблеми існування і продовження розв'язку, єдиність розв'язку, стійкість розв'язку, оптимізація). Але є і специфічні задачі.

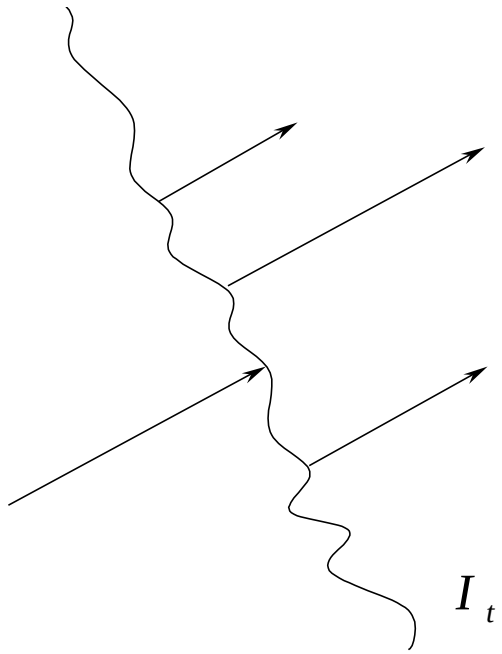

Рис. 1

Багато в чому специфіка досліджень задач, пов'язаних з співвідношеннями (1), (2), визначається властивостями оператора A_t.

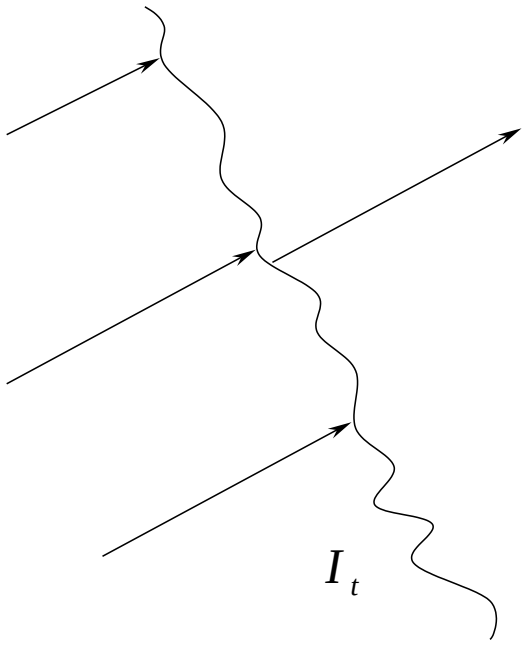

Рис.2

Так якщо A_t не є однозначним, то виникають задачі, в яких можливе “миттєве” розщеплення розв’язку на кілька розв’язків (рис.1). Якщо A_t не є взаємно однозначним, то можлива ситуація, коли кілька розв’язків миттєво зливаються в один розв’язок (рис. 2).

Не менш специфічні задачі виникають, якщо допустити, що множина $A_t S_t = \acute{\emptyset}$ для деякого $S_t \subset I_t$. Таке припущення дозволяє розглядати “смертні” системи: зображуюча точка P_t, що попадає в S_t, переводиться оператором A_t в порожню множину, тобто “помирає”. Множина S_t називається множиною “загибелі” траєкторії. Для вказаного випадку виникають задачі про середній час “життя” рухомої точки, про ймовірність “смерті“ за час $t_0 \le t \le T$ і т.і.

Різнобарвність систем типу (1), (2) визначається типом правих частин, типом множини I_t, типом оператора A_t і дозволяє провести глибокі класифікації. На даний момент не існує класифікації систем з імпульсним впливом по властивостям множини I_t. А за характером імпульсного впливу розрізняють три істотно різні класи:

1) системи, що підпадають під імпульсний вплив у фіксовані моменти часу.

2) системи, що підпадають під імпульсний вплив в момент попадання зображуючої точки P_t на задані поверхні $t = \tau_i(x)$ розширеного фазового простору.

3) розривні динамічні системи.

Для розривних динамічних систем $f(x,t) = f(x),\ \Gamma = I_t \subset X,\ \Gamma_0 = J_t \subset X,\ A_t = A$ для всіх t, тобто система (1)-(2) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \notin \Gamma \tag{3}$$

$$\Delta x\Big|_{x\in\Gamma} = Ax - x = I(x) \tag{4}$$

Отже, рух фазової точки в такій системі відбувається по одній з траєкторій системи (3) в проміжку між попаданням фазової точки на множину Γ. В момент попадання точка x(t) “миттєво” перекидається оператором A в точку $y = Ax$ множини Γ_0.

2. Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 2x, \tag{5}$$

$$x(0) = 1, \tag{6}$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = ln\big(x(\tau_i - 0)\big) - x(\tau_i - 0), i = 1,2, t \ge 0, \tag{7}$$

де $\tau_1 = 1/2,\ \tau_2 = 1$.

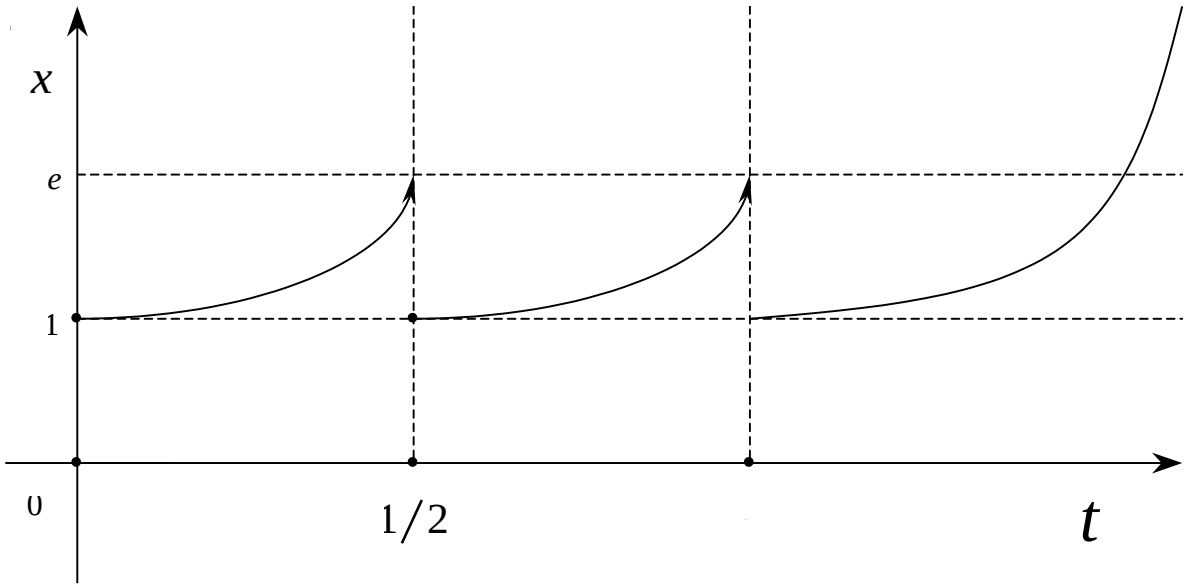

Рис. 3

Це є рівняння, що підпадає під імпульсний вплив у фіксовані моменти часу. Розв'яжемо його. Загальний розв'язок (5) у формі Коші $x(t) = x_0 e^{2t}$, $x_0 = x(0)$. На $t \in [0,1/2)$ отримуємо $x(t) = e^{2t}$, $x(1/2+0) = ln(e) = 1$. При $t \in (1/2,1)$ розв'язок $x(t) = e^{2(t-\frac{1}{2})} = e^{-1}e^{2t}$, $x(1+0) = 1$ і $x(t) = e^{2(t-1)}$, $t \in (1,+\infty)$

Задача 21. Розв'язати рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + sin\,t, t \geq t_0,\ \ x(t_0) = x_0,\ \ x(\tau_i + 0) = x(\tau_i - 0) + cos(\tau_i),\ \ t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_N,$$

де N - фіксоване натуральне число.

СИСТЕМИ, ЩО ПІДПАДАЮТЬ ПІД ІМПУЛЬСНИЙ ВПЛИВ У ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), t \neq \tau_i, \qquad (1)$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \Phi_i(x). \qquad (2)$$

В цій системі множиною I_t є послідовність гіперплощин $t = \tau_i$ розширеного фазового простору, $\{\tau_s\}$ - дискретна множина (скінченна чи зліченна) моментів часу. Оператор A_t визначається тільки для $t = \tau_i$, тому позначимо $A_i = A_{\tau_i}$ і

$$A_i : x \to A_i x = x + \Phi_i(x) \qquad (3)$$

Розглянемо деякі загальні теореми стосовно розв'язків системи з імпульсним впливом (1), (2). Припустимо, що сукупність розв'язків системи (1) володіє наступними властивостями:

1) *(непродовжуваність).* Кожний розв'язок $x(t)$ системи (1) є неперервною функцією, що визначений на відрізку (a,b), який є своїм для кожного розв'язку $(a < b, a, b \in [-\infty,+\infty])$. При цьому, якщо $a > -\infty, (b < \infty)$, то $\|x(a+0)\| = \infty$ (відповідно $\|x(b-0)\| = \infty$).

2) *(локальний характер).* Якщо деяка функція $x(t), t \in (a,b)$ задовольняє умові 1) і для кожного $t_0 \in (a,b)$ існує $\varepsilon > 0$, таке, що на кожному з інтервалів $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ та $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ функція $x(t)$ співпадає з деяким розв'язком, то $x(t)$ буде також розв'язком.

3) *(розв'язність задачі Коші).* Для довільних t_0, x_0 існує щонайменше один розв'язок $x(t)$, $t \in (a,b)$, системи (1), для якого $t_0 \in (a,b)$ і $x(t_0) = x_0$.

Ці вимоги виконуються, зокрема, для системи (1), права частина якої неперервна, або задовольняє системі диференціальних рівнянь Каратеодорі.

Оператор A_i, взагалі кажучи, не обов'язково однозначний, тобто, $A_i x$ може бути множиною (в тому числі і порожньою), $x \in R^n$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Якщо розв'язки системи диференціальних рівнянь (1) задовольняють умовам 1)–3), то для довільних $t_0 \in R^1, x_0 \in R^n$ існує, щонайменше, один розв'язок $x(t), t \in (a,b)$ системи з імпульсним впливом (1), (2), для якого $a < t_0 \le b,\ a,b \in [-\infty,+\infty],\ x(t_0) = x_0$, (при $t_0 < b$) або $x(t_0 - 0) = x_0$ (при $t_0 = b$). При цьому

1) якщо $a < -\infty$, то або $\|x(a+0)\| = \infty$, або $a = \tau_i, \|x(a+0)\| < \infty$ і $x(a+0) \notin A_i R^n$;

2) якщо $b < \infty$, то або $\|x(b-0)\| = \infty$, або $b = \tau_j$, $x(b-0)$ існує і $A_j x(b-0) = \varnothing$.

Зауваження . В теоремі 1 умови 1) – 2) означають, що розв'язок не можна продовжити поза інтервал (a,b) в силу системи (1), (2).

При довільному $M \subseteq R^n$ позначимо $g(t,t_0)M$ множину значень $x(t)$ для всіх розв'язків системи (1), для яких $x(t_0) \in M$. Тоді аналогічна множина для розв'язків системи (1),(2) має вигляд $G(t,t_0)M$, де відображення G при $t > t_0$ визначається формулою:

$$G(t,t_0)M = g(t,\tau_i)A_i g(\tau_i,\tau_{i-1})A_{i-1}...A_j g(\tau_j,t_0)M,$$

$$\tau_i < t < \tau_{i+1},\ i = j-1, j,..., j = \min\{i : \tau_i \ge t_0\}.$$

Задача 22. Який вигляд буде мати це співвідношення при $t < t_0$?

Приклад. Розв'яжемо задачу Коші для рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 1,\ t \ne \tau_i,\ \Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \ln(2-x),\ x(0) = 0,\ \tau_i = i,\ i = 1,2,....$$

Виявляється, що розв'язок $x(t)$ не можна продовжити на відрізок [0,2] і момент $t = 2$ є моментом гибелі вказаного розв'язку. Дійсно при $t \in [0,2)$ отримуємо $x(t) = t, \ln(2 - x(1)) = 0$. В момент $t = 2$ $x(2) = 2$. Функція $\ln(2-x)$ в точці $x = x(2)$ не визначена, а тому вказаний розв'язок в момент $t = \tau_2$ гине.

І взагалі, випадок, коли $A_i x^* = \varnothing$ відповідає *"загибелі"* траєкторії, що прийшла в точку x^* в момент τ_i. Множина $\{x : A_i x = \varnothing\}$ є *"множиною загибелі"* траєкторії в момент τ_i.

Теорема 2. Для єдиності розв'язку задачі Коші системи (1), (2) в напрямку росту *t* при довільних початкових даних x_0, t_0 необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

1) система диференціальних рівнянь (1) є системою, для якої виконується єдиність розв'язку задачі Коші при довільному $t_0 \ne 0$;

2) при довільному $t_0 = \tau_i, x_0 \in A_i R^n$ кожна з множин $A_i x_0$ містить не більше одного елементу.

Зауваження. В напрямку спадання *t* теорема формулюється аналогічно, якщо A_i замінити на A_i^{-1}.

Отже, під дією оператора A_i розв'язки можуть зливатися, розщеплюватись і система (1),(2) може втрачати єдиність розв'язку. Для необмежуваної продовжуваності розв'язку системи (1), (2) вперед та назад необхідно і достатньо, щоб цю властивістю мала система (1) і $A_i R^n = R^n$ для всіх *i*.

Приклад. Розглянемо задачу Коші для рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, t \neq \tau_i, \qquad (4)$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = -1,\ \tau_i = \frac{\pi i}{4},\ x(0) = 0,\ i = 0,1,\ldots. \qquad (5)$$

Оскільки розв'язок рівняння (4) є $x(t) = tgt \to \infty$ при $t \to \frac{\pi}{2}$, то розв'язок (4) не є продовжуваний на інтервал $[0, \frac{\pi}{2}]$. Але за рахунок імпульсного впливу цей розв'язок можна продовжити на $t \geq 0$. Дійсно, розв'язок *x(t)* системи з імпульсним впливом (4), (5) є періодичною функцією з періодом $\frac{\pi}{4}$ і $x(t) = tg(t - \frac{\pi}{4}i), t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots$.

Припустимо, що розв'язки системи (1) задовольняють наступній властивості:

4) *(локальна компактність).* Для довільних t_0, x_0 існує таке $\varepsilon > 0$, що якщо $|t_1 - t_0| < \varepsilon$, $\|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon$, то будь-який розв'язок *x(t)* для якого $x(t_0) = x_1$, існує на відрізку $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$ і сукупність цих розв'язків при фіксованих t_0, x_0, ε компактна в $C(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.

Припустимо також, що відображення A_i напівперервне зверху.

Теорема 3. Нехай при вказаних припущеннях і при заданих $t_0, x(t_0)$ та при умові, що компакт $K \subset R^n$ є непорожнім, всі розв'язки системи диференціальних рівнянь (1), для яких $x(t_0) \in K$, існують на $t_0 \leq t \leq T, t_0 < T < \infty$. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ будь-який розв'язок $\bar{x}(t)$, що задовольняє умові $\rho(\bar{x}(t_1), K) \leq \varepsilon, |t_1 - t_0| \leq \varepsilon$, існує на відрізку $t_0 - \varepsilon \leq t \leq T$ і сукупність цих розв'язків при фіксованих t_0, K, T, ε є компактною в метриці рівномірного відхилення для кусково неперервних функцій. Якщо ж $t_0 = \tau_i$, то це є справедливим при $t_1 \leq t_0$.

Наслідок 1. Якщо в умовах теореми 3 розв'язок задачі Коші системи (1) єдиний , а A_i-бієкція, то розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (1),(2) неперервно залежить від $t_0 \neq \tau_i, x_0$ на кожному замкненому інтервалі, на якому $x(t, x_0, t_0)$ є визначеним. При $t_0 = \tau_i$ ця залежність неперервна зліва.

Наслідок 2. В умовах теореми 3 множина $G(t, t_0)K$, $t \in [t_0, T]$ є компактом при кожному *t*, неперервно залежить від $t \neq \tau_i$, а при $t = \tau_i$ ця залежність неперервна зліва і $G(\tau_i + 0, t_0)K = A_i G(t, t_0)K$. Залежність $G(t, t_0)K$ від *K* напівнеперервна зверху рівномірно по *t*.

Література.

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –К.: Выща школа, 1987. -228 с.