РОЗДІЛ 3
АНАЛІЗ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

РІВНЯННЯ КАРАТЕОДОРІ

1. Означення. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad (1)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f = (f_1,...,f)^T$ - n-вимірна вектор-функція. Якщо функція $f(x,t)$ є розривною за t і неперервною за x, то розв'язком (1) можна назвати функцію, що задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)ds. \qquad (2)$$

Тут інтеграл розглядається в сенсі Лебега. Для того, щоб такий інтеграл існував, на праву частину системи (1) накладаються додаткові умови. Нехай D – область в R^{n+1}. Припустимо, що в області D виконуються *умови Каратеодорі*

1) функція $f(x,t)$ неперервна за x і визначена майже при всіх t, $(x,t) \in D$;

2) при кожному x функція $f(x,t)$ вимірна за t, $(x,t) \in D$;

3) має місце нерівність $\|f(x,t)\| \le m(t)$, де функція *m(t)* інтегрована.

Означення. Система диференціальних рівнянь (1), для якої виконуються умови Каратеодорі 1)-3) називається системою *Каратеодорі.* Функція $x(t)$, що визначена на інтервалі I, називається *розв'язком рівняння Каратеодорі,* якщо вона абсолютно неперервна на кожному відрізку $(\alpha,\beta) \in I$ і майже скрізь задовольняє рівняння (1), або, що рівносильне при умовах Каратеодорі, якщо вона задовольняє (2) при якому небудь $t_0 \in I$.

Важливим є наступне твердження.

Лема 1. Нехай функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі, а функція $x(t)$ вимірна, $t \in [a,b]$. Тоді $\eta(t) = f(x(t),t)$ є сумовною.

2. Важливий приклад системи Каратеодорі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + p(t). \qquad (3)$$

Тут x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умовам Каратеодорі, *p(t)* – узагальнена функція, $\frac{d}{dt}q(t)=p(t)$, *q(t)* – вимірна і обмежена на довільному скінченому інтервалі функція, а похідна розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій. Зокрема, *p(t)* може бути δ-функцією. Розглянемо заміну $x = y + q(t)$. Тоді система (3) зводиться до системи Каратеодорі

$$\frac{dy}{dt} = f(y + q(t),t). \qquad (4)$$

За лемою 1 права частина (4) є вимірною за змінною t. Розв'язком системи диференціальних рівнянь (3) називається функція $x(t) = y(t) + q(t)$, де $y(t)$ - розв'язок (4). Прикладом системи (3) може бути система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \delta(t - t_i)$$

де $\nu_i \in R^n$, t_i - фіксовані точки, $i = 1,2,...$. Це є так звана *система диференціальних рівнянь з поштовхами.* Всі розв'язки такої системи в точках t_i мають скачки рівні ν_i, $i = 1,2,...$, а в проміжках між ними є абсолютно неперервними функціями і задовольняють рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$.

Приклад. Розв'яжемо диференціальне рівняння з поштовхами

$$\frac{dx}{dt} = ax + 3\delta(t-1),$$

при умові, що $x(0) = x_0$, $t \in [0,2]$, a –дійсний параметр. Запишемо це рівняння у вигляді (2)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(ax(s) + 3\delta(s-1)\right)ds.$$

Виберемо $\varepsilon = 1/k$, $k > k_0 > 1$. При $t \in [0,1-\varepsilon]$ це рівняння має вигляд

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(ax(s)\right)ds.$$

Тому $x(t) = x_0 e^{at}$, $t \in [0,1-\varepsilon]$. На проміжку $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$

$$x(1+\varepsilon) = x(1-\varepsilon) + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} ax(s)ds + 3\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \delta(s-1)ds = x(1-\varepsilon) + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} ax(s)ds + 3.$$

І при $t \in [1+\varepsilon,2]$

$$x(t) = x(1+\varepsilon) + \int_{1+\varepsilon}^{t} \left(ax(s)\right)ds = x(1+\varepsilon)e^{a(t-1-\varepsilon)}.$$

Тоді $\varepsilon \to +0$ при $k \to \infty$ і одержуємо розв'язок

$$x(t) = x_0 e^{at},\ t \in [0,1),\ x(1+0) = x(1-0) + 3 = x_0 e^a + 3,$$

$$x(t) = x(1+0)e^{a(t-1)} = (3 + x_0 e^a)e^{a(t-1)},\ t \in (1,2].$$

Задача 17. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку з поштовхами:

а) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x + \delta(t-1/3) - 4\delta(t-2/3) = 0$, $x(0) = x_0$, $\frac{dx(0)}{dt} = y_0$, $t \in [0,1]$;

б) $\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} - x + \frac{2}{3}\delta(t-2) - \frac{4}{5}\delta(t-3) = 0$, $x(0) = x_0$, $\frac{dx(0)}{dt} = y_0$, $t \in [0,5]$.

3. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

Теорема 1. Нехай при $t_0 \le t \le t_0 + a$, $\|x - x_0\| \le b$ функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі. Тоді на відрізку $[t_0, t_0 + d]$ існує розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ x(t_0) = x_0. \qquad (4)$$

Тут $d > 0,\ d \le a,\ \varphi(t_0 + d) \le b,\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$.

Доведення. Для цілого $k \ge 1$ візьмемо $h = \frac{d}{k}$. Послідовно на відрізках $t_0 + ih \le t_0 \le t_0 + (i+1)h$, $i = 0,1,...,k-1$, побудуємо наближений розв'язок, покладаючи $x_k(t) = x_0$ при $t \le t_0$, $x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_k(s-h),s)ds$, $t_0 \le t \le t_0 + d$. Так як функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі, а функція x(t) вимірна, $t \in [a,b]$, то за лемою 1

складна функція $f(x(t),t)$ є інтегрована. Тому інтеграл має зміст і $\|x_k(t)-x_0\|\le b$, так як $\|x_k(t)-x_0\|\le\int_{t_0}^{t}m(t)dt$. Для довільних $\alpha,\beta\in[t_0,t_0+d]$ виконується

$$\|x_k(\beta)-x_k(\alpha)\|\le\left|\int_{\alpha}^{\beta}m(t)dt\right|=|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|.$$

Функція $\varphi(t)$ є неперервною на $[t_0,t_0+d]$ і тому є рівномірно неперервною. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$, таке, що при $|\beta-\alpha|<\delta$ має місце $|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|<\varepsilon$. Тому функції $x_k(t)$, к=1,2,... є рівномірно неперервними і рівномірно обмеженими. За теоремою Арцела (див. Додаток лекції 6) виберемо з цієї послідовності рівномірно збіжну підпослідовність. Її границю позначимо $x(t)$. Так як

$$\|x_k(s-h)-x(s)\|\le\|x_k(s-h)-x_k(s)\|+\|x_k(s)-x(s)\|$$

і $\|x_k(s-h)-x_k(s)\|<\varepsilon$ при $h=\dfrac{d}{k}<\varepsilon$, то $x_k(s-h)\to x(s)$. Так як $\|f(x,t)\|\le m(t)$ і $f(x,t)$ неперервна за x, то

$$x(t)=\lim_{k\to+\infty}x_k(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\lim_{k\to+\infty}f(x_k(s-h),s)ds=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(s),s)ds.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо умови Каратеодорі виконані при $t_0-a\le t\le t_0$, $\|x-x_0\|\le b,\ d\le a,\ |\varphi(t_0-d)|<b,$ то розв'язок існує при $t\in[t_0-d,t_0]$.

Теорема 2. Нехай $(x_0,t_0)\in D$ і існує така інтегрована функція $\ell(t)$, що для довільних $(x,t)\in D$, $(y,t)\in D$ має місце нерівність

$$\|f(x,t)-f(y,t)\|\le\ell(t)\|x-y\|.$$

Тоді в області *D* може існувати не більше одного розв'язку задачі (4).

Зауваження. Тут єдність розв'язку означає наступне: якщо існують два розв'язки, графіки яких проходять в *D*, то ці розв'язки співпадають на спільній частині їх інтервалів існування.

Доведення. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – розв'язки задачі (3), $z(t)=x(t)-y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. Знайдемо похідну від функції $\|z\|^2=(z,z)$. Маємо

$$\frac{d\|z\|^2}{dt}=2\left(z,\frac{dz}{dt}\right)=2\big((f(x,t)-f(y,t)),(x-y)\big).$$

Так як $(a,b)\le\|a\|\|b\|$, то

$$\big(f(x,t)-f(y,t),x-y\big)\le\ell(t)\|x-y\|\|x-y\|=\ell(t)\|x-y\|^2.$$

Отже, $\dfrac{d\|z\|^2}{dt}\le\ell(t)\|z\|^2$ і тому $\dfrac{d}{dt}\left(\|z\|^2e^{-L(t)}\right)\le 0$, де $L(t)=\int_{t_0}^{t}\ell(s)ds$. Абсолютно неперервна функція $\eta(t)=\|z(t)\|^2e^{-L(t)}$ не зростає і так як $z(t_0)=0$, то z(t)=0, $t\ge t_0$. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай (1) є системою Каратеодорі в замкненій обмеженій області *D*. Тоді кожний розв'язок цієї системи, що проходить всередині *D*, можна продовжити в обидві сторони до виходу на границю *Г* області *D*.

Теорема 3 доводиться аналогічно доведенню теореми про продовження розв'язку диференціального включення. Також справджуються теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов, параметрів та правої частини системи Каратеодорі (1) [1].

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.