ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.

1. Основні означення. Розглянемо задачу Больца

$$I = \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t)dt + \Phi(x(T), T) \to \min \qquad (1)$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \qquad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (3)$$

$$(x(T), T) \in G_1,\ u(t) \in U(x,t). \qquad (4)$$

Тут $x \in R^n$ - вектор фазових координат, $f_0(x, u, t)$ – неперервна разом з $\frac{\partial f_0(x, u, t)}{\partial x_i}$ функція, $i = 1,2,...,n$, $\Phi(x, T)$ – неперервна функція, $f(x,u,t)$ – неперервна за сукупністю змінних разом з $\frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x_i}$ вектор-функція розмірності n, $i = 1,2,...,n$, $u(t)$ – вимірна на $[t_0, T]$ функція керування розмірності r, $U(x,t) \subset R^r$ – неперервне зверху многозначне відображення , T – нефіксований момент. Припускаємо, що виконується умова

$$x^T f(x,u,t) \le c\left(\|x\|^2 + 1\right),\ c > 0. \qquad (5).$$

В загальному випадку в класі вимірних оптимальне керування задачі (1)-(5) може не існувати. Однак, практично завжди, існує послідовність $\{u_k(t)\}$, $t \in [t_0, T_k]$, вимірних керувань, $k = 1,2,...$, що відповідна послідовність $\{x_k(t)\}$ траєкторій в силу системи (2) та умови (3) збігається до $x^*(t)$, $t \in [t_0, T^*]$, $T^* = \lim_{k\to\infty} T_k < \infty$. При цьому

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) = \inf I.$$

Приклад такого керування був побудований в лекції 10 за допомогою методу Кротова.

Означення. Якщо гранична крива $x^*(t)$ не є траєкторією системи (2), то рух вздовж $x^*(t)$ називається *ковзним оптимальним режимом*. Сама функція $x^*(t)$ називається *функцією нульової близькості* ковзного режиму.

2. Теорема Філіппова. Розглянемо умови існування оптимального режиму в класі вимірних функцій. Для простоти сам підхід і основну теорему доведемо для задачі оптимальної швидкодії. Для доведення основного результату нам знадобиться наступна лема.

Лема 1 (допоміжна). Нехай вектор-функція $g(t,u)$ є неперервна, $t \in [t_0, T]$, $u = (u_1\ u_2 \ldots u_r)^T$, відображення $Q: t \mapsto Q(t)$ є напівнеперервним зверху та компактозначним, $Q(t) \subset R^r$, $t \in [t_0, T]$. Нехай

$$R(t) = \{f(t,u) : u \in Q(t)\},$$

$y(t) \in R^r$ – вимірна за Лебегом вектор-функція. Тоді існує вимірна за Лебегом вектор-функція $u(t)$, така, що $u(t) \in Q(t)$, $g(t, u(t)) = y(t)$.

Таким чином, розглянемо задачу оптимальної швидкодії. Нехай для задачі (1)-(5) момент t_0 – фіксований, x_0 – фіксована точка, множина G_1 складається з одного елементу $G_1 = \{(x_1, T)\}$, де x_0 є заданим, $f_0(x, u, t) = 1$, $\Phi(x, T) = 0$, а функціонал (1) має вигляд

$$I(u) = T - t_0.$$

Позначимо $T^* - t_0 = \inf I$. Припустимо, що існує щонайменше одна траєкторія $\tilde{x}(t)$ системи (1) в силу деякого вимірного керування $\tilde{u}(t) \in U(\tilde{x}(t), t)$, та момент t_1, такі, що $\tilde{x}(t_0) = x_0$,

$\tilde{x}(t_1) = x_1$. В цьому випадку $T^* \in [t_0, t_1]$. Важливу роль буде відігравати многозначне відображення $R:(x,t) \mapsto R(x,t)$, де $R(x,t) = \{f(x,u,t) : u \in U(x,t)\}$.

Задача 30. Довести, що відображення $R:(x,t) \mapsto R(x,t)$ є компактозначним і неперервним зверху.

Теорема 1 (Філіппова). Нехай $R(x,t)$ – опукла множина. Тоді існує вимірна функція $u^*(t) \in U(x^*(t),t)$, яка мінімізує функціонал $I(u) = T - t_0$ і відповідна траєкторія $x^*(t)$ задовольняє умовам $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(T^*) = x_1$.

Доведення проведемо в два етапи.

Етап 1. Побудова оптимальної траєкторії. Позначимо $Z(t) = \|x(t)\|^2 + 1$. З (5) отримуємо

$$\frac{dZ(t)}{dt} = 2x^T(t)\frac{dx(t)}{dt} = 2x^T(t)f(x,u,t) \le 2c(\|x(t)\|^2 + 1) = 2cZ(t).$$

Позначимо $A = Z(t_0) = \|x(t_0)\|^2 + 1$. З нерівності $\frac{dZ(t)}{dt} \le 2cZ(t)$ випливає $\frac{dZ(t)}{Z(t)} \le 2cdt$ і $Z(t) \le Ae^{2c(t-t_0)}$, $t \ge t_0$. Оскільки $T^* \in [t_0, t_1]$, то ми можемо розглядати лише ті керування, для яких значення функціоналу $I \le t_1 - t_0$. Для таких керувань розв'язок системи (2) з умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ задовольняє нерівності $\|x(t)\|^2 \le Ae^{2c(t_1 - t_0)}$.

Покажемо, що при $t \in [t_0, t_1]$, $\|x(t)\| \le \sqrt{A}e^{c(t_1 - t_0)}$ множина $U(x,t)$ є рівномірно обмежена. Тобто, знайдеться $N > 0$, таке, що для довільного $u \in U(x,t)$ виконується $\|u\| \le N$.

Від супротивного. Припустимо, що існують послідовності $\{t_k\}$, $\{x_k\}$, $\{u_k\}$, такі, що $t_k \to t$, $x_k \to x$, $\|u_k\| \to \infty$, $u_k \in U(x_k, t_k)$, $k \to \infty$. В силу неперервності зверху для довільного $\varepsilon > 0$ при великих значеннях k виконується $U(x_k, t_k) \subset (U(x_k, t_k))^{\varepsilon}$. Таким чином, $U(x_k, t_k)$ – обмежена, . Звідси $U(x,t)$ – рівномірно обмежена.

Так як $f(x,u,t)$ – неперервна, то при $t \in [t_0, t_1]$, $\|x\| \le \sqrt{A}e^{ct_1}$, $u \in U(x,t)$ отримуємо $\|f(x,u,t)\| \le M$, $M > 0$. Розглянемо множину S_0 всіх розв'язків $x(t)$ системи (2), для різних $u(t) \in U(x(t),t)$, для яких $x(t_0)=x_0$, і траєкторія проходить через x_1. Ця множина не є порожньою. Нехай $W=\{u(t)\}$ – множина керувань, які відповідають $x(t) \in S_0$. Візьмемо послідовність $u_s \in W$, $I_s = I(u_s) \to \inf\limits_{U \in W} I = I^*$.

Нехай $x_s(t)$ – відповідний розв'язок рівняння (2). Відповідні траєкторії $x_s(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ є рівномірно обмежені ($\|x_s(t)\| \le \sqrt{A}e^{c(t_1 - t_0)}$) і рівностепенно неперервні, так як вони є абсолютно неперервними майже скрізь, $\|\frac{dx_s(t)}{dt}\| = \|f(x_s, u_s, t)\| \le M$. За теоремою Арцеля виберемо з $\{x_k(t)\}$ збіжну підпослідовність, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(t) = x^*(t)$.

Етап 2. Існування оптимального керування. Покажемо, що $x^*(t)$ відповідає оптимальному керуванню. Так як всі $x_k(t)$ задовольняють умові Ліпшиця з однією і тією ж константою M, то $x^*(t)$ – ліпшицева з константою M. Тому $x^*(t)$ – абсолютно неперервна і $\left|\frac{dx^*(t)}{dt}\right| \le M$. Нехай $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$, $\frac{dx_k(t)}{dt} = y_k(t)$, $k = 1,2,...$ Функції $y(t)$, $y_k(t)$ визначені майже скрізь на $[t_0, t_1]$, вимірні і обмежені. Нехай $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ і $\frac{dx^*(\bar{t})}{dt}$ існує. Покажемо,

що $\frac{dx^*(\bar{t})}{dt} \in R(x^*(\bar{t}),\bar{t})$. Множина $R(x,t)$ є β – неперервна, тому $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$, такі, що при $|t-\bar{t}|<\delta$, $\|x-x^*(\bar{t})\|<2M\delta$ маємо $R(x,t) \in (R(x^*(\bar{t}),\bar{t}))^{\varepsilon}$. Зменшивши, якщо потрібно, δ>0, можна вважати, що при $|t-\bar{t}|<\delta$

$$\left\| \frac{x^*(t)-x^*(\bar{t})}{t-\bar{t}} - \frac{dx^*(\bar{t})}{dt} \right\| \le \varepsilon \qquad (6)$$

(за означенням похідної). Але

$$\frac{x^*(t)-x^*(\bar{t})}{t-\bar{t}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k(t)-x_k(\bar{t})}{t-\bar{t}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{t-\bar{t}} \int_{\bar{t}}^{t} y_k(\tau)d\tau \qquad (7).$$

Далі, майже для всіх τ має місце $y_k(\tau) = \frac{dx_k(\tau)}{dt} = f(\tau, x_k(\tau), u_k(\tau)) \in R(\tau, x_k(\tau))$. При $\left|\tau-\bar{t}\right| < \delta$ і досить великих k маємо $\left\|x_k(\bar{t})-x^*(\bar{t})\right\| < M\delta$, $\left\|x_k(\tau)-x_k(\bar{t})\right\| \le M\delta$. Звідси $\left\|x_k(\tau)-x^*(\bar{t})\right\| \le 2M\delta$. Тоді з раніше зроблених оцінок випливає $R(\tau, x_k(\tau)) \subseteq (R(x^*(\bar{t}),\bar{t}))^{\varepsilon}$. Отже, при $|t-\bar{t}| < \delta$ і досить великих k підінтегральна функція в (7) належить $(R(\bar{t}, x^*(\bar{t})))^{\varepsilon}$. За лемою про середнє значення $\frac{x^*(t)-x^*(\bar{t})}{t-\bar{t}} \in (R(\bar{t}, x^*(\bar{t})))^{\varepsilon}$. Тепер з (6) випливає $\frac{dx^*(\bar{t})}{dt} \in (R(x^*(\bar{t}),\bar{t}))^{2\varepsilon}$. Так як ε>0 - як завгодно мале, $R(x^*(\bar{t}),\bar{t})$ - замкнена множина, то $\frac{dx^*(\bar{t})}{dt} \in R(x^*(\bar{t}),\bar{t})$. Значить, існує $u^* \in U(x^*(\bar{t}),\bar{t})$, таке, що $\frac{dx^*(\bar{t})}{dt} = f(x^*(\bar{t}), u^*(\bar{t}), \bar{t})$. За лемою 1 функція u*(t) – вимірна. Теорему доведено.

Покажемо, що оптимальне керування може не існувати, якщо множина $R(x,t)$ не є опуклою.

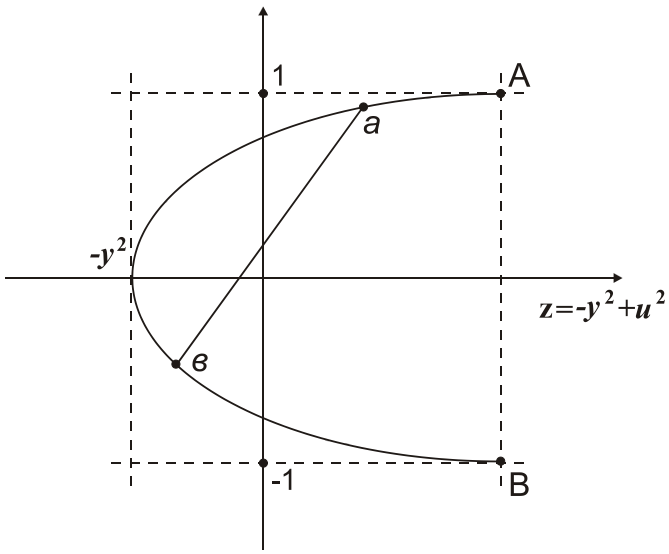
3. Приклад. Розглянемо задачу оптимальної швидкодії: мінімізувати функціонал $I(u) = T$ при умовах:

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 + u^2, \quad \frac{dy}{dt} = u,$$

$$|u(t)| \le 1, \quad x(0) = y(0) = Y(t) = 0, \quad x(T) = 1, \quad t \in [0,T].$$

Тут $x(t), y(t), u(t)$ – скалярні функції. Позначимо $R(x,y,t) = \{(-y^2+u^2, u) : |u| \le 1\}$. Ця множина не є опуклою. Дійсно, на малюнку $R(x,y,t) = (A,B)$[1] і для точок *A*, *B* пряма $\lambda a + (1-\lambda)b \notin (A,B), \lambda \in (0,1)$.

[1] (A,B) – дуга від точки A до точки B



Отже, умови теореми Філіппова не виконуються. Оцінимо оптимальне T^*. Має місце нерівність $\frac{dx}{dt} = -y^2 + u^2 \le -y^2 + 1 \le 1$.

Тому $dx \le dt$ і звідси $x(T^*) - x(0) \le T^*$. Так як $x(T)=1$, $x(0)=0$, то $T^* \ge 1$. Щоб досягти $T^* = 1$, потрібно, щоб $y=0$ і $u^2=1$. Але з другого рівняння системи видно, що це неможливо. Тому $T^* > 1$. Побудуємо послідовності $x_k(t)$, $y_k(t)$, $u_k(t)$, такі, що $|u_k(t)|=1$, $|y_k(t)| = \frac{1}{k}$, $t \in [0, t_k]$, $k=2,3,...$ З першого рівняння системи отримуємо

$$x(t_k) = \int_0^{t_k} (-y_k^2(s) + u_k^2(s))ds = (-y_k^2(\theta) + u_k^2(\theta))t_k .$$

Тут $\theta \in (0, t_k)$ – середня точка. Для того, щоб $x(t_k)=1$ необхідно, щоб $t_k = \frac{1}{1-\frac{1}{k^2}} = 1 + \frac{1}{k^2-1}$.

Отже, $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t (-y_k^2(s) + u_k^2(s))ds = \lim_{k\to\infty} t\left(1 - \frac{1}{k^2-1}\right) = t$, $\lim_{k\to\infty} y_k(t) = 0$. Але пара $x(t)=t$, $y(t)=0$ не є розв'язком даної системи ні при яких $|u(t)| \le 1$. Розв'язок $x(t)=t$, $y(t)=0$ є ковзним оптимальним режимом. Він виник в результаті порушення умови опуклості множини $R(x,y,t)$.

4. Теорема Філіппова для задачі Больца. Для задачі (1)-(4) теорема Філіппова формулюється наступним чином.

Теорема 2(Філіппова). Нехай виконуються наступні умови:

1. Знайдеться послідовність вимірних керувань $u_k(t)$, $t \in [t_0, T_k]$, $k = 1,2,...$, яка задовольняє (1)-(4), така, що відповідна послідовність $x_k(t)$, $t \in [t_0, T_k]$ розв'язків динамічної системи (2) рівномірно збігається до деякої граничної кривої $x^*(t)$, $t \in [t_0, T^*]$, $T^* = \lim_{k\to\infty} T_k < +\infty$, $x^*(t_0) = x_0$, $(x(T^*), T^*) \in G$ і $\lim_{k\to\infty} I(u_k) = I^* = \inf I$. При цьому для будь-якої іншої послідовності керувань вказаного типу граничне значення функціоналу не менше I^*.

2. Для будь-яких фіксованих (x,t) множина

$R(x,t) = \{ f(x,u,t) : u \in U(x,t) \}$

є опуклою.

3. Функція

$\Phi(x,t,\varphi) = \min\{ f_0(x,u,t) : u \in \Omega(x,\varphi,t) \}$

є для довільних (x,t) увігнутою по φ на множині $R(x,t)$. Тут $\Omega(x,\varphi,t)=\{u\in U(x,t):\ f(x,u,t)=\varphi,\quad \varphi\in R(x,t)\}$.

Тоді існує оптимальне вимірне керування $u^*(t),\ t\in[t_0,T^*]$ задачі (1)-(4), що реалізує траєкторію $x^*(t),\ t\in[t_0,T^*]$ динамічної системи (2), $x^*(t_0)=x_0$, $(x^*(T),T)\in G$ і $I(u^*)=I^*$.

Наслідок. Має місце диференціальне включення

$$\frac{dx^*(t)}{dt}\in co\, f(x,U,t).$$

Тут $f(x,U,t)=\{f(x,u,t):u\in U\}$.

Якщо множина *f(x,U,t)* не є опуклою, то оптимальний розв'язок $(x^*(t),u^*(t))$ може бути відсутнім. Оптимальною може виявитись траєкторія диференціального включення $\frac{dx(t)}{dt}\in co\, f(x,U,t)$.

5. Підхід Р.В.Гамкрелідзе. Метод *Р.В.*Гамкрелідзе полягає в тому, щоб в аналітичній формі записати диференціальне включення $\frac{dx}{dt}\in co\, f(x,u,t)$. Для цього застосовується наступна теорема.

Теорема 3. Всі ковзні режими задачі (1)-(4) знаходяться серед оптимальних траєкторій наступної задачі оптимального керування:

$$J(w)=\int_{t_0}^{T}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)\,f_0(x(t),u_i(t),t)dt+\Phi(x(T),T)\to\min, \qquad (8)$$

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(t)f(x(t),u_i(t),t), \qquad (9)$$

$$x(t_0)=x_0,\ (x(T),T)\in G_1, \qquad (10)$$

$$u_i(t)\in U(x,t),\ \alpha_i\ge 0,\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1,\ i=\overline{0,n}, \qquad (11)$$

$$w(t)=[\alpha_0(t),\ldots,\alpha_n(t);u_0(t),\ldots,u_n(t)].$$

Зауваження. Задача (8)-(11) називається *розщепленою*.

Доведення. Виходячи з теореми Каратеодорі (див. додаток А), для задачі (8)-(11) виконуються умови теореми 2. Тобто, в класі вимірних функцій існує оптимальне керування $w^*(t)=[\alpha_0^*(t),\ldots,\alpha_n^*(t);u_0^*(t),\ldots,u_n^*(t)]$ задачі (8)-(11). Підставивши $w^*(t)$ в (9), отримаємо оптимальну траекторію $x^*(t),\ t\in[t_0,T^*]$. Очевидно, що при цьому мінімальне значення функціоналу (8) не більше за мінімальне значення функціоналу (1), $I^*\ge J^*$. Покажемо, як, виходячи з $w^*(t),\ x^*(t)$, побудувати послідовність керувань $u^{(k)}(t),\ t\in[t_0,T^*]$ задачі (1)-(4), яким відповідає послідовність траєкторій $x^{(k)}(t)$ системи (2) і

$$\|\,x^{(k)}-x^*\,\|_{C[t_0,T]}\to 0,\ k\to\infty.$$

Розіб'ємо відрізок $[t_0,T^*]$ на k відрізків $I_i^{(k)},\ i=1,2,\ldots,k$. Кожен з відрізків $I_i^{(k)}$ розбиваємо на $(n+1)$ множину, які є вимірними і не перетинаються між собою:

$$I_i^{(k)}=\bigcup_{j=0}^{n}E_{ij}^{(k)},\ i=\overline{1,k}.$$

При цьому

$$\mu E_{ij}^{(k)}=\int_{I_i^{(k)}}\alpha_j^*(t)dt. \qquad (12)$$

Це можна здійснити, так як

$$\mu I_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \mu E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \int_{I_i^{(k)}} \alpha_j^*(t)dt = \int_{I_i^{(k)}} \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^*(t)dt = \int_{I_i^{(k)}} dt.$$

Послідовність керувань будемо будувати наступним чином:

$$u^{(k)}(t) = u_j^*(t),\ t \in E_{ij}^{(k)},\ j = \overline{0,n},\ i = \overline{1,k}, \qquad (13)$$

де $u_j^*(t)$ є компонентами керування $w^*(t)$. Використовуючи теорему про неперервну залежність розв'язку системи типу Каратеодорі від правої частини та апарат узагальнених функцій, можна показати, що з $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{i=1,2,\ldots,k} \mu I_i^{(k)} = 0$ випливає $\lim\limits_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x^* \|_{C[t_0,T]} = 0$. Теорему доведено.

Функції $u_j^*(t)$ називаються *базовими керуваннями*, а $\alpha_j^*(t)$ – *ваговими функціями,* $t \in [t_0, T^*]$. З описаної в доведенні теореми 3 конструкції (13) побудови керувань $u^{(k)}(t)$ випливає, що $u^{(k)}(t)$ при $k \to \infty$ нескінченно часто "скаче" з одного базового керування на інше. При цьому $u^{(k)}(t)$ затримується на базовому керуванні $u_j^*(t)$ на долю часу, що визначається ваговою функцією $\alpha_j^*(t)$ згідно (12). Рух $x^{(k)}(t)$ в границі є "ковзанням" вздовж $x^*(t)$ при $k \to \infty$.

Розглянемо випадок $G_1 = R^n$, $U(x,t) = R^r$. Функція Гамільтона-Понтрягіна для задачі (1)-(4) є

$$H(x,u,\psi,t) = -f_0(x,u,t) + \psi^T(t) f(x,u,t), \qquad (14)$$

де $\psi(t)$– спряжені змінні. Тоді для (8)-(11) функцією Гамільтона-Понтрягіна є

$$H_1(x,u_j,\alpha_j,\psi,t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t) H(x,u_j(t),\psi,t). \qquad (15)$$

З (14), (15) та принципу максимуму Понтрягіна[5] випливає, що якщо рівняння

$$H_1(x,u_0,\psi,t) = \sup_u H(x,u,\psi,t) \qquad (16)$$

має єдиний розв'язок відносно u_0, то ковзний режим не може виникнути. Ковзний режим може мати місце лише тоді, коли існує декілька розв'язків рівняння (16).

Додаток А. Теорема (Каратеодорі)[5]. Нехай $A \subset R^n$. Будь-яка точка $x \in co\,A$ може бути подана у вигляді опуклої комбінації не більш ніж $n+1$ точки $x_i \in A,\ i = 1,2,\ldots,n+1$. Тобто,

$$co\,A = \{x \in R^n : x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,n+1\}.$$

Література.

1. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования// Вестник Московского университета, Серия математика, механика.– 1959. – №2. – С.25-32.
2. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления.– Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1977. – 232с.
3. Вапнярский И.Б. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее приложения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. –т.7, №2. – С.259-283.
4. Гамкрелидзе Р.В. О скользящих оптимальных режимах// Доклады Академии Наук СССР. – 1962.–т.143, №6. – С.1243-1245.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520с.