КЛАС АБСОЛЮТНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

1. Означення та властивості. Нехай на $[a,b]$ задана скінчена функція $f:[a,b]\to R^1$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *абсолютно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, таке, що для довільної системи інтервалів $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)$, які не перетинаються і $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ має місце нерівність

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{f(b_k)-f(a_k)\}\right|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Умову (1) можна замінити на більш жорстку

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

З означення випливає, що абсолютно неперервна на $[a,b]$ функція рівномірно неперервна на $[a,b]$. Для цього досить взяти $n=1$. Крім того, будь-яка функція $f(x)$, яка на $[a,b]$ задовольняє умові Ліпшиця $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ є абсолютно неперервною. Так, функція $f(x)=|x|$ є абсолютною неперервною. Також будь-яка кусково гладка функція є абсолютно неперервною.

Задача 11. Довести, що ліпшицева на $[a,b]$ функція f є абсолютно неперервною.

Розглянемо властивості абсолютно неперервних функцій.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ абсолютно неперервні на $[a,b]$, то $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$. Якщо $g(x)\ne 0$, $x\in[a,b]$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також є абсолютно неперервною функцією.

Доведення. Абсолютна неперервність суми і різниці випливає з нерівностей

$$|\{f(b_k)+g(b_k)\}-\{f(a_k)+g(a_k)\}|\le|f(b_k)-f(a_k)|+|g(b_k)-g(a_k)|,$$

$$|\{f(b_k)-g(b_k)\}-\{f(a_k)-g(a_k)\}|\le|f(b_k)-f(a_k)|+|g(b_k)-g(a_k)|.$$

Нехай $A=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $B=\sup\limits_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Тоді з

$$|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)|\le$$

$$|g(b_k)||f(b_k)-f(a_k)|+|f(a_k)||g(b_k)-g(a_k)|\le B|f(b_k)-f(a_k)|+A|g(b_k)-g(a_k)|$$

випливає абсолютна неперервність добутку. Якщо $g(x)\ne 0$, то $|g(x)|\ge\delta>0$. Тому $\left|\dfrac{1}{g(b_k)}-\dfrac{1}{g(a_k)}\right|\le\dfrac{|g(b_k)-g(a_k)|}{\sigma^2}$, звідки випливає абсолютна неперервність функції $\dfrac{1}{g(x)}$ і тому $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ абсолютно неперервна. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $f(x)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$, $f(x)\in[A,B]$, $x\in[a,b]$. Якщо $F(y)$ є ліпшицевою на $[A,B]$ з константою Ліпшиця L, то $F(f(x))$ абсолютно неперервна на $[a,b]$.

Доведення. Нехай $(a_j,b_j)\bigcap\limits_{j\ne k}(a_k,b_k)=\varnothing$, $(a_k,b_k)\subset[a,b], k=\overline{1,n}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n}|F(f(b_k))-F(f(a_k))|\le L\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|,$$

а права частина цієї нерівності може бути зроблена як завгодно малою за рахунок зменшення $\sum_{k=1}^{n}|b_k - a_k|$. Теорему доведено.

Задача 12. Нехай $f(x)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$ функція, яка строго зростає. Якщо $F(y)$ абсолютно неперервна на $[f(a), f(b)]$, то функція $F(f(x))$ абсолютно неперервна на $[a,b]$ [1].

Означення. Нехай на $[a,b]$ задана скінчена функція $f(x)$, $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, $V = \sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$. Точна верхня границя множини усіх можливих сум V називається *повною зміною (повною варіацією)* функції $f(x)$ на $[a,b]$ і позначається $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$, то говорять, що $f(x)$ має *скінченну зміну (обмежену варіацію)*.

Теорема 3. Абсолютно неперервна функція $f(x)$ має скінченну зміну.

Доведення. Виберемо $\varepsilon = 1$ і знайдемо $\delta > 0$ таке, що для довільної системи $\{(a_k, b_k)\}$ інтервалів, що не перетинаються і $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ виконується $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < 1$. Нехай $c_0 = a < c_1 < c_2 < ... < c_N = b, c_{k+1} - c_k < \delta, k = \overline{0, N-1}$. Звідси $\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) \le 1$ і тоді $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le N$. Теорему доведено.

Задача 13. Перевірити, що неперервна на $[0,1]$ функція

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, x \in (0,1]; \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

має нескінчену зміну, і тому не є абсолютно неперервною [1].

Таким чином, клас абсолютно неперервних функцій є вужчим за клас неперервних функцій.

Важливою властивістю для функцій зі скінченною зміною є існування майже скрізь інтегрованої похідної. Таким чином, за теоремою 3 *абсолютно неперервна на* $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *майже в кожній точці з* $[a,b]$ *має скінченну похідну, яка є сумовною на* $[a,b]$.

Теорема 4. Якщо похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції $f(x)$ майже скрізь рівна нулю, то $f(x)$ постійна [1,2].

2. Відновлення функції за її похідною. Проблема відновлення функції за її похідною полягає в тому, щоб виходячи з співвідношення

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

знайти значення функції за відомою похідною. Вона виникає, наприклад, при обґрунтуванні поняття розв'язку в теорії диференціальних рівнянь та в задачах оптимального керування. Теорема Ньютона-Лейбніца була доведена для неперервно диференційованих функцій. Зрозуміло, щоб вказане співвідношення виконувалось необхідно, щоб $f(x)$ мала інтегровану похідну. Як було вказано в попередньому пункті, функції з обмеженою варіацією та абсолютно неперервні функції мають сумовну похідну. Ще одним класом таких функцій є монотонно неспадні функції. Але існує функція $f(x)$, яка є *неперервною* на відрізку, *монотонно неспадною* і з *обмеженою варіацією*, для якої виконується

$$\int_a^x f'(t)dt < f(x) - f(a).$$

Цією функцією є *сингулярна функція Кантора*[2].[1] Виявляється, що сингулярна функція Кантора не є абсолютно неперервною. Доведемо наступне твердження.

Теорема 5. Функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, де f сумовна на $[a,b]$, є абсолютно неперервною.

Доведення. Нехай $\{(a_k,b_k)\}$ система інтервалів, що лежать в $[a,b]$ і не перетинаються. Тоді $\sum\limits_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\int\limits_{a_k}^{b_k} f(t)dt\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{a_k}^{b_k}|f(t)|dt=\int\limits_{\bigcup\limits_k(a_k,b_k)}|f(t)|dt$.

З абсолютної неперервності інтегралу Лебега (див. додаток А) останній вираз прямує до нуля, якщо $\sum\limits_k(b_k-a_k)\to 0$. Теорему доведено.

Теорема 6 (Лебега). Похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції $f(x)$, що задана на $[a,b]$, є сумовною на $[a,b]$ і $\int\limits_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)$.

Доведення. Покладемо $\Phi(x)=f(a)+\int\limits_a^x f'(t)dt$. Ця функція згідно теореми 5 є абсолютно неперервною. За теоремою про похідну інтегралу Лебега (див. додаток В) від верхньої межі інтегрування $\Phi'(x)=f'(x)$. Значить $\Phi'(x)-f'(x)=0$ і за теоремою 4 $\Phi(x)-f(x)=c$, де $c=const$. Так як $\Phi(a)=f(a)$, то $c=0$. Теорему доведено.

Теорема 7 (про середнє значення). Якщо M – обмежена множина, $V(t)\in M$ інтегрована функція, $t\in[a,b]$, то

$$V_c=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b V(t)dt\in\overline{co}M.$$

Доведення. За означенням інтегралу $V_c=\lim\limits_{d\to 0}S$, де Δ_i – інтервали розбиття відрізка $[a,b]$, $d=\max\limits_i\Delta_i$ – діаметр розбиття, $S=\sum\limits_i\frac{\Delta_i}{b-a}V(t_i)$, $\frac{\Delta_i}{b-a}=\alpha_i\ge 0$, $\sum\limits_i\alpha_i=1$. Звідси за властивостями опуклої оболонки $S=\sum\limits_i\alpha_i V(t_i)\in coM$. Тому $\lim S\in\overline{co}M$, $d\to 0$.

Поняття абсолютно неперервної функції природно розповсюджується на вектор функції. Для цього в нерівності (1) замість знаку модуля вибирається евклідова норма.

Теорема 8. Нехай $t\in(a,b)$ і вектор-функції $x_k(t)$ абсолютно неперервні, $x_k(t)\underset{k\to+\infty}{\to}x(t)$ та для кожного $k=1,2...$ майже скрізь $\frac{dx_k(t)}{dt}\in M$, де M -компакт в R^n. Тоді $x(t)$–абсолютно неперервна вектор-функція і $\frac{dx(t)}{dt}\in coM$ майже скрізь на (a,b).

Доведення. Оскільки M - обмежена множина, то знайдеться константа $l>0$, така, що $\left\|\frac{dx_k(t)}{dt}\right\|\le l$. Тоді для $t_1,t_2\in(a,b)$ виконується нерівність

$$\|x_k(t_1)-x_k(t_2)\|=\left\|\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dx_k(t)}{dt}dt\right\|\le l|t_1-t_2|.$$

[1] Ця функція ще називається „канторовими сходами”

Зробивши в останній нерівності граничний перехід $k \to \infty$, отримаємо $\|x(t_1) - x(t_2)\| \le l\,|t_1 - t_2|$. Отже, вектор-функція $x(t)$ є ліпшицевою і тому абсолютно неперервною. За теоремою 7

$$q_k = \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \frac{dx_k(s)}{ds}\,ds \in coM\ ,\ k = 1,2,\ldots.$$

За означенням похідної $\frac{dx(t)}{dt} = \lim\limits_{k\to+\infty} q_k \in coM$ і функція $\frac{dx(t)}{dt}$ існує майже скрізь в силу абсолютної неперервності $x(t)$. Лему доведено.

Додаток А.

Має місце теорема про абсолютну неперервність інтегралу Лебега: якщо $f(x)$ сумовна на множині A функція, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $\left|\int_\ell f(x)dx\right| < \varepsilon$ для будь-якого вимірного $\ell \subset A, \mu(\ell) < \delta,\ \mu$ –міра Лебега.

Додаток В.

Теорема. Для будь-якої сумовної функції $f(x)$ майже скрізь має місце рівність $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Література.

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496с.