РОЗДІЛ 5
ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРНО ЗАДАНИХ СИСТЕМ

МЕТОД СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.

1. *Вступ.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t,\alpha) \qquad (1)$$

з умовою Коші

$$x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

Тут x – вектор стану розмірності n, $f(x,u,t,\alpha)$ – n-вимірна вектор функція, визначена і неперервно диференційована за своїми аргументами, $u = u(t)$ – m-вимірна функція керування, α - вектор параметрів розмірності r, $t \in [t_0, T]$.

Нехай на розв'язках системи (1), (2) визначений деякий функціонал $I(u,\alpha)$. Якщо вектор керування є заданим і ставиться задача про оптимізацію функціоналу $I(u,\alpha)$ за α, то таку задачу називають *задачею параметричної оптимізації.* По своїй суті вона належить до класу проблем нелінійного програмування.

Нехай вектор α є фіксованим і оптимізація функціоналу $I(u,\alpha)$ проводиться за рахунок незалежного вибору функції керування $u = u(t)$. Припустимо, що задані деякі функції

$$\Psi_i = \Psi_i(t, b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{ik_i}),\ t \in [t_i, t_{i+1}), \qquad (3)$$

які є неперервно диференційованими за сукупністю змінних, $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$. Якщо наближений розв'язок такої оптимізаційної задачі шукається у вигляді

$$u(t) = \Psi_i(t, b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{ik_i}),\ t \in [t_i, t_{i+1}), \qquad (4)$$

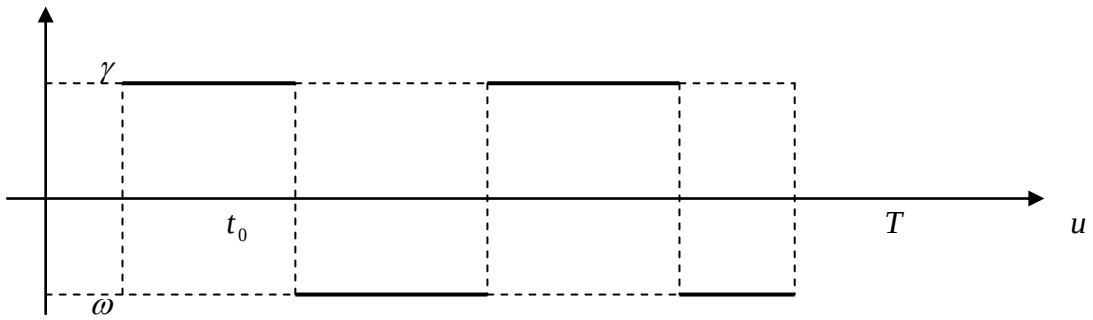
то таку задачу називають *задачею структурної оптимізації.* Це означає, що проблему вибору оптимальної функції *u(t)* звели до задачі знаходження оптимальних значень параметрів b_{ij} та t_i. В цьому випадку говорять, що функція керування задана в структурному класі (4). Найпростішим випадком структури класу керувань є клас релейних функцій. Припустимо, що *u(t)* є скалярна функція. Якщо

$$u(t) = \gamma$$

для деяких інтервалів $[t_i, t_{i+1})$, а на інших інтервалах

$$u(t) = \omega,$$

де γ, ω - задані дійсні числа, то говорять, що $u(t)$ є *релейна функція керування.*



Нехай на кожному з інтервалів $[t_i, t_{i+1})$ задана система лінійно незалежних неперервних функцій $\{\varphi_{ij}^s\}_{j=1}^{k_i}$, $s = 1,2,...n$. Тоді одним з поширених випадків (4) є

$$u_s(t) = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij}^s \varphi_{ij}^s(t),\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ s = 1,2,...n, \qquad (5)$$

де α_{ij}^s - набір невідомих параметрів.

2. *Параметрична оптимізація.* Припустимо, що в системі (1), (2) вектор-функція керування $u(t)$ є заданою і задача параметричної оптимізації полягає в мінімізації цільової функції

$$J(\alpha) = \Phi(x(T,\alpha)), \qquad (6)$$

яка визначена на розв'язках $x(t,\alpha)$ системи (1) і є неперервно диференційованою. Поряд з системою (1), (2) розглянемо спряжену систему

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x,\psi,u,\alpha,t)}{\partial x},\ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T,\alpha))}{\partial x}. \qquad (7)$$

Тут $H(x,\psi,u,\alpha,t) = \psi^T(t) f(x,u,t,\alpha)$ - функція Гамільтона, $\psi(t)$- n-вимірний вектор спряжених змінних. Знайдемо градієнт функції (6). Для цього розглянемо

$$\Delta J = J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha) = \Phi(x(T,\alpha+\Delta\alpha)) - \Phi(x(T,\alpha)) = \frac{\partial \Phi^T(x(T,\alpha))}{\partial x}\Delta x(T) + o(\|\Delta x(T)\|),$$

де $\Delta x(t) = x(t,\alpha+\Delta\alpha) - x(t,\alpha)$. З формули інтегрування по частинам

$$\psi^T(T)\Delta x(T) - \psi^T(t_0)\Delta x(t_0) = \int_{t_0}^{T} \psi^T(t) d\Delta x(t) + \int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t).$$

Оскільки $\Delta x(t_0) = x(t_0,\alpha+\Delta\alpha) - x(t_0,\alpha) = x_0 - x_0 = 0$ і має місце (7) , то

$$\Delta J = -\psi^T(T)\Delta x(T) = -\int_{t_0}^{t} \psi^T(t) d\Delta x(t) - \int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t) + o(\|\Delta x(T)\|). \qquad (8)$$

Для $\Delta x(t)$ маємо

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(x+\Delta x,u,t,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,u,t,\alpha),\ \Delta x(t_0) = 0.$$

Звідси

$$\int_{t_0}^{T} \psi^T(t) d\Delta x(t) = \int_{t_0}^{T} (H(x+\Delta x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t) - H(x,\psi,u,\alpha,t))dt$$

і в силу (7)

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t) = -\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial H(x,\psi,u,\alpha,t)}{\partial x} dt.$$

Підставимо останні два співвідношення в (8) і додамо і віднімемо $H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t)$. Отримаємо

$$\Delta J = -\int_{t_0}^{T} [H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t) - H(x,\psi,u,\alpha,t)]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} [H(x+\Delta x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t) - H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t)]dt +$$

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial H(x,\psi,u,\alpha,t)}{\partial x} dt + o(\|\Delta x(T)\|) =$$

$$-\int_{t_0}^{T} [H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t) - H(x,\psi,u,\alpha,t)]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt - \int_{t_0}^{T} o\left(\|\Delta x(T)\|\right)dt + o\left(\|\Delta x(T)\|\right)=$$

$$-\left[\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x,\psi,u,\alpha,t)}{\partial \alpha}\right]^T \Delta\alpha \ + o\left(\|\Delta\alpha\|\right)-$$

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u,\alpha+\Delta\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} o\left(\|\Delta x(T)\|\right) + o\left(\|\Delta x(T)\|\right) . \qquad (9)$$

Задача 25. Використовуючи теорему про неперервну залежність розв'язків системи диференціальних рівнянь від параметрів, довести, що останні три доданки в (9) є $o\left(\|\Delta\alpha\|\right)$, $\Delta\alpha \to 0$. Отже,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x,\psi,u,\alpha,t)}{\partial \alpha} dt . \qquad (10)$$

Похідна (10) використовується для побудови ітераційних процедур типу градієнтного спуску.

3.*Структурна оптимізація.* Розглянемо функціонал

$$J(u) = \Phi(x(T,u)), \qquad (11)$$

який визначений на розв'язках системи (1). Припустимо, що параметр α – фіксований і керування задається в структурному класі (4). Запишемо варіацію функціоналу за точками t_i, які називаються *точками переключення.* Нехай спочатку параметри b_{ij} в (4) є фіксованими. Проводячи викладки аналогічні (9), отримаємо

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) = -\int_{t_0}^{T}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) \frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} o\left(\|\Delta x(t)\|\right)dt + o\left(\|\Delta x(T)\|\right). \qquad (12)$$

Варіюємо точку t_i, змінюючи її на величину Δt_i >0.Так як

$$\Delta u = \begin{cases} \psi_{i+1}\left(t, b_{(i+1)1},...,b_{(i+1)k_{i+1}}\right) - \psi_i\left(t, b_{i1},...,b_{ik_i}\right), \ t \in [t_i, t_i+\Delta t_i), \\ 0, \ t \in [t_0, T], \end{cases}$$

то з (12) випливає

$$\Delta J(u) = -\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} \Delta x^T(t) \frac{\partial}{\partial x}\left[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_0}^{T} o\left(\|x(T)\|\right) + o\left(\|x(T)\|\right). \qquad (13)$$

Останні три члени співвідношення (13) є $o\left(\|\Delta t_i\|\right)$ так як

$$\max_{t\in[t_0,T]}\|\Delta x(t)\| \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Тому з (13) випливає

$$\frac{\partial J}{\partial t_i} = = -\lim_{\Delta t_i \to 0}\frac{1}{\Delta t_i}\Big[\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i}\big[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\big]dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_i}\big[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t)-H(x,\psi,u,\alpha,t)\big]dt\Big] =$$

$$-\big[H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i+0),\alpha,t_i)-H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i-0),\alpha,t_i)\big] \qquad (14)$$

Аналогічно до попереднього, використовуючи співвідношення (9), отримуємо, що

$$\frac{\partial J}{\partial b_{ij}} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} grad_u^T H(x(t),\psi(t),u(t)\alpha,t)\frac{\partial \Psi_i}{\partial b_{ij}}dt. \qquad (15)$$

Задача 26. Довести що , якщо функція керування задана в структурному класі (5) то

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{ij}^k} = -\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{\partial H(x(t),\psi(t),u(t),\alpha,t)}{\partial u_k}\varphi_{ij}^k(t)dt. \qquad (16)$$

Співвідношення (14)-(16) використовуються для побудови ітераційних процедур типу градієнтного спуску. Наприклад, для оптимізації системи (1) за точками переключення t_i можна застосувати метод

$$t_i^{(k+1)} = P\Big\{t_i^{(k)} - \rho_k\big(H(x(t_i^k),\psi(t_i^k),u(t_i^k-0),\alpha,t_i^k)-H(x(t_i^k),\psi(t_i^k),u(t_i^k+0),\alpha,t_i^k)\big)\Big\}. \qquad (17)$$

Тут P – оператор упорядкування точок переключення, ρ_k >0 – послідовність чисел, що задовольняє умові збіжності для (17). Так, можна вибрати $\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j = \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2 < \infty$.

Література.

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. –К.: Наукова думка, 1985. –304 с.