СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

1. Однорідні системи. Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq \tau_i, \qquad (1)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x. \qquad (2)$$

Тут $A(t)$ – неперервна на проміжку $I = (a,b)$ матриця розмірності $n \times n$, B_i – постійні матриці розмірності $n \times n$, $\tau_i \in I$ - фіксований момент часу, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots$.

Теорема 1. Нехай проміжок $[t_0, t_0 + h] \subset I$ містить скінченне число точок τ_i. Тоді для будь-якого $x_0 \in R^n$ розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (1), (2) існує при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$. Крім того, якщо для всіх i, таких, що $\tau_i \in [t_0, t_0 + h]$, матриці $E + B_i$ не є виродженими, то $x(t, x_0, t_0) \neq x(t, y_0, t_0)$ при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$ як тільки $x_0 \neq y_0$.[1].

Доведення. Нехай $t_0 < \tau_j < \tau_{j+1} < \ldots < \tau_{j+k} \leq t_0 + h$. За теоремою Пікара[2] для довільного $x_0 \in R^n$ розв'язок $x(t) = \varphi_j(t), \varphi_j(t_0) = x_0$ системи (1) на проміжку $[t_0, \tau_j]$ існує і єдиний. Покладемо $x(t, x_0, t_0) = \varphi_j(t)$ при $t \in [t_0, \tau_j]$. В силу (2) при $t = \tau_j$ маємо

$$x(\tau_j + 0, x_0, t_0) = (E + B_j)x(\tau_j, x_0, t_0) = x_j^+.$$

В силу теореми Пікара на проміжку $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ існує єдиний розв'язок $x = \varphi_{j+1}(t)$, $\varphi_{j+1}(\tau_j) = x_j^+$ системи (1). Тому $x(t, x_0, t_0) = \varphi_{j+1}(t)$, $t \in (\tau_{j+1}, \tau_{j+2}]$ і

$$x_{j+1}^+ = (E + B_{j+1})x(\tau_{j+1}, x_0, t_0)$$

і т.д. Оскільки за умовою $[t_0, t_0 + h]$ містить скінченне число точок τ_j, то таким способом можна побудувати розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (1), (2) на всьому проміжку. У випадку, якщо $t_0 = \tau_j$, беруть $x(t_0 + 0, x_0, t_0) = (E + B_j)x_0$ і процедура побудови розв'язку відбувається аналогічно. За теоремою Пікара, якщо $x(\tau_j, x_0, t_0) \neq x(\tau_j, y_0, t_0)$, то $x(t, x_0, t_0) \neq x(t, y_0, t_0)$ для $t \in (t_j, t_{j+1}]$. З умови невиродженості матриці $E + B_i$ випливає наступне: оскільки

$$x(\tau_j + 0, y_0, t_0) - x(\tau_j + 0, x_0, t_0) = (E + B_j)(x(\tau_j, y_0, t_0) - x(\tau_j, x_0, t_0)),$$

то з $x(\tau_j, y_0, t_0) \neq x(\tau_j, x_0, t_0)$ випливає $x(\tau_j + 0, x_0, t_0) \neq x(\tau_j + 0, y_0, t_0)$. Теорему доведено.

Зауваження. Якщо матриця $E + B_i$ вироджена, то розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ можна продовжити однозначно лише до моменту τ_i. Продовжити цей розв'язок або неможливо, або існує кілька розв'язків.

Теорема 2. Множина всіх розв'язків лінійної однорідної системи (1), (2) на відрізку $[a,b]$ утворює n – вимірний векторний простір.

Доведення. Нехай $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ – розв'язки системи (1), (2) на проміжку $[a,b]$, $c_1, c_2 \in R^1$. Тоді $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ є розв'язком системи (1), (2). Нехай $t \in [a,b]$. Розглянемо відображення g_t множини розв'язків (1), (2) в R^n, таке, що, якщо $\varphi(t)$ – розв'язок (1), (2), то $g_t\varphi = \varphi(t)$. Це відображення є лінійним і його образ за теоремою 2 є множина в R^n. Ядро відображення g_t рівне нулю, бо за теоремою 1 з $\varphi(t_0) = 0$ випливає $\varphi(t) \equiv 0$. Отже g_t – ізоморфізм між множиною розв'язків і R^n. Теорему доведено.

---

[1] Тут E – одинична матриця

Базис множини всіх розв'язків системи (1), (2) назвемо *фундаментальною системою розв'язків* системи (1), (2). З теореми 2 випливає, що фундаментальна система складається з n елементів, будь-які $n+1$ розв'язки є лінійно залежні. Позначимо через $\Phi(t)$ матрицю розмірності $n\times n$, стовпчиками якої є розв'язки з фундаментальної системи. Така матриця називається *фундаментальною*. Якщо $\Phi(t_0)=E$, то така матриця називається *матрицантом* системи (1), (2). Фундаментальна матриця системи (1), (2) задовольняє матричному рівнянню з імпульсним впливом

$$\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\Phi\ ,\ t\neq\tau_i,\ \ \Delta\Phi\,|_{t=\tau_i}=B_i\Phi\,. \qquad (3)$$

Нехай матриця $X(t,\tau)=E$ є розв'язок матричної задачі Коші

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X\ ,\ X(\tau,\tau)=E,$$

тобто є матрицантом системи (1). Тоді будь-який розв'язок системи (3) можна подати у вигляді

$$\Phi(t)=X(t,\tau_{j+k})(E+B_{j+k})X(\tau_{j+k},\tau_{j+k-1})(E+B_{j+k-1})...(E+B_j)X(\tau_j,t_0)\Phi(t_0),$$

$$\tau_{j-1}<t_0\le\tau_j<\tau_{j+k}<t\le\tau_{j+k+1}. \qquad (4)$$

Зокрема, для матрицанту $\Phi(t,t_0)$, нормованого в момент $t=t_0$ маємо

$$\Phi(t,t_0)=X(t,\tau_{j+k})(E+B_{j+k})\prod_{p=k}^{1}X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})(E+B_{j+p-1})X(\tau_j,t_0).$$

З (4) та формули Якобі (див. додаток А) отримуємо

$$\det\Phi(t)=\det X(t,\tau_{j+k})\det(E+B_{j+k})\prod_{p=k}^{1}\det X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})\det(E+B_{j+p-1})\det X(\tau_j,t_0)\det\Phi(t_0)=$$

$$\exp\left\{\int_{\tau_{j+k}}^{t}spA(s)ds\right\}\det(E+B_{j+k})\prod_{p=k}^{1}\exp\left\{\int_{\tau_{j+p-1}}^{\tau_{j+p}}spA(s)ds\right\}\det(E+B_{j+p-1})\exp\left\{\int_{t_0}^{\tau_j}spA(s)ds\right\}\det\Phi(t_0)$$

і остаточно

$$\det\Phi(t)=\det\Phi(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}spA(s)ds\right\}\prod_{p=1}^{k+1}\det(E+B_{j+p-1}),\ \tau_{j-1}<t_0\le\tau_j\le\tau_{j+k}<t\le\tau_{j+k+1}.$$

Отже, якщо матриці $E+B_i$, $\Phi(t_0)$ є невиродженими, то $\Phi(t)$ є невироджена. Знайдемо $\Phi^{-1}(t)$. Маємо

$$\Phi^{-1}(t)=\Phi^{-1}(t_0)X^{-1}(\tau_j,t_0)(E+B_j)^{-1}...(E+B_{j+k-1})^{-1}X^{-1}(\tau_{j+k},\tau_{j+k-1})(E+B_{j+k})^{-1}X(t,\tau_{j+k})^{-1}=$$

$$\Phi^{-1}(t_0)X^{-1}(\tau_j,t_0)\prod_{p=1}^{k}(E+B_{j+p-1})^{-1}X^{-1}(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})(E+B_{j+k})^{-1}X^{-1}(t,\tau_{j+k}),$$

$$\tau_{j-1}<t_0\le\tau_j<\tau_{j+k}<t\le\tau_{j+k+1}.$$

Звідси

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\sigma)=X(t,\tau_{j+k})\prod_{p=k}^{s+1}\left[(E+B_{j+p})X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})\right](E+B_{j+s})X(\tau_{j+s},\sigma),$$

$$\tau_{j+s-1}<\sigma<\tau_{j+s}<\tau_{j+k}<t\le\tau_{j+k+1}.$$

Зокрема, для матрицанту $\Phi(t,t_0)$ маємо

$$\Phi(t,t_0)=X(t,\tau_{j+k})\prod_{p=k}^{j+1}\left[(E+B_{j+p})X(\tau_{j+p},\tau_{j+p-1})\right](E+B_j)X(\tau_j,t_0),$$

$$\tau_{j-1}<t_0\le\tau_j<\tau_{j+k}<t\le\tau_{j+k+1}.$$

Відмітимо, що за допомогою $\Phi(t,t_0)$ будь-який розв'язок системи (1), (2) з умовою Коші $x(t_0)=x_0$ можна записати у вигляді

$$x(t,x_0,t_0)=\Phi(t,t_0)x_0 .$$

2. Неоднорідні системи. Розглянемо лінійну неоднорідну систему з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t),\ t\neq\tau_i,\ \ \Delta x|_{t=\tau_i}=B_i x+a_i, \qquad (5)$$

де $A(t)$, B_i, τ_i задовольняють вимогам, аналогічним до вимог щодо (1), (2), $f(t)$ – вектор-функція, неперервна на I, $a_i\in R^n$ - фіксовані вектори.

Зауваження. В даному пункті для спрощення запису вважаємо, що $x(\tau_i-0)=x(\tau_i)$. Тобто, в (5) $\Delta x|_{t=\tau_i}=B_i x+a_i$ означає $x(\tau_i+0)=\left(E+B_i\right)x(\tau_i)+a_i$.

Теорема 3. Якщо $x=\varphi(t)$ є розв'язок системи (1), (2) і $x=\psi(t)$ є розв'язок (5), то функція $x=\varphi(t)+\psi(t)$ є розв'язок (5). І навпаки, якщо $x=\varphi_1(t)$ і $x=\varphi_2(t)$ є розв'язки системи (5), то $x=\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ є розв'язком (1), (2).

Задача 23. Довести теорему 3.

Нехай $S(t)$ є неперервно диференційованою при $t\in[a,b]-\{\tau_i\}$, невиродженою матрицею. Підставивши $x=S(t)y$ в (5), отримуємо

$$S(t)\frac{dy}{dt}+\frac{dS}{dt}y=A(t)S(t)y+f(t),\ t\neq\tau_i,$$

$$S(\tau_i+0)y(\tau_i+0)-S(\tau_i)y(\tau_i)=B_iS(\tau_i)y(\tau_i)+a_i .$$

Звідси

$$\frac{dy}{dt}=S^{-1}(t)\left(A(t)S(t)-\frac{dS}{dt}\right)y+S^{-1}(t)f(t),\ t\neq\tau_i, \qquad (6)$$

$$S(\tau_i+0)y(\tau_i+0)-S(\tau_i+0)y(\tau_i)+S(\tau_i+0)y(\tau_i)-S(\tau_i)y(\tau_i)=B_iS(\tau_i)y(\tau_i)+a_i .$$

Проводимо перетворення над останнім виразом

$$S(\tau_i+0)(y(\tau_i+0)-y(\tau_i))+\Delta Sy|_{t=\tau_i}=B_iSy|_{t=\tau_i}+a_i ,$$

і остаточно

$$\Delta y|_{t=\tau_i}=S^{-1}(\tau_i+0)(-\Delta S+B_iS)y|_{t=\tau_i}+S^{-1}(\tau_i+0)a_i . \qquad (7)$$

Нехай *S(t)* є фундаментальна матриця системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x,t\neq\tau_i,\Delta x|_{t=\tau_i}=L_i x, \qquad (8)$$

де матриці $E+L_i$ є невиродженими. Тоді система (6), (7) має вигляд

$$\frac{dy}{dt}=S^{-1}(t)(A(t)-P(t))S(t)y+S^{-1}(t)f(t),\ t\neq\tau_i, \qquad (9)$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i}=S^{-1}(\tau_i+0)(B_i-I_i)Sy|_{t=\tau_i}+S^{-1}(\tau_i+0)a_i . \qquad (10)$$

Якщо $A(t)=P(t)$, $B_i=L_i$, $S(t)=\Phi(t)$, де $\Phi(t)$ – фундаментальна матриця системи (1), (2), то заміна $x=S(t)y$ називається *варіацією постійних*[2]. Тоді з (9), (10) отримуємо

$$\frac{dy}{dt}=\Phi^{-1}(t)f(t),t\neq\tau_i , \qquad (11)$$

[2] Порівняйте з методом варіації постійних Лагранжа в [2].

$$\Delta y\,|_{t=\tau_i} = \Phi^{-1}(\tau_i+0)a_i. \qquad (12)$$

Враховуючи, що $\Phi(\tau_i+0)=(E+B_i)\Phi(\tau_i)$, отримуємо $\Delta y\,|_{t=\tau_i} = \Phi^{-1}(\tau_i)(E+B_i)^{-1}a_i$. З (11), (12) знаходимо, що при $t \ge t_0$

$$y(t) = C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \Phi^{-1}(\tau_i)(E+B_i)^{-1}a_i,$$

де $y_0 = y(t_0) = C$. Звідси розв'язок системи (5)[3]

$$x(t) = \Phi(t)(C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds + \sum_{t_0<\tau_i<t} \Phi^{-1}(\tau_i)(E+B_i)^{-1}a_i.$$

Зокрема, якщо $\Phi(t) = \Phi(t,t_0)$, отримаємо

$$x(t,x_0,t_0) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s) f(s) ds + \sum_{t_0<\tau_i<t} \Phi(t,\tau_i)(E+B_i)^{-1}a_i.$$

Припустимо, що розглядається система (1), (2), але матриці A та $B_i = B$, $\tau_1 > t_0$. Тоді

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-\tau_i)} \prod_{t_0<\tau_p<t} (E+B) e^{A(\tau_p-\tau_{p-1})}, \tau_0 = t_0.$$

Якщо матриці A та B комутують, то комутують e^{At} та B. Тоді

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}(E+B)^{i(t,t_0)},$$

де $i(t,t_0)$ – кількість точок τ_i на $[t_0,t)$, тобто $i(t,t_0)=k$ при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$.

3. Приклад. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1, \ t \ne \tau_i, \qquad (13)$$

при умові, що

$$\Delta x_1\,|_{t=\tau_i} = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{3}, \ \Delta x_2\,|_{t=\tau_i} = \frac{2}{3}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \qquad (14)$$

і послідовність $\{\tau_i\}$ –задана. В даному випадку

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що A і B комутують. Власними числами матриці A є $\lambda_1(A)=1, \lambda_2(A)=2$. Отримаємо два лінійно незалежних розв'язки системи $\frac{dx}{dt} = Ax$

$$y^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \ y^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Звідси лінійно незалежними розв'язками (13), (14) є

$$x^{(1)}(t) = (E+B)^{i(0,t)} \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \ x^{(2)}(t) = (E+B)^{i(0,t)} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Тут

[3] Це є аналог формули Коші. Див. додаток А.

$$E+B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad e^{At}=\begin{pmatrix}e^{t} & e^{2t}\\ 2e^{t} & e^{2t}\end{pmatrix},\quad (E+B)^{i(0,t)}=\begin{pmatrix}6^{\frac{1}{2k}} & 0\\ 0 & 6^{\frac{1}{2k}}\end{pmatrix},$$ якщо $i(0,t)=2k$ і

$$(E+B)^{i(0,t)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{3\cdot 6^{2k}}\\ \frac{2}{3\cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{2\cdot 6^{2k}}\end{pmatrix},$$ при $i(0,t)=2k+1$. Таким чином, фундаментальна матриця системи (13), (14) є

$$\Phi(t,0)=e^{At}(E+B)^{i(t,t_0)}=6^{\frac{1}{2k}}\begin{pmatrix}e^{t} & e^{2t}\\ 2e^{t} & e^{2t}\end{pmatrix},$$ якщо $i(0,t)=2k$ і

$$\Phi(t,0)=\begin{pmatrix}e^{t} & e^{2t}\\ 2e^{t} & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{3\cdot 6^{2k}}\\ \frac{2}{3\cdot 6^{2k}} & -\frac{1}{2\cdot 6^{2k}}\end{pmatrix}=\frac{1}{6^{2k}}\begin{pmatrix}\frac{e^{t}}{2}+\frac{2e^{2t}}{3} & -\left(\frac{e^{t}}{3}+\frac{e^{2t}}{2}\right)\\ e^{t}+\frac{2e^{2t}}{3} & -\left(\frac{2e^{t}}{3}+\frac{e^{2t}}{2}\right)\end{pmatrix}$$

Задача 24. Знайти фундаментальну матрицю і розв'язок задачі Коші для системи з імпульсним впливом

$$\frac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2,\ \frac{dx_2}{dt}=5x_1+2x_2,\ t\neq\tau_i,$$

при умові, що

$$\Delta x_1|_{t=\tau_i}=-\frac{x_1}{2},\ \Delta x_2|_{t=\tau_i}=-\frac{x_2}{2},$$

послідовність $\{\tau_i\}$ –задана і $x(0)=x_0$.

Додаток А.

Якщо $\Phi(t)$ – матриця розмірності $n\times n$, вектор-стовпчики якої є розв'язками системи лінійних диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt}=A(t)x$, $x\in R^n$, $A(t)$ – матриця розмірності $n\times n$. Тоді функція $W(t)=\det\Phi(t)$ називається визначником Вронського. Має місце *формула Якобі*

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} spA(s)ds\right\}.$$

Якщо $W(t)=\det\Phi(t)\neq 0$, то матриця $\Phi(t)$ називається фундаментальною. Якщо $\Phi(t_0)=I$, то фундаментальна матриця $\Phi(t,t_0)=\Phi(t)$ називається нормованою в точці $t=t_0$. Для неоднорідної системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$ за відомою фундаментальною матрицею $\Phi(t,t_0)$ можна знайти розв'язок за допомогою *формули Коші*

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)f(s)ds.$$

Тут $x(t_0)=x_0$.

Література.

В.В. Пічкур

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –К.: Выща школа, 1987. -228 с.
2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. -Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1981. –232 с.