ДООЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ В СИСТЕМАХ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

1. Основні означення. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (1)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ - n-вимірна вектор-функція, $(x,t) \in G$, $G \subset R^{n+1}$ - область. Важливими є наступні поняття.

Означення. Функція $f(x,t)$ є *неперервною* в області G *впритул до границі* $\Gamma = \partial G$, якщо при наближенні до кожної точки Γ функція $f(x,t)$ прямує до скінченної границі (можливо, до різних границь для різних граничних точок).

Означення. Вектор-функція $f(x,t)$ називається *кусково-неперервною* в області $G \subset R^{n+1}$, якщо $G = (\bigcup_{i=1}^{N} G_i) \bigcup M$, де $G_i \subset R^{n+1}$ - область, в якій $f(x,t)$ є неперервною впритул до границі G_i, М-множина міри нуль, $M = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$.

Означення. Система диференціальних рівнянь (1) називається *системою з розривною правою частиною*, якщо $f(x,t)$ є кусково-неперервною в області G.

Означення розв'язку, як абсолютно неперервної функції, що задовольняє майже скрізь диференціальне рівняння не завжди може бути застосоване для рівняння, права частина якого розривна на гладкій поверхні $S = M$.

У випадку, якщо з однієї сторони розв'язок підходить до S, а з іншої сходить з S, то тут розв'язок перетинає S і задовольняє систему скрізь, крім точок перетину, в яких розв'язок не має похідної (рис.1). Тут можна застосувати стандартне означення.

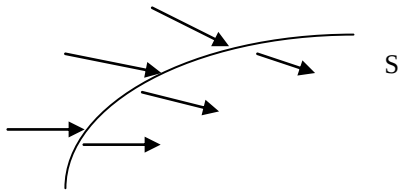

Рис. 1

Якщо з обох сторін поверхні розриву S розв'язки наближаються до S, то постає питання про доозначення правої частини в точках розриву (рис.2).

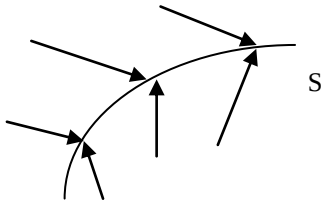

Рис. 2

Отже, для системи (1) будемо вважати, що $f(x,t)$ є кусково-неперервною в G, M - множина міри нуль точок розриву функції $f(x,t)$. Більшість доозначень розв'язку системи з розривною правою частиною (1) можуть бути викладеними наступним чином. Для кожної точки $(x,t) \in G$ вказується множина $F(x,t) \in R^n$. Якщо $f(x,t)$ є неперервною в точці (x,t), то $F(x,t) = \{f(x,t)\}$, тобто $F(x,t)$ складається з однієї точки. Якщо (x,t) – точка розриву

функції $f(x,t)$ то множина $F(x,t)$ задається деяким способом. Як правило, множина $F(x,t)$ має містити всі граничні точки правої частини системи (1) при підході до (x,t). Тоді означення розв'язку для (1) подається наступним чином.

Означення. Розв'язком системи диференціальних рівнянь з розривною правою частиною (1) називають розв'язок диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \qquad (2)$$

тобто, абсолютно неперервну вектор-функцію $x(t)$, що визначена на інтервалі $t \in I$, для якої майже скрізь на I виконується співвідношення $\frac{dx(t)}{dt} \in F(x(t),t)$.

Розглянемо класи правих частин диференціального включення (2), які застосовуються при доозначеннях розв'язку системи диференціальних рівнянь (1).

2. Найпростіше опукле доозначення. Права частина диференціального включення (2) вибирається наступним чином: для кожного фіксованого $t = const$ задається множина

$$F(x,t) = \overline{co}\left\{ \lim_{y \to x} f(y,t) : (y,t) \notin M \right\}.^{1} \qquad (3)$$

Якщо *(x,t)*-точка неперервності функції $f(x,t)$, то $F(x,t) = \{f(x,t)\}$. Якщо ж (x,t) лежить на границі перетину двох чи кількох областей $G_1,...,G_k$ з площиною $t = const$, то множина $F(x,t)$ є відрізок, опуклий многокутник чи многогранник з вершинами $f_i(x,t)$, де $f_i(x,t) = \lim\limits_{\substack{(y,t)\in G_i \\ y \to x}} f(y,t)$, $i \le k$. При цьому всі точки $f_i(x,t)$, $i = 1,2,...k$, належать $F(x,t)$, але не обов'язково вони є вершинами многогранника.

3. Важливий приклад найпростішого доозначення. Розглянемо випадок, коли функція $f(x,t)$ розривна на гладкій поверхні S, що задається рівнянням $\varphi(x) = 0$, де функція φ є диференційованою. Поверхня *S* ділить деякий окіл в просторі зміни *x* на області G^+ та G^- (рис. 3)

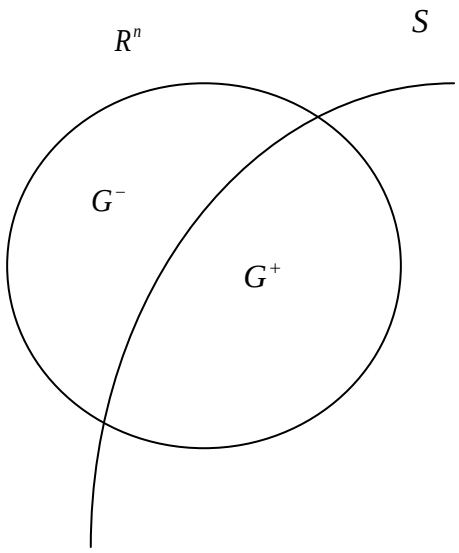

Рис.3.

[1] $\overline{co}A$ -найменша опукла замкнена множина, що містить А

Нехай $t = const$ і $\lim\limits_{\substack{y\in G^- \\ y\to x}} f(y,t) = f^-(x,t)$, $\lim\limits_{\substack{y\in G^+ \\ y\to x}} f(x,t) = f^+(x,t)$. Тоді згідно (3) $F(x,t)$ є відрізок V, що з'єднує кінці векторів $f^+(x,t)$ і $f^-(x,t)$. Розглянемо два випадки.

а). Якщо V при $t_1 < t < t_2$ лежить з однієї сторони від площини *P*, дотичної до поверхні *S* в точці *x*, то розв'язок при вказаних *t* переходить з однієї сторони поверхні *S* на іншу (рис. 4).

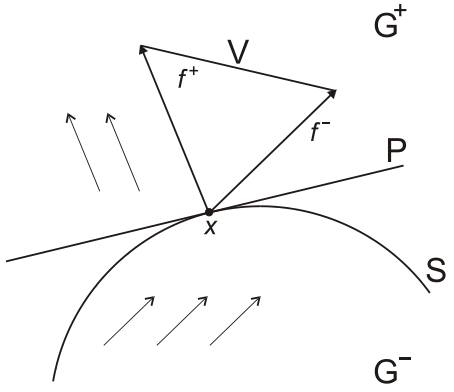

Рис. 4.

б)Якщо V перетинається з площиною *P,* то точка перетину є кінцем відрізку $f^0(x,t)$, що визначає швидкість руху $\dfrac{dx}{dt} = f^0(x,t)$ по поверхні *S* в просторі зміни x

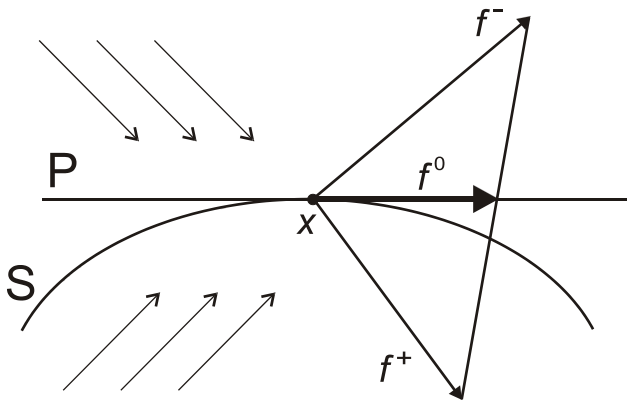

Рис. 5

Означення. Абсолютно неперервна функція $x(t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x,t) \qquad (4)$$

де $x \in S$, $f^0(x,t) \neq f^-(x,t)$, $f^0(x,t) \neq f^+(x,t)$, називається *ковзним режимом.*

При цьому неперервна функція $x(t)$, яка на деякому інтервалі часу проходить в області G^+ (або G^-) і там задовольняє (1), а на іншій частині часового інтервалу належить поверхні S, також вважається розв'язком системи (1) в сенсі (2), (3).

Нехай N - нормаль до поверхні S в точці x, направлена в бік G^+, $f_N^-(x,t), f_N^+(x,t)$ - проекції векторів f^- та f^+ на нормаль N.

1). Якщо $f_N^- > 0$, $f_N^+ < 0$, то вектори $f^+(x,t)$ і $f^-(x,t)$ з обох сторін поверхні S направлені до S. Тоді поблизу S при зростанні t всі розв'язки наближаються до S і не

можуть зійти з S. Тому розв'язок в деякий момент t_1 виходить на S і при $t > t_1$ залишається на S.

2). Якщо $f_N^- < 0, f_N^+ > 0$, то вектори $f^+(x,t)$, $f^-(x,t)$ з обох сторін поверхні S напрямлені від цієї поверхні. (рис. 6). Тоді розв'язок при $t = t_1$, який попадає в точку поверхні S, при $t > t_1$ може зійти з S або в область G^+ або в G^-. У цьому випадку рух по поверхні S не здійснюється, він є нестійким.

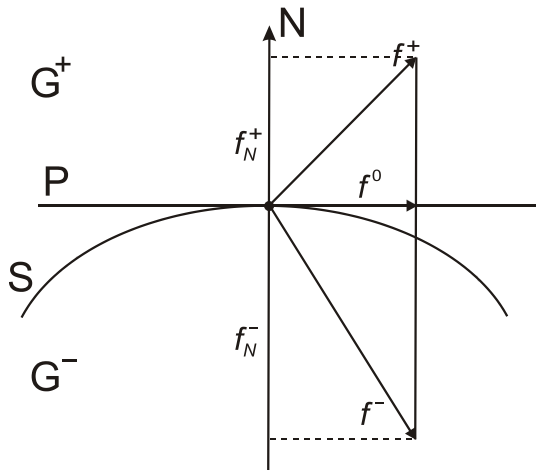

Рис. 6

Отже, в системі (4) права частина $f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha) f^-, \alpha \in [0,1]$. Визначимо параметр α. Так як $(N, f^0) = 0$, то $(N, \alpha f^+ + (1+\alpha) f^-) = 0$. Звідси $\alpha(N, f^+) + (1-\alpha)(N, f^-) = 0$ і $\alpha\{(N, f^+) - (N, f^-)\} + (N, f^-) = 0$. Остаточно

$$\alpha = \frac{(N, f^-)}{(N, f^-) - (N, f^+)} = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+}.$$

Нехай $\nabla\varphi = grad\varphi \neq 0$. Тоді $N = \dfrac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}$, $f_N^- = \dfrac{(\nabla\varphi, f^-)}{\|\nabla\varphi\|}$ і $f_N^+ = \dfrac{(\nabla\varphi, f^+)}{\|\nabla\varphi\|}$. Звідси

$$\alpha = \frac{(\nabla\varphi, f^-)}{(f^- - f^+, \nabla\varphi)}.$$

Якщо поверхня розриву S задається рівнянням $\varphi(x,t) = 0$, тоді аналізуються вектори $g^+ = (1, f^+)^T \in R^{n+1}, g^- = (1, f^-)^T \in R^{n+1}$ і

$$\alpha = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + (\nabla\varphi, f^-)}{(\nabla\varphi, f^- - f^+)}.$$

Зауваження. Якщо весь відрізок з кінцями $f^-(x,t)$ і $f^+(x,t)$ лежить на площині P, то швидкість руху $f^0(x,t)$ по поверхні S визначається неоднозначно.

Задача 18. Використовуючи найпростіше опукле доозначення, записати відповідне диференціальне включення та знайти ковзний режим для диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2sign(x).$$

4. Опукле доозначення. Подамо праву частину диференціального включення (2) у вигляді

$$F(x,t) = \overline{co}\{\lim_{\substack{s\to t \\ y\to x}} f(y,s) : (y,s) \notin M\}. \qquad (5)$$

На відміну від найпростішого опуклого доозначення (3), в правій частині рівності (5) момент t не є фіксованим. Виявляється, що для широкого класу диференціальних рівнянь з кусково неперервними правими частинами доозначення (3) еквівалентне доозначенню (5). Але останнє не охоплює системи типу Каратеодорі.

5. Доозначення Філіппова. Нехай для системи диференціальних. рівнянь (1) права частина $f(x,t)$ визначена майже скрізь вимірна в області $G \subset R^{n+1}$ і для кожної замкненої обмеженої області $D \subset G$ існує маже скрізь скінченна функція $m(t)$ така, що

$$\| f(x,t) \| \le m(t).$$

Праву частину диференціального включення (2) подамо у вигляді

$$F(x,t) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N,t), \qquad (6)$$

де $K_\delta(x) = \{y \in R^n : \|y-x\| \le \delta\}$, μ - міра Лебега. Майже скрізь

$$\bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N,t) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co} f(K_\delta(x)/N_0(t),t), \text{ де } \mu N_0(t) = 0$$

Доозначення Філіппова (17) є узагальненням попередніх доозначень та може бути застосоване до систем типу Каратеодорі.

Приклад. Механічна система з сухим тертям. Розглянемо динамічну систему

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} = v, \\ &m\frac{dv}{dt} = -g(u) - f(v) + e(t), \end{aligned} \qquad (7)$$

де m –маса тіла, u –положення тіла, $g(u)$-сила пружності, $e(t)$–зовнішня сила, $f(v)$–сила тертя, яка є непарною і розривною при $v = 0$, $f(0)$ – тертя спокою, яке може приймати будь-яке значення між своїми найбільшим і найменшим значеннями, тобто $-f_0 \le f(0) \le f_0$.

Якщо $f_0 = \lim\limits_{v \to +0} f(v)$, то можна застосувати доозначення (3) та (5). Якщо $f_0 > \lim\limits_{v \to +0} f(v)$, то рух з початковою нульовою швидкістю $v(0) = 0$ залежить від f_0 і доозначення (3) та (5) незастосовні.

Систему (6) можна записати у вигляді диференціального включення

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in F(u,v,t),$$

де при $0 \neq v$ множина

$$F(u,v,t) = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ -g(u) - f(v) + e(t) \end{pmatrix} \right\}$$

складається з одного елемента, а при $v = 0$

$$F(u,v,t) = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ -g(u) - f(v) + e(t) \end{pmatrix} : f(v) \in [f_0, f_0] \right\}.$$

Отже, праву частину диференціального включення (2) не завжди визначають граничними значеннями функції $f(x,t)$.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.