ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ
(продовження)

1. Властивості неперервних відображень. В попередньому пункті була доведена обмеженість напівнеперервних зверху відображень на компакті (теорема 2 попередньої лекції). Позначимо за coA опуклу оболонку множини А [1], $\overline{co}\,A$ - замкнену опуклу оболонку множини А [2].

Лема 1. Якщо множина А обмежена, то $(coA)^{\varepsilon} = co(A^{\varepsilon})$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $b \notin (coA)^{\varepsilon}$ (див. рис. 1 і рис. 2). Тобто $\rho(b, coA) = \alpha > \varepsilon$. Знайдеться точка $a \in \overline{co}A$, така, що $\rho(b,a) = \alpha$. Помістимо початок координат в точку b і направимо вісь Ox_1 від b до a. Візьмемо будь-яке $\beta \in (\varepsilon, \alpha)$. Множина $\overline{co}A$ лежить в області $x_1 > \beta$, множина A–також. Тоді A^{ε} лежить в напівпросторі $x_1 \geq \beta - \varepsilon$. За означенням опуклої оболонки $co(A^{\varepsilon})$ лежить в $x_1 \geq \beta - \varepsilon$. Тому $b \notin co(A^{\varepsilon})$.

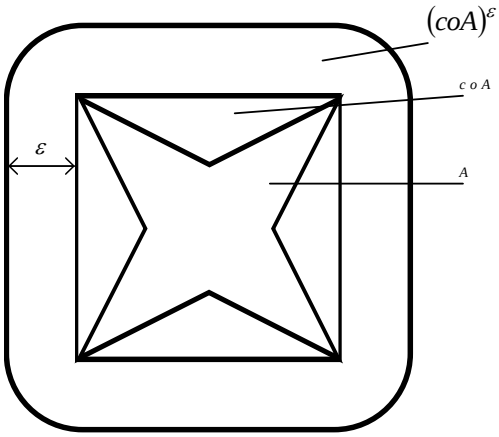

Рис.1.

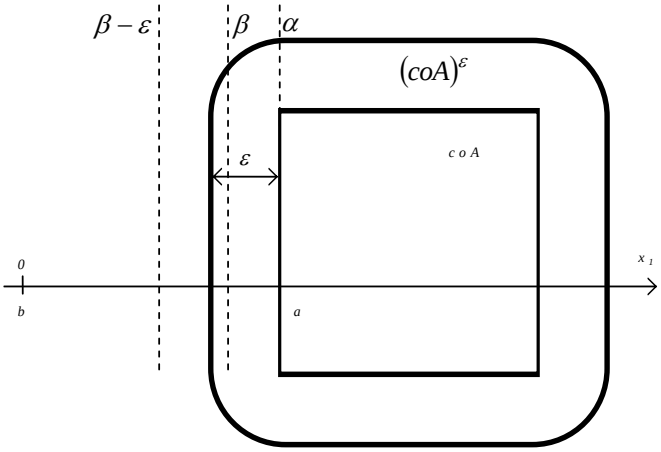

Рис.2.

($\Leftarrow$) Нехай $b \notin co(A^{\varepsilon})$ (див. рис. 3 і рис. 4). Направимо вісь Ox_1 від точки b до c - найближчої точки з множини $co(A^{\varepsilon})$. Тоді $\rho(b,c) = \gamma > 0$, $co(A^{\varepsilon})$ лежить в області $x_1 > \delta$, $(0 < \delta < \gamma)$ і A^{ε}-також. Значить, A і coA лежать в напівпросторі $x_1 \geq \delta + \varepsilon$, а $(coA)^{\varepsilon}$–в напівпросторі $x_1 \geq \delta$. Значить, $b \notin (coA)^{\varepsilon}$. Лему доведено.

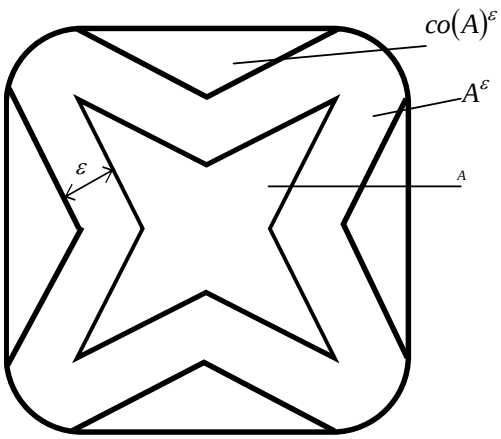

Рис.3.

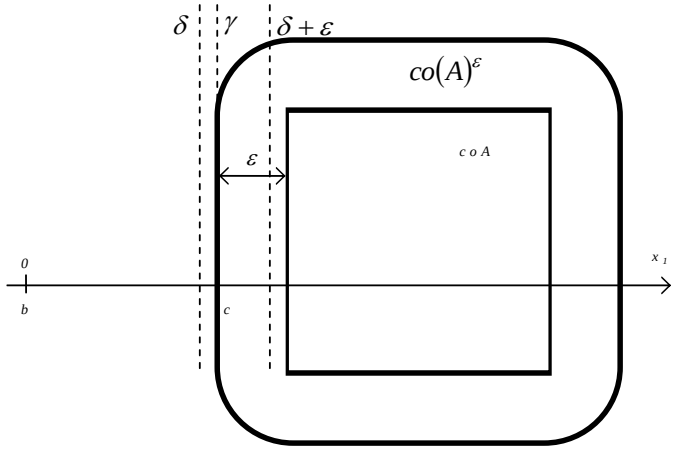

Рис.4.

[1] найменша опукла множина, що містить A

[2] найменша замкнена опукла множина, що містить A

Теорема 1. Якщо $H(p)$ є строгим компактозначним β–неперервним (або α–неперервним) відображенням, то функція $F(p) = coH(p)$ є β–неперервною (α–неперервною).

Доведення. Для довільних $p_0 \in D$ і $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для будь-якого $p \in K_\delta(p_0)$ виконується $H(p) \subseteq (H(p_0))^\varepsilon$. За лемою 1

$$coH(p) \subseteq co(H(p_0))^\varepsilon = [coH(p_0)]^\varepsilon. \qquad (1)$$

Тобто, $F(p) \subseteq (F(p_0))^\varepsilon$. Якщо ж функція H - α–неперервна, то справджується (1) і, крім того, з $H(p_0) \subseteq (H(p))^\varepsilon$ слідує $F(p_0) \subseteq (F(p))^\varepsilon$. Тобто, F – α-неперервна функція. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $f(p)$–обмежена однозначна функція, $p \in D \subset R^m$, $f(p) \in R^n$. Для кожного $p_0 \in \overline{D}$ позначимо за $H(p_0)$ множину всіх граничних значень функції $f(p)$ при $p \to p_0$, що доповнене значенням $f(p_0)$, якщо $p_0 \in D$. Тоді функції $H(p)$ і $F(p) = coH(p)$ є β–неперервними.

Доведення. Нехай $p \in \overline{D}$. Тоді $H(p)$–замкнена множина, $\left|H(\overline{D})\right| < \infty$. Графік функції H є замиканням графіка функції f. Тому він замкнений. Отже за теоремами 1 та 3 попередньої лекції відображення H і F – β-неперервні. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $f(p, u_1, ..., u_r)$–однозначна і неперервна функція. Якщо многозначні функції $u_1(p), ..., u_r(p)$ в точці p обмежені і β–неперервні, то функція $H(p) = f(p, u_1(p), ..., u_r(p))$ обмежена і β–неперервна.

Доведення теореми аналогічне доведенню про неперервність суперпозиції неперервних функцій в точці.

Теорема 3. Нехай $\varphi : R^n \to R^1$, $\varphi \in C(R^n)$, $F(p)$ – напівнеперервне зверху компактозначне відображення, $p \in D$, $D \subset R^m$-замкнена обмежена область. Тоді функція

$$\psi(p) = \max_{x \in F(p)} \varphi(x)$$

напівнеперервна зверху, $p \in D$. Якщо $F(p)$ є неперервним за Хаусдорфом на D, то $\psi \in C(D)$.

Доведення. Виберемо довільну точку $s \in D$. Позначимо $x^* = \arg\max_{x \in F(s+h)} \varphi(x)$. Для точки $x^* \in F(s+h)$ існує $y \in F(s)$, таке, що $\left\|x^* - y\right\| \to 0$ при $h \to 0$. Тоді

$$\psi(s+h) = \varphi(x^*) = \varphi(y) + w_1(h) \le \max_{x \in F(s)} \varphi(x) + w_1(h) = \psi(s) + w_1(h),$$

де $w_1(h) \to 0$ при $h \to 0$. Звідси $\overline{\lim_{h \to 0}} \psi(s+h) \le \psi(s)$. Якщо має місце неперервність за Хаусдорфом, то аналогічно доводиться нерівність $\psi(s) \le \psi(s+h) + w_2(h)$, де $w_2(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тому $\lim_{h \to 0} \psi(s+h) = \psi(s)$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо в умовах теореми 3 відображення $F(p)$ є неперервним за Хаусдорфом на D, то функція

$$\xi(p) = \min_{x \in P(p)} \varphi(x)$$

належить класу $C(D)$.

2. Визначаючі функції. Нехай K є компакт в R^m.

Означення. Функція $\alpha \in C(R^m)$, така, що

$$\alpha(x)<1, \quad x\in int\,K;$$

$$\alpha(x)=1, \quad x\in \partial K;$$

$$\alpha(x)>1, \quad x\in R^m-K$$

називається *визначаючою* для множини K.

Приклади.

1). Множина $K=K_r(0)$. Тоді визначаюча функція $\alpha(x)=\dfrac{\|x\|}{r}$, $x\in R^m$.

Зазначимо, що функція $\beta(x)=\|x\|-r+1$ також є визначаючою для K.

2. Нехай $\{r_s\}_{s=1}^N$ — система векторів з R^m, $rang\{r_s\}_{s=1}^N=m$, $N\ge m$ і задана множина $\Lambda=\{x\in R^m : |r_s^T x|\le 1, s=1,2,\ldots,N\}$. Тоді функція $\lambda(x)=\max\limits_{s=1,2,\ldots,N}|r_s^T x|$ є визначаючою для Λ.

Теорема 4. Для компакту K існує визначаюча функція.

Доведення. Функція $\psi(x)=c\min\limits_{y\in\partial K}\|x-y\|$ є неперервною в R^m, $c>0$. Тоді

$$\alpha(x)=\begin{cases}1-\psi(x), & x\in K;\\ 1+\psi(x), & x\notin K;\end{cases} \tag{2}$$

задовольняє умовам теореми. Теорему доведено.

Зауваження. В умовах теореми 4 визначаючу функцію можна вибрати так, що $\alpha(x)\ge 0$. Для цього в доведенні беремо

$$c=\left[\max_{x\in\partial K}\max_{y\in\partial K}\|x-y\|\right]^{-1}.$$

Нехай $B=\{G(u): G(u)\subset R^n, u\in D\}$ — клас компактів, $D\subset R^m$-замкнена обмежена область.

Теорема 5. Для того, щоб відображення G, $G(u)\in B$, $u\in D$, було неперервним за Хаусдорфом, необхідно і достатньо, щоб існувала функція $\alpha\in C(R^n\times D)$, така, що:

а) $\alpha(x,u)=1$, якщо $x\in\partial G(u)$;

б) $\alpha(x,u)<1$, якщо $x\in \operatorname{int} G(u)$;

в) $\alpha(x,u)>1$, якщо $x\in R^n-G(u)$, $u\in D$.

Доведення. Достатність очевидна. Покажемо необхідність. Для цього побудуємо визначаючу функцію

$$\alpha(x,u)=\begin{cases}1-\psi(x,u), x\in G(u),\\ 1+\psi(x,u), x\in R^n-G(u)\end{cases}$$

множини $G(u)\in B$. Тут $\psi(x,u)=\min\limits_{v\in\partial G(u)}\|v-x\|$, $x\in R^n$, $u\in D$. З теореми 4 випливає, що досить довести неперервність $\alpha(x,u)$ за $u\in D$. З наслідку теореми 3 випливає, що для довільного $x\in R^n$ функція $\psi\in C(D)$. Нехай $s\in D$. Якщо $x\in int\,G_s$, то $\psi(x,s)>0$ і існує $h>0$, таке, що $\psi(x,t)>0$ при $t\in K_h(s)\cap D$. Це означає, що $x\in G(t)$, і $\alpha(x,t)=1-\psi(x,t)$ є неперервною функцією, $t\in K_h(s)\cap D$. Аналогічно показується неперервність $\alpha=\alpha(x,u)$ в точці $u=s$, якщо $x\in R^n-G(s)$. Припустимо, що $x\in\partial G_s$. Тоді $\psi(x,s)=0$ і $\alpha(x,s)=1$. Звідси $|\alpha(x,t)-\alpha(x,s)|=|\psi(x,t)|\to 0$ при $t\to s$. Отже, $\alpha\in(R^n\times D)$. Теорему доведено.

Теорема 6. Нехай $\Theta = \bigcap_{u \in D} G(u)$, $\Omega = \bigcup_{u \in D} G(u)$, $G(u) \in B$. Тоді $\theta(x) = \max_{u \in D} \alpha(x,u)$ і $\omega(x) = \min_{u \in D} \alpha(x,u)$ є визначаючими функціями відповідно множин Θ і Ω. Тут $\alpha(x,u)$ — функція, що задовольняє умови теореми 5.

Доведення. Нехай $x \in int\,\Theta$. Тоді $\alpha(x,u) < 1$, $u \in D$ і $\max_{u \in D} \alpha(x,u) < 1$. Якщо $x \in \partial\Theta$, то $\alpha(x,u) \le 1$, $u \in D$, але існує $s \in D$, таке, що $\alpha(x,s) = 1$. Тому $\max_{u \in D} \alpha(x,u) = 1$. При $x \in R^n - \Theta$ знайдеться $s \in D$, для якого $\alpha(x,s) > 1$ і, отже, $\theta(x) > 1$. Аналогічно доводиться той факт, що $\omega(x)$ є визначаючою функцією Ω. Теорему доведено.

Література.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. -М.: Наука, 1985. -224 с.
2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. –М.: Мир, 1988. -512 с.
3. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. –К.: Київський університет. -2000. –197 с.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. –М.: „Высшая школа”, 2001. -239с.