ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

1. Топологічне означення неперервності многозначних відображень. Можна визначати поняття неперервності многозначного відображення не прив'язуючись до евклідової метрики, а виходячи з топології простору. Нехай $p \in D \subset R^m$, $F(p) \subset R^n$.

Означення. Многозначне відображення F називається *напівнеперервним зверху* в точці $p \in D$, якщо для будь-якого околу $U(F(p))$ множини $F(p)$ існує окіл $V(p)$ точки $p \in D$, такий, що

$$F(g) \subseteq U(F(p)) \text{ для всіх } g \in V(p). \qquad (1)$$

Співвідношення (1) еквівалентне включенню

$$F(V(p)) \subseteq U(F(p)).$$

Припустимо, що топологія генерується за допомогою евклідової метрики ρ. Для цього в просторах R^m і R^n вводиться система відкритих куль

$$S_\varepsilon(a) = \{x \in R^n : \rho(a,x) < \varepsilon\},\ S_\varepsilon(b) = \{x \in R^m : \rho(b,x) < \varepsilon\},\ a \in R^m,\ b \in R^n.$$

Зауважимо, що в просторі R^k евклідова метрика

$$\rho(y,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(y_i - z_i)^2} = \|y - z\|,\ y = (y_1\, y_2 \ldots y_k)^T,\ z = (z_1\, z_2 \ldots z_k)^T.$$

Нехай F є *компактозначним* відображенням. Тоді означення (1) можна записати наступним чином: для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що

$$F(g) \subseteq S_\xi(F(p)) = \{x \in S_\xi(y) : y \in F(p)\}$$

як тільки $g \in S_\delta(p)$. Виберемо $\varepsilon > \xi > 0$. Тоді $F(g) \subseteq S_\xi(F(p)) \subset (F(p))^\varepsilon$. За теоремою 1 лекції 2 $\beta(F(g), F(p)) \le \varepsilon$ при $\|g - p\| < \delta$. Таким чином, приходимо до означення β-неперервності. І навпаки, з β-неперервності для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що $F(g) \subseteq (F(p))^\xi$ при $\|g - p\| < \delta$. Тоді беремо $\varepsilon > \xi > 0$ і має місце

$$F(g) \subseteq (F(p))^\xi \subset S_\varepsilon(F(p))$$

при $g \in S_\delta(p)$. Таким чином, означення (1) та означення β-неперервності для даного випадку є еквівалентними.

Означення. Многозначне відображення F називається *напівнеперервним знизу* в точці $p \in D$, якщо для будь-якого $z \in F(p)$ і довільного околу $U(z)$ точки z існує окіл $V(p)$ точки $p \in D$, такий, що

$$F(g) \cap U(z) \ne \varnothing \text{ для всіх } g \in V(p). \qquad (2)$$

Многозначне відображення F називається *неперервним* в точці $p \in D$, якщо воно є напівнеперервним зверху та знизу у цій точці.

Покажемо, що якщо окіл точки вводиться за допомогою евклідової метрики ρ і F є *компактозначним* відображенням, то таке означення неперервності еквівалентне означенню неперервності за Хаусдорфом. Нехай для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що $\beta(F(p), F(g)) \le \xi$ при $\|g - p\| < \delta$. За теоремою 1 лекції 2 при $g \in S_\delta(p)$ виконується $F(p) \subseteq (F(g))^\xi$. Виберемо $\varepsilon > \xi > 0$. Тоді $F(p) \subseteq (F(g))^\xi \subset S_\varepsilon(F(g))$ при $g \in S_\delta(p)$. Візьмемо довільне $z \in F(p)$. Тоді $z \in S_\varepsilon(F(g))$ і $S_\varepsilon(z) \cap F(g) \ne \varnothing$, $g \in S_\delta(p)$. Вибравши $U(z) = S_\varepsilon(z)$, $V(p) = S_\delta(p)$, отримуємо (2). І навпаки, з означення (2) при $U(z) = S_\xi(z)$, $V(p) = S_\delta(p)$ випливає, що для будь-якого $\xi > 0$ існує $\delta = \delta(\xi) > 0$, таке, що $S_\xi(z) \cap F(g) \ne \varnothing$, $g \in S_\delta(p)$, де $z \in F(p)$. При $\varepsilon > \xi > 0$ виконується $K_\varepsilon(z) \cap F(g) \ne \varnothing$. Це

означає, що $F(p) \subseteq (F(g))^{\varepsilon}$, $g \in S_{\delta}(p)$. За теоремою 1 лекції 2 має місце $\beta(F(p), F(g)) \le \xi$ при $\|g - p\| < \delta$. А еквівалентність неперервності зверху до β-неперервності ми показали вище.

Означення. Якщо многозначне відображення F є *неперервним (напівнеперервним зверху, напівнеперервним знизу)* в кожній точці множини D, то таке відображення називається неперервним (напівнеперервним зверху, напівнеперервним знизу відповідно) на D.

Приклад. Розглянемо многозначне точкове відображення, яке задається наступним чином

$$F(0) = [-1,1],\ F(p) = \{0\},\ p \ne 0,\ p \in R^1. \qquad (3)$$

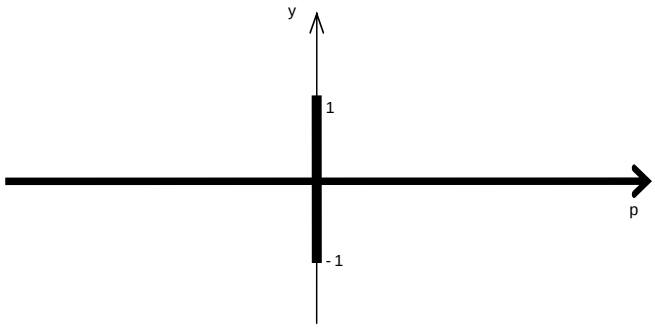

Рис.1.

Так як

$$\beta(F(p), F(0)) = \min\{\varepsilon \ge 0 : F(p) \subseteq (F(0))^{\varepsilon}\} = \min\{\varepsilon \ge 0 : 0 \in [-1,1]^{\varepsilon}\} = 0,\ p \in R^1,$$

то відображення F є напівнеперервним зверху у точці 0. Але це відображення не є напівнеперервним знизу у точці 0 (рис. 1). Дійсно. Виберемо $z = 1$ і $U(z) = S_{1/2}(1) = \left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.

Так як $0 \notin \left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$, то який би ми окіл $V(0)$ не взяли, має місце $F(p) \cap S_{1/2}(1) = \varnothing$ при $p \in V(0)$, $p \ne 0$. Отже, з напівнеперервності зверху не випливає напівнеперервність знизу многозначного відображення. Крім того, функція (3) не є неперервною.

Многозначне відображення G, що задається співвідношеннями

$$G(0) = \{0\} \text{ і } G(p) = [-1,1],\ p \ne 0,\ p \in R^1 \qquad (4)$$

є напівнеперервним знизу, але не напівнеперервним зверху в точці 0. Таким чином, напівнеперервність зверху не еквівалентна напівнеперервності знизу.

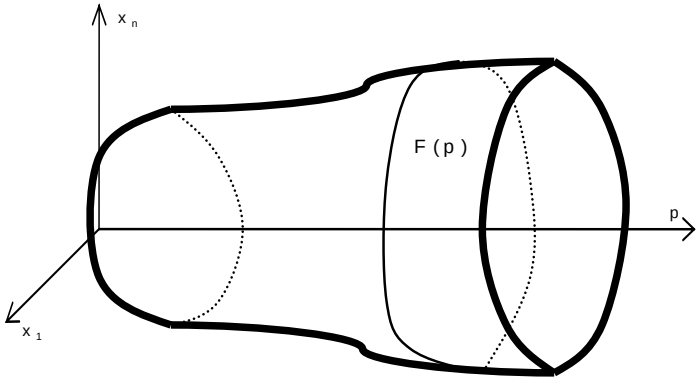

Рис.2.

Задача 9. Довести, що відображення (4) – напівнеперервне знизу, але не напівнеперервне зверху в точці 0.

2. Графік многозначного відображення. Многозначні відображення повністю характеризуються своїм графіком (рис.2).

Означення. Графіком многозначного відображення F називається множина $\Gamma = \{(p,q): q \in F(p), p \in D\}$.

Так графік многозначного відображення (3) зображено на рисунку 1.

Задача 10. Побудувати графік

а) для відображення (4);

б) відображення $F(p): p \mapsto K_p(0),\ p \in [0,1],\ K_p(0) \subset R^2$.

Теорема 1 (про замкнений графік). Нехай множина D – замкнена, а многозначна функція $F(p)$ –замкнена і обмежена в околі кожної точки $p \in D$. Тоді для β–неперервності $F(p)$ на D необхідно і достатньо, щоб її графік Γ був замкненою множиною.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $F(p)-\beta$-неперервна функція, (p,q)-гранична точка її графіка. Це означає, що існує послідовність $p_i \to p \in D$, $q_i \to q$, $q_i \in F(p_i)$, $i = 1,2,\ldots$. Тоді $\rho(q_i, F(p)) \le \beta(F(p_i), F(p)) \to 0$, $i \to \infty$. Тому $\rho(q, F(p)) = 0$. Так як $F(p)$ – замкнена множина, то $q \in F(p)$, тобто $(p,q) \in \Gamma$. Звідси випливає, що Γ – замкнена множина.

($\Leftarrow$) Від супротивного. Нехай $F(p)$ не β–неперервна функція на D. Тоді існують такі точки $p \in D$ і $p_i \to p$ та фіксоване число $\varepsilon > 0$, що

$$\beta(F(p_i), F(p)) \ge \varepsilon > 0, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Це означає, що знайдуться $q_i \in F(p_i)$, такі, що

$$\rho(q_i, F(p)) \ge \varepsilon.$$

З послідовності $\{q_i\}$ виберемо підпослідовність $\{q_{i_k}\}$, $q_{i_k} \to q$, $k = 1,2,\ldots$. Перейшовши в останній нерівності до границі, отримаємо $\rho(q, F(p)) \ge \varepsilon > 0$. Отже, $q \notin F(p)$. З $(p_{i_k}, q_{i_k}) \in \Gamma, (p_{i_k}, q_{i_k}) \to (p,q) \notin \Gamma$ випливає, що множина Γ не є замкнена . Протиріччя доводить теорему.

Означення. Многозначна функція F називається *обмеженою* на множині M, якщо $|F(M)| < \infty$.

Теорема 2. Нехай функція F є β–неперервна та компактозначна [1] на компакті $K \subset D$. Тоді функція F обмежена на K.

Доведення. Від супротивного. Нехай існують $p_i \in K$, $q_i \in F(p_i)$, $\|q_i\| \to \infty$, $i \to \infty$. Виберемо збіжну послідовність $p_{ij} \to p \in K$. З умови теореми $|F(p)| = a < \infty$, $q_{ij} \in F(p_{ij})$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Починаючи з деякого номера $J(\varepsilon)$ для $j > J(\varepsilon)$ має місце включення $F(p_{ij}) \subset (F(p))^{\varepsilon}$. Тоді $\|q_{ij}\| \le a + \varepsilon$, що протирічить $\|q_i\| \to \infty$, $i \to \infty$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо D є компактом, F є компактозначне β–неперервне многозначне відображення, то графік Γ функції $F(p)$ є *компактом* в R^{m+n}.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.
2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. –М.: Мир, 1988. -512 с.

[1] Тобто, значенням функції є компакт.

3. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. –197 с.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. –М.: „Высшая школа”, 2001. - 239с.