ДООЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ В СИСТЕМАХ З РОЗРИВНИМ КЕРУВАННЯМ.

1. Приклад. Динамічна система з неідеальним реле. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Ax + by_1 + cy_2,$$
$$y_1 = signx_1,$$
$$y_2 = signx_1, \qquad (1)$$

де A - $n \times n$ матриця, b, c, x $-n$-вимірні вектори, x_1 -перша компонента вектора x. Нехай при $x_1 = 0$ величини y_1 та y_2, які моделюють роботу реле можуть приймати довільне значення від 1 до –1. Внаслідок неідеальності системи вважається, що в цьому випадку рівність $y_1 = y_2$ виконується не в кожний момент часу. Тоді система (1) може бути записана у вигляді диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x),$$

де

$$F(x) = \begin{Bmatrix} \{ Ax + (b+c)signx_1 \}, x_1 \neq 0 \\ \{ Ax + bu_1 + cu_2 : |u_i| \leq 1, i = 1,2, x_1 = 0 \}, x_1 = 0 \end{Bmatrix}. \qquad (2)$$

Якщо $b \neq kc, k > 0$, тобто вектори b і c не є однаково направленими, то

$$\{ Ax + bu_1 + cu_2 : |u_i| \leq 1, i = 1,2 \} \supset \{ Ax + (b+c)u : |u| \leq 1 \}.$$

При застосуванні найпростішого опуклого доозначення ми отримуємо множину

$$\{ Ax + (b+c)u : |u| \leq 1 \},$$

яка є вужча за множину (2) в точці $x_1 = 0$. Необхідність охватити такі системи приводить до розглянутого нижче способу побудови правої частини диференціального включення, яка визначає до означення розв'язку.

2. Доозначення з керуваннями. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u_1(x,t),...,u_r(x,t)), \qquad (3)$$

де $x \in R^n$, $f - n$-вимірна неперервна по сукупності змінних вектор функція. Функції (скалярні чи векторні) $u_i(x,t) -$ є розривними відповідно на множинах $M_i, i = \overline{1,r}$. Множини M_i можуть мати спільні точки і навіть співпадати.

У цьому випадку поняття розв'язку системи диференціальних рівнянь (3) визначається за допомогою диференціального включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \qquad (4)$$

права частина якого будується наступним чином. Знаходяться замкнені множини $W_i(x,t)$ можливих значень функції $u_i(x,t)$ в точці (x,t). При $i \neq j$ функції u_i і u_j можуть пробігати відповідні множини W_i і W_j незалежно одне від одного. Як правило, ця умова виконується, якщо функції u_i і u_j описують різні незалежні блоки фізичної системи. В точках неперервності функції $u_i(x,t)$ множина $W_i(x,t) = \{u_i(x,t)\}$, тобто, складається з одного елемента. Нехай (x,t) - точка розриву функції $u_i(x,t)$. Розглянемо два випадки.

а). Множина $W_i(x,t)$ містить всі точки, граничні для будь-яких послідовностей $V_k \in W_i(x_k,t)$. Тобто, якщо $\{V_k\}$ збігається, то $\lim\limits_{k \to +\infty} V_k \in W_i(x,t)$.

б). Множина $W_i(x,t)$ містить всі граничні точки послідовності $V_k \in W_i(x_k,t_k), \lim\limits_{k\to+\infty} t_k = t, \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x, k = 1,2,\ldots$.

Як правило, вимагають опуклість множини $W_i(x,t), i=\overline{1,r}$. Якщо $u_i(x,t)$ – скалярні функції, то вимагають, щоб множина $W_i(x,t)$ була відрізком або точкою. Тоді праву частину диференціального включення (4) можна подати у вигляді

$$F(x,t) = f(x,t,W_1(x,t),\ldots,W_r(x,t)). \qquad (5)$$

Тут $f(x,t,W_1(x,t),\ldots,W_r(x,t))$ – множина значень функції $f(x,t,u_1(x,t),\ldots,u_r(x,t))$, коли (x,t)– фіксовані, а $u_i(x,t)$ пробігають $W_i(x,t), i=\overline{1,r}$. Праву частину диференціального включення (4) можна подати також у вигляді

$$F(x,t) = \overline{co}\, f(x,t,W_1(x,t),\ldots,W_r(x,t)). \qquad (6)$$

Зазначимо, що найпростіше опукле до означення і опукле доозначення є частинними випадками доозначень (5), (6) відповідно.

3. Доозначеня методом еквівалентного керування. Доозначення методом еквівалентного керування є частинним випадком доозначень (5), (6). Воно застосовується до системи диференціальних рівнянь (3), де $f(x,t,u_1(x,t),\ldots,u_r(x,t))$ – неперервна вектор-функція, $u_i(x,t)$ - скалярні функції, розривні лише на гладкій поверхні S_i, що описується рівнянням $\varphi(x)=0, i=\overline{1,r}$. Допускається перетин і співпадання поверхонь S_i.

Суть методу полягає у наступному: в точках, що належать одній чи одночасно кільком поверхням $S_1, S_2,\ldots, S_m$, $1 \le m \le r$, і якщо розв'язок не може зійти відразу з такої поверхні чи з перетину таких поверхонь, покладають

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u_1^{eq}(x,t),\ldots,u_m^{eq}(x,t),u_{m+1}(x,t),\ldots,u_r(x,t)). \qquad (7)$$

Керування $u_i^{eq}(x,t), i=1,2,\ldots,m$ називаються *еквівалентними*. Вони визначаються так, щоб вектор f в (12) був дотичним до поверхонь $S_1, S_2,\ldots, S_m$ і щоб значення функції $u_i(x,t)$ належали відрізку з кінцями в точках $u_i^+ = u_i^+(x,t)$, $u_i^- = u_i^-(x,t)$. Тут $u_i^+ = u_i^+(x,t)$, $u_i^- = u_i^-(x,t)$ – граничні значення функції $u_i(x,t)$ з обох сторін поверхні S_i, $i=1,2,\ldots,m$. Таким чином, функції $u_i^{eq}(x,t), i=1,2,\ldots,m$ визначаються з системи рівнянь

$$grad_x^T \varphi_i(x)\, f(x,t,u_1^{eq}(x,t),\ldots,u_m^{eq}(x,t),u_{m+1}(x,t),\ldots,u_r(x,t)) = 0, \qquad (8)$$

$i=1,2,\ldots,m$.

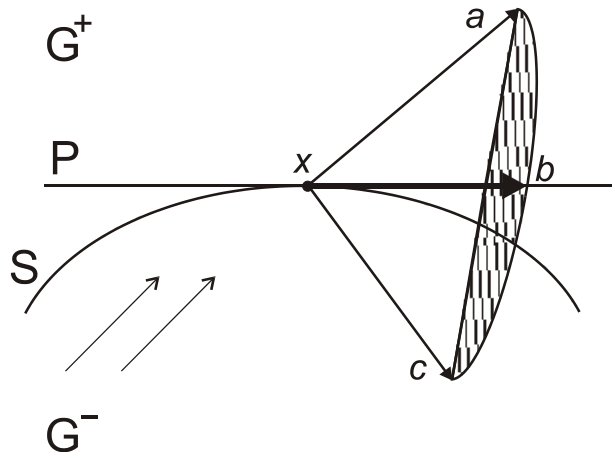

Рис. 1.

Розв'язком системи диференціальних рівнянь (3) називається абсолютно неперервна вектор-функція $x(t)$, яка майже при всіх t поза поверхнею S_i задовольняє системі (3), а на S_i – системі (7), $i = 1,2,...,m$.

При $r = 1$ отримуємо $b = f(x,t,u_1^{eq}(x,t))$), $a = f(x,t,u_1^-)$, $c = f(x,t,u_1^+)$, abc- дуга, яку пробігає кінець вектора $f(x,t,u)$, коли $u(x,t)$ змінюється від $u_i^- = u_i^-(x,t)$ до $u_i^+ = u_i^+(x,t)$ (рис.1).

Система (3), яка доозначується методом еквівалентного керування, приводить до диференційного включення (4) з правою частиною (6), де $W_i(x,t)$ - відрізок з кінцями $u_i^- = u_i^-(x,t), u_i^+ = u_i^+(x,t)$. Для тих $u_i(x,t)$, які є неперервними в точці (x,t) множина $W_i(x,t)$ є точкою. Права частина системи (7) є вектор з кінцем в точці перетину множини (6) з дотичною до перетину поверхонь $S_1, S_2,..., S_m$.

9. Приклади.

1). Нехай в системі (3) керування $u_1,...,u_r$ є розривними функціями відповідно на поверхнях

$$S_i = \{(x,t) : \varphi_i(x) = 0\}, i = 1,2,...,m,$$

і входять лінійно до правої частини (3), вектори $p_i = grad_x \varphi_i(x)$ лінійно незалежні при $x \in S$, $i = 1,2,...,m$. Тоді динамічну систему (3) можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x,t) + B(x,t)u(x,t). \qquad (9)$$

Тут $u = (u_1,...,u_m)^T, B(x,t) \in R^{m\times n}, 1 \le m \le r.$ Інші керування $u_{m+1},...,u_r$ неперервні на S. Потрібно підібрати вектор $u = u^{eq}$ так, щоб вектор $\frac{dx}{dt}$ торкався $S_1, S_2,..., S_m$, тобто, $\frac{dx}{dt} \perp p_i$, $i = 1,2,...,m$. Позначимо за $G = (p_1,...,p_m)^T$ матрицю розмірності $n \times m$. Тоді

$$G\frac{dx}{dt} = Gf_0 + GBu^{eq} = 0.$$

Якщо $\det GB \ne 0$, то

$$u^{eq} = -(GB)^{-1}Gf_0. \qquad (10)$$

Нехай кожна координата вектора u^{eq} задовольняє одній з нерівностей

$$u_i^-(x,t) \le u_i^{eq} \le u_i^+(x,t),\ u_i^+(x,t) \le u_i^{eq} \le u_i^-(x,t). \qquad (11)$$

Підставляючи (10) в (9), отримуємо

$$\frac{dx}{dt} = f_0 - B(GB)^{-1}Gf_0. \qquad (12)$$

Система диференціальних рівнянь (12) описує ковзний режим. Якщо умова (11) не виконується, то руху по $S_1, S_2,..., S_m$ не існує.

2). Нехай S – h-вимірна поверхня в n-вимірному просторі, в області $G_i \subset R^n$ вектор-функція $f(x,t)$ при $t \in (a,b)$ є неперервною впритул до границі, тобто

$$f(x,t) = f^j(x,t), j = 1,2,...,k.$$

Тут вектор-функція $f^j(x,t)$ неперервна на замиканні G_i, $S = \bigcap_{j=1}^{k} \partial G_j$. Зафіксуємо $t \in (a,b)$, $x \in S$. Тоді найменша опукла замкнена множина $F(x,t)$, що містить точки $f(x,t)$, є сукупність всіх точок вигляду

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f^j(x,t), \alpha_j \ge 0, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1.$$

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.