ОСОБЛИВІ ОПТИМАЛЬНІ КЕРУВАННЯ

1.Вступ. Як відомо, ідея застосування принципу максимуму для обрахунку оптимальних керувань полягає в наступному. З умови максимуму функції Гамільтона-Понтрягіна знаходиться керування як функція від фазових координат та спряжених змінних. Далі результат підставляється в вихідну динамічну систему та спряжену систему. Таким чином, отримуємо систему з $2n$ диференціальних рівнянь з $2n$ крайовими умовами, де n – розмірність фазового простору. Серед розв'язків такої системи знаходиться і оптимальна траєкторія. Описана процедура може бути реалізована, якщо максимум функції Гамільтона-Понтрягіна досягається в єдиній точці. Може, проте, виникнути така ситуація, що максимум функції Гамільтона-Понтрягіна досягається в декількох точках або ж функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальній траєкторії та оптимальних спряжених змінних не залежить від керування. Такі випадки називаються *особливими*, і відповідні керування також називають *особливими.* З особливими оптимальними керуваннями тісно пов'язані оптимальні ковзні режими. Наявність особливого керування є ознакою складності задачі, оскільки на ньому принцип максимуму є виродженим. Особливі оптимальні керування не можна досліджувати лише за допомогою принципу максимуму, який за своєю суттю є необхідною умовою оптимальності першого порядку. Проте такі режими виникають в цілому ряді прикладних задач, пов'язаних з електротехнікою, металургією, космічною навігацією, що підтверджує необхідність дослідження особливих випадків.

2. Приклад. Розглянемо задачу оптимального керування. Потрібно мінімізувати функціонал

$$J(u) = x_1^2(T) + x_2^2(T) \qquad (1)$$

при умовах

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t),\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\sin x_1(t) - \beta x_2(t) + u(t), \qquad (2)$$

де $t \in [0,T]$, $x(0) = x_0$ – фіксована точка, $u(t) \in V = \{u \in R^1 : |u| \le 1\}$. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H(x_1, x_2, u, \psi_1, \psi_2, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2(-\sin x_1 - \beta x_2 + u)$$

і спряжену систему

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = \psi_2 \cos x_1,\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1 + \beta\psi_2, \qquad (3)$$

з умовами

$$\psi_1(T) = 2\psi_0 x_1(T),\ \psi_2(T) = 2\psi_0 x_2(T) \qquad (4)$$

Відмітимо, що $\psi_0 = -1$, так як при $\psi_0 = 0$ з (3), (4) випливає $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$. А це протирічить умові $|\psi_0| + \psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) \ne 0, t \in [0,T]$, яка закладена в формулюванні принципу максимуму. З умови $\max\limits_{|u|\le 1} H(x_1, x_2, u, \psi_1, \psi_2, t)$ випливає $u_0(t) = sign\,\psi_2(t)$.

Керування $u_0(t)$ є підозрілим на оптимальне. Якщо для деякого керування $v(t) \in V$ розв'язок задачі (2) є таким, що $x_1(T) = x_2(T) = 0$, то $\min\limits_{u \in V} J(u) = J(v) = 0$. Однак в силу (3), (4) $\psi_1(t) = \psi_1(t,v) = 0$, $\psi_2(t) = \psi_2(t,v) = 0$ і

$$H(x_1(t,v), x_2(t,v), u, \psi_1(t,v), \psi_2(t,v), t) = 0$$

для всіх $t \in [0,T]$, $u \in V$. Отже, керування $v \in V$ є особливим оптимальним керуванням, так як на оптимальній траєкторії системи (2) і на оптимальних спряжених змінних функція Гамільтона-Понтрягіна не залежить від параметра u. Таким чином, керування v не можна отримати з принципу максимуму.

3. Основні означення. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$J(u) = \varphi(x(T)) \qquad (5)$$

на розв'язках динамічної системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \qquad (6)$$

де x – n-вимірний вектор фазових координат, $x(t_0) = x_0$, $t \in [t_0, T]$, моменти t_0, T – фіксовані, функції $\varphi(x)$ та $f(x,u,t)$ є неперервними разом з похідними $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x_i}$, $i = 1,2,...,n$, $u(t)$ – функція керування, яка належить класу кусково неперервних *r*-вимірних функцій, що приймає значення з множини $U \subset R^r$. Якщо $u_0(t)$ – оптимальне керування задачі (5), (6), а $x_0(t)$ – відповідна йому траєкторія системи (6), то згідно принципу максимуму Понтрягіна

$$H(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t) \geq H(x_0(t), u, \psi_0(t), t) \qquad (7)$$

для фіксованих $t \in [t_0, T]$, $u \in U$. Тут $H(x,u,\psi,t) = \psi^T(t) f(x,u,t)$ – функція Гамільтона-Понтрягіна, $\psi_0(t)$ – n-вимірних вектор спряжених координат, що задовольняє спряженій системі

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x,u,\psi,t)}{\partial x}, \qquad (8)$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \varphi(x(T))}{\partial x} \qquad (9)$$

при $x = x_0(t)$, $u = u_0(t)$. Але умова (7) може виконуватися не тільки для оптимальних керувань, оскільки принцип максимуму є необхідною умовою оптимальності. Має місце наступне означення.

Означення. Допустиме керування $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, називають *екстремаллю Понтрягіна* якщо керування $u(t)$ та розв'язок $\psi(t)$ спряженої системи (8), (9), які отримано при $x = x(t)$, $u = u(t)$ задовольняють умові

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), u(t), \psi(t), t). \qquad (10)$$

Аналізуючи попередній приклад, приходимо до наступного поняття.

Означення. Екстремаль Понтрягіна $u(t)$ називається *особливою*, якщо для кожного $t \in [t_0, T]$ існує множина $\Omega(t) \subset U$, така, що

$$H(x(t), u, \psi(t), t) = H(x(t), u(t), \psi(t), t)$$

для всіх $u \in \Omega(t), t \in [t_0, T]$.

Вважаємо, що множина $\Omega(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ складається щонайменше з двох елементів.

Припустимо, що вектор-функція $f(x,u,t)$ є диференційованою за u, а множина U є опуклою. Тоді з умови (7) випливає, що

$$\frac{\partial H^T(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u}(u - u_0(t)) \leq 0.$$

Тут $u \in U$, $t \in [t_0, T]$ - фіксована точка. Звідси отримуємо

$$\frac{\partial H^T(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u} u_0(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H^T(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u} u.$$

Тому, якщо екстремаль Понтрягіна є особливою, то остання рівність буде досягатись не лише при $u = u_0(t)$. Отже, має місце наступне означення.

Означення. Допустиме керування $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, називається *квазіособливою екстремаллю*, якщо на відрізку $t \in [t_0, T]$ визначена множина $\Omega(t) \subset U$, така, що для всіх $u \in \Omega(t)$ виконується умова

$$\frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u}u = \frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u}u(t). \qquad (11)$$

Тут $x(t),\psi(t)$ - розв‘язок (6), та (8),(9) відповідно в силу керування $u(t)$. Якщо множина U є відкритою (не обов‘язково опуклою), то умова (7) може бути записана наступним чином:

$$\frac{\partial H^T(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} = 0,\ t \in [t_0,T].$$

Крім цього, на оптимальному розв‘язку, згідно умов екстремуму другого порядку, виконується нерівність

$$v^T \frac{\partial^2 H(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u^2} v \le 0,$$

для довільного $v \in R^r$.

Означення. Допустиме керування $u(t)$, $t \in [t_0,T]$ називається *особливою екстремаллю*, якщо

$$\frac{\partial H(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u} = 0, \qquad (12)$$

$$v^T \frac{\partial^2 H(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u^2} v \le 0, \qquad (13)$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 H(x_0(t),u_0(t),\psi_0(t),t)}{\partial u^2}\right) = 0, \qquad (14)$$

де $t \in (t_0,T)$, $v \in R^r$ - довільний вектор. Умова (14) говорить про виродженість оптимальної точки. Зрозуміло, що особлива екстремаль Понтрягіна є квазіособливою та особливою в сенсі (12)-(14). З іншої сторони, особливі в сенсі (12)-(14) та квазіособливі екстремалі можуть не бути особливими екстремалями Понтрягіна. Але умову (11) або умови (12)-(14) легше перевірити, чим означення, що визначається умовою (10). З іншого боку умови (12)-(14) не можна застосовувати для дослідження задач вигляду (5),(6) з множинами типу

$$U = \{u \in R^n : |u_i| \le 1,\ i = 1,2,...,r\}.$$

Введення додаткових типів особливих керувань пояснюється ще й тим, що для системи (6) з правою частиною $f(x,u,t) = f_0(x) + u^T g(x)$, де $f_0(x)$ і $g(x)$ - неперервні вектор-функції, згадані означення дуже близькі.

Додаток А. Теорема (Каратеодорі)[5]. Нехай $A \subset R^n$. Будь-яка точка $x \in co\,A$ може бути подана у вигляді опуклої комбінації не більш ніж $n+1$ точки $x_i \in A,\ i = 1,2,\ldots,n+1$. Тобто,

$$co\,A = \{x \in R^n : x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,n+1\}.$$

Література.

1.Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. –М.: Наука, 1973. –256 с.