Ф.Г. Гаращенко, В.В. Пічкур

ДОСЛІДЖЕННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ СТРУКТУРНО ЗАДАНИХ СИСТЕМ

для студентів факультету кібернетики
за напрямком підготовки
„Прикладна математика”
(Спеціальність – прикладна математика)

ВСТУП ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Проблеми аналізу структурованих явищ виникають у будь-якій науковій галузі. Це пов'язано з багатьма факторами, зокрема, з природою мислення людини взагалі. Під структурою розуміють об'єкт чи явище, в якому спостерігаються усталені закономірності. Структуровані явища мають місце в біології (структура живої клітки, структура тварин, структура людини), в мовних явищах (структура мови, структура речення, структура слова), у фізиці (структура ядра, структура кристалічної решітки) та в інших науках.

Питання дослідження структурованих процесів піднімались в різні періоди розвитку математичної науки. У зв'язку з прикладним значенням ця проблематика в останні 30-40 років набула особливої гостроти в теорії динамічних систем. Так, на етапі проектування складних технічних систем для спрощення процесу виготовлення в системі виділяються структуровані підсистеми і дана система розглядається у вибраній структурі. Таким шляхом розвиваються сучасні галузі електроніки, приладо- та машинобудування тощо. Класичні підходи по аналізу та оптимізації структурованих систем, як правило, не працюють. Вже на етапі побудови математичної моделі для структурованих систем виникають проблеми розривності правих частин та розв'язків динамічних процесів. Для таких математичних об'єктів навіть ввести поняття розв'язку є проблемою.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (1)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f = (f_1,...,f)^T$ - n-вимірна вектор-функція. Якщо $f(x,t)$ є неперервною, то, як відомо, розв'язком системи (1) є диференційована функція $x(t)$, яка при підстановці в (1) перетворює цю систему на тотожність. В структурованих системах, як правило, $f(x,t)$ – розривна функція. В такому випадку приведене означення не підходить, так як в точках розриву не може бути тотожності для (1).

Приклад 1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = sign(t).$$

Якщо $t < 0$ то рівняння має вигляд $\frac{dx}{dt} = -1$ і $x = -t + C_1$. При $t > 0$ отримуємо $\frac{dx}{dt} = 1$ і $x = t + C_2$. В точці $t = 0$ маємо

$$x(0) = \lim_{t \to -0}(-t + C_1) = \lim_{t \to +0}(t + C_2).$$

Таким чином $x(0) = C_1 = C_2 = C$. Звідси отримуємо розв'язок $x(t) = |t| + C$. Для нього при $t = 0$ не існує $\frac{dx(t)}{dt}$.

Приклад 2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2sign(x)$$

При $x < 0$ рівняння має вигляд $\frac{dx}{dt} = 3$. Для цього випадку $x(t) = 3t + C_1$. Якщо $x > 0$, то $\frac{dx}{dt} = -1$ і отримуємо $x(t) = -t + C_2$. На рисунку 1 побудовано розширений фазовий простір для такого рівняння. Проаналізуємо його. Зафіксуємо довільну ненульову точку фазового простору. При зростанні t відповідний розв'язок доходить до прямої $x = 0$. Далі поле не дозволяє зійти з прямої $x = 0$. Але при $x = 0$ виконується $\frac{dx}{dt} = 0$, а права частина цього

рівняння $1-2sign(0)=1\neq 0$. Тобто, функція $x(t)=0$ не задовольняє рівняння в звичайному розумінні, хоча є розв'язком цього рівняння в деякому сенсі. Рух по прямій $x=0$ є прикладом так званого *ковзного руху* і є специфічним типом розв'язків. Отже, для вказаного рівняння потрібно розширити поняття розв'язку. Це робиться за допомогою процедури доозначення розв'язку, яка полягає у зведенні диференціального рівняння до *диференціального включення*. Це означає, що на поверхні розриву (в даному випадку це є вісь t) при підході зверху та знизу розглядається множина можливих напрямків руху, які є дотичними до інтегральних кривих в околі поверхні розриву. Кожному з цих напрямків відповідає своя права частина. Так отримуємо множину правих частин. Цій множині належить похідна розв'язку і рівняння перетворюється в диференціальне включення. Диференціальні включення відрізняються від диференціальних рівнянь тим, що права частина рівняння перетворюється певним способом на множину, а знак рівності замінюється на знак належності. І тоді під розв'язком диференціального рівняння розуміють розв'язок спеціально побудованого диференціального включення.

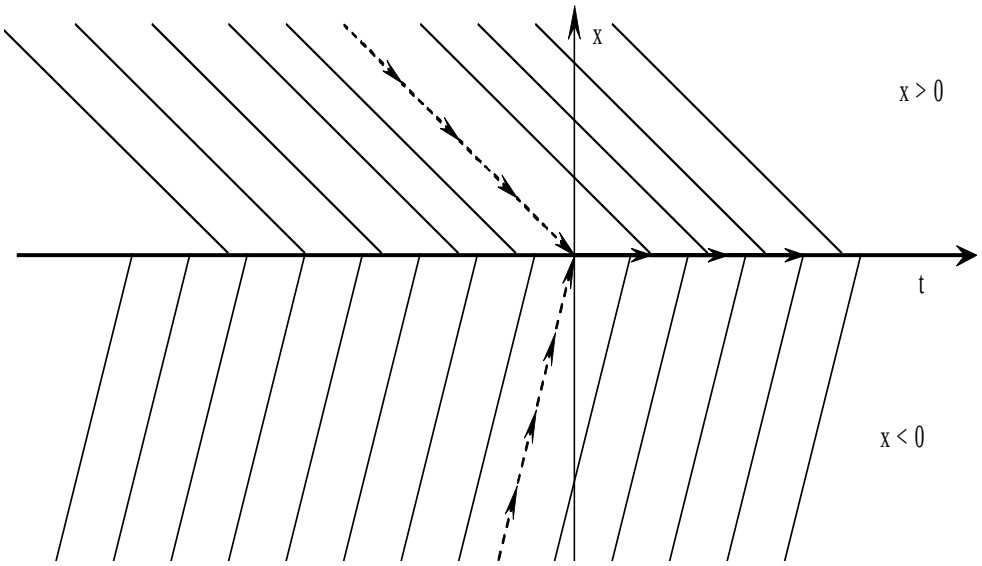

Рис.1

Проблеми структуризації динамічної системи є актуальними при аналізі керованих процесів. Так, цілий ряд технічних об'єктів наперед будують таким чином, що функція керування може приймати дискретну множину значень (*N-позиційні керування, релейні керування*). До таких пристроїв можна віднести окремі типи систем керування літальними апаратами, комп'ютерні системи, гідравлічні пристрої, системи фокусування та інші. На рисунку 2 зображено графік скалярної функції, множиною значень якої є $\{0,1\}$. Точка τ називається *точкою переключення*.

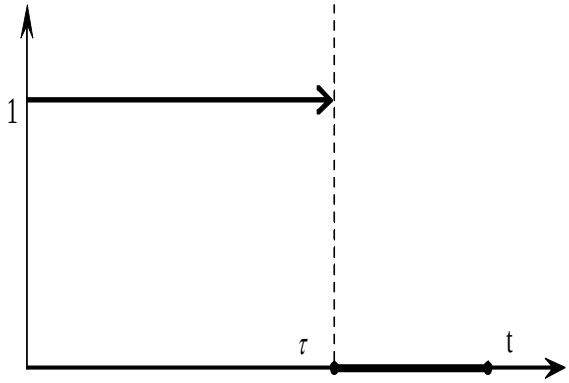

Рис.2

В окремих випадках динамічні системи з структурованим керуванням можна звести до *систем з імпульсним впливом*.

Приклад 3. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = sin(t) + \frac{du}{dt},$$

де $u(t)$ - функція керування, що вибрана у структурній формі

$$u(t) = \begin{cases} cos(t), & t \in (-\infty, \tau) \\ 0, & t \in (\tau, +\infty). \end{cases}$$

Поза околом точки $t = \tau$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = sin(t) - sin(t) = 0, & t \in (-\infty, \tau), \\ \dfrac{dx}{dt} = sin(t), & t \in (\tau, +\infty). \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язавши (2), отримаємо (рис.3)

$$\begin{cases} x(t) = C, & t \in (-\infty, \tau), \\ x(t) = \cos(t) + C, & t \in (\tau, +\infty). \end{cases}$$

В околі точки $t = \tau$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{dx}{dt} ds = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{du}{dt} dt + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \sin(t) dt.$$

Звідси

$$x(\tau + 0) - x(\tau - 0) = u(\tau + 0) - u(\tau - 0) + sin(\tau) - sin(\tau)$$

і остаточно

$$x(\tau + 0) = x(\tau - 0) - cos(\tau). \qquad (3)$$

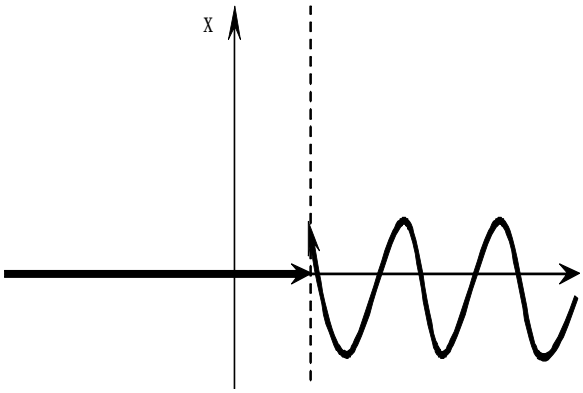

Рис.3.

Диференціальне рівняння (2) з умовою (3) належить до класу *диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.* Разом з тим, це є рівняння, яке допускає *зміну структури*, тобто, одночасно з співвідношеннями (2), (3) досліджується система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = sin(t), & t \in (-\infty, \tau), \\ \dfrac{dx}{dt} = 0, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

при умові

$$x(\tau + 0) = x(\tau - 0) + cos(\tau).$$

В останні два десятиліття в теорії динамічних систем актуалізувалась проблематика, пов'язана з утворенням та втратою структур. Виявилося, що властивість виникнення

структури є спільним для різних природних явищ, процесів суспільного життя. Дослідження, що аналізують закономірності виникнення структурних форм складають базис науки, що має загадкову назву *"синергетика"*. В основі цих досліджень лежить параметрична теорія стійкості і, як наслідок, метод фазового простору. Структура в даному контексті розуміється як стійкий в певному сенсі процес, що не змінює фазової картини стійкості в відповідному околі параметрів. При зміні параметрів може відбутися зміна структури, якщо в околі особливої точки змінюється фазовий портрет. Явище суттєвої залежності розв'язків системи від початкових данних називається *детермінованим хаосом*. Виявляється, що хаотичні явища є дуже поширеними в динамічних моделях і характеризують ступінь їх недосконалості. Вони вказують на те, що умови, в яких відбувається реальний процес, можуть бути в кожному випадку унікальними і не можуть бути враховані стандартними методами. Якщо зміна параметру призводить до втрати єдиності розв'язку (явище біфуркації), то говорять про *катастрофу*.

Область досліджень, що відповідає матеріалу даного спеціального курсу, в наш час інтенсивно розвивається. Значна кількість публікацій присвячена проблемам аналізу динамічних систем з розривною правою частиною, імпульсним впливом та їх оптимізації.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. –К.: Выща школа, 1987. -228 с.
3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. -Новосибирск: Наука, 1987. -226 с.

Розвиваються методи аналізу ковзних режимів в системах керування з заданою структурою

1. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. -М.: Наука, 1976. -335 с.
2. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. -М.: Наука, 1974. -272 с.

Важливе місце в цій галузі займають проблеми виникнення особливих режимів в задачах оптимального керування

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. - 624с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. – М.: Мир, 1979.
3. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. –М.: Наука, 1973. -446 с.
4. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. –Тбилиси: Издательство ТГУ, 1977.

Важливе теоретичне та прикладне значення мають результати в галузі аналізу і оптимізації систем в заданій структурі, вибором оптимальної структури в динамічних системах

1.Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. –К.: Наукова думка, 1985. –304 с.
2. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Вища школа, 1978, 184 с.
3. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. -К.: Наукова думка, 1984. -307 с.
4. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. –197 с.

Велика кількість досліджень проводиться в звязку з проблемами синергетики, виникненням катастроф та хаосу

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Н., 1990. –128с.
2. Ахромеева Г.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Н., 1992. –542с.

3. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. . –М.: Мир, 1999. –335с.
4. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Н., 1990. –270с.