ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

1. Продовження розв'язку. Теорема про існування розв'язку[1] гарантує існування розв'язку задачі Коші лише в певному околі початкової умови. Але в ряді задач виникає необхідність розглядати проблему існування розв'язку на заданому інтервалі зміни незалежної змінної. В зв'язку з цим виникає питання продовження розв'язку. Розглянемо диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \qquad (1)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $(x,t) \in D$, $D \subset R^{n+1}$ – область. Доведемо наступне твердження.

Лема 1. Якщо многозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам на компакті D, то всі розв'язки диференціального включення рівностепенно неперервні.

Доведення. За теоремою про обмеженість β– неперервного відображення на компакті[2] $|F(x,t)| \le m$. Звідси $\left\|\frac{dx}{dt}\right\| \le m$ для всіх розв'язків, що лежать в D. Тому

$$\|x(t') - x(t'')\| \le m\,|t' - t''|$$

звідки випливає рівностепенна неперервність. Лему доведено.

Теорема 1 (про продовження розв'язку). Нехай многозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в замкненій обмеженій області D. Тоді кожний розв'язок диференціального включення (1), який проходить всередині області D, можна продовжити в обидві сторони до виходу на границю $\Gamma = \partial D$ компакту D.

Доведення. Розглянемо розв'язок $x(t)$, що проходить через точку $p_0 = (x_0, t_0) \in int\, D$. Визначимо $\varepsilon_1 > 0$, для якого $\varepsilon_1 \le \frac{1}{2}\rho(p_0, \Gamma)$. За теоремою 1 лекції 5 знайдеться $\delta_1 > 0$, таке, що циліндр $\| x - x_0 \| \le \varepsilon_1$, $|t - t_0| \le \delta_1$ міститься в D і на відрізку $|t - t_0| \le \delta_1$ існує розв'язок $x(t)$ диференціального включення[3]. Якщо точка $p = (x(t_0 + \delta_1), t_0 + \delta_1)$ задовольняє умові $\rho(p, \Gamma) \ge 2\varepsilon_1$, то розв'язок можна ще продовжити на δ_1 і так, поки не дійдемо до точки $p_1 = (x_1, t_1)$, такої, що $\rho(p_1, \Gamma) < 2\varepsilon_1$ Беремо послідовність $\varepsilon_i \to 0, i = 1,2...$ і послідовно продовжуємо розв'язок до точок $p_i = (x_i, t_i)$, $t_1 < t_2 < ..$, $\rho(p_i, \Gamma) \underset{i \to +\infty}{\to} 0$.. Оскільки $\{t_i\}$– обмежена послідовність, то $t_i \underset{i \to +\infty}{\to} t^*$. За лемою 1 в силу рівностепенної неперервності розв'язку диференціального включення $\lim\limits_{t \to t^* - 0} x(t) = x^*$. Очевидно, $(x^*, t^*) \in \Gamma$. Доозначимо розв'язок $x(t)$ на границі Γ, покладаючи $x(t^*) = x^*$. Отже, отримаємо розв'язок, для якого $(x^*, t^*) \in \Gamma$. Теорему доведено.

Від вимоги опуклості правої частини диференціального включення можна відмовитись, якщо замість умови неперервності зверху многозначного відображення $F(x,t)$ вимагати неперервність за Хаусдорфом. В цьому випадку теорема про існування розв'язку задачі Коші та теорема про продовження розв'язку будуть зберігатися. Розглянемо без доведення наступні твердження.

Теорема 2. Нехай функція $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області $G \subseteq R^n$, $A \subset G$ – компакт, всі розв'язки диференціального включення (1) існують при $(x(t_0), t_0) \in A$, $t \in [a,b]$ і їх графіки проходять в G. Тоді множина точок, що лежить на графіках цих

---

[1] теорема 1 лекції 5
[2] теорема 2 лекції 3
[3] теорема 1 лекції 5

розв'язків при $t \in [a,b]$ є обмеженою і замкненою. Крім того, множина цих розв'язків є компактом в просторі $C[a,b]$.

Теорема 3. (про неперервну залежність розв'язку від початкових умов, незалежної змінної та правої частини) Нехай $F(x,t)$ задовольняє основним умовам в області $G \subseteq R^n$, $t_0 \in [a,b]$, $(x_0,t_0) \in G$, всі розв'язки задачі

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t),\ x(t_0) = x_0$$

при $t \in [a,b]$ існують і їх графіки містяться в області G. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для будь-яких $s_0 \in [a,b]$, h_0 і $H(x,t)$, що задовольняють умовам

$$|s_0 - t_0| \le \delta,\ \|x_0 - h_0\| \le \delta,\ d(F,H) \le \delta$$

і основним умовам, кожен розв'язок задачі

$$\frac{dx}{dt} \in H(x,t),\ x(t_0) = h_0$$

при $t \in [a,b]$ існує і відрізняється від деякого розв'язку задачі $\frac{dx}{dt} \in F(x,t),\ x(t_0) = x_0$ не більш ніж на ε в метриці $C[a,b]$.

Тут умова $d(F,H) \le \delta$ означає, що $H(x,t) \subset \left(coF\left(x^\delta, t^\delta\right)\right)^\delta$

2. Стійкість диференціальних включень. Основні означення. Для диференціальних включень вводиться два види стійкості: *стійкість і слабка стійкість*. Позначимо за $x(t,x_0,t_0)$ деякий розв'язок диференціального включення (1) при умові $x(t_0) = x_0$.

Означення. Розв'язок $x = \varphi(t), t \ge t_0$ диференціального включення (1) називається *стійким*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для

$$\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$$

кожний розв'язок $x(t,x_0,t_0)$ при $t \ge t_0$ існує і задовольняє нерівності

$$\|x(t,x_0,t_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon.$$

Означення. Розв'язок $x = \varphi(t), t \ge t_0$ диференціального включення (1) називається *слабко стійким*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що при

$$\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$$

знайдеться розв'язок $x(t,x_0,t_0)$, для якого

$$\|x(t,x_0,t_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon,\ t \ge t_0.$$

Означення. Розв'язок $x = \varphi(t), t \ge t_0$ диференціального включення (1) називається *асимптотично стійким (слабко асимптотично стійким)*, якщо виконується означення стійкості (слабкої стійкості) і існує $\sigma \in (0,\delta)$, таке, що при $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \sigma$ виконується $\|x(t,x_0,t_0) - \varphi(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Приклад. Розглянемо диференціальне включення $\frac{dx}{dt} \in F(x)$, де $x \in R^1$, $F(x) = [kx, mx]$, $k \le m$. Очевидно, що $x(t) \equiv 0$ – розв'язок. Для інших розв'язків маємо

$$k \le \frac{x'(t)}{x(t)} \le m.$$

Звідси

$$e^{kt} \le \frac{x(t)}{x(0)} \le e^{mt},\ t \ge 0.$$

Виходячи з властивостей експоненти, проаналізуємо в залежності від значень параметрів k та m стійкість розв'язку $x(t)=0$:

а) $k \le m < 0$ – розв'язок $x(t)=0$ асимптотично стійкий;

б) $k \le m = 0$ – стійкий;

в) $k < 0 < m$ – слабко асимптотично стійкий;

г) $k = 0 < m$ – слабко стійкий;

д) $0 < k \le m$ – нестійкий.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з керуванням $u(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \qquad (2)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $f(x,u,t)$ - n-вимірна вектор-функція, яка є неперервною за сукупністю змінних, $u = u(t) \in U(x,t)$, $U(x,t) \subset R^r$, $(x,t) \in D$, $D \subset R^{n+1}$. *Розв'язком* системи (2) називається пара функцій $(x(t),u(t))$, де $x(t)$ - абсолютно неперервна, $u(t)$-вимірна функції, що майже скрізь на розглядуваному інтервалі задовольняють системі (2).

Систему (2) заміняють диференціальним включенням (1) де $F(x,t) = f(x,U(x,t),t)$. Тоді *стійкість розв'язку* $x = \varphi(t)$ диференціального включення (1) для даного випадку означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що при $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ розв'язок $x(t,x_0,t_0,u)$ системи (2) задовольняє $\|x(t,x_0,t_0,u) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ при всеможливих доступних керуваннях $u(t) \in U(x,t)$, а слабка стійкість – при деякому допустимому керуванні $u(t)$.

Задача 16. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in [-a,b]$ в залежності від параметрів $a,b \in [0,\infty)$.

3. Прямий метод Ляпунова. Для дослідження деякого розв'язку диференціального включення (1) на стійкість може бути застосоване узагальнення відомого методу функцій Ляпунова[2]. Підхід полягає у наступному. Нехай $V(x,t)$ – функція Ляпунова з класу $C^1(D)$. При майже всіх t існує похідна $\frac{dx}{dt}$ розв'язку включення (1). Тому при майже всіх t існує

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1)} = \frac{dV(x(t),t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Для $V(x,t)$ визначається *верхня похідна* в силу диференціального включення (1)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^*_{(1)} = \sup_{y \in F(x,t)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V \cdot y\right)$$

і *нижня похідна* в силу диференціального включення (1)

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)} = \inf_{y \in F(x,t)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V \cdot y\right).$$

При цьому виконується оцінка

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)} \le \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1)} \le \left(\frac{dV}{dt}\right)^*_{(1)}. \qquad (3)$$

Теорема 4. (про стійкість та асимптотичну стійкість). Нехай в області $D = \{(x,t): t \ge t_0, \|x\| \le \varepsilon_0\}$ многозначне відображення $F(x,t)$ задовольняє основним умовам, $0 \in F(0,t)$ та існують функції $V(x,t)$, $V_0(x)$ класу $C^1(D)$ та $C(D)$ відповідно, для яких $V(0,t) = 0$, $V(x,t) \ge V_0(x) > 0$ при $0 < \|x\| < \varepsilon_0$. Тоді:

1) розв'язок $x(t) \equiv 0$ диференціального включення (1) стійкий при умові

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)} \le 0 \text{ в } D; \qquad (4)$$

2) якщо виконується (4) і існують функції $V_1(x), W(x)$ з $C(D)$, $\|x\| < \varepsilon_0$, причому

$$0 < V_0(x) \le V(x,t) \le V_1(x), \qquad (5)$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)} \le -W(x) < 0,\ 0 < \|x\| < \varepsilon_0, V_1(0) = 0, \qquad (6)$$

то розв'язок $x(t) \equiv 0$ диференціального включення (1) асимптотично стійкий.

Доведення теореми проводиться аналогічно до відповідних теорем класичного другого методу Ляпунова.

Теорема 5. Якщо виконуються умови теореми 1, але з заміною $\left(\frac{dV}{dt}\right)^{*}_{(1)}$ на $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)}$, то розв'язок $x(t) \equiv 0$ диференціального включення (1) слабко стійкий у випадку 1) і слабко асимптотично стійкий у випадку 2).

Доведення. Множина $F(x,t)$ замкнена, тому інфінум у формулі

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{*(1)} = \inf_{y \in F(x,t)} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V \cdot y\right)$$

досягається на замкненій підмножині $F_1(x,t) \subset F(x,t)$. Для всіх $y \in F_1(x,t)$ виконуються оцінки

а) $\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V \cdot y \le 0$ з умови (4);

та

б) $\frac{\partial V}{\partial t} + grad_x^T V \cdot y \le -W(x) < 0$ з умов (5), (6).

Замикаємо графік G_1 многозначної функції $F_1(x,t)$ і отримуємо графік G_2 функції $F_2(x,t)$, яка за теоремою про замкнений графік є β–неперервною. Так як многозначне відображення $F(x,t)$ – β-неперервне, то його графік G є замкненим. Тому з $G_1 \subset G$ випливає

$$G_2 \subset \overline{G_1} \subset \overline{G} = G,$$

де $\overline{A}$ – замикання множини A. Звідси $F_2(x,t) \subset F(x,t)$. Так як функція

$$g(x,y,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + grad_x^T V(x,t) y$$

неперервна по x, y, t, то для всіх $y \in F_2(x,t)$ також виконуються оцінки а) та б). При фіксованих (x,t) нерівність а) чи б) виділяє деякий напівпростір $P(x,t)$ в просторі змінної y. Це означає, що з $y \in P(x,t)$ випливає, що виконується відповідно а) чи б). Отже, $F_2(x,t) \subset P(x,t)$, звідки

$$F_0(x,t) = coF_2(x,t) \subset P(x,t).$$

Так як операція опуклого замикання $co(\cdot)$ не порушує неперервності многозначного відображення, то $F_0(x,t)$ є β–неперервним. За теоремою 4 розв'язок $x(t) = 0$ диференціального включення $\frac{dx}{dt} \in F_0(x,t)$ стійкий (відповідно асимптотично стійкий). Так як

$$F_0(x,t) = coF_2(x,t) \subset coF(x,t) = F(x,t),$$

то будь-який розв'язок включення $\frac{dx}{dt} \in F_0(x,t)$ є розв'язком включення (1). Звідси випливає справедливість теореми.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.
2. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. -Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1981. –232 с.