СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОГО ВПЛИВУ

1. Система з нефіксованими моментами імпульсного впливу. Розглянемо систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ t \neq \tau_i(x), \qquad (1)$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x). \qquad (2)$$

Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор функція, неперервна за сукупністю змінних і ліпшицева за x, $I_i(x)$ – n-вимірна неперервна вектор функція, $t = \tau_i(x)$ – неперервна функція, $x \in D$, $D \subset R^n$ – область.

На відміну від систем з фіксованими моментами імпульсного впливу, розв'язки системи (1), (2) є такими, що для кожного розв'язку – свої точки розриву. Крім цього, в системах з нефіксованими моментами імпульсного впливу з'являється таке явище, як *биття розв'язків* по поверхні $t = \tau_i(x)$. Воно полягає в тому, що інтегральна крива зустрічається з фіксованою поверхнею розриву зліченне число разів. А це може стати причиною виходу розв'язку з області визначення системи з імпульсним впливом. Крім цього, саме через биття розв'язок може бути непродовжуваним на достатній проміжок.

2. Биття розв'язків.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = -x,\ t \neq \tau_i(x),\ \Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = \alpha x, \qquad (3)$$

де $\alpha \in R^1$, $\tau_i = arctgx + i\pi$, $i = 0,1,2,\ldots$.

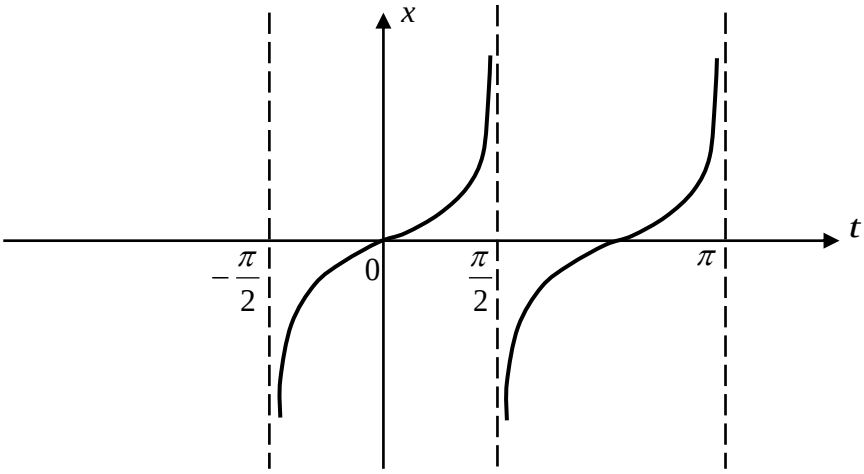

Рис. 1

Розв'язком рівняння $\frac{dx}{dt} = -x$ є $x(t) = x_0 e^{-t}$, $x_0 = x(0)$ (рис. 1). Якщо $\varphi(0) = x_0 < 0$, $\alpha < 0$, то інтегральна крива розв'язку $x = \varphi(t)$ рівняння (3) зустрічає кожну поверхню $t = \tau_i(x)$ тільки один раз.

а) Якщо $\varphi(0) = x_0 > 0$, $\alpha > 0$, то відбувається биття розв'язку $x = \varphi(t)$ по поверхні $t = arctgx$ і інтегральна крива зустрічається з поверхнею $t = arctgx$ зліченну кількість разів. В цьому випадку розв'язок іде в нескінченність при наближенні t до точки $\frac{\pi}{2}$.

б) Якщо $\varphi(0)>0$, $\alpha\in(-1,0)$, то інтегральна крива розв'язку $x=\varphi(t)$ з кожною поверхнею $t=\tau_i(x)$ зустрічається один раз.

в) Якщо $\varphi(0)<0$, $\alpha\in(-1,0)$, то інтегральна крива розв'язку $x=\varphi(t)$ спускається до поверхні $t=\pi+arctgx$ і далі відбувається биття розв'язку по цій поверхні. При цьому розв'язок наближається до прямої $x=0$ при $t\to\pi-0$. В даному випадку розв'язок не можна продовжити на проміжок $t\in[0,\pi]$, так як інтегральна крива кожного розв'язку з такими властивостями при $t\to\pi-0$ наближається до точки $(\pi,0)$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Якщо функція $f(x,t)$ є неперервна за змінними x, t, функції $I_i(x)$, $\tau_i(x)$ є неперервні при $x\in D$ і для $\tau_i(x)$ виконується умова Ліпшиця, а також нерівність

$$\tau_i\geq\tau_i(x+I_i(x)) \qquad (4)$$

то можна константу Ліпшиця вибрати одну для всіх $t=\tau_i(x)$, де $t\in[t_0,T]$, $T>t_0$ і інтегральна крива розв'язку $x(t)$ системи (1), (2), для якого $x(t)\in D$, $t\in[t_0,T]$ перетинає кожну гіперповерхню $t=\tau_i(x)$, $t\in[t_0,T]$ тільки один раз.

Ця теорема вказує умови відсутності биття розв'язку. Виявляється, що для систем з нефіксованими моментами імпульсного впливу є проблематичним також питання неперервної залежності розв'язків від початкових умов.

3. Неперервна залежність розв'язків від початкових умов. Розглянемо досить простий приклад. Нехай є рівняння з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt}=0,\ t\neq\tau_i(x),\ \Delta x\big|_{t=\tau_i(x)}=b,\ \tau_i(x)=2i-x,\ b>0,\text{ де } t\in[0,2].$$

Побудуємо два розв'язки цього рівняння виходячи з початкових умов $x(0)=1$ та $x(0)=1+\alpha$, де $\alpha>0$. Отже, якщо $x=\varphi(t)$ є розв'язок, $\varphi(0)=1$, то $\varphi(t)=1$, $t\in[0,1)$. В точці $t=1$ інтегральна крива розв'язку перетинає поверхню $t=\tau_1(x)=2-x$, в результаті чого $\varphi(1+0)=\varphi(1-0)+b=1+b$ і $\varphi(t)=1+b$, $t\in(1,2]$. Аналогічно, для розв'язку $x=\psi(t)$, $\psi(0)=1+\alpha$ отримуємо:

$$\psi(t)=1+\alpha,\ t\in[0,1-\alpha);\ \psi(t)=1+\alpha+b,\ t\in(1-\alpha,2].$$

Отже $|\psi(t)-\varphi(t)|=b$, $t\in(1-\alpha,1)$, в тому числі і для малих α. Це означає, що неперервність розв'язку за початковими даними в класичному розумінні не має місця для вказаного типу рівнянь з імпульсним впливом. Тоді розглядають неперервну залежність від початкових умов в сенсі наступної теореми.

Теорема 2. Нехай в системі рівнянь (1), (2) виконуються наступні нерівності:

$$\|f(x,t)\|\leq C,$$
$$\|f(x_1,t)-f(x_2,t)\|\leq L\|x_1-x_2\|,$$
$$\|I_i(x_1)-I_i(x_2)\|\leq L\|x_1-x_2\|,$$
$$\|\tau_i(x_1)-\tau_i(x_2)\|\leq N\|x_1-x_2\|,$$

де $N>0$, $C>0$, $L>0$, $NC<1$, $x_1,x_2,x_3\in D$, $t\in[t_0,T]$ і справджується нерівність (4). Якщо розв'язок $x(t,x_0,t_0)$ визначений при $t\in[t_0,T]$, то має місце неперервна залежність цього розв'язку від x_0 в наступному змісті: для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, таке, що для довільного розв'язку $x(t,x_0,t_0)$ системи (1), (2) з нерівності $\|x_0-y_0\|<\delta$ випливає $\|x(t,x_0,t_0)-x(t,y_0,t_0)\|<\varepsilon$ для всіх $t\in[t_0,T]$, що задовольняє нерівності $|t-s_i|>\varepsilon$. Тут s_i – моменти перетину інтегральної кривої розв'язку $x(t,x_0,t_0)$ з гіперповерхнею $t=\tau_i(x)$.

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

1. Стійкість розв‘язків лінійних систем з імпульсним впливом. Розглянемо лінійну однорідну систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x\,,\ t \neq \tau_i\,, \qquad (1)$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i x\,. \qquad (2)$$

Тут $n \times n$ матриця $A(t)$ неперервна і обмежена при $t \geq t_0$, B_i – $n \times n$- матриці, $i = 1,2,...,$ $x -$вектор фазових координат розмірності n, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_i < \tau_{i+1} < ...$, $\tau_i \to \infty$, $i \to +\infty$. Нехай $Z(t,t_0)$- фундаментальна матриця системи (1) нормована в точці t_0. Тоді фундаментальна матриця системи (1), (2)

$$X(t,t_o) = Z(t,\tau_j)(I + B_j)\left\{\prod_{k=j-1}^{1} Z(\tau_{k+1},\tau_k)(I + B_k)\right\}Z(\tau_1,t_0)\,.$$

Тут $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$. Має місце наступне твердження

Теорема 1. Для того, щоб розв‘язок системи з імпульсним впливом (1),(2) був стійким, необхідно і достатньо, щоб матриця $X(t,t_0)$ була обмежена при $t \geq t_0$. Для асимптотичної стійкості необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$, а для нестійкості – щоб матриця $X(t,t_0)$ була необмеженою.

Доведення теореми випливає з того, що будь-який розв‘язок системи з імпульсним впливом (1),(2) можна представити у формі Коші

$$x(t,x_0,t_0) = X(t,t_0)x_0\,.$$

2. Стійкість в системах з нефіксованими моментами імпульсного впливу. Розглянемо систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)\,, t \neq \tau_i(x)\,. \qquad (3)$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x)\,. \qquad (4)$$

Тут $x - n$-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t) - n$-вимірна вектор-функція, неперервна по сукупності змінних і ліпшицева по x, $I_i(x) - n$-вимірна неперервна вектор-функція, $t = \tau_i(x)$-неперервні функції, $\tau_i(x) \to \infty$, $i \to \infty$.

Як вже зазначалося, для системи (3),(4) може виникнути биття розв‘язку по поверхні $t = \tau_i(x)$. Таким чином, можливо не виконується неперервна залежність розв‘язків від початкових умов рівномірно на скінченному проміжку зміни t. Це говорить про те, що означення стійкості розв‘язку за Ляпуновим є некоректним для вказаного типу систем в звичайному трактуванні. Тому необхідно внести уточнення до відповідного означення стійкості.

Означення. Розв‘язок $x(t)$ системи (3),(4), визначений при $t \geq t_0$, називається *стійким за Ляпуновим* якщо для довільних $\varepsilon > 0, \eta > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon,\eta) > 0$, таке, що для будь-якого іншого розв‘язку $y(t)$ системи (3),(4) з того, що

$$\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$$

випливає, що

$$\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$$

при $t \ge t_0, \left|t - t_i^0\right| > \eta$, де t_i^0 - моменти перетину інтегральної кривої розв‘язку $x(t)$ поверхонь $t = \tau_i(x)$. Розв‘язок $x(t)$ системи (3),(4), називається *асимптотично стійким*, якщо він є стійким в сенсі попереднього означення і існує $\sigma > 0$, таке, що для розв‘язку $y(t)$ системи (3),(4) з нерівності $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \sigma$ виливає

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathrm{x(t) - y(t)}\| = 0.$$

Нехай скалярна функція $V(x,t)$, $V(0,t) = 0$ визначена і неперервно диференційована в області $Z_0 = \{(x;t) : t \ge t_0, \|x\| < h_0\}$. Припустимо, що для системи (3), (4) виконується наступне: $f(0,t) = 0, I_i(0) = 0, \tau_i(x) < \tau_{i+1}(x)$, функція $\tau_i(x)$, і число h_0 задовольняють умовам леми, що виключає биття розв‘язків (3),(4) по поверхні $t = \tau_i(x)$[1].

Теорема 2. Якщо існує додатно-визначена функція $V(x,t)$, яка задовольняє в області Z_0 нерівності

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + grad_x^T V(x,t) f(x,t) \le 0, \qquad (5)$$

$$V(x + I_i(x), \tau_i(x)) \le V(x, \tau_i(x)), \qquad (6)$$

то нульовий розв‘язок системи (3),(4) є стійким. Якщо ж замість нерівності (6) виконується наступна нерівність

$$V(x + I_i(x), \tau_i(x)) - V(x, \tau_i(x)) \le -\psi(V(x, \tau_i(x)) \qquad (7)$$

для всіх $i = 1,2,...,\psi(s)$, де $\psi(s)$-неперервна за $s \ge 0$ скалярна функція, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$, при $s > 0$, то нульовий розв‘язок системи з імпульсним впливом (3),(4) є асимптотично стійким.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай

$$l = \inf\{V(x,t) : t \ge t_0, \varepsilon \le \|x\| < h_0\}, \qquad (8)$$

а $\delta > 0$ настільки є малим, що

$$\sup\{V(x,t_0) : \|x\| < \delta\} = m < l. \qquad (9)$$

Візьмемо довільний розв‘язок $x(t), x(t_0) = x_0$ системи (3), (4), для якого $x_0 \in K_\delta(0)$, $K_\delta(a) = \{x \in R^n : \|x - a\| < \delta\}$, і розглянемо функцію $\eta(t) = V(x(t),t)$. Якщо припустити, що в деякий момент t^* виконується $\|x(t^*)\| = \varepsilon$, то з (8) випливає $\eta(t^*) \ge l$, крім того, нерівності (5),(6) гарантують незростання функції $V(x,t)$ вздовж будь-якого розв‘язку системи (3), (4), який лежить в Z_0, так, що в силу (9)

$$\eta(t^*) \le \eta(t_0) = V(x_0, t_0) \le m < l.$$

Отже, $l \le \eta(t^*) < l$. Отримали протиріччя, яке доводить першу частину теореми. Нехай замість нерівності (6) має місце (7). Доведемо асимптотичну стійкість тривіального розв‘язку. Для цього достатньо показати, що $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$. З нерівності (5), (7) функція $\eta(t)$ не зростає. Так як $\eta(t)$ обмежена знизу, то існує $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$. Припустимо, що $\alpha > 0$. Нехай

$$c = \min\{\psi(s) : \alpha \le s \le \eta(t_0)\}. \qquad (10)$$

Якщо $x(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_i(x)$ в точках $(x_i, \tau_i(x_i))$, то в силу (7) маємо

$$\eta(\tau_i(x_i) + 0) - \eta(\tau_i(x_i)) \le -\psi(\eta(\tau_i(x_i)))$$

[1] теорема 1

при $i = 1,2,\ldots$. Так як $\alpha \le \eta(\tau_i(x_i)) \le \eta(t_0)$, то $-\psi(\eta(\tau_i(x_i))) \le -c$, і тому $\eta(\tau_i(x_i)+0) - \eta(\tau_i(x_i)) \le -c$. З нерівності (5) випливає, що функція $\eta(t)$ не зростає на кожному проміжку неперервності, тому

$$\eta(\tau_i(x_i)+0) \ge \eta(\tau_{i+1}(x_{i+1})).$$

Звідси для довільного натурального k отримуємо

$$\eta(\tau_k(x_k)+0) \le \eta(\tau_k(x_k)+0) + \sum_{i=0}^{k-1}\{\eta(\tau_i(x_i)+0) - \eta(\tau_{i+1}(x_{i+1})+0)\} =$$

$$\eta(t_0) + \sum_{i=0}^{k}\{\eta(\tau_i(x_i)+0) - \eta(\tau_i(x_i))\} \le \eta(t_0) - kc.$$

Звідси і з (10) випливає, що існує k_0 таке, що для $k > k_0$ виконується $\eta(t_0) - kc < 0$. Таким чином, отримали протиріччя, припущення $\alpha > 0$ є невірним. Отже, $\alpha = 0$. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай існує додатно-визначена функція $V(x,t)$, така, що задовольняє в області Z_0 нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V(x,t) f(x,t) \le -\varphi(V(x,t)),$$

$$V(x + I_i(x), \tau_i(x)) \le \psi(V(x, \tau_i(x))),$$

$i = 1,2,\ldots$, де $\varphi(s), \psi(s)$-неперервні функції при $s \ge 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$; $\varphi(s) > 0, \psi(s) > 0$ при $s > 0$ і нехай

$$\sup_i \left(\min_{\|x\| \le h} \tau_{i+1}(x) - \max_{\|x\| \le h} \tau_i(x) \right) = \Theta > 0.$$

Тоді, якщо функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$, такі, що при деякому $a_0 > 0$ для $a \in (0, a_0]$

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \Theta, \qquad (10)$$

то нульовий розв‘язок системи рівнянь (3),(4) є стійким. Якщо ж замість (10) виконується

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \Theta - \gamma$$

при деякому $\gamma > 0$, то нульовий розв‘язок системи (3),(4) є асимптотично стійким.

3. Приклад. Дослідимо на стійкість нульовий розв‘язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0,\ t \ne \tau_i(x, \frac{dx}{dt}),$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i x, \dot{x})} = -x + \arccos\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cos x \right),$$

$$\Delta \frac{dx}{dt}\Big|_{t=\tau_i(x,\dot{x})} = -\frac{dx}{dt}.$$

Запишемо це рівняння у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -\sin x,\ t \ne \tau_i(x,y),$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i x, \dot{x})} = -x + \arccos\left(-\frac{y^2}{2} + \cos x \right),$$

$$\Delta y\Big|_{t=\tau_i(x,\dot{x})} = -y$$

Функцію Ляпунова вибираємо у вигляді

$$V(x,t) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}.$$

Знаходимо $\frac{dV}{dt} = y\sin x - y\sin x = 0$,

$$V(x+\Delta x, y+\Delta y) = 1-\cos(\arccos(-\frac{y^2}{2}+\cos x)) = 1-\cos x + \frac{y^2}{2} = V(x,y)$$

Отже, виконуються умови теореми 2 незалежно від властивостей поверхонь $t=\tau_i(x)$. Таким чином, тривіальний розв‘язок рівняння є стійким.

4. Теорема про нестійкість. Розглянемо аналог теореми Четаєва про нестійкість.

Теорема 4. Нехай існує функція $V(x,t)$, така, що область $\Pi = \{(x,t)\in Z_0 : V(x,t)>0\}$ при $t\ge t_0$ має непорожній перетин Π_t площиною $t=const$, Π_t містить точки в $K_r(0)\subset R^n$ для довільного $r>0$. Крім того, в області Π функція $V(x,t)$ є обмеженою і в Π виконуються нерівності

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + grad_x^T V(x,t) f(x,t) \ge 0, \qquad (11)$$

$$V(x+I_i(x),\tau_i(x)) - V(x,\tau_i(x)) \ge \psi(V(x,\tau_i(x))), \qquad (12)$$

$i=1,2,...$, де $\psi(s)$- неперервна при $s\ge 0$ функція, $\psi(0)=0, \psi(s)>0$ при $s>0$. Тоді нульовий розв‘язок системи (3),(4) є нестійким.

Доведення. За умовою теореми в довільному околі точки $x=0$ існує точка x_0 така, що $V(x_0,t_0)>0$. Доведемо, що розв‘язок $x(t)$ системи (3),(4) що виходить з вибраної точки x_0 в деякий момент $t=\bar{t}$ покине кулю $K_h(0)$. Припустимо протилежне. Нехай при всіх $t\ge t_0$ має місце $x(t)\in K_h(0)$ і $x(t)$ перетинає поверхню $t=\tau_i(x)$ в точках $(x_i,\tau_i(x_i))$. Розглянемо функцію $\eta(t)=V(x(t),t)$. В силу (11),(12) функція $\eta(t)$ є неспадною, $\eta(t)\ge\eta(t_0)>0$, $t\ge t_0$. Це означає, що при всіх $t\ge t_0$ виконується $(x(t),t)\in\Pi$. Нехай

$$c = \min\{\psi(s) : s\in[\eta(t_0), a_0]\},$$

де $a_0 = \sup\{V(x,t) : (x,t)\in\Pi\}$. Очевидно, що $c>0$ і $\eta(\tau_i(x_i)+0)-\eta(\tau_i(x_i))\ge c$, $i=1,2,...$. Так як $\eta'(t)\ge 0$ при $t\ne\tau_i(x_i)$, то $\eta(\tau_{i-1}(x_{i-1})+0)-\eta(\tau_i(x_i))\le 0$, $i=1,2,...$. Тому для будь-якого натурального k маємо

$$\eta(\tau_k(x_k)+0) \ge \eta(\tau_k(x_k)+0) + \sum_{i=1}^{k}\{\eta(\tau_{i-1}(x_{i-1})+0)-\eta(\tau_i(x_i))\} =$$

$$\eta(t_0) + \sum_{i=1}^{k}\{\eta(\tau_i(x_i)+0)-\eta(\tau_i(x_i))\} \ge \eta(\tau_0)+kc.$$

При $k\to\infty$ права частина останньої нерівності необмежено зростає. А це протирічить тому, що $(x(t),t)\in\Pi$, так як в Π функція $V(x,t)$ є необмеженою. Протиріччя доводить теорему.

Література.

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –К.: Выща школа, 1987. -228с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. –М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. -480с.