РОЗДІЛ 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВКЛЮЧЕННЯ

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

1. Означення розв'язку. Нехай в області $G \subset R^{n+1}$ задане многозначне відображення $F:(x,t) \mapsto F(x,t)$. Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, t–незалежна змінна, $F(x,t) \subseteq R^n$ – замкнена множина, $(x,t) \in G$.Співвідношення вигляду

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t) \qquad (1)$$

називається *диференціальним включенням*.

Приклад. Одним з найпростіших прикладів диференціального включення є співвідношення

$$x' \in [-1,1], \qquad (2)$$

де x – скалярна функція. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x' = ax + b. \qquad (3)$$

Тут a, b – параметри. Припустимо, що b пробігає множину $[-1,1]$. Тоді рівняння (3) можна переписати у вигляді диференціального включення

$$x' \in \{ax\} + [-1,1]. \qquad (4)$$

Означення. Розв'язком диференціального включення (1) називається абсолютно неперервна вектор-функція $x = x(t)$, яка визначена на деякому інтервалі $I \subseteq R^1$ і така, що майже для всіх $t \in I$

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(x(t),t).$$

Так, легко переконатись, що функція $x(t) = 0$ є розв'язком диференціальних включень (2) та (4).

2. Наближений розв'язок. При дослідженні питання існування та єдності розв'язку задачі Коші, неперервної залежності від початкових даних і параметрів потрібно аналізувати малі зміни правої частини системи (1) в областях неперервності, а також малі зміни границь цих областей. Для цього розв'язок задачі Коші апроксимують наближеним розв'язком (ламаними Ейлера)[2] і доводять збіжність послідовності наближених розв'язків до деякого „справжнього" розв'язку. Користуючись цією методикою, будемо досліджувати умови існування розв'язку задачі Коші для диференціальних включень. Нехай права частина диференціального включення (1) є β- неперервною за x, t.

Означення. Вектор-функція $y(t)$ називається *δ- розв'язком (наближеним розв'язком з точністю до δ)* включення (1), якщо на заданому інтервалі функція $y(t)$ є абсолютно-неперервною і майже скрізь

$$\dot{y}(t) \in F_\delta(y(t),t).$$

Тут $F_\delta(y(t),t) = [coF(y^\delta, t^\delta)]^\delta$, $F(y^\delta, t^\delta) = \bigcup\limits_{\substack{s \in t^\delta \\ z \in y^\delta}} F(z,s)$.

3. Основні умови. Існування розв'язку. Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь[2], для того, щоб система диференціальних рівнянь задовольняла умові існування розв'язку задачі Коші необхідно, щоб виконувалась умова неперервності правої частина за сукупністю змінних. Аналогічну роль в теорії диференціальних включень відіграють основні умови.

Означення. Будемо говорити, що многозначне відображення $F(x,t)$ в області G задовольняє *основним умовам*, якщо в області G відображення $F(x,t)$ є строгим компактозначним опуклозначним β–неперервним за змінними x та t.

Приклад. Многозначні відображення

а) $F(x,t)=[-1,1]$;

б) $F(x,t)=K_1(x)$;

в) $F(0)=[-1,1],\ F(x)=\{0\},\ x\neq 0,\ x\in R^1$

задовольняють основні умови. Має місце наступне твердження.

Лема 1. Нехай $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області G. Тоді границя $x(t)$ будь-якої рівномірно збіжної послідовності δ_k -розв'язків $x_k(t)$ $(\delta_k\to 0, k\to\infty)$ включення

$$\frac{dx}{dt}\in F(x,t)$$

є розв'язок цього включення, якщо графік функції $x(t)=\lim\limits_{k\to\infty}x_k(t)$ міститься в G. Тобто, $(x(t),t)\in G, t\in[a,b]$.

Доведення. Візьмемо довільні $t_0\in[a,b]$ та $\varepsilon>0$. Функція $F(x,t)$ є β–неперервна, тому існує $\eta>0$, таке, що в області $G_0=(t_0-2\eta,t_0+2\eta)\times(x(t_0)-3\eta,x(t_0)+3\eta)$ маємо

$$F(x,t)\subset F_0^{\varepsilon}, F_0=F(x(t_0),t_0) \qquad (5)$$

Оскільки функції $x_k(t)$ є неперервними, то $x(t)$–неперервна, як границя рівномірно збіжної послідовності. Тому знайдуться $\gamma\in(0,\eta)$, k_0, такі, що при $k>k_0$, $|t-t_0|<\gamma$ маємо

$$\delta_k<\min\{\eta,\varepsilon\},\ \|x_k(t)-x(t)\|<\eta,\ \|x(t)-x(t_0)\|<\eta \qquad (6)$$

З (5) і (6) при $\delta=\delta_k$, $k>k_0$, $|t-t_0|<\gamma<\eta$ випливає

$$t^{\delta}\subset t_0^{2\eta},\ (x_k(t))^{\delta}\subset(x(t_0))^{3\eta},\ F((x_k(t))^{\delta},t^{\delta})\subset F_0^{\varepsilon}.$$

Так як $x_k(t)$ є δ_k-розв'язок, а множина F_0–опукла, то майже скрізь

$$\frac{dx_k(t)}{dt}\in[coF((x(t))^{\delta},t^{\delta})]^{\delta}\subset[coF_0^{\varepsilon}]^{\delta}\subset F_0^{2\varepsilon}.$$

При $|t-t_0|<\gamma$ функція $x(t)$ є абсолютно неперервною[1] і $\frac{dx(t)}{dt}\in F_0^{2\varepsilon}$ майже скрізь на відрізку $|t-t_0|<\gamma$. Інтервалами типу $(t_0-\gamma,t_0+\gamma)$ можна покрити весь відрізок $[a,b]$. Тому на $[a,b]$ функція $x(t)$ абсолютно неперервна і майже скрізь існує похідна $\frac{dx(t)}{dt}$. Отже, для кожного t_0, при якому існує $\frac{dx(t_0)}{dt}$, доведено, що $\frac{dx(t_0)}{dt}\in F_0^{2\varepsilon}$ при як завгодно малому $\varepsilon>0$. Тому $\frac{dx(t_0)}{dt}\in F_0=F(x(t_0),t_0)$. Тобто, $x(t)$ – розв'язок диференціального включення (1). Лему доведено.

Наслідок. Якщо $F(x,t)$ задовольняє основним умовам, то границя рівномірно збіжної послідовності розв'язків диференціального включення

$$\frac{dx(t)}{dt}\in F(x,t)$$

є розв'язком цього включення.

Теорема 1. Нехай многозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області G. Тоді для довільної точки $(x_0,t_0)\in G$ існує розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt}\in F(x,t),\ x(t_0)=x_0.$$

[1] теорема 8 лекції 4 про границю абсолютно неперервних функцій

Якщо область G містить циліндр $Z=\{x,t: t\in[t_0,t_0+a], \| x-x_0 \| \le b\}$, то розв'язок існує щонайменше на відрізку $t_0 \le t \le t_0+d$, $d=\min\{a,\frac{b}{m}\}$, $m=\sup\limits_{(x,t)\in Z} |F(x,t)|$.

Доведення проведемо в два кроки.

Крок 1. Побудова послідовності, що збігається до розв'язку задачі Коші. Можна вибрати $a>0, b>0$ так, щоб $Z\subset G$. Тоді за теоремою про обмеженість β–неперервної функції[2] $m<+\infty$. Для $k=1,2,...,$, візьмемо $h_k=\frac{d}{k}, t_{ki}=t_0+ih_k, i=0,1,...,k$. Побудуємо ламану $x_k(t)$ наступним чином:

1). Покладемо $x_k(t_{k0})=x_0$.

2). Якщо для деякого $i\ge 0$ значення $x_k(t_{ki})=x_{ki}$ вже визначене і

$$\| x_{ki}-x_0 \| \le m|t_{ki}-t_0|, \qquad (7)$$

то візьмемо довільну точку $V_{ki}\in F(t_{ki},x_{ki})$ і при $t_{ki}<t\le t_{k,i+1}$ визначимо $x_k(t)$ за допомогою співвідношення

$$x_k(t)=x_{ki}+(t-t_{ki})V_{ki}. \qquad (8)$$

Так як в силу (7) $(t_{ki},x_{ki})\in Z$, то $\| V_{ki} \| \le |F(t_{ki},x_{ki})| \le m$. З (7) та (8) маємо

$$\| x_k(t)-x_0 \| \le m|t-t_0|, \quad t_{ki}<t\le t_{k,i+1}. \qquad (9)$$

Тому значення $x_k(t_{k,i+1})=x_{k,i+1}$ визначене і

$$\| x_{k,i+1}-x_0 \| \le m|t_{k,i+1}-t_0|. \qquad (10)$$

Крок 2. Аналіз послідовності. Отже, $x_k(t)$ послідовно будується на кожному інтервалі $[t_{ki},t_{k,i+1}]$, $i=0,1,...,k-1$. В силу (17) графік функції $x_k(t)$, $t\in[t_0,t_0+d]$ міститься в Z. З (8) випливає, що функція $x_k(t)$ ліпшицева і $\left\|\frac{dx_k(t)}{dt}\right\| \le m$, $t\ne t_{ki}$, $i=1,2...$. Тому $x_k(t)$ абсолютно неперервна[3]. Так як з (8) і (10)

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=V_{ki}\in F(t_{ki},x_{ki}), 0<t-t_{ki}<h_k, \| x_k(t)-x_{ki} \| \le mh_k,$$

то $x_k(t)$ є δ_k - розв'язок включення $\frac{dx}{dt}\in F(x,t)$, де $\delta_k=\max\{h_k,mh_k\}\to 0$, . Функції $x_k(t)$ в силу оцінки $\| V_{ki} \| \le m$ рівномірно обмежені і з (9) випливає їх рівностепенна неперервність. За теоремою Арцела (додаток А) з них можна вибрати рівномірно збіжну підпослідовність $\{x_s(t)\}\subset\{x_k(t)\}$. За лемою 1 границя $x(t)=\lim\limits_{s\to\infty} x_s(t)$ є розв'язок включення $\frac{dx}{dt}\in F(x,t)$. З умови $x_k(t_0)=x_0$ випливає $x(t_0)=x_0$. Теорему доведено.

Задача 14. Дослідити за допомогою теореми 1 на існування розв'язку задачі Коші:

а) $x'\in[-1,1]$, $x(0)=x_0$;

б) $x'\in[-kx,mx]$, $x(0)=x_0$.

Тут x – скалярна функція, x_0 – фіксована точка, k,m – додатні параметри.

---

[2] теорема 2, лекція 3

[3] дивись лекцію 4

Додаток А.

Сімейство Φ функцій φ, визначених на $[a,b]$, називається *рівномірно обмеженим*, якщо існує число $K > 0$, таке, що $|\varphi(x)| < K$ для всіх $x \in [a,b]$ і $\varphi \in \Phi$.

Сімейство Φ функцій φ, визначених на $[a,b]$, називається рівностепенно неперервним, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a,b]$, $y \in [a,b]$, таких, що $|x - y| < \delta$ і всіх $\varphi \in \Phi$.

Теорема (Арцела). Для того, щоб множина $\Phi \subset C[a,b]$ була компактною в $C[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно обмеженою і абсолютно неперервною.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.
2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. -Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1981. –232 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496с.