ВИБІР ОПТИМАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

1. Постановка задачі. При конструюванні різних технічних систем для спрощення процесу виготовлення систему розбивають на підсистеми. Який має бути порядок розміщення підсистем, щоб система в цілому мала найкращі характеристики при експлуатації? В математичному плані така постановка може бути формалізована і зведена до *задачі вибору оптимальної структури* динамічної системи.

Нехай $X \subseteq R^n$ – фазовий простір і для кожного $t \in [t_0, T]$ визначено множину $\Omega(t) \subseteq X$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f^{(j_i)}(x,t), \ t \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \qquad (1)$$

з умовами

$$x(t_0) = x_0, \qquad (2)$$

$$x(\tau_i + 0) = g_{j_i}(x(\tau_i - 0), \tau_i), \ i = 1,2,..., p. \qquad (3)$$

Тут $x(t) \in \Omega(t)$ – вектор фазових координат, $t \in [t_0, T]$, $f^{(j)}(x,t)$, – вектор-функції розмірності n, які задовольняють умовам існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $j = 1,2,..., N$, $x_0 \in \Omega(t_0)$, $g_j(x,\tau)$– n-вимірні неперервні вектор-функції на $X \times [t_0, T]$, $j = 1,2,..., N$, $\tau_i \in (t_0, T)$, $i = 1,2,..., p$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_P = T$. Позначимо $x^j(t) = x(t, s, y, f^{(j)})$ траєкторію підсистеми $\frac{dx}{dt} = f^{(j)}(x,t)$ системи (1) з початковою умовою $x(s) = y$. Індексація j_i в (1) вказує на те, що на відрізку $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ використовується одна з підсистем $\frac{dx}{dt} = f^{(j)}(x,t)$, $j = 1,2,..., N$. $i = 1,2,..., p$. Не виключається випадок, коли деяка підсистема $\frac{dx}{dt} = f^{(k)}(x,t)$ з заданого набору підсистем не використовується на жодному з відрізків $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1,2,..., p$, або використовується одночасно на кількох. Таким чином, послідовність розміщення підсистем в системі (1) не є фіксованою. Точки $\tau_i \in (t_0, T)$ називаються *точками переключення* між підсистемами, $i = 1,2,..., p$. Кількість точок переключення також може бути невідомою. Співвідношення (3) вказує на те, що в точці переключення можливий розрив фазової траєкторії. При цьому величина розриву залежить від точки переключення, фазової координати та номера підсистеми, що була задіяна на попередньому інтервалі. Динамічна система вигляду (1)-(3) називається *системою зі змінною стуктурою*.

Нехай задана множина точок розриву

$$\{\tau_i\} = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p\}$$

та послідовність правих частин

$$\{f^{(j_i)}\} = \{f^{(j_1)}, f^{(j_2)}, ..., f^{(j_p)}\}.$$

Пара $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ визначає кількість точок переключень p, множину $\{(\tau_{i-1}, \tau_i), i = 1,2,..., p\}$, встановлює відповідність

$$\frac{dx}{dt} = f^{(j_i)}(x,t), \ t \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \ i = 1,2,..., p.$$

Таким чином, при фіксованих $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ система (1), (3) є системою з імпульсним впливом, для якої існує розв'язок задачі Коші. Пару $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$ будемо називати *структурою* системи (1)-(3). Задача про вибір оптимальної структури системи (1) полягає в тому, щоб знайти структуру $(\{\tau_i\}, \{f^{(j_i)}\})$, таку, що мінімізує визначений на розв'язках

системи (1)-(3) критерій якості

$$I\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)=\int_{t_0}^{T} f_0(x,t)dt+\Phi(x(T)). \qquad (4)$$

Тут $f_0(x,t)$ – інтегрована за Лебегом на розв'язках системи (1) функція, $\Phi(x)$ – неперервна функція.

2. Принцип оптимальності і рівняння Беллмана. Для розв'язування задачі (1)-(4) застосуємо метод динамічного програмування. Припустимо, що пара $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^*$ визначає оптимальну структуру задачі (1)-(4), $x^*(t)=x\left(t,x_0,t_0,\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^*\right)$ –траєкторія, що відповідає оптимальній структурі.

Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо точку $s\in(t_0,T)$. Необхідно мінімізувати критерій якості

$$I_s\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)=\int_{s}^{T} f_0(x,t)dt+\Phi(x(T)).$$

на траєкторіях системи (1), що розглядається на проміжку $t\in(s,T]$ з умовами $x(s+0)=x^*(s+0)$ та (3). Має місце наступний *принцип оптимальності*.

Теорема 1. Якщо $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^{**}$ – розв'язок допоміжної задачі, то на проміжку $t\in(s,T]$ має місце рівність $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^{*}=\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)^{**}$.

Теорема може бути доведена аналогічно до принципу оптимальності Беллмана для задачі оптимального керування Больца. При цьому за функцію керування вибирається структура $\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)$ системи (1) [1,2].

Функція

$$B(z,s)=\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_{s}^{T} f_0(x,t)dt+\Phi(x(T))\right\},$$

що визначена на траєкторіях системи (1) при $t\in(s,T]$ з умовами $x(s+0)=z$ та (3) є *функцією Беллмана* задачі (1)-(4). Згідно з принципом оптимальності

$$B(z,s)=\lim_{\varepsilon\to+0}\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_{s}^{s+\Delta s+\varepsilon} f_0(x,t)dt+\int_{s+\Delta s+\varepsilon}^{T} f_0(x,t)dt+\Phi(x(T))\right\}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_{s}^{s+\Delta s+\varepsilon} f_0(x,t)dt+B(x(s+\Delta s+\varepsilon),s+\Delta s+\varepsilon)\right\}=$$

$$\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_{s}^{s+\Delta s} f_0(x,t)dt+B(x(s+\Delta s+0),s+\Delta s+0)\right\}. \qquad (5)$$

Позначимо

$$G_{j_i}(x(s-0),s)=\begin{cases} x(s), s\neq\tau_i, \\ g_{j_i}(x(s-0),s), s=\tau_i. \end{cases}$$

Враховуючи (5), отримуємо

$$B(z,s)=\min_{\left(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\}\right)}\left\{\int_{s}^{s+\Delta s} f_0(x,t)dt+B(G_{j_i}(x(s+\Delta s-0),s+\Delta s),s+\Delta s+0)\right\}. \qquad (6)$$

Рівняння (6) розглядається на траєкторіях даної системи і є рівнянням Беллмана в інтегральній формі для задачі (1)-(4).

Ураховуючи, що p – скінченне число, можемо для точки s вибрати таке $\Delta s>0$, що проміжок $(s,s+\Delta s)$ не містить точок переключення τ_i. Припустимо, що функція Беллмана

$B(z,s)$– неперервно диференційована, $f_0(x,t)$ – неперервна, $\theta \in (s, s+\Delta s)$. Використовуючи теорему про середнє, розклад функції Беллмана до другого порядку та (5), при $\Delta s \to 0$ маємо

$$B(z,s) = \min_{(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\})} \left\{ f_0(x(\theta),\theta)\Delta s + B(z,s) + \frac{\partial B(z,s)}{\partial s}\Delta s + grad_x^T B(z,s)\big(x(s+\Delta s) - z\big) + o(\Delta s) \right\}.$$

Поділимо останній вираз на Δs і перейдемо до границі при $\Delta s \to 0$. Таким чином, отримуємо

$$\frac{\partial B}{\partial s} + \min_{(\{\tau_i\},\{f^{(j_i)}\})} \left\{ f_0(x,s) + grad_x^T B(x,s+0) f^{(j_i)}(x,s+0) \right\} = 0, \qquad (7)$$

$$x \in \Omega(s+0),\ B(x,T) = \Phi(x),\ x = G_{j_{(i-1)}}(u,s),\ u \in \Omega(s-0). \qquad (8)$$

Рівняння (7), (8) є рівнянням Беллмана в диференціальній формі для задачі (1)-(4).

3. Алгоритм розв'язування задачі вибору оптимальної структури. На основі інтегрального рівняння Беллмана (6) можна запропонувати наступний алгоритм знаходження оптимальної структури.

Алгоритм.

Крок 1. Введемо на відрізку $[t_0, T]$ сітку $t_0 < t_1 < ... < t_m = T$. Позначимо $\Omega(k) = \Omega(t_k)$, $k = 1,2,...,m$.

Прямий хід методу.

Крок 2. Для кожної точки $y \in \Omega(m-1)$, з якої досяжна множина $\Omega(m)$ в силу (1), (3), розв'язуємо задачу

$$B(y, t_{m-1}) = \min_j \left\{ \int_{t_{m-1}}^{t_m} f_0(x^j, t)dt + \Phi\big(x^j(T)\big) \right\}.$$

Тут $x^j(t) = x\big(t, y, t_{m-1}, f^{(j)}\big)$. Знаходимо номер оптимальної підсистеми $j^* = j^*(m-1, y)$.

Крок 3. Розв'язуємо задачу

$$B(y, t_{m-2}) = \min_{j,k=1,2} \left\{ \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} f_0(x^j, t)dt + S_k(j, m-1) \right\}$$

для будь-якої точки $y \in \Omega(m-2)$, з якої досяжна множина $\Omega(m)$ в силу (1), (3). Тут

$S_1(j, m-1) = B(x^j(t_{m-1}), t_{m-1})$, $S_2(j, m-1) = B(g_j(x^j(t_{m-1}), t_{m-1}), t_{m-1})$,

$x^j(t) = x\big(t, y, t_{m-2}, f^{(j)}\big)$, $g_j(x^j(t_{m-1}), t_{m-1}) \in \Omega(m-1)$. Знаходимо номер оптимальної підсистеми $j^* = j^*(m-2, y)$ та обчислюємо індикатор наявності точки переключення $k^* = k^*(m-2, y)$. Продовжуємо ітераційний процес згідно рівняння (6) до тих пір, поки не прийдемо до множини $\Omega(0)$.

Крок 4. Для кожної точки $y \in \Omega(0)$, з якої досяжна множина $\Omega(m)$ в силу (1), (3), розв'язуємо задачу

$$B(y, t_{m-2}) = \min_{j,k=1,2} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^j, t)dt + S_k(j,1) \right\},$$

де

$S_1(j,1) = B(x^j(t_1), t_1)$, $S_2(j,1) = B(g_j(x^j(t_1), t_1), t_1)$,

$x^j(t) = x\big(t, y, t_0, f^{(j)}\big)$, $g_j(x^j(t_1), t_1) \in \Omega(1)$. Знаходимо $j^* = j^*(0, y)$ та $k^* = k^*(0, y)$.

Обернений хід методу.

Крок 5. Присвоїмо $R = 0$ (R –кількість точок переключення). Знаходимо $j = j^*(0) = j^*(0, x_0)$, $\tilde{x}(t_1) = x\big(t_1, x_0, t_0, f^{(j)}\big)$. Якщо $k^*(0, x_0) = 1$, то $x^*(t_1) = \tilde{x}(t_1)$. Інакше $x^*(t_1) = g_j(\tilde{x}(t_1), t_1)$, $R = 1$, $\tau_R = t_1$. Далі підраховуємо $j = j^*(1) = j^*(1, x^*(t_1))$, $\tilde{x}(t_2) = x\big(t_2, x^*(t_1), t_1, f^{(j)}\big)$. Якщо $k^*(1, x^*(t_1)) = 1$, то $x^*(t_2) = \tilde{x}(t_2)$. Інакше

$x^*(t_2) = g_j(\tilde{x}(t_2), t_2)$, R збільшуємо на 1, $\tau_R = t_2$ і т.д. до того моменту, поки не прийдемо до множини $\Omega(m)$. У результаті обчислень отримаємо множини

$$\{\tau_i, i = 1,2,...,R\},\ \{j^*(i)\},$$

які визначають оптимальну структуру системи (1) для задачі вибору оптимальної структури (1)-(4).

Література.

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. –197 с.

2. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. –К.: Вища школа, 1975. –328 с.