РОЗДІЛ 1
ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ АНАЛІЗУ

НЕПЕРЕРВНІ МНОГОЗНАЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1. Окіл, модуль і сума множин. Для точок a та b з простору R^n евклідова метрика задається наступним чином

$$\rho(a,b) = \|a-b\|,$$

де $\|a\| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $a = (a_1\, a_2 \ldots a_n)^T$. За допомогою евклідової метрики для будь-якої точки $a \in R^n$ і множини $A \subset R^n$ можна ввести відстань між точкою і множиною (рис.1)

$$\rho(a,A) = \inf_{x\in A} \rho(a,x).$$

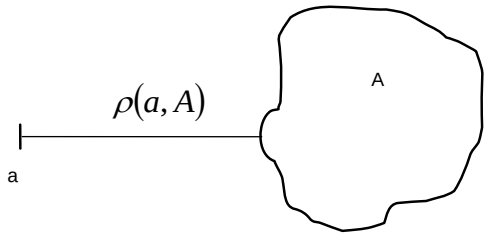

Рис.1

Позначимо $K_\varepsilon(a) = \{x \in R^n : \rho(a,x) \le \varepsilon\}$, $\operatorname{int} A$ – множина внутрішніх точок множини А, ∂A – границя множини А.

Означення. Модулем множини $A \subset R^n$ називається число

$$|A| = \sup_{a\in A} \|a\|.$$

Його геометричний зміст є наступним (див. рис.2): $|A|$ дорівнює радіусу найменшої кулі з центром у точці 0, яка містить множину A. Це випливає з співвідношення

$$|A| = \sup_{a\in A} \|a\| = \inf\{\varepsilon \ge 0 : \|a\| \le \varepsilon,\ a \in A\} = \inf\{\varepsilon \ge 0 : A \subseteq K_\varepsilon(0)\}.$$

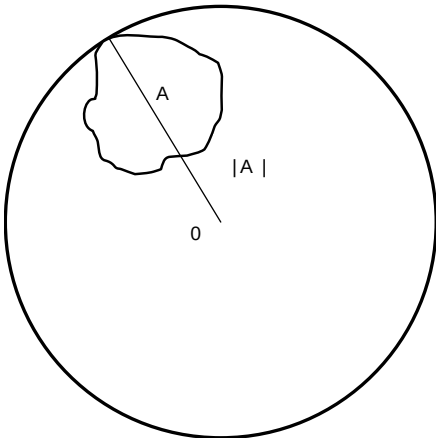

Рис.2

Означення. Алгебраїчною сумою (або просто сумою) множин $A \subset R^n$ і $B \subset R^n$ називається множина

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Добутком множини $A \subset R^n$ на скаляр $\lambda \in R^1$ називається множина

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Лема 1. Якщо множини $A \subset R^n$ і $B \subset R^n$ є непорожніми компактами, то їх алгебраїчна сума є непорожнім компактом.

Доведення. Нехай $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Тоді існують $a \in A$, $b \in B$, $a + b \in A + B$ і тому $A + B \neq \varnothing$. Покажемо, що $A + B$ є компактом. Виберемо $\{x_k\} \subset A + B$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x$. Доведемо, що $x \in A + B$.[1] За означенням суми $x_k = a_k + b_k$, $a_k \in A$, $b_k \in B$, $k = 1,2,....$ Виберемо такі підпослідовності $\{a_m\}_{m \in M} \subseteq \{a_k\}$, $\{b_p\}_{p \in P} \subseteq \{b_k\}$, що $\lim\limits_{m \in M} a_m = a$, $\lim\limits_{p \in P} b_p = b$, $a \in A$, $b \in B$. Тут M і P – нескінченні підмножини множини натуральних чисел. Тоді $x = \lim\limits_{k \in M \cap P} x_k = \lim\limits_{k \in M \cap P} (a_k + b_k) = a + b \in A + B$. Це доводить замкненість $A + B$. Покажемо обмеженість $A + B$. Виконуються включення

$$A \subseteq K_\varepsilon(0),\ B \subseteq K_\delta(0),$$

де $\varepsilon = |A|$, $\delta = |B|$. Виберемо довільне $x \in A + B$, $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Таким чином, $\|a\| \le \varepsilon$, $\|b\| \le \delta$ і $\|x\| = \|a + b\| \le \|a\| + \|b\| \le \varepsilon + \delta$. Звідси $A + B \subseteq K_{\varepsilon+\delta}(0)$. Лему доведено.

Приклад. Покажемо, що

$$K_\varepsilon(a) + K_\delta(b) = K_{\varepsilon+\delta}(a + b).$$

$(\Rightarrow)$ Виберемо довільне $x \in K_\varepsilon(a) + K_\delta(b)$. Це означає, що $x = y + z$, де $\|y - a\| \le \varepsilon$, $\|z - b\| \le \delta$. Тоді $\|x - (a + b)\| \le \|y - a\| + \|z - b\| \le \varepsilon + \delta$. Отже, $x \in K_{\varepsilon+\delta}(a + b)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $x \in K_{\varepsilon+\delta}(a + b)$. Побудуємо точки $y \in K_\varepsilon(a)$, $z \in K_\delta(b)$ такі, що $y + z = x$.

Зафіксуємо

$$\lambda = \|x - (a + b)\| \le \varepsilon + \delta.$$

Якщо $\lambda = 0$, то $x = a + b \in K_\varepsilon(a) + K_\delta(b)$. Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді існують такі $\xi \in (0, \varepsilon]$, $\eta \in (0, \delta]$, що $\xi + \eta = \lambda$. Візьмемо

$$y = a + \frac{\xi}{\lambda}[x - (a + b)],\ z = b + \frac{\eta}{\lambda}[x - (a + b)].$$

Отримаємо

$$y + z = a + b + \frac{\xi + \eta}{\lambda}[x - (a + b)] = x,$$

причому $\|y - a\| = \frac{\xi}{\lambda}\|x - (a + b)\| = \xi \le \varepsilon$, $\|z - b\| = \frac{\eta}{\lambda}\|x - (a + b)\| = \eta \le \delta$. Отже, $y \in K_\varepsilon(a)$, $z \in K_\delta(b)$ і $x = y + z \in K_\varepsilon(a) + K_\delta(b)$.

Задача 1. Довести, що якщо A є компакт в R^n, то λA є компакт, $\lambda \in R^1$.

Задача 2. Знайти множину $\lambda K_\varepsilon(a)$.

Задача 3. Чи завжди $A + A = 2A$, $A \subset R^n$?

Означення. $\varepsilon-$*околом* (або розширенням радіусу ε) множини $A \subset R^n$ називається множина

$$A^\varepsilon = \{x \in R^n : \rho(x, A) \le \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що $A^\varepsilon = \bigcup\limits_{x \in A} K_\varepsilon(x)$ і $A^\varepsilon = A$ при $\varepsilon = 0$.

---

[1] Умова замкненості множини A+B

Лема 2. Якщо $A \subset R^n$ є компакт, то $A^\varepsilon = A + K_\varepsilon(0)$.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $a \in A^\varepsilon$. Тоді $\min\limits_{x \in A} \rho(a, x) \le \varepsilon$. В силу теореми Вейєрштрасса, знайдеться $y \in A$, таке, що $\|y - a\| \le \varepsilon$. Отже, $a - y \in K_\varepsilon(0)$ і тому $a \in A + K_\varepsilon(0)$.

$(\Leftarrow)$ Візьмемо довільне $x \in A + K_\varepsilon(0)$. Тоді $x = a + z$, де $a \in A$, $\|z\| \le \varepsilon$. Звідси $\|x - a\| \le \varepsilon$, тобто, $\rho(x, A) \le \varepsilon$. Отже, $x \in A^\varepsilon$. Лему доведено.

Задача 4. Нехай $A = \{(x, y) : (x-2)^2 + 2(y+1)^2 \le 1\}$. Побудувати розширення множини A радіусу $\varepsilon = 3$.

2. Метрика Хаусдорфа та її геометричний зміст. Над системою множин можна ввести метрику. Так, від множини $B \subset R^n$ до множини $A \subset R^n$ вводиться відстань (β *-метрика*)

$$\beta(B, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| = \sup_{b \in B} \rho(b, A),$$

За допомогою β-метрики визначається α-метрика

$$\alpha(B, A) = max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

яку ще називають *метрикою Хаусдорфа*.

Задача 5. Показати, що на системі компактів виконуються для метрики Хаусдорфа аксіоми метрики.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай $A \subset R^n$ і $B \subset R^n$ є непорожніми компактами, $\varepsilon > 0$. Нерівність $\beta(A, B) \le \varepsilon$ виконується тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B^\varepsilon$.

Зауваження. Включення $A \subseteq B^\varepsilon$ за лемою 2 еквівалентне умові $A \subseteq B + K_\varepsilon(0)$.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $\beta(A, B) \le \varepsilon$. Тоді

$$\max_{a \in A} \rho(a, B) \le \varepsilon. \qquad (1)$$

З (1) випливає, що для довільного $a \in A$ виконується $\rho(a, B) \le \varepsilon$. Звідси $a \in B^\varepsilon$ і тому $A \subseteq B^\varepsilon$.

$(\Leftarrow)$ Якщо $A \subseteq B^\varepsilon$, то для кожної точки $a \in A$ існує $b \in B$, таке, що $\rho(a, b) \le \varepsilon$. Це означає, що виконується нерівність (1). Теорему доведено.

Наслідок. Якщо множини A і B є непорожніми компактами в R^n, $\varepsilon > 0$, то для того, щоб $\alpha(A, B) \le \varepsilon$ необхідно і достатньо, щоб

$$A \subseteq B^\varepsilon \text{ та } B \subseteq A^\varepsilon.$$

Теорема 2. Нехай $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ – компакти. Має місце рівність

$$\beta(A, B) = \min\{\varepsilon \ge 0 : A \subseteq B^\varepsilon\}. \qquad (2)$$

Доведення. Нехай $\beta(A, B) = \delta$. Якщо $\delta = 0$, то для всіх $a \in A$ існує $b \in B$, для яких $\rho(a, b) = 0$. Це означає, що $A \subseteq B$, тобто, (2) справджується. Нехай $\delta > 0$. За лемою 2 $A \subseteq B^\delta$. Згідно означення β-метрики

$$\max_{a \in A} \rho(a, B) = \delta.$$

За теоремою Вейєрштрасса існує $u \in A$, для якого $\rho(u, B) = \delta$. Тобто, $u \in \partial B^\delta$. Оскільки

$$B^\sigma \subset \operatorname{int} B^\delta$$

для $\sigma \in (0, \delta)$, то $u \notin B^\sigma$, $\sigma \in (0, \delta)$. Тобто, $\delta = \min\{\varepsilon > 0 : A \subseteq B^\varepsilon\}$. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 3. Якщо $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ – компакти, то

$$\alpha(A, B) = \min\{\varepsilon \ge 0 : A \subseteq B^\varepsilon,\ B \subseteq A^\varepsilon\}.$$

Приклад. Нехай $A = K_2(0) \subset R^2$, $B = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{16} + y^2 \le 1\right\}$. Знайдемо відстань Хаусдорфа $\alpha(A, B)$.

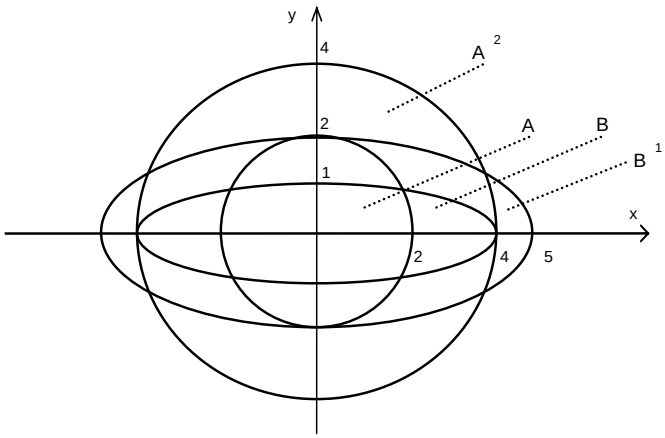

Рис. 3.

Легко бачити (рис. 3), що $B \subseteq A^{\varepsilon}$, $A \subseteq B^{\delta}$ при $\varepsilon \ge 2$, $\delta \ge 1$. Таким чином, з теорем 2 та 3 випливає $\beta(A, B) = 1$, $\beta(B, A) = 2$ і $\alpha(A, B) = 2$.

Задача 6. Знайти $\beta(A, B)$, $\beta(B, A)$ та $\alpha(A, B)$ для наступних множин A, B з R^2:

а) $A = K_2(0)$, $B = K_4(0)$;

б) $A = \{(x, x) : x \in [-1,1]\}$, $B = \{(x, 0) : x \in [-1,1]\}$;

в) $A = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{4} + 4y^2 \le 1\right\}$, $B = \left\{(x, y) : 4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$.

3. Многозначні відображення.

Означення. Нехай кожній точці $p \in D \subset R^m$ поставлена у відповідність непорожня замкнена множина $F(p) \subset R^n$. Тоді відображення F називається *многозначним відображенням (многозначною функцією)*. У випадку $m = 1$ (тобто, $D \subset R^1$) многозначна функція називається *точково-многозначною*. Відображення F називається *опуклозначним*, якщо для довільної точки $p \in D$ множина $F(p)$ є опуклою. Якщо множина $F(p)$ є компактом, $p \in D$, то многозначне відображення F називається *компактозначним*.

Наведемо приклади многозначних відображень.

1) Відображення $F(p) = K_p(0) \subset R^n$, $p \in [1, 2]$ є многозначним, опуклозначним та компактозначним.

2) Якщо $\varphi(p)$ є опукла функція, $p \in R^n$, $\partial\varphi(p)$ - її субдиференціал, то $F(p) = \partial\varphi(p)$ є многозначним, опуклозначним та компактозначним відображенням. Якщо функція $\varphi(p)$ є диференційованою то відображення стає однозначним.

Позначимо $F(M) = \bigcup_{p \in M} F(p)$ - *образ* множини *M*. Наведемо деякі елементарні властивості многозначних відображень.

Якщо $A \subset D$, $B \subset D$, то

1) $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$; 2) $F(A \cap B) \subseteq F(A) \cap F(B)$; 3) $F(D - A) \supseteq F(D) \cap F(A)$;

4) якщо $A \subset B$, то $F(A) \subseteq F(B)$.

Будемо говорити, що многозначне відображення F є *власним*, якщо знайдеться $p \in D$, таке, що $F(p) \ne \varnothing$. Множину

$$Dom(F) = \{p \in D : F(p) \neq \varnothing\}$$

називають *ефективною множиною* відображення F. Якщо $Dom(F) = D$, то відображення F називається *строгим*.

Приклад. Нехай матриця A розмірності $n \times n$ є виродженою. Тоді

$$F(p) = A^{-1}p = \{x \in R^n : Ax = p\},\ p \in R^n$$

є многозначним відображенням. З теореми Кронекера-Капеллі випливає, що таке відображення є власним, але не строгим.

Нижче будемо розглядати лише строгі многозначні відображення.

4. Неперервність многозначних відображень. Як і в теорії функцій, фундаментальну роль в теорії многозначних відображень відіграє поняття неперервності. Є два основних види неперервності многозначних відображень: напівнеперервність зверху та неперервність за Хаусдорфом. Вони вводяться за допомогою β- та α-метрики.

Означення. Многозначна функція F називається *β–неперервною (напівнеперервною зверху відносно включення)* в точці p, якщо

$$\beta(F(q), F(p)) \to 0 \text{ при } q \to p.$$

Якщо

$$\alpha(F(q), F(p)) \to 0,\ q \to p,$$

то F називається *α –неперервною (неперервною за Хаусдорфом)* в точці p. Функція F називається *α–неперервною (β–неперервною) на множині D*, якщо вона є α–неперервною (β–неперервною) в кожній точці множини D. Так як $\beta(A,B) \le \alpha(A,B)$, то з α–неперервності випливає β–неперервність для многозначних відображень.

Приклад. Покажемо, що відображення

$$F : p \mapsto K_r(p),\ p \in R^m,\ r > 0$$

є β- та α–неперервним.

Зафіксуємо $p \in R^m$. Побудуємо послідовність $p_k \to p$, $k \to \infty$. Розглянемо $\beta(F(p_k), F(p)) = \max\limits_{a \in K_r(p_k)} \min\limits_{b \in K_r(p)} \|a - b\|$. Нехай $\varepsilon_k = \|p_k - p\|$, $k = 1,2,\ldots$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\varepsilon_k < r$, $k = 1,2,\ldots$, так як $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Виберемо довільне $a_k \in F(p_k)$, $k = 1,2,\ldots$. Розглянемо два випадки. Перший: якщо $a_k \in F(p)$, то $\rho(a_k, K_r(p)) = 0$. Нехай $a_k \notin F(p)$, $k = 1,2,\ldots$. Проведемо пряму, що задається множиною точок (рис. 4)

$$z = \lambda p + (1 - \lambda)a_k,\ \lambda \in [0,1]. \qquad (3)$$

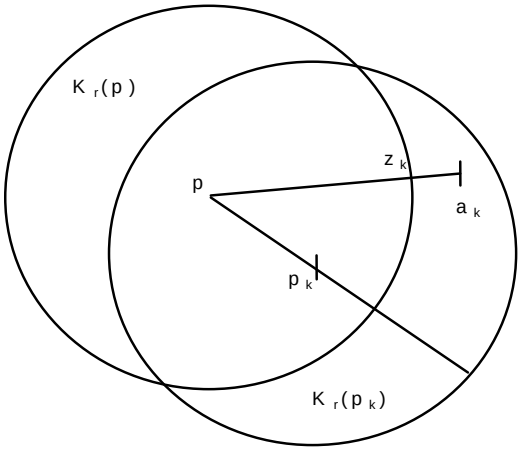

Рис. 4.

Знайдемо $\lambda = \lambda_k$ і відповідне йому $z = z_k$, такі, що $\|z_k - p\| = r$. Отримаємо

$$r = \|z_k - p\| = \|\lambda_k p + (1-\lambda_k)a_k - p\| = (1-\lambda_k)\|p - a_k\|.$$

Таким чином,

$$\lambda_k = 1 - \frac{r}{\|p - a_k\|}. \qquad (4)$$

Так як $r < \|p - a_k\| \le \|p - p_k\| + \|p_k - a_k\| \le \varepsilon_k + r$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\|p - a_k\| = r$. З (4) випливає, що $\lambda_k \to 0$, $k \to \infty$. Враховуючи (3), маємо

$$\|z_k - a_k\| = \lambda_k\|p - a_k\| \le \lambda_k(\varepsilon_k + r).$$

Отже, $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_k - a_k\| = 0$. Так як $\min\limits_{b\in K_r(p)}\|a_k - b\| \le \|z_k - a_k\|$, то $\rho(a_k, K_r(p)) \to 0$, $k = 1,2,\ldots$. Це доводить β–неперервність даного відображення. Далі, за теоремою 2 та лемою 2 (див. рис. 4)

$$\beta(F(p), F(p_k)) = \min\{\varepsilon \ge 0 : K_r(p) \subseteq (K_r(p_k))^{\varepsilon}\} =$$
$$\min\{\varepsilon \ge 0 : K_r(p) \subseteq K_r(p_k) + K_\varepsilon(0)\} = \|p - p_k\| = \varepsilon_k.$$

Таким чином, $\beta(F(p), F(p_k)) \to 0$, $k \to \infty$. Звідси випливає α–неперервність відображення F.

Задача 7. Показати β- та α–неперервність наступних відображень.

а) $F : p \mapsto K_p(0),\ p \ge 0$;

б) $F : p \mapsto \{x \in R^n : x^T Bx \le p\},\ p \ge 0$.

Тут B - додатновизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$.

Задача 8. Довести що на відрізку $[0,2]$ многозначне відображення

$$F(t) = \begin{cases} K_1(0), t \in [0,1); \\ K_1(0) \cup K_2(0), t = 1; \\ K_2(0), t \in (1,2] \end{cases}$$

є напівнеперервним зверху, але не є неперервним за Хаусдорфом.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.
2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. –М.: Мир, 1988. -512 с.
3. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. –197 с.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. –М.: „Высшая школа”, 2001. -239с.