ПОХІДНА ФРЕШЕ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ З ЗАДАНОЮ СТРУКТУРОЮ

Розглянемо систему диференційних рівнянь з заданою структурою

$$\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(x,u,t),\ t \in [t_0, t_1), \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = f^{(2)}(x,u,t),\ t \in (t_1, T], \qquad (2)$$

$$x(t_1+0) = g(x(t_1-0), t_1), \qquad (3)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $u = u(t)$ – r-вимірна функція керування, $u(t) \in U$, $U \subset R^r$, $u(t)$ належить класу кусково неперервних функцій, $f^{(i)}(x,u,t)$ – неперервні за сукупністю змінних разом з $\frac{\partial f^{(i)}(x,u,t)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f^{(i)}(x,u,t)}{\partial u_m}$ – вектор функції, $i = 1,2$, $k = 1,2,...,n$, $m = 1,2,...,r$, $t_1 \in [t_0, T)$ – фіксована точка, $x(t_0) = x_0$, x_0 – фіксований вектор, $g(x,t)$ – неперервно диференційована n-вимірна функція. На розв'язках системи (1) – (3) задано функціонал

$$I(u) = \varphi(x(T)). \qquad (4)$$

Тут $\varphi(x)$ – неперервно диференційована функція. Задача полягає у знаходженні керування $u^*(t)$, такого, що $I(u^*) = \max\limits_{u \in U} I(u)$

Розглянемо варіацію функціоналу

$$\Delta I(u) = I(u+\Delta u) - I(u) = \varphi(x(T, u+\Delta u)) - \varphi(x(T,u)) =$$
$$grad_x^T \varphi(x(T)) \cdot \Delta x(T) + o(\|\Delta x(T)\|),$$

де $\Delta x(T) = x(T, u+\Delta u) - x(T,u)$. Позначимо $\psi(T) = -grad_x^T \varphi(x(T))$. Тоді

$$\Delta I(u) = -(\psi^T(T)\Delta x(T) - \psi^T(t_0)\Delta x(t_0)),\ \Delta x(t_0) = 0.$$

Звідси

$$\Delta I(u) = -\int_{t_0}^{T} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t_1+\varepsilon}^{T} d(\psi^T(t)\Delta x(t)).$$

Зафіксуємо достатньо мале $\varepsilon > 0$. Розглянемо

$$J_1(u) = \int_{t_o}^{t_1-\varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t)) = \int_{t_o}^{t_1-\varepsilon} \Delta x^T(t) d\psi(t) + \int_{t_o}^{t_1-\varepsilon} d\psi^T(t) d\Delta x(t) =$$
$$\int_{t_o}^{t_1-\varepsilon} \Delta x^T(t) d\psi(t) + \int_{t_o}^{t_1-\varepsilon} \psi^T(t)(f^{(1)}(x+\Delta x, u+\Delta u, t) - f^{(1)}(x,u,t))dt$$

Вектор $\psi(t)$ виберемо з умови

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x},$$

де $H(x,u,\psi,t) = \psi^T(t) f^{(1)}(x,u,t)$, $t \in [t_0, t_1)$. Тому, використовуючи теорему про неперервність систем типу Каратеодорі від правої частини, отримуємо

$$J_1(u) = -\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} \Delta x^T(t) \frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x} dt + \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} [H(x+\Delta x, u+\Delta u, \psi, t) - H(x,u,\psi,t)] =$$
$$-\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} \Delta x^T(t) \frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x} dt + \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} [H(x+\Delta x, u+\Delta u, \psi, t) - H(x, u+\Delta u, \psi, t)]dt +$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}[H(x,u+\Delta u,\psi,t)-H(x,u,\psi,t)]dt=$$

$$-\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}dt+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)\frac{\partial H(x,u+\Delta u,\psi,t)}{\partial x}dt+$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta u(t)\|dt)+o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta x(t)\|dt)=$$

$$\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\Delta x^T(t)[\frac{\partial H(x,u+\Delta u,\psi,t)}{\partial x}-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}]dt+$$

$$o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta u(t)\|dt)+o(\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\|\Delta x(t)\|dt)=\int_{t_0}^{t_1-\varepsilon}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\|\Delta u\|).$$

Аналогічно

$$J_2(u)=\int_{t_1+\varepsilon}^{T}d(\psi^T(t)\Delta x(t))=\int_{t_1+\varepsilon}^{T}\frac{\partial H^T(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\|\Delta u\|),$$

де $\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}$, $H(x,u,\psi,t)=\psi^T(t)f^{(2)}(x,u,t)$, $t\in(t_1,T]$.

Розглянемо

$$J_3(u)=\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon}d(\psi^T(t)\Delta x(t))=\psi(t_1+\varepsilon)\Delta x(t_1+\varepsilon)-\psi(t_1-\varepsilon)\Delta x(t_1-\varepsilon)=$$

$$[\psi(t_1+\varepsilon)-\psi(t_1-\varepsilon)]^T\Delta x(t_1+\varepsilon)-\psi^T(t_1-\varepsilon)[\Delta x(t_1+\varepsilon)-\Delta x(t_1-\varepsilon)].$$

Звідси

$$\lim_{\varepsilon\to+0}J_3(u)=(\psi(t_1+0)-\psi(t_1-0))^T\Delta x(t_1+0)-\psi^T(t_1-0)[\Delta x(t_1+0)-\Delta x(t_1-0)].$$

Так як

$$\Delta x(t_1+0)=g(x(t_1-0,u+\Delta u),t_1)-g(x(t_1-0,u),t_1)=$$

$$\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\right)^T\Delta x(t_1-0)+o(\|\Delta x(t_1-0)\|),\qquad(5)$$

то

$$\Delta x(t_1+0)-\Delta x(t_1-0)=$$

$$\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}-I_n\right)^T\Delta x(t_1-0)+o(\|\Delta x(t_1-0)\|),\qquad(6)$$

де I_n - одинична $n\times n$ матриця. З (5) та (6)

$$(\psi(t_1+0)-\psi(t_1-0))^T\Delta x(t_1+0)-\psi^T(t_1-0)[\Delta x(t_1+0)-\Delta x(t_1-0)]=$$

$$(\psi(t_1+0)-\psi(t_1-0))^T\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\right)^T\Delta x(t_1-0)-$$

$$\psi^T(t_1-0)\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}-I_n\right)^T\Delta x(t_1-0)+o(\|\Delta x(t_1-0)\|)=$$

$$\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}(\psi(t_1+0)-\psi(t_1-0))-\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}-I_n\right)\psi(t_1-0)\right)\Delta x(t_1-0)+$$

$$o(\|\Delta x(t_1-0)\|).$$

Підбираємо $\psi(t_1+0)$ та $\psi(t_1-0)$ так, щоб $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} J_3(u)=\int\limits_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} d(\psi^T(t)\Delta x(t))=o(\|\Delta u\|)$.

Для цього

$$\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\big(\psi(t_1+0)-\psi(t_1-0)\big)-\left(\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}-I_n\right)\psi(t_1-0)=0.$$

Отже,

$$\psi(t_1-0)=\left(2\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}-I_n\right)^{-1}\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\psi(t_1+0).$$

Таким чином,

$$\Delta I(u)=-\int\limits_{t_0}^{T}\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial u}\Delta u(t)dt+o(\|\Delta u\|)$$

і за означенням похідної Фреше

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u}=-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial u},$$

де $H(x,u,\psi,t)=\psi^T(t)f^{(1)}(x,u,t)$, $t\in[t_0,t_1)$, $H(x,u,\psi,t)=\psi^T(t)f^{(2)}(x,u,t)$, $t\in(t_1,T]$, а спряжена вектор функція $\psi(t)$ задовольняє системі з імпульсним впливом

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x},\ t\in[t_0,T],$$

$$\psi(t_1-0)=\left(2\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}-I_n\right)^{-1}\frac{\partial g(x(t_1-0,u),t_1)}{\partial x}\psi(t_1+0),$$

$$\psi(T)=-grad_x^T\varphi(x(T)).$$

Тоді для знаходження оптимального керування можна застосувати ітераційну процедуру типу градієнтного спуску

$$u^{(k+1)}(t)=P_U\left(u^{(k)}(t)-\rho_k\frac{\partial I(u^{(k)})}{\partial u}\right),$$

де $\rho_k>0$ -крок методу, P_U - оператор проекції на множину U.

Задача 27. Знайти похідну Фреше, якщо критерій якості має вигляд

$$I(u)=\int\limits_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt+\Phi(x(T)).$$

Задача 28. Знайти похідну Фреше для задачі оптимального керування з функціоналом (4), що розглядається на розв'язок системи з заданою структурою

$$\frac{dx}{dt}=f^{(k)}(x,u,t),\ t\in(t_{k-1},t_k),\ k=1,2,...,N,$$

$$x(t_k+0)=g_x(x(t_k-0),t_k)$$

де $f^{(k)}(x,u,t)$ - неперервні разом з частинними похідними за x та u вектор функції, $g_k(x,t)$ - неперервно диференційовані n-вимірні вектор функції, $k=1,2,...,N$, $t_0<t_1<...<t_N=T$.

Задача 29. Порахувати похідну Фреше для задачі оптимального керування системою

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_1 x=u(t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_2 x=u(t),$$

$$\frac{dx(t_1+0)}{dt} = \frac{dx(t_1-0)}{dt} + k,$$

яка полягає в мінімізації функціоналу

$$I(u) = (x(T) - \gamma)^2.$$

Тут $x(t)$ - скалярна функція, $u(t)$ - скалярна функція керування, $t \in [0, T\ |$, $t_1 \in (0, T\ )$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, $k \in R^1$, $|u| \le 1$.

Література.

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. –К.: Наукова думка, 1985. –304 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -М.: Наука, 1980. -520 с.
3. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. -М.: Наука, 1978. -488 с.