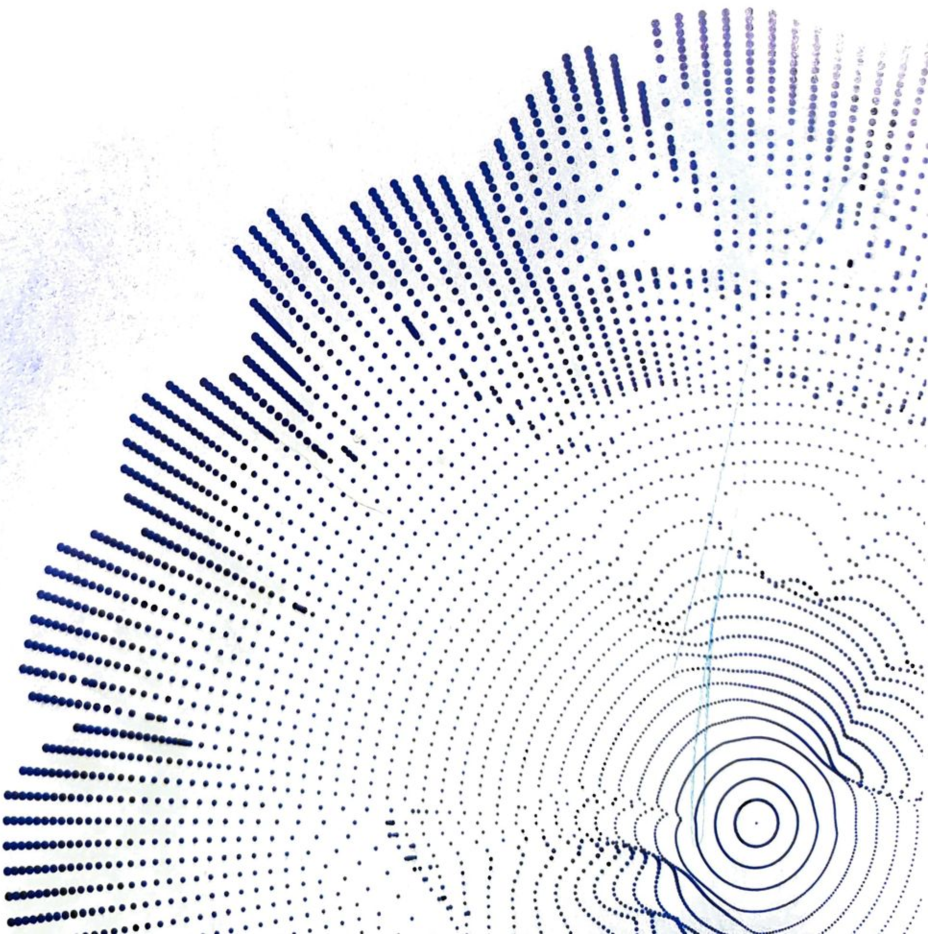
О. Ф. ВОЛОШИН
В. О. ЛАВЕР

НЕЧІТКА МАТЕМАТИКА



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О. Ф. Волошин
В. О. Лавер

НЕЧІТКА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ
2023

УДК 519.85:510.65:512.644(075.8)
В68

Рецензенти:
д-р техн. наук В. Є. Снитюк,
д-р фіз.-мат. наук Є. В. Івохін

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(протокол № 3 від 28 жовтня 2021 року)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 1-22 від 31 січня 2022 року)

Волошин О. Ф.
В68 Нечітка математика : навч. посіб. / О. Ф. Волошин, В. О. Лавер. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2023. – 111 с.

Розглянуто основи теорії нечіткої математики, основоположні поняття теорії нечітких множин, головні операції над нечіткими множинами, основи теорії нечітких бінарних відношень. Деталізовано основні поняття нечіткої арифметики – принцип узагальнення, нечіткі числа, арифметичні операції над ними. Досліджено нечіткі лінійні рівняння і нечіткі системи лінійних рівнянь, методи порівняння нечітких чисел. Основну увагу приділено нечіткому математичному програмуванню (нечіткому лінійному й цілочисловому). Розглянуто задачі прийняття рішень у нечітко заданому середовищі на основі критеріїв Байєса – Лапласа, Кофмана й Марковиця. Наведено варіанти лабораторних робіт.

Для студентів старших курсів спеціальностей "Прикладна математика", "Інформатика" та "Системний аналіз".

УДК 519.85:510.65:512.644(075.8)

1. Поняття нечіткості

При математичному моделюванні реальних процесів ми часто стикаємося з неможливістю чітко віднести той чи інший об'єкт до заданого класу. Наприклад, чи можна вважати, що 10 належить класу чисел, які є значно більшими за 1? Або чи можемо уявити клас лисих чоловіків? Тут постає необхідність вказати не тільки на належність певного елемента заданому класу, а й на степінь цієї належності.

Для адекватного опису класів високих чоловіків, гарних жінок, чисел, що є досить близькими до x, апарату звичайної теорії множин виявляється недостатньо. Отже, у статті "Нечіткі множини" американський математик азербайджанського походження Лотфі А. Заде в 1965 році запропонував концепцію нечітких множин – множин, які містять інформацію не тільки про елементи, що їм належать, але і про степінь належності цих елементів.

1.1. Означення нечіткої множини

Розглянемо довільну чітку множину $X = \{x\}$, яку будемо називати **універсальною множиною**.

Означення 1.1. Нечітка множина $\tilde{A}$ в X задається за допомогою **характеристичної функції** (функції належності) $\mu_{\tilde{A}}(x)$, яка кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність деяке дійсне число з інтервалу $[0,\ 1]$. Позначають $\tilde{A} = \{(x,\ \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$. При цьому значення $\mu_{\tilde{A}}(x)$ в точці $x \in X$ показує степінь належності елемента x нечіткій множині A.

Слід зазначити, що чіткі (звичайні) множини є частковим випадком нечітких множин. Це є множини з функцією належності

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Означення 1.2. **Носієм** нечіткої множини $\tilde{A}$ називається (чітка) множина

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Позначають також $\operatorname{supp}(\tilde{A})$.

Означення 1.3. **Ядром** нечіткої множини $\tilde{A}$ називається (чітка) множина

$$C(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Використовують також позначення $\operatorname{core}(\tilde{A})$.

Означення 1.4. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається **унімодальною**, якщо її ядро складається тільки з одного елемента, тобто $|C(\tilde{A})| = 1$.

Означення 1.5. **Висотою** нечіткої множини $\tilde{A}$ називається число

$$\sup_{x \in X}(\mu_{\tilde{A}}(x)).$$

Означення 1.6. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається **нормальною**, якщо її висота дорівнює 1, і **субнормальною** у протилежному випадку.

Довільну субнормальну нечітку множину $\tilde{A}$ можна звести до нормального вигляду $\tilde{A}_{norm}$ шляхом нормування її функції належності:

$$\mu_{\tilde{A}_{norm}} = \frac{\mu_{\tilde{A}}}{\sup_{x \in X}(\mu_{\tilde{A}}(x))}.$$

Приклад 1.1. Нехай $X = \mathbb{R}$. Можемо задати множину $\tilde{A}$ чисел, значно більших за одиницю, зокрема такою функцією належності: $\mu_{\tilde{A}}(0) = 0$, $\mu_{\tilde{A}}(1) = 0$, $\mu_{\tilde{A}}(5) = 0{,}01$, $\mu_{\tilde{A}}(100) = 0{,}95$, $\mu_{\tilde{A}}(500) = 1$.

Приклад 1.2. Нехай $X = \mathbb{R}^+$ – множина додатних цілих чисел. Вважатимемо, що ці числа означають вік людини. Тоді нечітка множина $\tilde{A}$ молодих людей матиме вигляд:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x < 25; \\ \frac{40-x}{15}, & 25 \le x < 40; \\ 0, & 40 \le x. \end{cases}$$

Графік цієї функції (рис. 1.1):

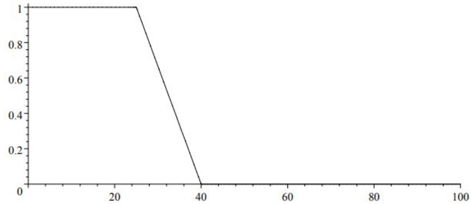


Рис. 1.1. Функція належності молодих людей

Носієм цієї нечіткої множини буде інтервал (0,40), ядром – інтервал (0,25). Висота нечіткої множини дорівнює 1.

α-перерізом нечіткої множини $\tilde{A}$ називається чітка множина елементів, степінь належності яких не менший, ніж α:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\}.$$

Множина $A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ називається **сильним α-перерізом**.

Приклад 1.3. Рієлтор хоче оцінити будинок, який він пропонує своїм клієнтам. Одним із показників комфорту будинку є кількість спальних кімнат. Нехай $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ є універсальною множиною, значення з якої вказують на кількість спальних кімнат у будинку. Тоді нечітку множину "будинок, комфортний для проживання сім'ї із чотирьох осіб", можна описати таким чином:

$$\tilde{A} = \{(1; 0{,}2), (2; 0{,}5), (3; 0{,}8), (4; 1), (5; 0{,}7), (6; 0{,}3)\}.$$

Носієм цієї нечіткої множини є $S(\tilde{A}) = \{1,2,\ldots,6\}$. Можливі такі α-перерізи:

$$\begin{aligned} A_{0,2} &= \{1,2,3,4,5,6\}; \\ A_{0,5} &= \{2,3,4,5\}; \\ A_{0,8} &= \{3,4\}; \\ A_1 &= \{4\}. \end{aligned}$$

Означення 1.7. Нечітка множина $\tilde{A}$ називається **опуклою**, якщо

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}, \forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1].$$

1.2. Основні операції над нечіткими множинами

Введемо деякі означення та операції для нечітких множин, що є розширенням понять для звичайних (чітких) множин.

Означення 1.8. Нечітка множина $\tilde{A}$ є **порожньою** тоді та тільки тоді, коли $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$, $\forall x \in X$.

Означення 1.9. Нечіткі множини $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ є **рівними** тоді та тільки тоді, коли $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$, $\forall x \in X$.

Для чітких множин операції об'єднання, перетину та доповнення визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}; \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}; \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}; \\ \overline{A} &= \{x \in U \mid x \notin A\}. \end{aligned}$$

Записавши ці рівності мовою характеристичних функцій, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
\chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\} = \chi_A(x) \vee \chi_B(x);\\
\chi_{A\cap B} &= \min\{\chi_A(x),\chi_B(x)\} = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x);\\
\chi_{A\setminus B} &= \min\{\chi_A(x),1-\chi_B(x)\} = \chi_A(x) \wedge \chi_{\overline{B}}(x);\\
\chi_{\overline{A}} &= 1-\chi_A.
\end{aligned}
$$

Отже, ми можемо записати відповідні операції над нечіткими множинами:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) &= \max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\};\\
\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} &= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\};\\
\mu_{\tilde{A}\setminus\tilde{B}} &= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x),1-\mu_{\tilde{B}}(x)\};\\
\mu_{\overline{\tilde{A}}} &= 1-\mu_{\tilde{A}}.
\end{aligned}
$$

Приклад 1.4. На універсальній множині $U = \{1,2,3,4,5\}$ задано нечіткі множини $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$. Знайти $\tilde{A}\cup\tilde{B}$, $\tilde{A}\cap\tilde{B}$, $\overline{\tilde{B}}$, $\tilde{A}\setminus\tilde{B}$, якщо

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= \{(1;0),(2;0{,}2),(3;0{,}8),(4;1),(5;0{,}6)\},\\
\tilde{B} &= \{(1;0{,}3),(2;0),(3;1),(4;0{,}9),(5;0{,}3)\}.
\end{aligned}
$$

Маємо (рис. 1.2):

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}\cup\tilde{B} &= \{(1;0{,}3),(2;0{,}2),(3;1),(4;1),(5;0{,}6)\};\\
\tilde{A}\cap\tilde{B} &= \{(1;0),(2;0),(3;0{,}8),(4;0{,}9),(5;0{,}3)\};\\
\overline{\tilde{B}} &= \{(1;0{,}7),(2;1),(3;0),(4;0{,}1),(5;0{,}7)\};\\
\tilde{A}\setminus\tilde{B} &= \{(1;0),(2;0{,}2),(3;0),(4;0{,}1),(5;0{,}6)\}.
\end{aligned}
$$

Для неперервних функцій належності графіки відповідних операцій зображені на рис. 1.2.

Вище розглянуто основні операції на нечітких множинах, які знадобляться в курсі “Нечітка математика”. Разом з тим,

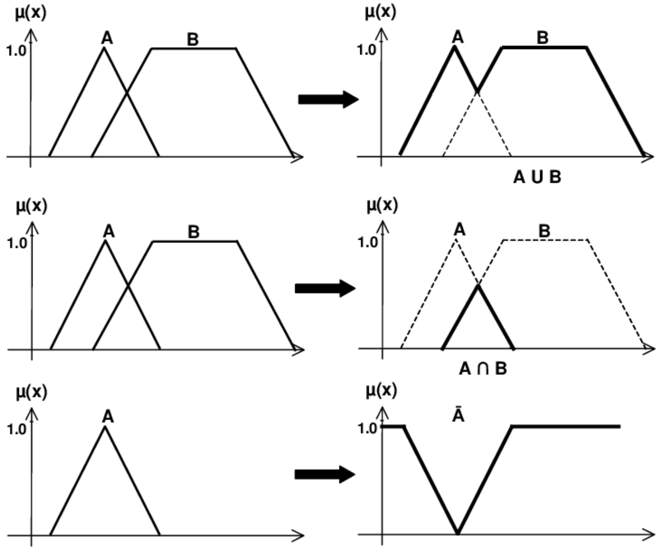


Рис. 1.2. Операції над нечіткими множинами

можливі й інші операції над нечіткими множинами, зокрема різноманітні форми класичних операцій – об'єднання, перетин, заперечення та інші. Так, часто використовуються наступні операції:

1) Алгебраїчне об'єднання –

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),\ x \in X;$$

2) Алгебраїчний перетин –

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),\ x \in X;$$

3) Граничний перетин –

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0\},\ x \in X.$$

В загальному випадку деякі властивості для розглянутих операцій не виконуються. Так, для операцій алгебраїчного об'єднання і перетину $A + A \neq A$, $A \cdot A \neq A$ (неідемпотентність), $A + (A \cdot B) \neq A$, $A \cdot (A + B) \neq A$ (непоглинання), $A \cdot \overline{A} \neq \emptyset$ (не виконується закон виключення третього), $A + \overline{A} \neq X$ (не виконується закон заперечення).

Існує також декілька форм операцій заперечення:

1) Квадратичне заперечення –

$$\mu_A(x) = (1 - \mu^2(x))^2, \ x \in X;$$

2) Заперечення Сугено –

$$\mu_A(x) = \frac{1 - \mu(x)}{1 + k \cdot \mu(x)}, \ x \in X, -1 < k < \infty;$$

3) Порогове доповнення –

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \mu(x) \leq \alpha \\ 0, \mu(x) > \alpha \end{cases}, \ x \in X, 0 < \alpha < 1.$$

1.3. Нечіткі бінарні відношення

Розглянемо спершу чіткі бінарні відношення.

Означення 1.10. Відношенням R, заданим на множинах A та B, називається підмножина $R \subseteq A \times B$ декартового добутку цих множин.

Оскільки R зв'язує пари елементів з A та B то таке відношення називається **бінарним**. Якщо $R \subseteq A_1 \times \cdots A_n$, то таке відношення називається n-арним.

Якщо при цьому $A_1 = \cdots = A_n = A$, то таке відношення називається n-арним в A.

Те, що елементи $x \in A$ та $y \in B$ зв'язані бінарним відношенням R, позначають через xRy, $((x,y) \in R)$. У протилежному випадку, коли $(x,y) \notin R$, записують $x\overline{R}y$ (тобто x не перебуває з y у відношенні R).

Бінарне відношення R можна задати такою характеристичною функцією:

$$\chi_R(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in R; \\ 0, & (x,y) \notin R. \end{cases}$$

Для бінарних відношень так само визначаються звичайні теоретико-множинні операції, такі як об'єднання, перетин тощо.

Нехай $x,y,z \in A$. Відношення $R \in A \times A$ називається:

1) рефлексивним, якщо $\forall x \in A$: xRx;
2) антирефлексивним, якщо $\forall x \in A$: $x\overline{R}x$;
3) симетричним, якщо $\forall x,y \in A$ з того, що xRy, випливає, що yRx;
4) асиметричним, якщо $\forall x,y \in A$ з того, що xRy, випливає, що $y\overline{R}x$;
5) антисиметричним, якщо $\forall x,y \in A$ з того, що xRy та yRx, випливає, що $x = y$;
6) транзитивним, якщо $\forall x,y,z \in A$ з того, що xRy та yRz, випливає, що xRz.

Відношення R називається **відношенням еквівалентності**, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним. Відношення R називається **відношенням часткового порядку**, якщо воно є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

Відношення R називається **відношенням повного порядку**, якщо воно є відношенням часткового порядку та для $\forall x,y \in A$ має місце або xRy, або yRx.

Означення 1.11. Нехай A і B – деякі непорожні чіткі множини. **Нечітке відношення** R є нечіткою підмножиною декартового добутку $A \times B$. Якщо при цьому $A = B$, то таке відношення називається **бінарним**.

Приклад 1.5. Нехай $X = \{1,2,3\}$. Задамо відношення R як "приблизно дорівнює":

$$\mu_R(1{,}1) = \mu_R(2{,}2) = \mu_R(3{,}3) = 1;$$
$$\mu_R(1{,}2) = \mu_R(2{,}1) = \mu_R(2{,}3) = \mu_R(3{,}2) = 0{,}8;$$
$$\mu_R(1{,}3) = \mu_R(3{,}1) = 0{,}3.$$

У вигляді матриці це бінарне відношення можна записати таким чином:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як зазначалось, над нечіткими відношеннями можливі звичайні теоретико-множинні операції. Розглянемо приклад.

Приклад 1.6. Розглянемо два бінарні відношення: $R =$ "x значно менше, ніж y" та $G =$ "x дуже близький до y".
У цьому прикладі ми опустили визначення універсальної множини.

Матрично зазначені відношення задаються так:

$$R = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ x_2 & 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0{,}4 & 0 & 0{,}9 & 0{,}6 \\ x_2 & 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ x_3 & 0{,}3 & 0 & 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Перетин R та G означає, що "x є значно меншим від y" і "x є дуже близьким до y".

$$R \cap G = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0{,}4 & 0 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ x_2 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ x_3 & 0{,}3 & 0 & 0{,}8 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Об'єднанням R та G є множина "x є значно меншим від y" або "x є дуже близьким до y".

$$R \cup G = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}7 \\ x_2 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ x_3 & 0{,}9 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Запереченням G є множина "x не є дуже близьким до y".

$$\overline{G} = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ x_2 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ x_3 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Різницею R та G є множина "x є значно меншим від y" і "x є дуже близьким до y".

$$R \setminus G = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ x_2 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ x_3 & 0{,}7 & 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

2. Нечітка арифметика

2.1. Принцип узагальнення

Нехай $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ є нечіткими підмножинами універсальних множин X_1, …, X_n. **Декартовим добутком** нечітких множин $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ є нечітка підмножина $X_1 \times \cdots X_n$ із функцією належності

$$\mu_{\left(\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n\right)}(x) = \min_i \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \mid x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \in X_i\}.$$

Нехай $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ і $\tilde{A}_1, \ldots \tilde{A}_n$ є нечіткими підмножинами $X_1, \ldots, X_n$, відповідно; на X задано функцію $f : X \mapsto Y$, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Принцип узагальнення, запропонований Л. Заде, дозволяє визначити нечітку підмножину $\tilde{B}$ в Y таким чином:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in X\},$$

де

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\overline{\mathbf{x}} \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Тут f^{-1} позначає обернену функцію до f, $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Для $n = 1$ принцип узагальнення зводиться до

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y = f(x), x \in X\},$$

де

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset; \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Приклад 2.1. Нехай $\tilde{A} = \{(-1; 0{,}5),(0; 0{,}8),(1; 1),(2; 0{,}4)\}$, $f(x) = x^2$. За допомогою принципу узагальнення отримуємо:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(0; 0{,}8),(1; 1),(4; 0{,}4)\}.$$

2.2. Поняття нечіткого числа

Означення 2.1. Нечітка підмножина $\tilde{P}$ множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається **нечітким числом** $\tilde{p}$, якщо вона задовольняє такі умови:

1) $\tilde{P}$ є нормальною (тобто висота $\tilde{P}$ дорівнює 1);
2) $\tilde{P}$ є опуклою;
3) існує єдине $\overline{x} \in \mathbb{R}$ таке, що $\mu_{\tilde{P}} = 1$ (тобто $\operatorname{core} \tilde{P} = \overline{x}$);
4) функція належності $\mu_{\tilde{P}}$, $x \in \mathbb{R}$ є кусково-неперервною.

Якщо виконуються всі умови, крім третьої (тобто маємо $\operatorname{core}(\tilde{P})) = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$), то така нечітка множина називається **нечітким інтервалом**.

Значення $\overline{x} = \operatorname{core}(\tilde{p})$, на якому досягається найбільший степінь належності, називається **модальним значенням** нечіткого числа $\tilde{p}$. Серед альтернативних назв можна зустріти "пікове значення", "центральне значення" або "середнє значення", причому останні два терміни застосовуються переважно до симетричних нечітких чисел. Саме ж нечітке число можна інтерпретувати як лінгвістичний терм "приблизно $\overline{x}$".

Множину всіх можливих нечітких чисел $\tilde{p}$ позначатимемо $\tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$.

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **симетричним**, якщо його функція належності задовольняє умову:

$$\mu_{\tilde{p}}(\overline{x} + x) = \mu_{\tilde{p}}(\overline{x} - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **(строго) додатним**, що позначається як $\tilde{p} > 0$, якщо $\operatorname{supp}(\tilde{p}) \subseteq (0; +\infty)$.

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **(строго) від'ємним**, що позначається як $\tilde{p} < 0$, якщо $\operatorname{supp}(\tilde{p}) \subseteq (-\infty; 0)$.

Нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ називається **нечітким нулем**, що позначається як $\tilde{0}$, якщо $0 \in \operatorname{supp}(\tilde{0})$.

Розглянемо деякі особливі види нечітких чисел.

Трикутним нечітким числом називається нечітке число $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R})$ із функцією належності

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 1 + \frac{x - \overline{x}}{\alpha_l}, & \overline{x} - \alpha_l < x < \overline{x}; \\ 1 - \frac{x - \overline{x}}{\alpha_r}, & \overline{x} < x < \overline{x} + \alpha_r; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Параметр $\overline{x}$ позначає модальне значення нечіткого числа, α_l та α_r – відповідно ліве та праве відхилення. Інтервал

$$W = [w_l, w_r] = [\overline{x} - \alpha_l; \overline{x} + \alpha_r] = \operatorname{supp} \tilde{p} \cup \{\overline{x} - \alpha_l; \overline{x} + \alpha_r\}$$

називається **інтервалом нечіткості**. Для простоти нечіткі числа трикутного вигляду записують трійкою $\tilde{p} = \operatorname{tfn}(\overline{x};\ \alpha_l;\ \alpha_r)$. Називатимемо такий спосіб запису нечітких чисел трикутного вигляду **записом через відхилення**. Альтернативним способом запису є **запис через крайні точки**, тобто шляхом задання трійки $(\overline{x} - \alpha_l;\ \overline{x};\ \overline{x} + \alpha_r)$. Обидві форми запису нечітких чисел трикутного вигляду доволі поширені в літературі (рис. 2.1).

Ще одним важливим типом нечітких чисел є **гауссівські нечіткі числа**, функція належності яких характеризується нормальною та асиметрично параметризованою гауссівською функцією. Позначатимемо $\tilde{p} = \operatorname{gfn}(\overline{x}, \sigma_l, \sigma_r)$. Функція належності у цьому випадку матиме вигляд

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_l^2}}, & x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_r^2}}, & x \geq \overline{x}. \end{cases}$$

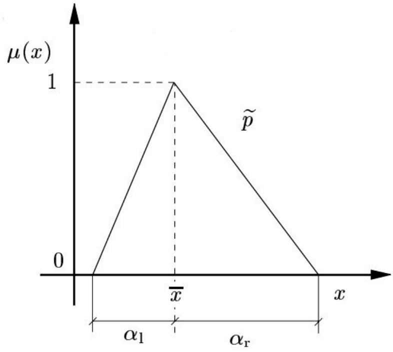


Рис. 2.1. Нечітке число трикутного вигляду

Модальне значення цього нечіткого числа дорівнює $\overline{x}$, а σ_1 та σ_2 позначають ліве та праве відхилення, що відповідають стандартним відхиленням гауссівського розподілу (рис. 2.2).

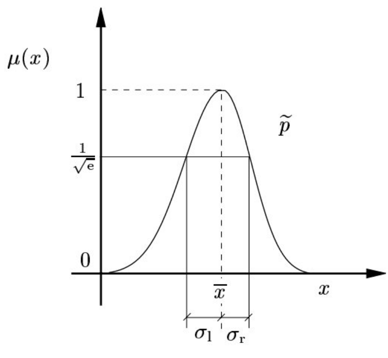


Рис. 2.2. Гауссівське нечітке число

Визначають також **квазігауссівські нечіткі числа**, які є гауссівськими нечіткими числами, обрізаними для $x < \overline{x} - 3\sigma_l$ та $x > \overline{x} + 3\sigma_r$. Тобто степені належності $\mu_{\tilde{p}}(x)$ нечіткого числа $\tilde{p}$ для всіх x, для яких $|x - \overline{x}|$ є більшими за,

відповідно, $3\sigma_l$ та $3\sigma_r$, дорівнюють нулю. Введення таких обмежень вмотивоване тим, що для таких значень x степінь належності не перевищує 0,01. Введемо позначення: $\tilde{p} = \mathrm{gfn}^*(\overline{x},\sigma_l,\sigma_r)$.
Функція належності у цьому випадку визначається виразом

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 0, & x \le \overline{x} - 3\sigma_l; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_l^2}}, & \overline{x} - 3\sigma_l < x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_r^2}}, & \overline{x} \le x < \overline{x} + 3\sigma_r; \\ 0, & x \ge \overline{x} + 3\sigma_r. \end{cases}$$

Інтервалом нечіткості цього нечіткого числа є

$$W = [w_l,w_r] = [\overline{x} - 3\sigma_l; \overline{x} + 3\sigma_r] = \mathrm{supp}(\tilde{p}) \cup \{\overline{x} - 3\sigma_l; \overline{x} + 3\sigma_r\}.$$

Розглядають також **квадратичні нечіткі числа**, які позначають $\tilde{p} = \mathrm{qfn}(\overline{x},\beta_l,\beta_r)$. Функція належності квадратичного нечіткого числа має вигляд

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 0, & x \le \overline{x} - \beta_l; \\ 1 - \frac{(x-\overline{x})^2}{\beta_l^2}, & \overline{x} - \beta_l < x < \overline{x}; \\ 1 - \frac{(x-\overline{x})^2}{\beta_r^2}, & \overline{x} \le x < \overline{x} + \beta_r; \\ 0, & x \ge \overline{x} + 3\sigma_r. \end{cases}$$

Інтервал нечіткості визначається таким чином (рис. 2.3):

$$W = [w_l,w_r] = [\overline{x} - \beta_l, \overline{x} + \beta_r] = \mathrm{supp}(\tilde{p}) \cup \{\overline{x} - \beta_l, \overline{x} + \beta_r\}.$$

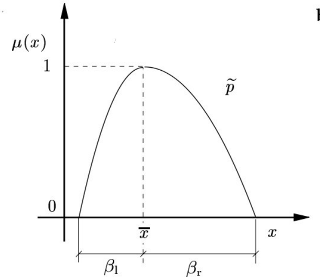


Рис. 2.3. Квадратичне нечітке число

Експоненційне нечітке число $\tilde{p} = \mathrm{efn}(\overline{x},\tau_l,\tau_r)$ визначається функцією належності (рис. 2.4)

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_l}}, & x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_r^2}}, & x \geq \overline{x}. \end{cases}$$

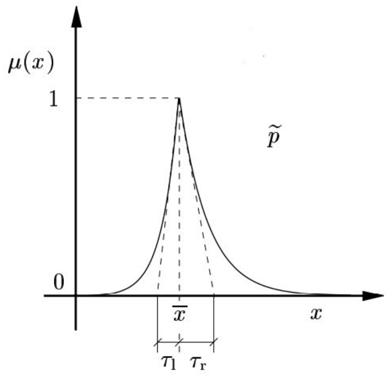


Рис. 2.4. Експоненційне нечітке число

Аналогічно до випадку квазігауссівських чисел є сенс визначити **квазіекспоненційні нечіткі числа**.

У цьому випадку функція належності квадратичного нечіткого числа прирівнюється до нуля для всіх $x \in \mathbb{R}$ таких, що $x < \overline{x} - 4{,}5\tau_l$ або $x > \overline{x} + 4{,}5\tau_r$. Можемо позначити $\tilde{p} = \mathrm{efn}^*(\overline{x},\tau_l,\tau_r)$. При цьому

$$\mu_{\tilde{p}} = \begin{cases} 0, & x \leq \overline{x} - 4{,}5\sigma_l; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_l}}, & \overline{x} - 4{,}5\sigma_l < x < \overline{x}; \\ e^{-\frac{(x-\overline{x})}{\tau_r}}, & \overline{x} \leq x < \overline{x} + 4{,}5\sigma_r; \\ 0, & x \geq \overline{x} + 4{,}5\sigma_r. \end{cases}$$

Інтервалом нечіткості буде

$$W = [w_l,w_r] = [\overline{x}-4{,}5\tau_l,\overline{x}+4{,}5\tau_r] = \mathrm{supp}(\tilde{p}) \cup \{\overline{x}-4{,}5\tau_l,\overline{x}+4{,}5\tau_r\}.$$

Слід зазначити, що, як у випадку з нечіткими множинами, нечіткі числа є узагальненням поняття чіткого числа. Функція належності у цьому випадку матиме вигляд

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \overline{x}; \\ 1, & x = \overline{x}; \\ 0, & x > \overline{x}. \end{cases}$$

2.3. Арифметичні операції над нечіткими числами

Так само як для нечітких множин є визначеними узагальнені теоретико-множинні операції, для нечітких чисел існують узагальнені арифметичні операції: додавання, віднімання, множення та ділення. Формальним підходом для означення цих операцій є застосування принципу узагальнення Заде (2.1). Нехай $\circ$ позначає одну із чотирьох стандартних арифметичних дій. Тоді функція належності нечіткого числа $\tilde{q} = \tilde{p_1} \circ \tilde{p_2}$ визначається співвідношенням

$$\mu_{\tilde{q}}(z) = \sup_{z=x_1 \circ x_2} \min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2)\}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Утім, оскільки для визначення результуючої функції належності нам потрібно шукати $z = x_1 \circ x_2$ для всеможливих x_1, x_2, на практиці ця формула є досить важкою для застосування. Більш придатним для проблем практики є підхід, що базується на інтервальній арифметиці, запропонованій Рамоном Муром. Щодо нечітких чисел цей підхід був розвинений А. Кауфманом та М. Гуптою.

Зазначимо, що будь-яку нечітку множину $\tilde{A}$ можна зобразити у вигляді об'єднання її α-перерізів:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha,$$

де $\mu_{cut_\alpha(\tilde{A})}$ є характеристичною функцією звичайної множини $cut_\alpha(\tilde{A})$.

Для знаходження α-перерізу, який зображує задане нечітке число $\tilde{p}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{p}}(x)$, інтервалом нечіткості $W = [w_l, w_r]$ та модальним значенням $\overline{x}$, потрібно:

1. Ліву частину α-перерізу знаходимо, виразивши x із рівняння $\mu_{\tilde{p}}(x) = \alpha$, $w_l \leq x \leq \overline{x}$.
2. Праву частину α-перерізу знаходимо, виразивши x із рівняння $\mu_{\tilde{p}}(x) = \alpha$, $\overline{x} \leq x \leq w_r$.

Для знаходження нечіткого числа за заданим α перерізом слід виконати зворотні дії. Розглянемо приклад.

Приклад 2.2. Нехай задано нечітке число трикутного вигляду $\tilde{p} = (4; 3; 2)$. Функція належності цього нечіткого числа має вигляд

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-4}{3}, & 1 < x < 4; \\ 1 - \frac{x-4}{2}, & 4 < x < 6; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Знайдемо лівий кінець інтервалу:

$$\begin{aligned} 1+\frac{x-4}{3} &= \alpha, \\ 3+x-4 &= 3\alpha, \\ x &= 1+3\alpha. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо правий кінець інтервалу:

$$\begin{aligned} 1-\frac{x-4}{2} &= \alpha, \\ 2-x+4 &= 2\alpha, \\ x &= 6-2\alpha. \end{aligned}$$

Отже, $\tilde{p} = [1+3\alpha; 6-2\alpha]$. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ ми отримуємо інтервал $[1{,}6] = W_{\tilde{p}}$, а при $\alpha = 1$ отримуємо точку $4 = \overline{x}$.

З іншого боку, виразивши α з рівностей $x = 1+3\alpha$ та $x = 6-2\alpha$, знаходимо функцію $\mu_{\tilde{p}}(x)$.

У загальному випадку для нечіткого числа трикутного вигляду $\tilde{p} = (\overline{x}; \alpha_l; \alpha_r)$ α-переріз визначається як $[\overline{x} - \alpha_l + \alpha_l\alpha; \overline{x} + \alpha_r - \alpha_r\alpha]$.

Нехай задані два нечіткі числа $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ з α-перерізами $[p_l(\alpha); p_r(\alpha)]$ та $[q_l(\alpha); q_r(\alpha)]$, відповідно. Тоді арифметичні операції над заданими нечіткими числами визначаються таким чином:

- додавання:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \oplus [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [p_l(\alpha) + q_l(\alpha); p_r(\alpha) + q_r(\alpha)];$$

- віднімання:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \ominus [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [p_l(\alpha) - q_r(\alpha); p_r(\alpha) - q_l(\alpha)];$$

- множення:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \otimes [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [\min(M_\alpha), \max(M_\alpha)],$$
$$M_\alpha = \{p_l(\alpha)q_l(\alpha), p_l(\alpha)q_r(\alpha),$$
$$p_r(\alpha)q_l(\alpha), p_r(\alpha)q_r(\alpha)\};$$

- ділення:

$$[p_l(\alpha); p_r(\alpha)] \oslash [q_l(\alpha); q_r(\alpha)] = [\min(D_\alpha), \max(D_\alpha)],$$
$$D_\alpha = \{\frac{p_l(\alpha)}{q_l(\alpha)}, \frac{p_l(\alpha)}{q_r(\alpha)}, \frac{p_r(\alpha)}{q_l(\alpha)}, \frac{p_r(\alpha)}{q_r(\alpha)}\}.$$

Приклад 2.3. Нехай задано два нечіткі числа трикутного вигляду: $\tilde{p} = (10; 3; 2)$, $\tilde{p} = (5; 1; 3)$; α-перерізи цих чисел дорівнюватимуть відповідно $[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha]$, $[4 + \alpha; 8 - 3\alpha]$.

Знайдемо суму:

$$[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha] \oplus [4 + \alpha; 8 - 3\alpha] = [11 + 4\alpha; 20 - 5\alpha].$$

Ліва частина функції належності:

$$x = 11 + 4\alpha;$$
$$\alpha = \frac{x - 11}{4} = 1 + \frac{x - 15}{4}.$$

Аналогічно для правої частини маємо: $\alpha = 1 - \frac{x-15}{5}$.

Отже, результатом додавання буде нечітке число трикутного вигляду $(15; 4; 5)$ із функцією належності

$$\mu_\oplus(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-15}{4}, & 11 \le x \le 15; \\ 1 - \frac{x-15}{5}, & 15 < x \le 20; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Для різниці маємо:

$$[7+3\alpha;12-2\alpha]\ominus[4+\alpha;8-3\alpha]=[-1+6\alpha;8-3\alpha].$$

Результатом буде нечітке число трикутного вигляду $(5;6;3)$ із функцією належності

$$\mu_{\ominus}(x)=\begin{cases}1+\frac{x-5}{6}, & -1\le x\le 5;\\ 1-\frac{x-5}{3}, & 5<x\le 8;\\ 0 & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Випадок множення та ділення є важчим, оскільки в результаті ми не отримаємо нечіткі числа трикутного вигляду. Для множення α-переріз матиме вигляд

$$\begin{aligned}[7+3\alpha;12-2\alpha]\otimes[4+\alpha;8-3\alpha]&=\\ &=[(7+3\alpha)(4+\alpha);(12-2\alpha)(8-3\alpha)]=\\ &=[3\alpha^2+19\alpha+28;6\alpha^2-52\alpha+96].\end{aligned}$$

Знайдемо ліву частину функції належності ($x\in[28;50]$):

$$\begin{aligned}&3\alpha^2+19\alpha+28-x=0;\\ &D=19^2-4\cdot3\cdot(28-x)=25+12x.\end{aligned}$$

Отримаємо два корені:

$$\alpha_1=\frac{-19+\sqrt{25+12x}}{6};\qquad \alpha_2=\frac{-19-\sqrt{25+12x}}{6}.$$

У випадку α_2 функція належності буде від'ємною для всіх $x\in[28;50]$, тобто це сторонній корінь.

Для правої частини маємо рівняння ($x\in[50;96]$):

$$\begin{aligned}&6\alpha^2-52\alpha+96-x=0;\\ &D=(-52)^2-4\cdot6\cdot(96-x)=400+24x.\end{aligned}$$

Коренями рівняння будуть

$$\alpha_1 = \frac{52 + \sqrt{400 + 24x}}{12}; \qquad \alpha_2 = \frac{52 - \sqrt{400 + 24x}}{12}.$$

У цьому випадку стороннім коренем буде α_1, оскільки для довільного $x \in [50; 96]$ результат буде більшим за 1 (а це є суперечністю, оскільки 1 є максимально можливим значенням функції належності нечіткого числа).

Отже, результатом множення буде нечітке число з функцією належності

$$\mu_{\otimes}(x) = \begin{cases} \frac{-19+\sqrt{25+12x}}{6}, & 28 \le x \le 50; \\ \frac{52-\sqrt{400+24x}}{12}, & 50 < x \le 96; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Насамкінець розглянемо операцію ділення: α-перерізом буде

$$[7 + 3\alpha; 12 - 2\alpha] \oslash [4 + \alpha; 8 - 3\alpha] = \\ = [\frac{7 + 3\alpha}{8 - 3\alpha}; \frac{12 - 2\alpha}{4 + \alpha}].$$

Для лівої частини маємо рівняння ($x \in [\frac{7}{8}; 2]$):

$$x = \frac{7 + 3\alpha}{8 - 3\alpha};$$
$$8x - 3\alpha x = 7 + 3\alpha;$$
$$\alpha = \frac{8x - 7}{3x + 3}.$$

Аналогічно для правої частини ($x \in [2;3]$) отримуємо:

$$\begin{aligned} x &= \frac{12-2\alpha}{4+\alpha}; \\ 4x+\alpha x &= 12-2\alpha; \\ \alpha &= \frac{12-4x}{x+2}. \end{aligned}$$

Отже, результатом ділення буде нечітке число з функцією належності

$$\mu_{\otimes}(x) = \begin{cases} \frac{8x-7}{3x+3}, & \frac{7}{8} \le x \le 2; \\ \frac{12-4x}{x+2}, & 2 < x \le 3; \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Основними мінусами нечіткої арифметики є такі:

1. Відсутність протилежного елемента. Тобто якщо за нейтральний елемент узяти чітке число 0, то $\tilde{p} \ominus \tilde{p} \neq 0$.
2. Відсутність оберненого елемента при множенні.
3. Залежність результату від порядку виконання операцій.

Для ілюстрації останнього пункту розглянемо три вирази:

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{p}) &= \tilde{p}^3 - 2\tilde{p}^2 - 21\tilde{p} - 18; \\ f_2(\tilde{p}) &= \Big[(\tilde{p}-2)\tilde{p} - 21\Big]\tilde{p} - 18; \\ f_3(\tilde{p}) &= (\tilde{p}+3)(\tilde{p}+1)(\tilde{p}-6). \end{aligned}$$

Нехай $\tilde{p} = \mathrm{tfn}(1{,}5; 1{,}5; 1{,}5)$. Тоді

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{p}) &= \mathrm{tfn}(-50{,}625; 39{,}375; 59{,}625); \\ f_2(\tilde{p}) &= \mathrm{tfn}(-50{,}625; 39{,}375; 32{,}625); \\ f_3(\tilde{p}) &= \mathrm{tfn}(-50{,}625; 93{,}375; 41{,}625). \end{aligned}$$

У літературі такий ефект називається **завищенням**.

Нечітке число $\tilde{p}$ **типу** $L - R$ задається функцією належності

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\overline{x}-x}{\alpha_l}\right), & \text{для } x \leq \overline{x}; \\ R\left(\frac{x-\overline{x}}{\alpha_r}\right), & \text{для } x \leq \overline{x}. \end{cases}$$

При цьому функція L задовольняє такі умови:
1) $L(x) = L(-x)$;
2) $L(0) = 1$, $L(1) = 0$;
3) $L(x)$ є незростаючою на $[0,\infty)$.
Аналогічні умови накладаються і на R. Параметр $\overline{x}$ позначає модальне значення нечіткого числа, α_l та α_r – відповідно ліве та праве відхилення. Нечітке число $\tilde{p}$ типу $L - P$ прийнято позначати як $(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR}$.

Очевидно, що нечітке число $\tilde{p} = (\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR}$ є додатним тоді та тільки тоді, коли $\overline{x} - \alpha_l > 0$ (зазначимо, що $L(1) = 0$).

Як приклади функцій L можна навести зокрема такі:

- $L(x) = \max(0,1 - |x|^P)$, $P > 0$;
- $L(x) = e^{-|x|^P}, P > 0$;
- $L(x) = \frac{1}{1+|x|^P}$, $P > 0$.

Якщо $L(x)$ і $R(x)$ є лінійними, то відповідне нечітке число типу $L - R$ є трикутним нечітким числом.

Нехай задано два нечіткі числа типу $L - R$:

$$\tilde{p} = (\overline{x},\alpha_l,\alpha_r), \quad \tilde{q} = (\overline{y},\beta_l,\beta_r).$$

Тоді:
1) $(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR} \oplus (\overline{y},\beta_l,\beta_r)_{LR} = (\overline{x} + \overline{y},\alpha_l + \beta_l,\alpha_r + \beta_r)_{LR}$;
2) $(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR} \ominus (\overline{y},\beta_l,\beta_r)_{LR} = (\overline{x} - \overline{y},\alpha_l + \beta_r,\alpha_r + \beta_l)_{LR}$.
Множення визначається таким чином:
1) $\tilde{p} > 0$, $\tilde{q} > 0$:

$$(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR} \otimes (\overline{y},\beta_l,\beta_r)_{LR} = (\overline{xy},\overline{x}\beta_l + \overline{y}\alpha_l,\overline{x}\beta_r + \overline{y}\alpha_r)_{LR};$$

2) $\tilde{p} < 0$, $\tilde{q} > 0$:

$$(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR} \otimes (\overline{y},\beta_l,\beta_r)_{LR} = (\overline{xy},\overline{y}\alpha_l - \overline{x}\beta_r,\overline{y}\alpha_r + \overline{x}\beta_l)_{LR};$$

3) $\tilde{p} < 0$, $\tilde{q} < 0$:

$$(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR} \otimes (\overline{y},\beta_l,\beta_r)_{LR} = (\overline{xy},-\overline{y}\alpha_r - \overline{y}\beta_r,\overline{y}\alpha_l + \overline{x}\beta_l)_{LR}.$$

Нечітке число, обернене до додатного нечіткого числа $(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR}$, наближено визначається як

$$(\overline{x},\alpha_l,\alpha_r)_{LR}^{-1} \simeq (\overline{x}^{-1},\alpha_r\overline{x}^{-2},\alpha_l\overline{x}^{-2})_{RL}.$$

Схожа формула має місце і для від'ємних нечітких чисел, оскільки для них $-(\tilde{p}^{-1}) = (-\tilde{p}^{-1})$.

Ділення нечітких чисел визначається шляхом знаходження оберненого нечіткого числа для дільника і застосування формул для нечіткого множення.

Розглянемо частковий випадок вищенаведених формул для нечітких чисел трикутного вигляду.

Нехай задано трикутне нечітке число $\tilde{p} = (\overline{x};\alpha_l;\alpha_r)$. Поставимо йому у відповідність трійку $(p_1,p_2,p_3) = (\overline{x} - \alpha_l,\overline{x},\overline{x} + \alpha_r)$. Аналогічно трикутному нечіткому числу $\tilde{q}$ поставимо у відповідність трійку (q_1,q_2,q_3). Припустимо, що ці нечіткі числа є невід'ємними. Тоді мають місце такі співвідношення:

1) $(p_1,p_2,p_3) \oplus (q_1,q_2,q_3) = (p_1 + q_1,p_2 + q_2,p_3 + q_3)$;
2) $(p_1,p_2,p_3) \ominus (q_1,q_2,q_3) = (p_1 - q_3,p_2 - q_2,p_3 - q_1)$;
3) $(p_1,p_2,p_3) \otimes (q_1,q_2,q_3) \simeq (p_1 \cdot q_1,p_2 \cdot q_2,p_3 \cdot q_3)$;
4) $(p_1,p_2,p_3) \oslash (q_1,q_2,q_3) \simeq (p_1/q_3,p_2/q_2,p_3/q_1)$.

Як самостійну вправу читачеві пропонується виконати попередній приклад, використовуючи вищенаведені арифметичні операції.

3. Нечіткі лінійні рівняння та нечіткі системи лінійних рівнянь

3.1. Нечіткі лінійні рівняння

Однією із базових задач лінійної алгебри є розв'язання звичайного лінійного рівняння $ax + b = c$ для заданих a,b,c, де $a \neq 0$. Розв'язком цього рівняння є $x = (c - b)/a$. Для отримання цього розв'язку слід відняти b від обох частин рівняння, а потім помножити рівняння на $\frac{1}{a}$.

Розглянемо нечітке рівняння

$$\tilde{a} \cdot \tilde{x} + \tilde{b} = \tilde{c}$$

відносно $\tilde{x}$, де $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}$ є трикутними нечіткими числами. При цьому ми припускаємо, що нуль не належить носієві $\tilde{a}$: $0 \notin \operatorname{supp} \tilde{a}$.

Нехай коефіцієнти рівняння зображено трійками $\tilde{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\tilde{b} = (b_1,b_2,b_3)$, $\tilde{c} = (c_1,c_2,c_3)$. Нехай $\tilde{x} \simeq (x_1,x_2,x_3)$.

Виконаємо необхідні перетворення:

$$(\tilde{a})^{-1}(\tilde{a} \otimes \tilde{x} \oplus \tilde{b} \ominus \tilde{b}) = (\tilde{c} \ominus \tilde{b}) \oslash \tilde{a}.$$

Оскільки $\tilde{b} \ominus \tilde{b} \neq 0$ і $\tilde{a} \oslash \tilde{a} \neq 1$, то ліва частина рівняння не дорівнює $\tilde{x}$.

Класичним підходом до розв'язання лінійних рівнянь із трикутними нечіткими числами є прирівнювання α-перерізів (прирівнюємо відповідні перерізи лівої та правої частин):

$$[a_l(\alpha),a_r(\alpha)][x_l(\alpha),x_r(\alpha)] + [b_l(\alpha),b_r(\alpha)] = [c_l(\alpha),c_r(\alpha)].$$

$[x_l(\alpha),x_r(\alpha)]$ буде розв'язком розглядуваного рівняння, якщо виконуються такі умови:

- $x_l(\alpha)$ є монотонно зростаючою функцією α, $0 \leq \alpha \leq 1$;

- $x_r(\alpha)$ є монотонно спадною функцією α, $0 \le \alpha \le 1$;
- $x_l(1) \le x_r(1)$.

Приклад 3.1. Нехай коефіцієнти зображені трійками $\tilde{a} = (1,2,3)$, $\tilde{b} = (-3,-2,-1)$, $\tilde{c} = (3,4,5)$. Тоді відповідні α-перерізи матимуть вигляд $[1+\alpha; 3-\alpha]$, $[-3+\alpha; -1-\alpha]$, $[3+\alpha; 5-\alpha]$. Рівняння зводиться до інтервального зображення:

$$[(1+\alpha)x_l(\alpha) - 3 + \alpha, (3-\alpha)x_r(\alpha) - 1 - \alpha] = [3+\alpha; 5-\alpha].$$

Звідси маємо, що

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \Big[\frac{6}{1+\alpha}, \frac{6}{3-\alpha}\Big].$$

Зазначимо, що $x_l(\alpha)$ є спадною функцією, а $x_r(\alpha)$ – зростаючою. Це означає, що в нашому випадку розв'язку не існує.

Приклад 3.2. Нехай коефіцієнти зображені трійками $\tilde{a} = (8,9,19)$, $\tilde{b} = (-3,-2,-1)$, $\tilde{c} = (3,5,7)$ з α-перерізами $[8+\alpha; 10-\alpha]$, $[-3+\alpha; -1-\alpha]$, $[3+2\alpha; 7-2\alpha]$. Рівняння зводиться до інтервального зображення

$$[(8+\alpha)x_l(\alpha) - 3 + \alpha, (10-\alpha)x_r(\alpha) - 1 - \alpha] = [3+2\alpha; 7-2\alpha].$$

Звідси маємо, що

$$[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \Big[\frac{6+\alpha}{8+\alpha}, \frac{8-\alpha}{10-\alpha}\Big].$$

Оскільки

$$x_l'(\alpha) = \frac{2}{(8+\alpha)^2} > 0; \quad x_r'(\alpha) = -\frac{2}{(10-\alpha)^2} < 0,$$

то $x_l(\alpha)$ є зростаючою функцією, а $x_r(\alpha)$ – спадною. При цьому $x_l(1) = x_r(1) = \frac{7}{9}$, а отже, $[x_l(\alpha), x_r(\alpha)] = \left[\frac{6+\alpha}{8+\alpha}, \frac{8-\alpha}{10-\alpha}\right]$ є розв'язком рівняння.

Другим підходом є застосування принципу узагальнення Заде. Чітким розв'язком рівняння $ax + b = c$ є $x = \frac{c-b}{a}$. Введемо нечіткість, замінивши відповідні коефіцієнти нечіткими числами:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{c} - \tilde{b}}{\tilde{a}}.$$

Застосуємо принцип узагальнення:

$$\tilde{x}(x) = sup_{x=\frac{c-b}{a}} \min\Big(\mu_{\tilde{a}}(a),\mu_{\tilde{b}}(b),\mu_{\tilde{c}}(c)\Big).$$

У цьому випадку розв'язок завжди існує, хоч і не завжди чітко задовольняє вихідне рівняння.

Альтернативним підходом є застосування інтервальної арифметики, тобто зображення розв'язку у вигляді

$$[x_l(\alpha),x_r(\alpha)] = \frac{[c_l(\alpha),c_r(\alpha)] - [b_l(\alpha),b_r(\alpha)]}{[a_l(\alpha),a_r(\alpha)]}$$

або

$$[x_l(\alpha),x_r(\alpha)] = \Big[\frac{c_l(\alpha) - b_r(\alpha)}{a_r(\alpha)},\frac{c_r(\alpha) - b_l(\alpha)}{a_l(\alpha)}\Big]$$

при $a_l(\alpha) > 0$ для всіх α. У цьому випадку розв'язок також існує, хоч і не завжди чітко задовольняє вихідне рівняння.

Приклад 3.3. Продовжуючи останній приклад, маємо:

$$[x_l(\alpha),x_r(\alpha)] = \Big[\frac{4+3\alpha}{10-\alpha},\frac{10-3\alpha}{8+\alpha}\Big].$$

3.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь із нечіткою правою частиною

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь широко застосовуються при моделюванні різних процесів.

При цьому часом виникає необхідність розглянути системи з нечіткими вхідними даними.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \tilde{y_1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \tilde{y_2}; \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \tilde{y_n}, \end{cases}$$

де матриця коефіцієнтів $A = (a_{ij})$, $1 \le i,j \le n$, є чіткою $n \times n$-матрицею, а $\tilde{y_i}$ є нечіткими числами, називається **нечіткою системою лінійних алгебраїчних рівнянь** (далі НСЛАР).

Вектор нечітких чисел $(\tilde{x_1},\tilde{x_2},\ldots,\tilde{x_n})^T$, де $\tilde{x_i} = [(x_i)_l(\alpha),(x_i)_r(\alpha)]$, $1 \le i \le n$, $0 \le r \le 1$, називається **розв'язком НСЛАР**, якщо виконуються такі умови:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x_j}\Big)_l = \sum_{j=1}^{n} \big(a_{ij}(x_j)(\alpha)_l\big) = (y_i)_l;$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x_j}\Big)_r = \sum_{j=1}^{n} \big(a_{ij}(x_j)(\alpha)_r\big) = (y_i)_r.$$

Запишемо ці дві умови у вигляді однієї системи розмірністю $2n \times 2n$ від невідомих

$$X = \Big((x_1)_l(\alpha), \ldots, (x_n)_l(\alpha), -(x_1)_r(\alpha), \ldots, -(x_n)_r(\alpha)\Big)^T$$

із правою частиною

$$Y = \Big((y_1)_l(\alpha), \ldots, (y_n)_l(\alpha), -(y_1)_r(\alpha), \ldots, -(y_n)_r(\alpha)\Big)^T.$$

Коефіцієнти системи визначимо за таким правилом:

$$a_{ij} \ge 0 \implies s_{ij} = a_{ij}, s_{i+n,j} = a_{ij};$$

$$a_{ij} < 0 \implies s_{i,j+n} = -a_{ij}, s_{i+n,j} = -a_{ij}.$$

Усі інші s_{ij}, що не визначені попередніми умовами, прирівнюються до нуля.

Запишемо систему в матричному вигляді:

$$SX = Y.$$

При цьому матриця S матиме блочну структуру:

$$S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix},$$

де B містить усі додатні елементи початкової матриці A, C – абсолютні значення від'ємних елементів матриці A, $A = B - C$.

Справедлива така теорема:

Теорема 3.1. Матриця S є невиродженою тоді та тільки тоді, коли матриці $A = B - C$ та $B + C$ є невиродженими.

Існування та єдиність розв'язку НСЛАР визначається теоремою:

Теорема 3.2. Розв'язок X існує та є єдиним для довільного вектора Y тоді та тільки тоді, коли матриця S^{-1} є невід'ємною (тобто $(S^{-1})_{ij} \geq 0$, $1 \leq i,j \leq 2n$).

Нехай усі нечіткі числа в НСЛАР є трикутними нечіткими числами і нехай $X = \{((x_i)_l(\alpha), -(x_i)_r(\alpha)), 1 \leq i \leq n\}$ є єдиним розв'язком НСЛАР. Вектор нечітких чисел $u = \{((u_i)_l(\alpha),(u_i)_r(\alpha)),1 \leq i \leq n\}$, що визначається співвідношеннями

$$(u_i)_l(\alpha) = \min\{(x_i)_l(\alpha), (x_i)_r(\alpha), (x_i)_l(1)\},$$
$$(u_i)_r(\alpha) = \max\{(x_i)_l(\alpha), (x_i)_r(\alpha), (x_i)_l(1)\},$$

називається **нечітким розв'язком** системи $SX = Y$.

Якщо всі $((x_i)_l(\alpha),(x_i)_r(\alpha))$ є нечіткими числами, тобто $(u_i)_l(\alpha) = (x_i)_l(\alpha)$ і $(u_i)_r(\alpha) = (x_i)_r(\alpha)$ для всіх i, $1 \leq i \leq n$, то u називається **сильним нечітким розв'язком**.

У протилежному випадку u називається **слабким нечітким розв'язком**.

Приклад 3.4. Розглянемо НСЛАР розмірністю 2×2:

$$\begin{cases} x_1 \ \ -x_2 = [\alpha, 2 - \alpha]; \\ x_1 + 3x_2 = [4 + \alpha, 7 - 2\alpha]. \end{cases}$$

Сформуємо матрицю S. У цьому випадку маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком буде

$$X = \begin{pmatrix} (x_1)_l(\alpha) \\ (x_2)_l(\alpha) \\ -(x_1)_r(\alpha) \\ -(x_2)_r(\alpha) \end{pmatrix} = S^{-1}Y =$$
$$= \begin{pmatrix} 1{,}125 & -0{,}125 & 0{,}375 & -0{,}375 \\ -0{,}375 & -0{,}375 & -0{,}125 & 0{,}125 \\ 0{,}375 & -0{,}375 & 1{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}125 & 0{,}125 & -0{,}375 & -0{,}375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 + \alpha \\ \alpha - 2 \\ 2\alpha - 7 \end{pmatrix},$$

тобто $\tilde{x}_1 = [1{,}375 + 0{,}625\alpha, 2{,}875 - 0{,}875\alpha]$, $\tilde{x}_2 = [0{,}875 + 0{,}125\alpha, 1{,}375 - 0{,}375\alpha]$ і $(x_i)_l(\alpha) \leq (x_i)_r(\alpha)$, $(x_i)_l$ є монотонно спадними величинами, $i = 1{,}2$. А отже, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ є сильним нечітким розв'язком НСЛАР.

Приклад 3.5. Розглянемо НСЛАР розмірністю 3×3:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 = & [\alpha, 2-\alpha]; \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 = & [2+\alpha, 3]; \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 = & [-2, -1-\alpha]. \end{cases}$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вектор Y при цьому дорівнює

$$Y = \left(\alpha, 2+\alpha, -2, \alpha-2, -3, 1+\alpha\right)^T.$$

Вектором розв'язків є

$$X = \begin{pmatrix} -2{,}31 + 3{,}62\alpha \\ -0{,}62 + 0{,}77\alpha \\ 1{,}08 - 2{,}15\alpha \\ -4{,}69 + 3{,}38\alpha \\ 1{,}62 - 0{,}23\alpha \\ 2{,}92 - 1{,}85\alpha \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися (побудувавши графік), що $\tilde{x}_2$ та $\tilde{x}_3$ не є нечіткими числами. Отже, у цьому випадку система матиме тільки слабкий нечіткий розв'язок:

$$\tilde{u}_1 = [-2{,}31 + 3{,}62\alpha, 4{,}69 - 3{,}38\alpha];$$
$$\tilde{u}_2 = [-1{,}62 + 0{,}23\alpha, -0{,}62 - 0{,}77\alpha];$$
$$\tilde{u}_3 = [-2{,}92 + 1{,}85\alpha, 1{,}08 - 2{,}15\alpha].$$

3.3. Повністю нечіткі системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Введемо декілька нових означень.

Матриця $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ називається **нечіткою матрицею**, якщо кожен її елемент є нечітким числом. Матриця $\tilde{A}$ називаєтсья **додатною** (від'ємною), що позначається як $\tilde{A} > 0$ ($\tilde{A} < 0$), якщо кожен елемент $\tilde{A}$ є додатним (від'ємним) нечітким числом. Аналогічно визначаються невід'ємні та недодатні нечіткі матриці.

Надалі у цьому підрозділі будемо розглядати додатні нечіткі числа типу $L - R$.

Враховуючи, що $\tilde{a}_{ij} = ((\overline{x})_{ij}, (\alpha_{ij})_l, (\alpha_{ij})_r)$, нечітку матрицю $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ у цьому випадку зручно зобразити у вигляді трьох чітких $n \times m$ матриць $A = (\overline{x}_{ij}), M = ((\alpha_{ij})_l), N = ((\alpha_{ij})_r)$. Позначатимемо $\tilde{A} = (A, M, N)$.

Квадратна нечітка матриця $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ називається **верхньою трикутною нечіткою матрицею**, якщо $\tilde{a}_{ij} = \tilde{0} = (0; 0; 0)$, $i > j$. Нечітка матриця, отримана транспонуванням верхньої трикутної нечіткої матриці, називається **нижньою трикутною нечіткою матрицею**.

Нехай $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ і $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ – дві нечіткі матриці $m \times n$ та $n \times p$, відповідно. Введемо операцію **добутку** нечітких матриць, $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$. При цьому матриця розмірністю $\tilde{C}$ є матрицею розмірністю $m \times p$, елементи якої визначаються таким чином:

$$\tilde{c}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} \tilde{a}_{ik} \otimes \tilde{b}_{kj}.$$

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{12} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \cdots (\tilde{a}_{1n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_1; \\ (\tilde{a}_{21} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{22} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \cdots (\tilde{a}_{2n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_2; \\ \vdots \\ (\tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{n2} \otimes \tilde{x}_2) \oplus \cdots (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_n. \end{cases}$$

Матрична форма цієї системи $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$, або просто $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, де матриця коефіцієнтів $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $1 \le i,j \le n$, є нечіткою $n \times n$-матрицею, $\tilde{x},\tilde{b}$ є векторами нечітких чисел (нечіткими векторами). Така система називається **повністю нечіткою системою лінійних алгебраїчних рівнянь** (надалі ПНСЛАР).

Позначимо $\tilde{b} = (b,h,g) \ge 0$, $\tilde{x} = (x,y,z) \ge 0$. Маємо

$$(A,M,N) \otimes (x,y,z) = (b,h,g).$$

Кажемо, що $\tilde{x}$ є нечітким розв'язком ПНСЛАР $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ тоді та тільки тоді, коли виконуються чіткі рівності

$$Ax = b, \quad Ay + Mx = g, \quad Az + Nx = h.$$

При цьому вважаємо, що для знаходження функцій належності розв'язку та коефіцієнтів системи застосовуються функції L та R одного типу.

Зазначимо, що для знаходження чітких розв'язків вищенаведених трьох систем можуть бути застосовані відомі класичні методи (зокрема й ітераційні).

Приклад 3.6. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \tilde{5}\tilde{x}_1 \oplus \tilde{6}\tilde{x}_2 = \tilde{50}; \\ \tilde{7}\tilde{x}_1 \oplus \tilde{4}\tilde{x}_2 = \tilde{48}. \end{cases}$$

Перепишемо її у вигляді (при цьому присвоїмо конкретні значення нечітким коефіцієнтам)

$$\begin{cases} (5;1;1) \otimes (x_1;y_1;z_1) \oplus (6;1;2) \otimes (x_2;y_2;z_2) = (50;10;17); \\ (7;1;0) \otimes (x_1;y_1;z_1) \oplus (4;0;1) \otimes (x_2;y_2;z_2) \qquad = (48{,}5{,}7). \end{cases}$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 50 \\ 48 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 48 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Далі ми маємо знайти розв'язок $Ay + Mx = g$. Оскільки x уже відомий, то перепишемо систему у вигляді $Ay = g - Mx$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

На останньому кроці нам слід знайти розв'язок $Az + Nx = h$. Оскільки $Az = h - Nx$, то маємо:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отже, розв'язком системи є нечіткі числа трикутного вигляду

$$\tilde{x}_1 = \left(4{,}\tfrac{1}{11}{,}0\right), \quad \tilde{x}_2 = \left(5{,}\tfrac{1}{11}{,}\tfrac{1}{2}\right).$$

4. Методи порівняння нечітких чисел

Існують різні підходи до порівняння нечітких чисел. Умовно їх можна поділити на два великі класи.

1. **Методи порівняння першого типу** відображають нечіткі числа на дійсну числову пряму за допомогою деякої функції $M : \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ і використовують нестрогий порядок $\geq$. Для більшості методів має місце

   $$M(\tilde{p}) \geq M(\tilde{q}) \implies \tilde{p} \geq_M \tilde{q},$$

   де $\geq_M$ – відношення переваги, індуковане M.
2. **Методи порівняння другого типу** генерують нечітке бінарне відношення. У цьому випадку $M : \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R}) \times \tilde{\mathscr{P}}'(\mathbb{R}) \to [0,1]$, де значення $M(\tilde{p},\tilde{q}) \in [0,1]$ показує степінь, з яким $\tilde{p}$ переважає $\tilde{q}$. Відповідно нечіткі числа впорядковуються згідно із правилом

   $$M(\tilde{p},\tilde{q}) \geq M(\tilde{q},\tilde{p}) \implies \tilde{p} \geq_M \tilde{q}.$$

4.1. Методи порівняння нечітких чисел першого типу

4.1.1. Метод Адамо

Метод, запропонований Адамо, полягає у порівнянні правих частин α-перерізів для заданого α:

$$AD_\alpha(A) = \alpha_\alpha^+.$$

Для порівняння нечітких чисел за цим методом спершу потрібно задати рівень α.

Приклад 4.1. Розглянемо два нечітких числа трикутного вигляду, задані через крайні точки: $\tilde{p} = (0; 0{,}2; 1)$, $\tilde{q} = (0{,}2; 0{,}4; 0{,}5)$ (див. рис. 4.1).

В інтервальному вигляді маємо:

$$\tilde{p} = [0{,}2\alpha; 1 - 0{,}8\alpha], \quad \tilde{q} = [0{,}2 + 0{,}2\alpha; 0{,}5 - 0{,}1\alpha].$$

Для порівняння за методом Адамо нам потрібно задати рівень α і порівняти праві частини інтервалів, тобто $1 - 0{,}8\alpha$ і $0{,}5 - 0{,}1\alpha$. Очевидно, що

$$\begin{array}{ll} \tilde{p} < \tilde{q}, & \alpha < \frac{5}{7}; \\ \tilde{p} = \tilde{q}, & \alpha = \frac{5}{7}; \\ \tilde{p} > \tilde{q}, & \alpha > \frac{5}{7}. \end{array}$$

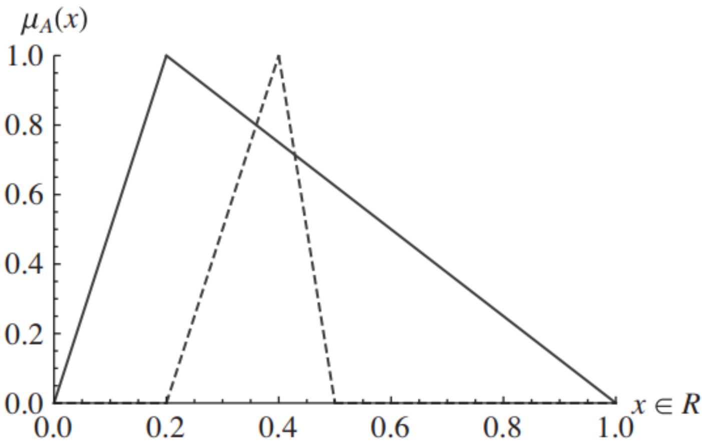


Рис. 4.1. Порівняння нечітких чисел

4.1.2. Метод порівняння центрів ядер

Метод полягає у порівнянні центрів ядер відповідних нечітких множин. У випадку нечітких чисел (які є унімодальними нечіткими множинами) цей метод зводиться до порівняння значень, на яких функції належності відповідних нечітких множин набувають значення 1.

4.1.3. Метод порівняння центрів тяжіння

Центр тяжіння нечіткого числа визначається за формулою

$$CoG(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} x\mu_{\tilde{p}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{p}}(x)dx}.$$

Узагальненням цього методу є метод, запропонований Ягером:

$$Y_1(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} g(x)\mu_{\tilde{p}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{p}}(x)dx},$$

де $g(x)$ показує важливість x.

Приклад 4.2. Порівняємо нечіткі числа із попереднього прикладу. Спершу запишемо їхні функції належності:

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 5x, & 0 < x \leq 0{,}2; \\ 1{,}25 - 1{,}25x, & 0{,}2 < x \leq 1; \\ 0 & \text{в інших випадках}; \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{q}}(x) = \begin{cases} 5x - 1, & 0{,}2 < x \leq 0{,}4; \\ 5 - 10x, & 0{,}4 < x \leq 0{,}5; \\ 0 & \text{в інших випадках}. \end{cases}$$

Знайдемо центр тяжіння для $\tilde{p}$:

$$CoG(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} x\mu_{\tilde{p}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{p}}(x)dx} = $$
$$= \frac{\int_{0}^{0{,}2} x \cdot 5xdx + \int_{0{,}2}^{1} x \cdot (1{,}25 - 1{,}25x)dx}{\int_{0}^{0{,}2} 5xdx + \int_{0{,}2}^{1} 1{,}25 - 1{,}25xdx} =$$

$$= \frac{5\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,2} + (1{,}25\frac{x^2}{2} - 1{,}25\frac{x^3}{3})\Big|_{0,2}^1}{5\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,2} + (1{,}25x - 1{,}25\frac{x^2}{2})\Big|_{0,2}^1} \approx 0{,}4.$$

Аналогічно для $\tilde{q}$ маємо:

$$CoG(\tilde{p}) = \frac{\int_{-\inf}^{\inf} x\mu_{\tilde{q}}(x)dx}{\int_{-\inf}^{\inf} \mu_{\tilde{q}}(x)dx} =$$

$$= \frac{\int_{0,2}^{0,4} x\cdot(5x-1)dx + \int_{0,4}^{0,5} x\cdot(5-10x)dx}{\int_{0,2}^{0,4}(5x-1)dx + \int_{0,4}^{0,5}(5-10x)dx} =$$

$$= \frac{(5\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{0,2}^{0,4} + (5\frac{x^2}{2} - 10\frac{x^3}{3})\Big|_{0,4}^{0,5}}{(5\frac{x^2}{2} - x)\Big|_{0,2}^{0,4} + (5x - 10\frac{x^2}{2})\Big|_{0,4}^{0,5}} \approx 0{,}366.$$

Оскільки $0{,}4 > 0{,}366$, то $\tilde{p} > \tilde{q}$.

4.1.4. Метод порівняння медіан

Нехай задано нечітке число в інтервальному вигляді: $\tilde{p} = [a_l(\alpha); a_r(\alpha)]$.

Потужністю нечіткого числа $\tilde{p}$ називається площа, обмежена його функцією належності:

$$\operatorname{card}\tilde{p} = \int_0^1 (a_r(\alpha) - a_l(\alpha))d\alpha.$$

Нехай $\operatorname{supp}\tilde{p} = [a,b]$. **Медіанним значенням** нечіткого числа $\tilde{p}$ із функцією належності $\mu_{\tilde{p}}(x)$ є дійсне число $m_{\tilde{p}}$ з носія нечіткого числа таке, що

$$\int_a^{m_{\tilde{p}}} \mu_{\tilde{p}}(x)dx = \int_{m_{\tilde{p}}}^b \mu_{\tilde{p}}(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{card}\tilde{p}.$$

Отже, $m_{\tilde{p}}$ є точкою, яка ділить навпіл площу, обмежену функцією належності $\tilde{p}$.

Для порівняння двох нечітких чисел $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ спершу слід знайти їхні медіанні значення, а потім порівняти їх:

$$\begin{aligned} \tilde{p} < \tilde{q}, &\qquad m_{\tilde{p}} < m_{\tilde{q}}; \\ \tilde{p} = \tilde{q}, &\qquad m_{\tilde{p}} = m_{\tilde{q}}; \\ \tilde{p} > \tilde{q}, &\qquad m_{\tilde{p}} > m_{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Приклад 4.3. Продовжимо попередній приклад. Знайдемо медіану $\tilde{p}$. За формулою площі трикутника знайдемо $\operatorname{card}\tilde{p} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 0{,}5$. Площа під лівою частиною функції належності $\tilde{p}$ дорівнює $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}2 = 0{,}1$, під правою, відповідно, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}8 = 0{,}4$.

Беручи до уваги, що $\frac{1}{2}\cdot\operatorname{card}\tilde{p} = 0{,}25$, візьмемо таку точку $m_{\tilde{p}} \in [0{,}2; 1]$, для якої $\int_{0{,}2}^{m_{\tilde{p}}} \mu_{\tilde{p}} = 0{,}25$.

Еквівалентно можемо записати:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - m_{\tilde{p}})(1{,}25 - 1{,}25\cdot m_{\tilde{p}}) &= 0{,}25; \\ (1 - m_{\tilde{p}})^2 &= 0{,}4; \\ (1 - m_{\tilde{p}} - 0{,}632)(1 - m_{\tilde{p}} + 0{,}632) &= 0; \\ m_{\tilde{p}} &\approx 0{,}368. \end{aligned}$$

Аналогічно $\operatorname{card}\tilde{p} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}3 = 0{,}15$, $\frac{1}{2}\cdot\operatorname{card}\tilde{p} = 0{,}075$. Площа під лівою частиною функції належності $\tilde{q}$ дорівнює $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}2 = 0{,}1$. Отже, медіану знаходимо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_{\tilde{q}} - 0{,}2)(5m_{\tilde{q}} - 1) &= 0{,}075; \\ 5(m_{\tilde{q}} - 0{,}2)(m_{\tilde{q}} - 0.2) &= 0{,}15; \\ (m_{\tilde{q}} - 0.2)^2 - 0{,}3 &= 0; \\ (m_{\tilde{q}} - 0.2 - 0.55)(m_{\tilde{q}} - 0.2 + 0.55) &= 0; m_{\tilde{q}} \approx 0{,}75. \end{aligned}$$

Оскільки $m_{\tilde{p}} < m_{\tilde{q}}$, то робимо висновок, що $\tilde{p} < \tilde{q}$.

4.1.5. Метод порівняння можливих середніх значень

Можливе середнє значення нечіткого числа (the possibilistic mean value), заданого в інтервальному вигляді, $\tilde{p} = [a_l(\alpha), a_r(\alpha)]$, визначається як зважене середнє значення α-перерізів нечіткого числа $\tilde{p}$:

$$E_P(\tilde{p}) = \int_0^1 \alpha(a_l(\alpha) + a_r(\alpha))d\alpha.$$

Існує версія цього методу, де замість α використовується узагальнена вагова функція $f(\alpha)$.

Приклад 4.4. Нагадаємо, що в інтервальному вигляді розглядувані нами нечіткі числа записуються таким чином:

$$\tilde{p} = [0{,}2\alpha; 1 - 0{,}8\alpha], \quad \tilde{q} = [0{,}2 + 0{,}2\alpha; 0{,}5 - 0{,}1\alpha].$$

Тоді

$$\begin{aligned} E_P(\tilde{p}) &= \int_0^1 \alpha(0{,}2\alpha + 1 - 0{,}8\alpha))d\alpha \\ &= \int_0^1 (-0{,}6\alpha^2 + \alpha)d\alpha = 0{,}3; \\ E_P(\tilde{q}) &= \int_0^1 \alpha(0{,}2 + 0{,}2\alpha + 0{,}5 - 0{,}1\alpha))d\alpha \\ &= \int_0^1 (0{,}1\alpha^2 + 0{,}7\alpha)d\alpha \approx 0{,}383. \end{aligned}$$

Оскільки $E_P(\tilde{p}) < E_P(\tilde{q})$, то робимо висновок, що $\tilde{p} < \tilde{q}$.

4.2. Методи порівняння нечітких чисел другого типу

У цьому підрозділі розглянемо тільки один із зазначеного класу методів, а саме метод порівняння, що базується на обчисленні площ відповідних нечітких чисел.

Для знаходження степеня, з яким одне нечітке число менше або дорівнює іншому, можна скористатися функцією

$$P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = \frac{S_{\inf(\tilde{p}) \leq \sup(\tilde{q})}}{S_{\tilde{p}} + S_{\tilde{q}}}, \quad S_{\inf(\tilde{p}) \leq \sup(\tilde{q})} =$$
$$= \int_0^1 \big(\max(0, q_r(\alpha) - p_l(\alpha)) - \max(0, q_l(\alpha) - p_r(\alpha)\big) d\alpha,$$

а $S_{\tilde{p}}$ і $S_{\tilde{q}}$ є площами заданих нечітких чисел.

Очевидно, що це відношення задовольняє такі важливі властивості:

1) $0 \leq P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) \leq 1$;
2) $P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = 1$ тоді та тільки тоді, коли правий кінець першого нечіткого числа менше або дорівнює лівому кінцю другого;
3) $P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = 0$ тоді та тільки тоді, коли лівий кінець носія першого числа є більше або дорівнює правому кінцю носія другого числа;
4) $P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) + P(\tilde{q} \leq \tilde{p}) = 1$.

З останньої умови випливає, що $P(\tilde{p} \leq \tilde{p}) = \frac{1}{2}$. Для вимірювання схожості нечітких чисел можна використати формулу

$$S(\tilde{p}, \tilde{q}) = \frac{S_{\tilde{p} \cap \tilde{q}}}{S_{\tilde{p}} + S_{\tilde{q}} - S_{\tilde{p} \cap \tilde{q}}},$$

де $S_{\tilde{p}}, S_{\tilde{q}}, S_{\tilde{p} \cap \tilde{q}}$ є площами відповідних нечітких чисел.

Легко бачити, що пропонована міра задовольняє умови:

1) $0 \leq S(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq 1$;
2) $S(\tilde{p}, \tilde{p}) = 1$;
3) $S(\tilde{p}, \tilde{q}) = S(\tilde{q}, \tilde{p})$;
4) $S(\tilde{p}, \tilde{q}) = 1 \iff \tilde{p} = \tilde{q}$.

Приклад 4.5. Порівняємо числа з попереднього прикладу: $S_{\tilde{p}} = \operatorname{card}\tilde{p} = 0{,}5$, $S_{\tilde{q}} = \operatorname{card}\tilde{p} = 0{,}15$. З іншого боку,

$$S_{\inf(\tilde{p})\leq\sup(\tilde{q})} =$$
$$= \int_0^1 \big(\max(0{,}0{,}5 - 0{,}1\alpha - 0{,}2\alpha) -$$
$$- \max(0{,}0{,}2 + 0{,}2\alpha - 1 + 0{,}8\alpha\big) d\alpha =$$
$$= \int_0^1 \big(\max(0{,}0{,}5 - 0{,}3\alpha) - \max(0, -0{,}8 + \alpha\big) d\alpha =$$
$$= \int_0^1 (0{,}5 - 0{,}3\alpha) d\alpha - \int_{0{,}8}^1 (-0{,}8 + \alpha) d\alpha = 0{,}35 - 0{,}02 = 0{,}33.$$

Отже,

$$P(\tilde{p} \leq \tilde{q}) = \frac{S_{\inf(\tilde{p})\leq\sup(\tilde{q})}}{S_{\tilde{p}} + S_{\tilde{q}}} = \frac{0{,}33}{0{,}5+0{,}15} \approx 0{,}508.$$

За цим методом порівняння $\tilde{p}$ є меншим, ніж $\tilde{q}$ зі степенем 0,508.

5. Нечітке математичне програмування

Однією з перших задач нечіткого математичного програмування є задача досягнення нечіткої мети, розв'язання якої запропоновано Р. Белманом і Л. Заде. Розв'язання базується на припущенні, що мета прийняття рішення та множина альтернатив розглядаються як рівноправні нечіткі підмножини деякої універсальної множини альтернатив.

Нехай X – універсальна множина альтернатив, на якій визначається нечітка мета в X і нечіткі обмеження, які виділяють із всієї множини X підмножину допустимих альтернатив. Нечітка мета та нечіткі обмеження описуються функціями належності $\mu_{G_i}(x)$, $i = \overline{1,n}$, і $\mu_{C_j}(x)$, $j = \overline{1,m}$. Тоді нечіткий розв'язок задачі D має степінь належності $\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x),\mu_C(x)\}$. Розв'язок задачі нечіткої багатокритеріальної оптимізації описується функцією належності

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)\}.$$

Якщо цілі та обмеження відрізняються за важливістю і задані відповідні вагові коефіцієнти відносної важливості цілей λ_i, $i = \overline{1,n}$, і обмежень ν_i, $i = \overline{1,m}$, то функція належності розв'язку визначається виразом

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1\mu_{G_1}(x), \ldots, \lambda_n\mu_{G_n}(x), \nu_1\mu_{C_1}(x), \ldots, \nu_m\mu_{C_m}(x)\}.$$

За детермінований розв'язок доцільно вибирати

$$x^* = arg\max\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Розглянемо задачу максимізації чіткої цільової функції $f(x)$ при нечітких обмеженнях із функцією належності $\mu_C(x)$.

Зазвичай спочатку відбувається нормування цільової функції $\overline{f} = \frac{f(x)}{\sup f(x)}$ і функція $\overline{f}$ розглядається як функція належності нечіткої множини цілей особи, яка приймає рішення. Значення цієї функції для альтернативи x трактується як степінь досягнення мети при виборі такої альтернативи. Тепер для розв'язання задачі застосовується підхід Белмана – Заде. При цьому найкращим вибором вважається вибір альтернативи x, для якої досягається $\max_x \min\{\overline{f}(x),\mu_C(x)\}$.

Приклад 5.1. Нехай $X = \{x : 0 \le x \le 8\}$, $f(x) = -x^2 + 8x$ і задовольняє нечітке обмеження - "значення x має бути близьким до 6".

Спочатку нормуємо цільову функцію $f(x)$:

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{\max_{x\in[0,8]} f(x)} = \frac{-x^2+8x}{16}.$$

Будемо розглядати $\overline{f}(x)$ як функцію належності мети.

Нехай нечітке обмеження задається функцією належності

$$\mu_C(x) = \begin{cases} x, & x < 4; \\ \frac{x-4}{2}, & 4 < x \le 6; \\ \frac{8-x}{2}, & 6 < x \le 8; \\ 0, & x > 8. \end{cases}$$

Тоді нечітким розв'язком задачі є нечітка множина D із функцією належності $\mu_D(x) = \min\{\overline{f}(x), \mu_C(x)\}$ (рис. 5.1).

При цьому найкращій альтернативі відповідає значення x^*, що визначається розв'язком рівняння

$$\frac{-x^2+8x}{16} = \frac{x-4}{2}.$$

Звідси $x^* = 4\sqrt{2}$.

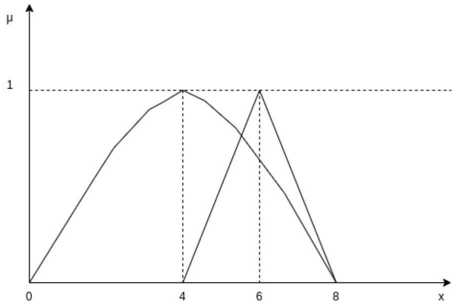


Рис. 5.1. Функція належності розв'язку

Також можливо застосувати інший підхід до розв'язання задачі максимізації чіткої цільової функції на нечіткій множині допустимих альтернатив. Цей підхід полягає в тому, що початкова задача нечіткого математичного програмування зводиться до сукупності звичайних задач максимізації функції $\varphi(x)$ на множинах рівня λ множини допустимих альтернатив. При цьому, якщо для конкретного λ альтернатива $\overline{x} \in X$ є розв'язком задачі максимізації $\varphi(x)$ на множині рівня λ, то це число λ розглядається як степінь належності альтернативи $\overline{x}$ нечіткій множині розв'язків задачі. Перебираючи можливі значення λ, отримуємо функцію належності нечіткого розв'язку задачі.

Розглянемо формальну процедуру отримання розв'язку.

Нехай $C_\lambda = \{x : x \in X, \mu_C(x) \geq \lambda\}$ є множиною рівня λ нечіткої множини альтернатив C. Для довільного $\lambda \geq 0$ введемо множину

$$N(x) = \{x^* : x^* \in X, x^* = \arg\sup \varphi(x)\}.$$

Зрозуміло, що $N(x)$ є множиною розв'язків звичайної задачі максимізації цільової функції $\varphi(x)$ на чіткій множині альтернатив, що визначається C_λ. Тепер для побудови функції належності $\mu_D(x)$ нечіткої множини D необхідно кожній альтернативі $\overline{x}^*$ поставити у відповідність максимальне значення (точну верхню границю) із чисел λ, для яких $\overline{x}^* \in N(\lambda)$, тобто $\sup \lambda$.

Якщо при цьому розв'язання задачі реалізується шляхом послідовного збільшення значення λ – степеня належності альтернатив нечіткій множині, який задається функцією належності $\mu_C(x)$, то для кожної альтернативи $\overline{x}^*$ максимальне значення λ, для якого $\overline{x}^* \in N(\lambda)$, дорівнює $\mu_C(\overline{x}^*)$.

Таким чином, якщо альтернатива x належить носію нечіткої множини розв'язку D, то $\mu_D(x) = \mu_C(x)$.

Формальний запис цього твердження має вигляд

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \mu_C(x), & x \in \bigcup_{\lambda>0} N(\lambda), \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі існує тоді та лише тоді, коли знайдеться таке число, для якого $N(\lambda) \neq 0$.

Отриманому нечіткому розв'язку відповідає множина максимальних значень функції $r = \varphi(x)$, яка є образом нечіткої множини розв'язків D при відображенні $\varphi(x)$. Функція належності μ_φ нечіткого максимального значення функції $\varphi(x)$ за визначенням образу задається як

$$\mu_\varphi(r) = \sup_{x \in \varphi^{-1}(r)} \mu_D(x) = \sup_{r=\varphi(x)} \mu_D(\varphi^{-1}(r)).$$

Приклад 5.2. Нехай потрібно максимізувати $\varphi(x) = 1 + 4x - x^2$ за умови, що x – нечітке число, яке приблизно дорівнює 4. Задамо

$$\mu_C(x) = \{((0; 0.01), (1; 0.3), (2; 0.6), (3; 0.8), (4; 1.0), (5; 0.8), (6; 0.6), (7; 0.3), (8; 0.01))\}.$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0.1,\ C_{0.1} = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7\},\ N(\lambda_1) = \{2\};\\
\lambda_2 &= 0.2,\ C_{0.2} = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7\},\ N(\lambda_2) = \{2\};\\
\lambda_3 &= 0.3,\ C_{0.3} = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7\},\ N(\lambda_3) = \{2\};\\
\lambda_4 &= 0.4,\ C_{0.4} = \{2{,}3{,}4{,}5{,}6\},\ N(\lambda_4) = \{2\};\\
\lambda_5 &= 0.5,\ C_{0.5} = \{2{,}3{,}4{,}5{,}6\},\ N(\lambda_5) = \{2\};\\
\lambda_6 &= 0.6,\ C_{0.6} = \{2{,}3{,}4{,}5{,}6\},\ N(\lambda_6) = \{2\};\\
\lambda_7 &= 0.7,\ C_{0.7} = \{3{,}4{,}5\},\ N(\lambda_7) = \{3\};\\
\lambda_8 &= 0.8,\ C_{0.8} = \{3{,}4{,}5\},\ N(\lambda_8) = \{3\};\\
\lambda_9 &= 0.9,\ C_{0.9} = \{4\},\ N(\lambda_9) = \{4\};\\
\lambda_{10} &= 1.0,\ C_{1.0} = \{4\},\ N(\lambda_{10}) = \{4\}.
\end{aligned}$$

Отже, $N(\lambda) = \{2{,}3{,}4\}$.

Якщо $N = 2$, то $x^* = 2$, $\lambda = 0{,}6$; якщо $N = 3$, то $x^* = 3$, $\lambda = 0{,}8$; якщо $N = 4$, то $x^* = 4$, $\lambda = 1$.

Отже, $D = \{(2; 0{,}6), (3; 0{,}8), (4; 1)\}$, $\varphi(2) = 5$; $\varphi(3) = 4$; $\varphi(4) = 1$.

Тоді ефективна за Парето множина розв'язків

$$\Pi = \{(r, \lambda) = \{(5,\ 0{,}6), (4,\ 0{,}8), (1,\ 1)\}\}.$$

Розглянемо тепер задачу, у якій нечіткими є коефіцієнти перед змінними в обмеженнях.

Приклад 5.3. Мінімізувати $\varphi(x_1{,}x_2) = x_1^2 + x_2^2$ за умови $c_1x_1 + c_2x_2 = 10$, $x_1{,}x_2 \in \mathbb{R}$, де c_1, c_2 – нечіткі числа з функціями належності (рис. 5.2)

$$\mu(c_1) = \begin{cases} 0, & c_1 < 2,\\ \frac{c_1-2}{2}, & 2 \le c_1 \le 4,\\ \frac{6-c_1}{2}, & 4 \le c_1 \le 6,\\ 0, & c_1 > 6, \end{cases} \quad \mu(c_2) = \begin{cases} 0, & c_2 < 2,\\ \frac{c_2-2}{4}, & 2 \le c_2 \le 6,\\ \frac{10-c_2}{4}, & 6 \le c_2 \le 10,\\ 0, & c_2 > 10. \end{cases}$$

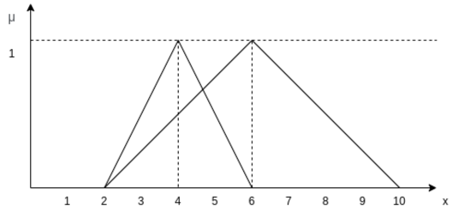


Рис. 5.2. Функції належності

Задамо множини рівня λ, $0 \le \lambda \le 1$:

$$\frac{c_{1\lambda}^{\min} - 2}{2} = \lambda;$$
$$\frac{6 - c_{1\lambda}^{\max}}{2} = \lambda;$$
$$\frac{c_{2\lambda}^{\min} - 2}{4} = \lambda;$$
$$\frac{10 - c_{2\lambda}^{\max}}{4} = \lambda.$$

Звідси

$$c_{1\lambda}^{\min} = 2\lambda + 2;$$
$$c_{1\lambda}^{\max} = 6 - 2\lambda;$$
$$c_{2\lambda}^{\min} = 4\lambda + 2;$$
$$c_{2\lambda}^{\max} = 10 - 4\lambda.$$

Розглянемо за вибраного значення λ таку чітку задачу математичного програмування:

$$\varphi(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 \to \min,$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 \le 0,$$
$$c_{1\lambda}^{\min} \le c_1 \le c_{1\lambda}^{\max},$$
$$c_{2\lambda}^{\min} \le c_2 \le c_{2\lambda}^{\max},$$

або

$$\begin{aligned} \varphi(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 &\to \min\,, \\ (2\lambda+2)x_1 + (4\lambda+2)x_2 &= 10, \\ (6-2\lambda)x_1 + (10-4\lambda)x_2 &= 10, \\ x_1,x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Функція Лагранжа задачі (5.1)

$$L(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - \alpha(c_{1\lambda}^{\max}x_1 + c_{2\lambda}^{\max}x_2 - 10),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi(x_1,x_2,\alpha)}{\partial x_1} & = 2x_1 - \alpha c_{1\lambda}^{\max} = 0, \\ \frac{\partial\varphi(x_1,x_2,\alpha)}{\partial x_2} & = 4x_2 - \alpha c_{2\lambda}^{\max} = 0, \\ \frac{\partial\varphi(x_1,x_2,\alpha)}{\partial \alpha} & = 10 - c_{1\lambda}^{\max}x_1 - c_{2\lambda}^{\max}x_2 = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Розв'язок системи 5.2:

$$\begin{cases} x_1^* & = \frac{10c_{1\lambda}^{\max}}{(c_{1\lambda}^{\max})^2 + \frac{1}{2}(c_{2\lambda}^{\max})^2}, \\ x_2^* & = \frac{5c_{2\lambda}^{\max}}{(c_{1\lambda}^{\max})^2 + \frac{1}{2}(c_{2\lambda}^{\max})^2}. \end{cases}$$

Оскільки $c_{1\lambda}^{\max} = 6 - 2\lambda$, $c_{2\lambda}^{\max} = 10 - 4\lambda$, то

$$\begin{cases} x_1^* & = \frac{10(3-\lambda)}{6\lambda^2-32\lambda+43}, \\ x_2^* & = \frac{5(5-2\lambda)}{6\lambda^2-32\lambda+43}, \\ \phi(x_1^*,x_2^*) & = \frac{50}{6\lambda^2-32\lambda+43}. \end{cases}$$

Розглянемо загальну задачу математичного програмування з нечіткою цільовою функцією і нечіткими обмеженнями.

Нехай на декартовому добутку множин $X \times Y$ задано нечітке відношення переваги R із функцією належності $\mu_R(x,y)$. Ця функція задає степінь впевненості в тому, що елемент $x \in X$ переважає елемент $y \in Y$. Нехай $A(x)$ – нечітка підмножина множини X. Тоді нечіткий образ $B \in Y$ нечіткої підмножини $A(x)$ при відношенні R описується функцією належності

$$\eta(A(x),y) = \mu_B(A(x),y) = \sup_{x \in A} \min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\},$$

тобто функція $\eta(A(x),y) = \mu_B(A(x),y)$ визначає степінь переваги нечіткої підмножини $A(x)$ над y. Для фіксованої підмножини $A^0(x)$ функція $\mu_B(A^0(x),y)$ описує нечітку множину B^0 елементів Y, пов'язаних з $A^0(x)$ відношенням R. Функція $\mu_B(A(x),y)$ встановлює степінь, з яким нечітка множина $A^0(x)$ переважає елемент y.

Нехай $A(x)$ – нечітка підмножина множини X, y – елемент множини Y, R – нечітке відношення переваги з функцією належності $\mu_R(x,y)$, $\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_{R(y,x)}$.
Тоді для фіксованого y функція належності

$$\eta(y, A(x)) = \sup \min\{\mu_A(x), \mu_R(y,x)\},\ y \in A,$$

визначає степінь переваги y над $A(x)$.

Введемо нечіткі множини $\nu_1(y)$, $y \in Y$, $\nu_2(z)$, $z \in Y$, з функцією належності $\mu_1(y)$ і $\mu_2(z)$, а також нечітке відношення R переваги y над z. При цьому для фіксованого y степінь переваги y над $\nu_2(z)$ розраховується за формулою

$$\eta(y,\nu_2(z)) = \sup \min\{\mu_2(z), \mu_R(y,z)\},\ z \in Y.$$

Тоді степінь переваги множини ν_1 над множиною ν_2

$$\begin{aligned}\eta(\nu_1,\nu_2) &= \sup\min\{\mu_1(y), \eta(y), \mu_2(z)\} = \\ &= \sup\min\{\mu_1(y), \sup\min\{\mu_2(z), \mu_R(y,z)\}\} = \\ &= \sup\min\{\mu_1(y), \mu_2(z), \mu_R(y,z)\}, \quad y,z \in Y.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Аналогічно визначається степінь переваги ν_2 над ν_1:

$$\eta(\nu_2,\nu_1) = \sup\min\{\mu_1(y), \mu_2(z), \mu_R(z,y)\}, \quad y,z \in Y. \tag{5.4}$$

Приклад 5.4. Нехай Y – числова вісь і R – чітке відношення переваги більших чисел над меншими:

$$\Gamma_R(y,z) = \begin{cases} 0, & y \le z, \\ 1, & y > z. \end{cases}$$

У цьому випадку формули (5.3) і (5.4) зведуться до вигляду

$$\eta(\nu_1,\nu_2) = \sup\min\{\mu_1(y), \mu_2(z)\},\ y,z \in Y,\ y > z; \tag{5.5а}$$

$$\eta(\nu_2,\nu_1) = \sup\min\{\mu_1(y), \mu_2(z)\},\ y,z \in Y,\ z > y. \tag{5.5б}$$

Задамо нечіткі множини $\nu_1(y)$ і $\nu_2(y)$ з функціями належності

$$\mu_1(y) = \begin{cases} 0, & y < 3; \\ y-3, & 3 \le y \le 4; \\ 5-y, & 4 \le y \le 5; \\ 0, & y > 5, \end{cases} \qquad \mu_2(z) = \begin{cases} 0, & z < 1; \\ \frac{z-1}{4}, & 1 \le z < 5; \\ \frac{9-z}{4}, & 5 \le z \le 9; \\ 0, & z > 9, \end{cases}$$

які зображені на рис. 5.3.

Тоді степінь переваги $\nu_1(y)$ над $\nu_2(z)$ визначається точкою A, координату y якої знаходимо з рівняння

$$5 - y = \frac{y-1}{4}, \quad y = 4{,}2.$$

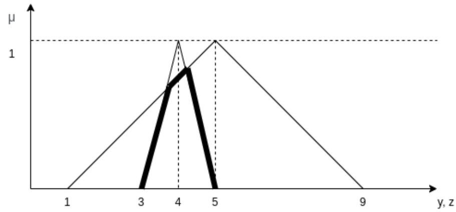


Рис. 5.3. Функції належності

При цьому степінь переваги $\nu_1(y)$ над $\nu_2(z)$ дорівнює

$$\eta(\nu_1,\nu_2) = \mu_1(y) = \mu_1(4.2) = 0{,}8.$$

З іншого боку, відповідно до (5.5б), степінь переваги $\nu_2(z)$ над $\nu_1(y)$ дорівнює 1, оскільки в області можливих значень пар (z,y) таких, що $z \succ y$, отримуємо $y = 4$ і $z = 5$, для яких $\nu_1(4) = \mu_2(5) = 1$ і $\eta(\nu_1,\nu_2) = \min\{\mu_1(4), \mu_2(5)\} = 1$.

Розглянемо альтернативну методику максимізації нечіткої цільової функції, заданої на чіткій множині альтернатив X. Якість вибраної альтернативи x описується нечіткими значеннями нечіткої функції $\varphi(x)$. Будь-якій альтернативі $x_0 \in X$ функція $\varphi(x)$ ставить у відповідність нечітку оцінку у формі нечіткої підмножини $\varphi(x_0,y)$ множини оцінок Y. Нехай η – степінь переваги, заданий деяким нечітким відношенням переваги R. Степінь переваги альтернативи $x_1 \in X$ над альтернативою $x_2 \in X$ визначається степенем переваги нечіткої оцінки $\varphi(x_1,y)$ над нечіткою оцінкою $\varphi(x_0,y)$:

$$\begin{aligned}\eta(x_1,x_2) &= \eta(\varphi(x_1,y),\varphi(x_2,y)) = \\ &= \sup\min\{\varphi(x_1,y),\varphi(x_2,y),\mu_2(y,z)\},\ x,y \in Y.\end{aligned} \tag{5.6}$$

У загальному випадку співвідношення (5.6) зводиться до такого. На універсальній множині альтернатив X задано нечітке відношення переваги $\eta(x_1,x_2)$ і виділено нечітку підмножину недомінованих альтернатив $\overline{q}(x)$. Множина $\overline{q}(x)$ всіх альтернатив, кожна з яких не домінується жодною з альтернатив $x \in X$

$$\overline{q}(x) = \bigcap_{y \in X} \overline{q}_y(x),$$

де $\overline{q}_y(x)$ – множина альтернатив x, які не домінуються альтернативою y;

$$\mu_{\overline{q}(x)} = 1 - \sup\{\mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)\},\ y \in X, \qquad (5.7)$$

де $\mu_R(x,y)$ – функція належності нечіткого відношення переваги R на множині X.

Нехай $\mu_A(x_i)$, $\mu_{\overline{q}(x)}(x_i)$, $x_i \in X$, $i = \overline{1,n}$, – набори значень степеня допустимості та недомінованості альтернатив. Тоді за розв'язок задачі доцільно прийняти альтернативу x^*, для якої

$$(x^*) = \max\min\{\mu_A(x_i), \mu_{\overline{q}(x)}(x_i)\},\ x_i \in X. \qquad (5.8)$$

Приклад 5.5. На множині $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ задано нечітке відношення переваги з матрицею значень функції належності $\mu_R(x_i,x_j)$ (табл. 5.1).

Таблиця 5.1. Матриця значень функції належності $\mu_R(x_i,x_j)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,3	0,4	0,1	0,2
x_2	0,6	1	0,3	0,3	0,1
x_3	0,1	0,3	1	0,6	0,2
x_4	0,7	0,4	0,3	1	0,4
x_5	0,5	0,8	0,7	0,1	1

Будуємо матрицю значень функції належності для нечіткого відношення строгої переваги (табл. 5.2).

Таблиця 5.2. Матриця значень функції належності $\mu_R^s(x_i,x_j)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0,3	0	0
x_2	0,3	0	0	0,1	0
x_3	0	0	0	0,3	0
x_4	0,6	0	0	0	0,2
x_5	0,3	0,7	0,5	0	0

За формулою (5.7) визначаємо степінь недомінованості для кожної альтернативи, віднімаючи від одиниці максимальне значення в кожному із стовпчиків матриці $\mu_{R^s}(x_i,x_j)$:

$$\mu_{\overline{q}(x)} = \begin{cases} 0{,}4, & x = x_1, \\ 0{,}3, & x = x_2, \\ 0{,}5, & x = x_3, \\ 0{,}7, & x = x_4, \\ 0{,}8, & x = x_5. \end{cases}$$

Найбільший степінь недомінованості, який дорівнює 0,8, має альтернатива x_5.

Нехай тепер задано степінь недопустимості альтернатив $\mu_A(x_i) = (0{,}7; 1; 0{,}8; 0{,}6; 0{,}5)$.

За розв'язок задачі приймаємо альтернативу за критерієм (5.8):

$$\begin{aligned} \mu(x^*) = \max\{&\min(0{,}7; 0{,}4), \min(1; 0{,}3), \min(0{,}8; 0{,}5), \\ &\min(0{,}6; 0{,}7), \min(0{,}5; 0{,}8)\} = \\ &= \max\{0{,}4; 0{,}3; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}5\} = 0{,}6. \end{aligned}$$

Таким чином, компромісною альтернативою є альтернатива

x_4, що має достатньо високі значення степеня допустимості та недомінованості.

Аналогічно розв'язується задача, коли нечітке обмеження задається на неперервній множині.

Приклад 5.6. Максимізувати $\varphi(x) = 1+4x-x^2$ за умови, що x є нечітким числом, що приблизно дорівнює чотирьом, із функцією належності

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \frac{x-1}{3}, & 1 \le x \le 4; \\ \frac{7-x}{3}, & 4 < x \le 7; \\ 0, x > 7. \end{cases}$$

Введемо множини рівня λ нечіткої множини альтернатив

$$C_\lambda = \{x : x \in X, \mu_C(x) \ge \lambda\}.$$

Множину C_λ з урахуванням вигляду $\mu_C(x)$ опишемо аналітично, розв'язавши нерівності

$$\frac{x-1}{3} \ge \lambda,$$
$$\frac{7-x}{3} \ge \lambda.$$

Маємо: $C_\lambda = \{x : 1 + 3\lambda \le x \le 7 - 3\lambda\}$.

Тепер для формування множини $N(\lambda)$ розв'яжемо чітку задачу максимізації функції $\varphi(x)$ на чіткій множині альтернатив C_λ. Для $\lambda \in [0, \frac{1}{3}]$ максимуму $\varphi(x)$ відповідає $x^* = 2$. За значенням λ на відрізку $\lambda \in [\frac{1}{3}, 1]$ максимум досягається на лівій границі відрізка $[1 + 3\lambda; 7 - 3\lambda]$.

Таким чином,

$$N(\lambda) = \begin{cases} 2, & \lambda \in [0, \frac{1}{3}], \\ 1 + 3\lambda & \lambda \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

$N(\lambda)$ для кожного λ встановлює x^*, що максимізує $\varphi(x)$. При цьому максимізуючі альтернативи лежать на відрізку $[2; 4]$ з функцією належності

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{x-1}{3}, & 2 \le x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Значення цього нечіткого числа

$$r_\lambda = \varphi(\lambda) = 1 + 4(1 + 3\lambda) - (1 + 3\lambda)^2 =$$
$$= -9\lambda^2 + 6\lambda + 4,\ \lambda \in [\frac{1}{3}, 1].$$

Функція нечіткого максимального значення функції $\varphi(x)$ має вигляд: (рис. 5.4)

$$\mu_\varphi(r) = \mu_D(x),\ x \in [2,4].$$

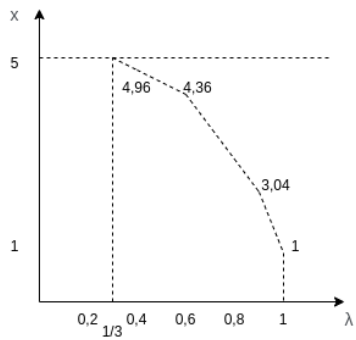


Рис. 5.4. Функція нечіткого максимального значення функції $\varphi(x)$

Максимальне значення функції $\varphi(x)$, що дорівнює $\varphi(2) = 5$, має степінь належності множині максимальних значень, що дорівнює $\frac{1}{3}$.

6. Нечітка задача математичного програмування

Нехай задані універсальна множина альтернатив X і підмножина допустимих альтернатив, що описуються обмеженнями-нерівностями

$$g_j(x,b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{pj}) \leq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

де g_j – задані функції $X \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^1$; b_{ij}, $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$, – числові параметри, значення яких описані нечітко у формі підмножин числової осі своїми функціями належності
ν_{ij}, $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$.

Ефективність кожної із можливих альтернатив оцінюється значеннями функцій цілі $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_q)$, де a_i, $i = \overline{1,q}$, – числові параметри, значення яких також описані нечітко функціями належності $\omega_i(a_i)$, $i = \overline{1,q}$.

Введемо набір $\{\bar{b}_{ij}\}$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,n}$ конкретних значень параметрів обмежень, степені належності яких визначаються відповідним набором $\nu_{ij}(\bar{b}_{ij})$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай $\overline{\mu} = \min_{i=\overline{1,p},j=\overline{1,n}}\{\nu_{ij}(\bar{b}_{ij}\}$.

Якщо при цьому деяка конкретна альтернатива $\overline{x} \in X$ задовольняє нерівності

$$g_j(\overline{x},\bar{b}_{ij},\ldots,\bar{b}_{pj}) \leq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

то будемо вважати, що ця альтернатива належить множині допустимих альтернатив зі степенем, не меншим ніж $\overline{\mu}$.

На множині $B(x)$ наборів $\{b_{ij}\}$ таких, що

$$g_j(x,b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{pj}) \leq 0, \nu_{ij} > 0, j = \overline{1,n},$$

істинний степінь допустимих альтернатив $x \in X$ може бути отриманий із співвідношень

$$\mu_C = \sup_{B(x)} \min_{i=\overline{1,p}, i=\overline{1,n}} \{\nu_{ij}(b_{ij})\}.$$

Приклад 6.1. Нехай у задачі математичного програмування підмножина допустимих альтернатив визначається нерівностями $b_1 x - b_2 \le 0$, $x \ge 0$, $b_1, b_2 \ge 0$, причому

$$\nu_1(b_1) = \begin{cases} 0, & b_1 < 2, \\ \frac{b_1-2}{2}, & 2 \le b_1 < 4, \\ \frac{6-b_1}{2}, & 4 \le b_1 < 6, \\ 0, & b_1 > 6, \end{cases} \quad \nu_2(b_2) = \begin{cases} 0, & b_2 < 2, \\ \frac{b_2-2}{4}, & 2 \le b_2 < 6, \\ \frac{10-b_2}{4}, & 6 \le b_1 < 10, \\ 0, & b_2 > 10. \end{cases}$$

Маємо

$$(\mu_C(0)) = \sup \min\{\nu_1(b_1), \nu_2(b_2)\} = \sup \min\{\nu_1(4), \nu_2(6)\} = 1.$$

Степінь допустимості альтернатив залишається таким, що дорівнює 1 для всіх таких x, для яких нерівність $b_1 x - b_2 \le 0$ виконується за умови, що нечіткі числа b_1 і b_2 набувають значень, що дорівнюють 1. Звідси граничне значення x_r, за якого $\mu_C(x_r) = 1$, знаходимо з рівняння $4x_r - 6 = 0$, $x_r = 1{,}5$.

Таким чином, $(\mu_C(x)) = 1, x \in [0; 1{,}5]$.

Права границя шуканого інтервалу визначається максимальним значенням x, за якого виконується нерівність $b_{1\min} x - b_{2\max} \le 0$, де $b_{1\min} = \min\{b_1 : \nu_1(b_1) > 0\}$, $b_{1\min} = 2, b_{2\max} = \max\{b_2 : \nu_2(b_2) > 0\}$, $b_{2\max} = 10$.

Звідси $2x - 10 \le 0$, $x_{\max} = 5$.

Залишилось визначити, як змінюється функція належності $\mu_C(x)$ в інтервалі $[1{,}5; 5]$.

Необхідно знайти таку пару значень b_1 і b_2, щоб виконувалась нерівність $b_1 x - b_1 \le 0$ і одночасно значення $\min\{\nu_1(b_1), \nu_2(b_2)\}$ було максимально можливим.
Позначимо $y = b_1 x$ і розглянемо функцію належності

$$\mu(y) = \begin{cases} 0, & y < 2x, \\ \frac{y-2x}{2x}, & 2x \le y < 4x, \\ \frac{6x-y}{2x}, & 4x \le y \le 6x, \\ 0, & y > 6x. \end{cases}$$

Визначимо точку перетину $\mu(y)$ і $\nu_2(b_2)$:

$$\frac{y-2x}{2x} = \frac{10-y}{4}, \qquad y = \frac{14x}{2+x}.$$

Тоді

$$\mu_C(x) = \nu_2(y) = \frac{10-y}{4} = \frac{1}{4}\left(10 - \frac{14x}{2+x}\right) = \frac{5-x}{2+x},\ x \in [1{,}5; 5].$$

Об'єднуючи графіки належності $\mu_C(x) = 1$ при $x \in [0; 1{,}5]$ і $\mu_C(x) = \frac{5-x}{2+x}$, $x \in [1{,}5; 5]$, отримуємо графік на відрізку $[0; 5]$ (див. рис. 6.1).

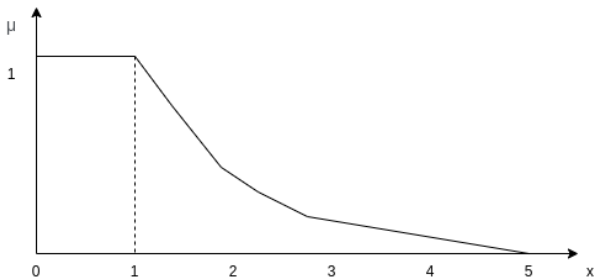


Рис. 6.1. Графік функції належності

Розв'язання нечітких задач математичного програмування заданого вигляду (з нелінійною цільовою функцією обмежень з великою кількістю обмежень і змінних) пов'язано з великими витратами машинного часу навіть для суперсучасних комп'ютерів. Тому коротко розглянемо методику розв'язання нечітких задач математичного програмування на прикладі задач лінійного програмування.

Приклад 6.2. Розглянемо задачу

$$f(x_1,x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 \to \max \tag{6.1а}$$

$$x_1 + x_2 \le 2, \tag{6.1б}$$

$$3x_1 + x_2 \le 3, \tag{6.1в}$$

$$x_1,x_2 \ge 0, \tag{6.1г}$$

де параметри цільової функції a_1 та a_2 – нечіткі числа з функціями належності

$$\nu_1(a_1) = \begin{cases} 0, & a_1 < 2, \\ \frac{a_1-2}{2}, & 2 \le a_1 < 4, \\ \frac{6-a_1}{2}, & 4 \le a_1 \le 6, \\ 0, & a_1 > 6, \end{cases}$$

$$\nu_2(a_2) = \begin{cases} 0, & a_2 < 0, \\ \frac{a_2}{6}, & 0 \le a_2 < 6, \\ \frac{12-a_2}{6}, & 6 \le a_2 \le 12, \\ 0, & a_2 > 12. \end{cases}$$

Обчислимо координати $A = (0,2)$, $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$,$C = (1,0)$.

Задамо деякий конкретний допустимий набір значень параметрів цільової функції $a_1^{(1)} = 3$, $a_2^{(1)} = 9$ і задамо для них степені належності вибраних значень параметрів (рис. 6.2):

$$\mu_1\left(a_1^{(1)}\right) = \mu_1(3) = 0{,}5; \qquad \mu_2\left(a_2^{(1)}\right) = \mu_2(9) = 0{,}5.$$

Виберемо альтернативу $x^{(1)} = (0,2)$ і обчислимо

$$r^{(1)} = f(x_{11},x_{12},a_1^{(1)},a_2^{(1)}) = 18.$$

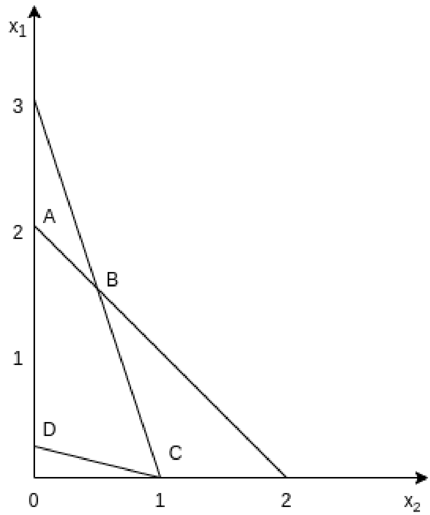


Рис. 6.2. Координати точок A, B, C

Пряма $3x_1 + 9x_2 = 18$ є дотичною до багатогранника обмежень у його крайній точці $A = (0, 2)$. Тому альтернативу $A = (0, 2)$ можна розглядати як розв'язання задачі лінійного програмування із цільовою функцією $f(x) = 3x_1 + 9x_2$ і обмеженнями (6.1б)–(6.1г).
При цьому значення $r(1) = 18$ належить нечіткій оцінці альтернативи $x(1) = (0, 2)$ зі степенем

$$\varphi^{(1)} = \min\{\omega_1(3), \omega_2(9)\} = \min\{0{,}5; 0{,}5\} = 0{,}5.$$

Для знаходження іншого можливого набору $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)})$, для якого $f\left(x^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}\right) = 18$ і одночасно

$$\varphi^{(2)} = \min_{a_1, a_2}\{\omega_1(a_1^{(2)}), \omega_2(a_2^{(2)})\} > \varphi^{(1)} = 0{,}5,$$

розв'яжемо таку задачу математичного програмування: знайти набір (a_1, a_2), який максимізує і задовольняє обмеження. У цьому випадку, оскільки $x_{11} = 0$, параметр a_2 фіксований і значення критерію φ не може бути поліпшене. Аналогічні міркування повторимо для альтернативи $x^{(3)} = (1, 0)$.

Знову виберемо $a_1^{(3)} = 3$, $a_2^{(3)} = 9$ і обчислимо $r^{(3)}$, отримуючи
$r^{(3)} = f\left(x_{31}, x_{32}, a_1^{(3)}, a_2^{(3)}\right) = 3$.

Пряма $3x_1 + 9x_2 = 3$, проходячи через крайню точку $x^{(3)} = (1, 0)$ багатогранника обмежень, перетинає його. Тому альтернатива $x^{(3)}$ не є розв'язком задач із цільовою функцією $f(x) = 3x_1 + 9x_2$ і обмеженнями (6.1б)–(6.1г).

У зв'язку із цим виберемо іншу пару параметрів цільової функції, наприклад $a_1^{(3)} = 5, a_2^{(3)} = 1$. Степінь належності цих параметрів задачі, що відповідають нечітким множинам рівнів, становить
$\omega_1(5) = \frac{1}{2}$, $\omega_2(1) = \frac{1}{6}$.

При цьому для альтернативи $x^{(3)} = (1, 0)$ маємо
$r^{(3)} = f(x_{31}, x_{32}, a_1^{(3)}, a_2^{(3)}) = 5$. Пряма $5x_1 + x_2 = 5$ є дотичною багатогранника обмежень у крайній точці $x = (1, 0)$. Тому альтернатива $x^{(3)} = (1, 0)$ може розглядатися як розв'язок задачі із цільовою функцією $f(x) = 5x_1 + x_2$ і обмеженнями (6.1б)-(6.1г). Значення $r^{(3)} = 5$ належить нечіткій оцінці альтернативи $x^{(3)} = (1, 0)$ зі степенем $\varphi^{(3)} = \min\{\omega_1(5), \omega_2(1)\} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\}$. При цьому, оскільки $x_{32} = 0$, параметр a_1 фіксований і значення степеня належності альтернативи $x^{(3)} = (1, 0)$ не можна поліпшити.

Розглянемо, нарешті, альтернативу $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Задамо $a_1^{(2)} = 3, a_2^{(2)} = 2$ зі значеннями $\omega_1(3) = \frac{1}{3}$, $\omega_2(2) = \frac{1}{3}$.

Обчислимо $r^{(2)} = f(x_{21}, x_{22}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = 4{,}5$.

Пряма $3x_1 + 2x_2 = 4{,}5$ дотикається багатогранника обмежень у крайній точці $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, тому $x^{(2)}$ може розглядатися як розв'язок задачі нечіткого програмування із цільовою функцією $f(x) = 3x_1 + 2x_2$ і обмеженнями (6.1б)–(6.1г). При цьому $r^{(3)} = 4{,}5$ належить нечіткій оцінці альтернативи $x^{(3)}$ зі степенем $\varphi^{(2)} = \min\{\omega_1(3),\omega_2(2)\} = \min\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\} = \frac{1}{2}$.

Для пошуку іншого набору (a_1,a_2), для якого $f(x^{(2)},a_1,a_2) = 4{,}5$ і одночасно $\varphi\{\omega_1(a_1), \omega_2(a_2)\} > \varphi^{(2)} = \frac{1}{3}$, розв'яжемо

$$\begin{cases} \varphi = \min\{\omega_1(a_1), \omega_2(a_2)\} & \to \max\,, \\ a_1x_{21} + a_2x_{22} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 & = 4{,}5. \end{cases}$$

Звідси маємо $a_1 = 9 - 3a_2$ і

$$\omega_1(a_2) = \begin{cases} 0, & 9 - 3a_2 < 2, \\ \frac{9-3a_2-2}{2}, & 2 \leq 9 - 3a_2 < 4, \\ \frac{6-9+3a_2}{2}, & 4 \leq 9 - 3a_2 \leq 6, \\ 0, & 9 - 3a_2 > 6. \end{cases}$$

Після спрощень маємо:

$$\omega_1(a_2) = \begin{cases} 0, & a_2 < 1, \\ \frac{3a_2-3}{2}, & 1 \leq a_2 < \frac{5}{3}, \\ \frac{7-3a_2}{2}, & \frac{5}{3} \leq 3a_2 \leq \frac{7}{3}, \\ 0, & a_2 > \frac{7}{3}. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій належності (рис. 6.3).

Максимальне значення ординат точок перетину функцій належності ω_1 і ω_2 знаходимо з рівняння $\frac{7-3a_2}{2} = \frac{a_2}{6}$, $a_2 = 2{,}1$, $a_1 = 9 - 3a_2 = 2{,}7$.

Тоді $r^{(2)} = 4{,}5$ належить нечіткій оцінці $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ зі степенем

$$\mu_C(x^{(2)}) = \min\{\omega_1(2{,}7), \omega_2(2{,}1)\} =$$
$$= \min\{\frac{2{,}7-2}{2}, \frac{2{,}1}{6}\} = \min\{0{,}35; 0{,}35\} = 0{,}35.$$

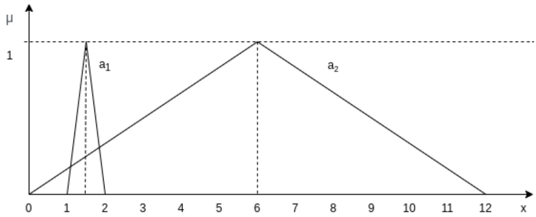


Рис. 6.3. Функції належності

Таким чином, у результаті розв'язання задачі для допустимих альтернатив $x^{(1)} = (0,2)$, $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $x^{(3)} = (1,0)$.

Отримано відповідні значення цільової функції $f(x^{(1)}) = f(0{,}2) = 18$ зі степенем належності $\omega(x^{(1)}) = 0{,}5$; $f(x^{(2)}) = f\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) = 4{,}5$, $(x^{(2)}) = 0{,}33$; $f(x^{(3)}) = f(1{,}0) = 5$, $\omega(x^{(3)}) = 0{,}166$.

7. Нечітка задача цілочислового програмування

Розглянемо задачу лінійного цілочислового програмування:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{7.1а}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{7.1б}$$

$$x_j \in [0,d_j],\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,n}. \tag{7.1в}$$

Всі можливі плани задачі (7.1а)–(7.1в) можуть бути зображені деревом варіантів, кожна гілка якого визначає відповідний набір змінних x_j, $j = \overline{1,n}$. Дерево має n рівнів, на k-му рівні кожної гілки містяться вершини, що відображають значення перших k змінних задачі. Загальна кількість можливих гілок дерева $N = \prod_{j=1}^{n} d_j$, кількість допустимих гілок менше або дорівнює N.

Розглянемо деякий вузол (q,j_0) q-ї гілки дерева, що міститься на рівні j_0. Цей вузол, з одного боку, визначає значення частин змінних x_1, x_2, …, x_{j_0}, а з іншого – є коренем куща гілок, що визначають множину можливих значень змінних $x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, \ldots, x_n$.

Позначимо кущ варіантів $Q(q_0, j_0)$. Довжина q-ї гілки від вершини до вузла j_0 становить $L_{g,j_0} = \sum_{j=1}^{j_0} c_j x_j$.

Нехай R_{g,j_0} – нижня границя оптимального значення цільової функції задачі:

$$L(x_{j_0}) = \sum_{j=j_0+1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{7.2а}$$

$$\sum_{j=j_0+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i - \sum_{j=1}^{j_0} a_{i,j} x_j,\ i = \overline{1,m}, \tag{7.2б}$$

$$x_j \in [0,d_j],\ x_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{j_0+1,n}. \tag{7.2в}$$

За таку границю візьмемо розв'язок задачі (7.2а)–(7.2в) без умови цілочисельності на значення змінних. Тоді $L(q) = L(q,j_0) + R(q,j_0)$ є нижньою границею значення цільової функції початкової задачі (7.1а)–(7.1в) для всіх планів, що визначаються кущем $Q(q, g_0)$. Якщо $L(q) > L(q,j_0)$, то очевидно, що всі ці вершини безперспективні, а q-та гілка, що розглядається, виключається з розгляду.

Розглядаємо тепер випадок, коли коефіцієнти c_j, $j = \overline{1,m}$, задачі (7.1а)–(7.1в) задані нечітко:

$$\mu_j(c_j) = \exp\left\{-\frac{(c_j - c_j^0)^2}{2\sigma_j^2}\right\},\ j = \overline{1,n}. \tag{7.3}$$

Нехай за еталонну гілку дерева вибрана гілка q_0:

$$x^{(q_0)} = \left\{x_1^{(q_0)}, x_2^{(q_0)}, \ldots, x_n^{(q_0)}\right\},$$

якій відповідає нечітке значення довжини $\overline{L}_{q_0,n} = \sum_{j=j_0+1}^{n} c_j x_j^{q_0}$, з функцією належності

$$\mu(\overline{L}_{q_0,n}) = \exp\left\{-\frac{(\overline{L}_{q_0,n} - L_{q_0,n})^2}{2D_{q_0}}\right\},$$

де

$$L_{q_0,n} = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(0)} x_j^{(q_0)}, \quad D_{q_0} = \sum_{j_0}^{n} \sigma_j^2 \Big(x_j^{(q)} \Big).$$

Нехай функція належності нечіткого числа $\overline{L}_{q,k}$, $k = \overline{1,n}$,

$$\mu(\overline{L}_{q,k}) = \exp\left\{ -\frac{(\overline{L}_{q,k} - L_{q,k})}{2D_{q,k}} \right\},$$

де

$$L_{q,k} = \sum_{j=1}^{k} c_j^{(0)} x_j^{(q)}, \quad D = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 \Big(x_j^{(q)} \Big).$$

Далі визначаємо нижню границю довжини гілки куща $Q(q,k)$ шляхом розв'язання нечіткої задачі лінійного програмування.

Задамо значення α, $0 < \alpha < 1$, степені належності $\mu(\overline{L}(x))$, якому відповідає значення нечіткого числа $\overline{L}(x)$ рівня L, яке знаходимо з рівняння

$$\exp\left\{ -\frac{(\overline{L} - L^0(k))^2}{2D_x} \right\} = \alpha. \tag{7.4}$$

Знаходимо розв'язок рівняння (7.4):

$$L_{1,2}^* = L^*(x) \pm (-2D_x \ln \alpha)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5}$$

Вибираючи L^* з умови

$$L^* = \max\left\{ L^0(x) + (-2D_x \ln \alpha)^{\frac{1}{2}}, L^0(x) - (-2D_x \ln \alpha)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

отримаємо:

$$\begin{gathered} L^* = L^0(x) + \Big(D_x \ln \frac{1}{\alpha} \Big)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(0)} x_j + k \Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ k = \Big(\ln \frac{1}{\alpha^2} \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Тепер вихідну нечітку задачу сформулюємо таким чином: знайти набір $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, що мінімізує (7.6) і задовольняє обмеження (7.1б)–7.1в) без умови цілочисельності. Ця задача нелінійна, тому лінеаризуємо її:

$$\begin{aligned} L^* = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(0)} x_j + k\Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^{(0)} x_j + k\sum_{j=1}^{n} \sigma_j x_j = \\ = \sum_{j=1}^{n} \Big(c_j^{(0)} + k\sigma_j\Big) x_j = \overline{L}(\overline{x}). \end{aligned}$$

Таким чином, задача (7.1а)–(7.1в) (без умови цілочисельності) зводиться до звичайної задачі лінійного програмування:

$$\overline{L}(x) \to \min\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \in [0,d_j],\ j = \overline{1,n}.$$

Використовуючи описану методику, розв'яжемо задачі (7.2а)-(7.2в).

Нехай набір $\{x^*_{j_0+1}, x^*_{j_0+2}, \ldots, x^*_n\}$ є розв'язком задачі (7.2а)-(7.2в). Тоді функція належності нечіткого числа $\tilde{R}_{q,k}$, що є нижньою границею для всіх класів куща $Q(q,k)$, визначається виразом

$$\mu(\tilde{R}_{q,k}) = \exp\left\{-\frac{(\tilde{R}_{q,k} - R_{q,k})^2}{2D_{q,k}}\right\},$$

де

$$R_{q,k} = \sum_{j=j_0+1}^{n} c_j x_j^*, \quad D'_{q,k} = \sum_{j=j_0+1}^{k} \sigma_j^2(x_j^*).$$

Тоді

$$\mu(\tilde{L}_{q,n}) = \exp\left\{-\frac{(\tilde{L}_{q,n} - L_{q,n})^2}{2D_q}\right\},$$

де

$$L_{q,n} = L_{q,k} + R_{q,k}, \quad D_q = D_{q,k} + D'_{q,k}.$$

Відповідно до процедури неявного перебору необхідно порівняти нечіткі числа $\tilde{L}_{q,n}$ і $\tilde{L}_{q0,n}$.

Нехай нечіткі числа y і z задані функціями належності $\mu_y(y)$, $\mu_z(z)$.
У свою чергу, ці функції належності задають нечіткі підмножини $A_y \in Y$, $B_z \in Z$. На декартовому добутку $Y \times Z$ вводимо нечітке відношення переваги R із функцією належності $\mu_R(x,y)$. Нехай образом елемента $y^0 \in Y$ є нечітка підмножина множини Z із функцією належності $\mu_R(y_0,z)$. Тоді нечіткий образ $C \in Z$ нечіткої підмножини A_y при відображенні R опишемо функцією належності

$$\eta(A_y,z) = \mu_C(A_y,z) = \sup_{y \in \tilde{A}_y} \min\{\mu_y(y),\mu_R(y,z)\},$$

де $\tilde{A}_y$ – носій підмножини A_y.

Отже, функція $\eta(A_y,z)$ визначає степінь, з яким нечітка множина A_y переважає елемент z.

Аналогічно степінь переваги елемента y над множиною B_z

$$\eta(y,B_z) = \sup_{z \in \tilde{B}_z} \min\{\mu_z(z),\mu_R(y,z)\},$$

де $\tilde{B}_z$ – носій підмножини B_z.

Використовуючи попереднє, маємо:

$$\eta(A_y,B_z) = \sup_{y\in\tilde{A}_y} \min\{\mu_y(y), \eta(y,B_z)\} =$$

$$= \sup_{y\in Y} \min \left\{ \mu_y(y), \sup_{z\in\tilde{B}_z} \{\mu_z(z), \mu_R(y,z)\} \right\} =$$

$$= \sup_{y,z\in Y} \min\{\mu_y(y), \mu_z(y,z)\}.$$

8. Нечітке лінійне програмування

Класична модель лінійного програмування має вигляд

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x \to \max;&\\
Ax \le b;&\\
x \ge 0;&\\
c,x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n}.&
\end{aligned}
$$

Логічним кроком для узагальнення цієї моделі є відмова від класичних припущень щодо того, що коефіцієнти A, b та c є чіткими числами, що нерівність $\le$ мається на увазі у чіткому сенсі, а максимізація також є чіткою.

Можливі різні модифікації стандартної моделі лінійного програмування. Особа, що приймає рішення, може не вимагати максимізації чи мінімізації цільової функції, а натомість вимагати досягнення певного рівня значення цільової функції, що визначається нестрого. Насамкінець, обмеження на змінні також можуть бути нечіткими.

Взагалі кажучи, існує велика кількість нечітких узагальнень класичної задачі лінійного програмування, єдиного уніфікованого підходу не існує.

8.1. Симетричне лінійне програмування

Припустимо, що особа, яка приймає рішення, задає бажаний рівень z для цільової функції. Тоді задача може бути сформульована таким чином:

$$
\begin{aligned}
c^T x &\gtrsim z;\\
Ax &\lesssim b;\\
x &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Вище знак $\gtrsim$ означає “значно більше або дорівнює”, а знак $\lesssim$ – “значно менше або дорівнює”.

Ця модель є симетричною відносно цільової функції та обмежень. Позначимо $\binom{-c}{A} = B$, $\binom{-z}{b} = d$. Тоді нашу модель можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} Bx &\lesssim d; \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Кожен із $m+1$ рядків цієї моделі можна зобразити функцією належності $\mu_i(x)$. Функцією належності розв'язку буде

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_i\{\mu_i(x)\}.$$

$\mu_i(x)$ можна інтерпретувати як степінь, з яким x задовольняє нерівність $B_i x \leq d_i$ (де B_i позначає i-й рядок матриці B).

Припускаючи, що особа, яка приймає рішення, зацікавлена не у нечіткій множині, а в оптимальному розв'язку, ми можемо розглянути максимізуючий розв'язок, який можна отримати з такої задачі нелінійного програмування:

$$\max_{x\geq 0} \min\{\mu_i(x)\} = \max_{x\geq 0} \mu_{\tilde{D}}(x).$$

Визначимо вигляд функцій $\mu_i(x)$. Функції $\mu_i(x)$ мають дорівнювати нулю, якщо обмеження (включаючи цільову функцію) строго порушуються, і дорівнювати одиниці, якщо обмеження строго задовольняються (тобто задовольняються у чіткому сенсі).

Функції $\mu_i(x)$ мають бути монотонно зростаючими від 0 до 1, тобто

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad B_i x \leq d_i; \\ \in [0,1], & \text{якщо} \quad d_i < B_i x \leq d_i + p_i; \; i = 1, \cdots, m+1; \\ 0, & \text{якщо} \quad B_i x > d_i + p_i. \end{cases}$$

Використовуючи найпростіший тип функції належності ми припускаємо, що функція належності зростає лінійно:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad B_i x \le d_i; \\ 1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i}, & \text{якщо} \quad d_i < B_i x \le d_i + p_i; \\ 0, & \text{якщо} \quad B_i x > d_i + p_i. \end{cases}$$

де $i = 1, \cdots, m + 1$.

Значення p_i є суб'єктивно вибраними сталими допустимих відхилень обмежень та цільової функції. Чіткий розв'язок шукатимемо з умови

$$\max_{x \ge 0} \min_i \left(1 - \frac{B_i x - d_i}{p_i}\right).$$

Вводячи нову змінну, зводимо нашу задачу до чіткої задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} \lambda &\to max; \\ \lambda p_i + B_i x \le d_i + p_i; &\qquad i = 1, \ldots, m + 1; \\ x &\ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю задачу, отримуємо розв'язок (λ, x_0).

Іншим підходом є задання степенів відхилення для i-ї умови: t_i, $i = 1, \ldots, m + 1$, $0 \le t_i \le p_i$. Тоді функції належності задаються таким чином:

$$\mu_i(x) = 1 - \frac{t_i}{p_i}.$$

Чітким еквівалентом розглядуваної моделі є така задача:

$$\begin{aligned} \lambda &\to max; \\ \lambda p_i + t_i &\le p_i; \qquad i = 1,\ldots,m+1; \\ B_i x - t_i &\le d_i; \\ t_i &\le p_i; \\ x, t &\ge 0. \end{aligned}$$

Приклад 8.1. Компанія оптимізує свій гараж. Розглядаються чотири типи вантажівок із вантажопідйомністю x_i, $i = 1,\cdots,4$. Метою є мінімізувати витрати на автопарк, при цьому забезпечивши усіх споживачів товаром (що приводить до обмежень на сумарну вантажопідйомність та обмежень на оптимальний маршрут). Також, із певних причин, вимагається наявність не менш ніж шести маленьких вантажівок. Висунуті умови визначили таку задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned} 41400x_1 + 44300x_2 + 48100x_3 + 49100x_4 &\to min; \\ 0{,}84x_1 + 1{,}44x_2 + 2{,}16x_3 + 2{,}4x_4 &\ge 170; \\ 16x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 16x_4 &\ge 1300; \\ x_1 &\le 6; \\ x_2, x_3, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

Розв'язком цієї задачі є $x_1 = 6$, $x_2 = 16{,}29$, $x_3 = 0$, $x_4 = 58{,}96$, мінімальні витрати становлять 3864975.

Керівництво компанії було задоволене запропонованим планом, але вирішило послабити певні умови. Оскільки для формулювання обмежень було використане прогнозоване навантаження на транспорт, то дана модель не враховувала пікові навантаження у період піку замовлень.

Також виявилося, що на автопарк виділяється фіксований бюджет, отже, умова щодо мінімізації витрат виявилася дещо надлишковою.

Після перегляду моделі було запропоновано певні послаблення.

Нижні межі інтервалів толерантності:

$$d_1 = 3700000, \quad d_2 = 170, \quad d_3 = 1300, \quad d_4 = 6.$$

Довжини інтервалів толерантності:

$$p_1 = 500000, \quad p_2 = 10, \quad p_3 = 100, \quad p_4 = 6.$$

Після певних перетворень приходимо до такої задачі:

$$\begin{aligned} \lambda &\to max; \\ 0{,}083x_1 + 0{,}089x_2 + 0{,}096x_3 + 0{,}098x_4 + \lambda &\leq 8{,}4; \\ 0{,}084x_1 + 0{,}144x_2 + 0{,}216x_3 + 0{,}24x_4 - \lambda &\geq 17; \\ 0{,}16x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}16x_3 + 0{,}16x_4 - \lambda &\geq 13; \\ 0{,}167x_1 - \lambda &\leq 1; \\ \lambda, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язки чіткої та нечіткої задач наведено у табл. 8.1. Як можна бачити з розв'язків, послаблення умов було досягнуто за рахунок збільшення вартості на 3,2 %.

Основною перевагою нечіткого підходу порівняно з чітким є те, що особа, яка приймає рішення, не повинна чітко формулювати постановку задачі. Достатньо тільки опису завдання у нечітких термінах.

Також слід зазначити, що лінійні функції є досить грубим наближенням. Утім, більш складні функції, що монотонно зростають (або спадають) на інтервалі $[d_i, d_i + p_i]$, також можуть використовуватися при моделюванні.

Таблиця 8.1. Розв'язки чіткої та нечіткої задач

Чітка	Нечітка
$x_1 = 6$	$x_1 = 17{,}414$
$x_2 = 16{,}29$	$x_2 = 0$
$x_3 = 0$	$x_3 = 0$
$x_4 = 58{,}96$	$x_4 = 66{,}54$
$Z = 3864975$	$Z = 3988250$
Обмеження	
1. 170	174,33
2. 1300	1343,328
3. 6	17,414

Приклад 8.2. Нехай маємо таку задачу лінійного програмування:

$$
\begin{aligned}
z = 3x_1 + 5x_2 \to max;\\
x_1 \le 4;\\
2x_2 \le 12;\\
3x_1 + 2x_2 \le 18;\\
x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Розв'язком цієї задачі є

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 6; \quad z = 36.$$

Нехай ми хочемо отримати значення цільової функції більше ніж 36. Для цього ми згодні поступитися на кілька одиниць щодо обмежень.

Величини поступок наведено у табл. 8.2, відповідний загальний вигляд функцій належності – на рис. 8.1.

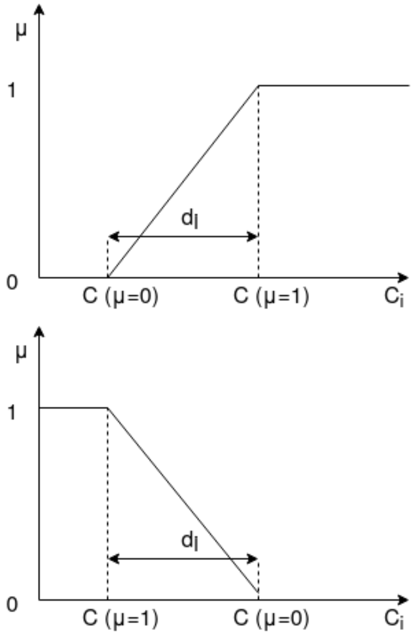


Рис. 8.1. Функції належності цільової функції та обмежень

Таблиця 8.2. Значення поступок

	$\mu = 0$	$\mu = 1$
Цільова функція	36	38
Обмеження 1	6	4
Обмеження 2	10	6
Обмеження 3	25	18

У загальному вигляді обмеження можна записати так:

$$\mu(C_i) \geq \lambda.$$

Розглянемо цільову функцію. Вигляд її функції належності наведено на рис. 8.2:

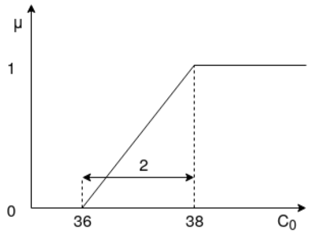


Рис. 8.2. Функція належності цільової функції

Нагадаємо формулу рівняння прямої, що проходить через задані дві точки (x_0, y_0), (x_1, y_1):

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0};$$
$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot (y_1 - y_0).$$

Використаємо останню формулу для рис. 8.2.

$$\mu(C_0) = 0 + \frac{(C_0) - 36}{38 - 36} \cdot (1 - 0).$$
$$\mu(C_0) = \frac{(C_0) - 36}{2} = \frac{(3x_1 + 5x_2) - 36}{2}.$$

Останній вираз має бути не менше λ, тому отримуємо:

$$\frac{3x_1 + 5x_2 - 36}{2} \geq \lambda;$$
$$1.5x_1 + 2.5x_2 - 18 \geq \lambda;$$
$$1.5x_1 + 2.5x_2 - \lambda \geq 18.$$

Аналогічно знаходимо цільові функції обмежень. Для першого обмеження див. рис. 8.3.

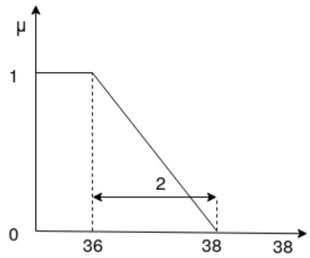


Рис. 8.3. Функція належності першого обмеження

$$\mu(C_1) = \frac{6 - x_1}{2} \geq \lambda;$$
$$-x_1 - 2\lambda \geq -6;$$
$$x_1 + 2\lambda \leq 6.$$

Наприкінці отримуємо таку чітку задачу:

$$\lambda \to \max;$$
$$1{,}5x_1 + 2{,}5x_2 - \lambda \geq 18;$$
$$x_1 + 2\lambda \leq 6;$$
$$0{,}25x_2 + \lambda \leq 2{,}5;$$
$$0{,}43\lambda + 0{,}286x_2 + \lambda \leq 3{,}57;$$
$$x_1, x_2, \lambda \leq 0.$$

Розв‘язком нечіткої задачі є:

$$x_1 = 1{,}95; \quad x_2 = 6{,}39; \quad z = 37{,}8.$$

8.2. Задача нечіткого лінійного програмування із чіткою цільовою функцією

Модель, у якій цільова функція є чіткою, а обмеження нечіткими, не є симетричною – ролі цільової функції та обмежень відрізняються. Обмеження задають простір можливих розв'язків у чіткому або нечіткому вигляді, а цільова функція задає порядок на множині можливих розв'язків. Основною проблемою при цьому є шкалювання цільової функції (множина визначення якої не є нормалізованою) при узгодженні її із (нормалізованими) обмеженнями.

Є два підходи до розв'язання цієї задачі.

1. Задання нечіткої множини "розв'язок задачі".
2. Визначення чіткого максимізуючого розв'язку шляхом агрегування цільової функції після відповідних перетворень, здійснених над обмеженнями.

8.2.1. Задання нечіткої множини "розв'язок задачі"

Одним із підходів є обчислення для всіх α-перерізів простору можливих розв'язків, відповідні оптимальні значення для цільової функції розглядаються як нечітка множина "розв'язок задачі" з оптимальними значеннями цільової функції та відповідними степенями належності α.

Приклад 8.3. Розглянемо задачу:

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 &\to \max; \\ x_1 &\lesssim 3; \\ x_1 + x_2 &\lesssim 4; \\ 5x_1 + x_2 &\lesssim 3; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Інтервали толерантності обмежень становлять $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$. Тоді відповідна параметрична задача лінійного програмування для визначення взаємозв'язку між $f(x) = \alpha$ та степенем належності матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
z = 2x_1 + x_2 \to \max;\\
x_1 \le 9 - 6\alpha;\\
x_1 + x_2 \le 8 - 4\alpha;\\
5x_1 + x_2 \le 5 - 2\alpha;\\
x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Праві частини нерівностей отримані за таким алгоритом. Нехай $\mu_i(x)$ – функція належності правої частини.
Тоді i-те обмеження запишемо у вигляді

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \le \mu^{-1}(\alpha).$$

У випадку лінійної функції належності маємо

$$\mu^{-1}(\alpha) = b_i + p_i(1 - \alpha).$$

У нашому прикладі отримуємо такі дані (табл. 8.3):

Таблиця 8.3. Праві частини параметричної задачі

i	b_i	p_i	Права частина
1	3	6	$3 + 6(1 - \alpha) = 9 - 6\alpha$
2	4	4	$4 + 4(1 - \alpha) = 8 - 4\alpha$
2	3	2	$3 + 2(1 - \alpha) = 5 - 2\alpha$

Особа, що приймає рішення, повинна визначити, які пари $(\alpha, \mu_{f(\alpha)})$ є для неї прийнятними.

8.2.2. Визначення розв'язку агрегуванням цільової функції

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – цільова функція, $\tilde{R}$ – нечітка область (простір розв'язків), $S(\tilde{R})$ – носій $\tilde{R}$.

Максимізуюча множина над нечіткою множиною $\tilde{M}R(f)$ тоді визначається функцією належності

$$\mu_{\tilde{M}R(f)}(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \le \inf_{S(\tilde{R})} f; \\ \frac{f(x) - \inf_{S(\tilde{R})} f}{\sup_{S(\tilde{R})} f - \inf_{S(\tilde{R})} f}, & \inf_{S(\tilde{R})} f < f(x) < \sup_{S(\tilde{R})} f; \\ 1, & \sup_{S(\tilde{R})} f \le f(x). \end{cases}$$

Перетин цієї множини із нечіткою множиною "розв'язок задачі" може бути використаний для знаходження максимізуючого розв'язку x_0 як розв'язку із найвищим степенем належності у зазначеній нечіткій множині. Оптимальним був би пошук найбільш можливого значення f зі степенем належності 1 у множині визначення.

Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – цільова функція, $\tilde{R}$ – нечітка область, $S(\tilde{R})$ – носій $\tilde{R}$, R_1 – α-переріз множини $\tilde{R}$ для $\alpha = 1$.

Функція належності мети (цільової функції) над простором розв'язків $\tilde{R}$ визначається рівнянням

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \le \sup_{R_1} f; \\ \frac{f(x) - \sup_{R_1} f}{\sup_{S(\tilde{R})} f - \sup_{R_1} f}, & \sup_{R_1} f < f(x) < \sup_{S(\tilde{R})} f; \\ 1, & \sup_{S(\tilde{R})} f \le f(x). \end{cases}$$

Відповідна функція належності у функціональному просторі матиме вигляд

$$\mu_{\tilde{G}}(\alpha) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(r)}, & \text{якщо} \quad r \in \mathbb{R}, f^{-1}(\alpha) \ne \varnothing; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Приклад 8.4. Розглянемо задачу із попереднього прикладу. Для такої моделі R_1 визначатиметься із співвідношень

$$x_1 \leq 3;$$
$$x_1 + x_2 \leq 4;$$
$$5x_1 + x_2 \leq 3;$$
$$x \geq 0.$$

Супремумом цільової функції у цій області є (див. рис. 8.4))

$$\sup_{R_1} 2x_1 + x_2 = 7.$$

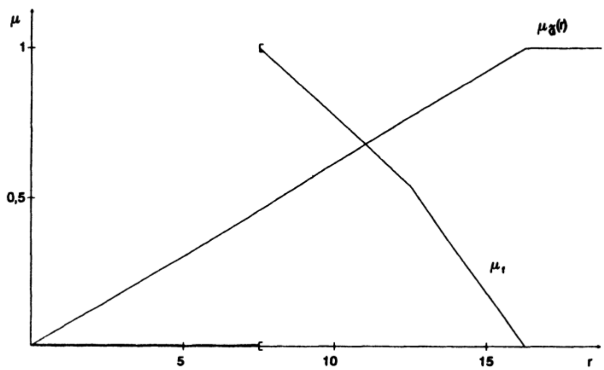


Рис. 8.4. Функції належності цілі та розв'язку

Використовуючи мінімаксний підхід, отримуємо:

$$x_1^0 = 5{,}84; \quad x_2^0 = 0{,}05; \quad r_0 = 11{,}73; \quad \mu_{\tilde{R}}(x_0) = 0{,}53.$$

Припустимо тепер, що у нашій моделі є як чіткі, так і нечіткі обмеження:

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x &\to \max;\\
Ax &\lesssim b;\\
Dx &\leq b';\\
x &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Множину обмежень позначатимемо $\tilde{R}$.

Нехай функції належності нечітких обмежень мають вигляд

$$
\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad A_i x \leq b_i; \\ \frac{b_i + p_i - A - ix}{p_i}, & \text{якщо} \quad b_i < A_i x \leq b_i + p_i; \\ 1, & \text{якщо} \quad A_i x > b_i + p_i. \end{cases}
$$

Функція належності цільової функції може бути визначена розв'язанням двох задач лінійного програмування:

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x &\to \max;\\
Ax &\leq b;\\
Dx &\leq b';\\
x &\geq 0,
\end{aligned}
$$

звідки отримуємо $\sup_{R_1} f = (c^T x)_{opt} = f_1$, і

$$
\begin{aligned}
f(x) = c^T x &\to \max;\\
Ax &\leq b + p;\\
Dx &\leq b';\\
x &\geq 0,
\end{aligned}
$$

звідки отримуємо $\sup_{S(\tilde{R})} f = (c^T x)_{opt} = f_0$.

Отже, функція належності цільової функції матиме вигляд

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad f_0 \le c^T x; \\ \frac{c^T x - f_1}{f_0 - f_1}, & \text{якщо} \quad f_1 < c^T x \le f_0; \\ 0, & \text{якщо} \quad c^T x > f_1. \end{cases}$$

Для знаходження розв'язку в цьому випадку нам слід розв'язати чітку задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} \lambda &\to \max; \\ \lambda(f_0 - f_1) - c^T x &\le -f_1; \\ \lambda p + Ax &\le b + p; \\ Dx &\le b'; \\ \lambda &\le 1; \\ \lambda, x &\ge 0. \end{aligned}$$

9. Прийняття рішень у нечітко заданому середовищі

Проблема прийняття рішень є найбільш поширеним класом задач у практично кожній сфері людської діяльності: техніці, економіці, медицині тощо. І оскільки людина (дослідник) є активною компонентою процесу прийняття рішень, то необхідно враховувати її суб'єктивні особливості, що зумовлюють неповноту знань про предмет дослідження, їх неточність та нечіткість, обмеженість ресурсів і засобів для досягнення мети. Розглянемо основні найбільш поширені критерії у прийнятті рішень.

9.1. Критерій Байєса – Лапласа

При виборі рішення $x \in X$ у випадку, коли середовище перебуває (або буде перебувати) у стані $\theta \in \Theta$, необхідно враховувати значення функціонала оцінювання $F(x,\theta)$. Вважається, що до моменту прийняття рішення відомий розподіл імовірностей зовнішнього середовища $P = \{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$, $p_j = P(\theta = \theta_j) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Необхідно вибрати розв'язок

$$x^* = \arg\max_{x_k \in X} F(x_k,P) = \arg\max_{x_k \in X} \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj},$$

де f_{kj} – значення критерію у випадку прийняття x_k-го розв'язку в j-му стані середовища.

Виберемо деякий рівень належності значення середнього виграшу, що дорівнює α:

$$\mu(F(x_k,P)) = \alpha,\ k = \overline{1,m},\ 0 < \alpha \leq 1.$$

Розв'яжемо рівняння

$$\exp\left\{-\frac{(F_k(x)-\overline{F}_{\sigma,k}}{2D_{\sigma,k}}\right\}=\alpha,$$

маємо

$$F_k=\overline{F}_{\sigma,k}\pm\Big[-2D_{\sigma,k}\ln\alpha\Big]^{0,5}.$$

Виберемо F_k із умови

$$F_k=\min\left\{\overline{F}_{\sigma,k}-\sqrt{-2D_{\sigma,k}\ln\alpha},\overline{F}_{\sigma,k}+\sqrt{-2D_{\sigma,k}\ln\alpha}\right\}=$$
$$=\overline{F}_{\sigma,k}-\Big[-2D_{\sigma,k}\ln\alpha\Big]^{0,5}.$$

За найкраще значення за критерієм Байєса – Лапласа виберемо

$$x^*=\arg\max_k\left\{\overline{F}_{\sigma,k}-\left[2D_{\sigma,k}\ln\frac{1}{\alpha}\right]^{0.5}\right\}.$$

Приклад 9.1. Нехай матрицю виграшів задано табл. 9.1.

Таблиця 9.1. Матриця виграшів (критерій Байєса)

1	8	1	7	2
2	3	6	3	7
3	2	8	3	5
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Знайдемо найкращі альтернативи в наведеній нижче чіткій постановці:

$$
\begin{aligned}
&F(x_k,P) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj} : \\
&F(x_1,P) = 0{,}1 \cdot 8 + 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 7 + 0{,}4 \cdot 2 = 3{,}3; \\
&F(x_2,P) = 5{,}3; \\
&F(x_3,P) = 5{,}2.
\end{aligned}
$$

Найкращий розв'язок

$$
x^* = \arg\max_{x_k} F(x_k,P) = \arg\max\{3{,}3; 5{,}3; 5{,}2\} = x_2.
$$

Тепер значення виграшів f_{kj} є нечіткими числами з відповідними функціями належності:

$$
\mu(f_{11}) = \exp\left\{-\frac{(f_{11}-8)^2}{2\times 4}\right\},\ \mu(f_{12}) = \exp\left\{-\frac{(f_{12}-1)^2}{2\times 1}\right\},
$$
$$
\mu(f_{13}) = \exp\left\{-\frac{(f_{13}-7)^2}{2\times 6}\right\},\ \mu(f_{14}) = \exp\left\{-\frac{(f_{14}-2)^2}{2\times 2}\right\},
$$
$$
\mu(f_{21}) = \exp\left\{-\frac{(f_{21}-3)^2}{2\times 1}\right\},\ \mu(f_{22}) = \exp\left\{-\frac{(f_{22}-6)^2}{2\times 4}\right\},
$$

$$
\mu(f_{23}) = \exp\left\{-\frac{(f_{23}-2)^2}{2\times 2}\right\},\ \mu(f_{24}) = \exp\left\{-\frac{(f_{24}-7)^2}{2\times 6}\right\},
$$
$$
\mu(f_{31}) = \exp\left\{-\frac{(f_{31}-2)^2}{2\times 4}\right\},\ \mu(f_{32}) = \exp\left\{-\frac{(f_{32}-8)^2}{2\times 1}\right\},
$$
$$
\mu(f_{33}) = \exp\left\{-\frac{(f_{33}-3)^2}{2\times 4}\right\},\ \mu(f_{34}) = \exp\left\{-\frac{(f_{34}-5)^2}{2\times 4}\right\}.
$$

Знову розв'язуємо задачу вибору найкращого розв'язку з урахуванням нечіткості параметрів середовища:

$$\overline{F}_k = \sum_{j=1}^{n} p_j \overline{f}_{kj}, \qquad D_k = \sum_{j=1}^{n} D_{kj} p_j^2.$$

Маємо:

$\overline{F}_1 = 3{,}3,\ D_1 = 0{,}01 \times 4 + 0{,}09 \times 1 + 0{,}04 \times 6 + 0{,}16 \times 2 = 0{,}69.$

$\overline{F}_2 = 5{,}3,\ D_2 = 1{,}41.$

$\overline{F}_3 = 5{,}2,\ D_3 = 0{,}9.$

Функції належності середнього значення виграшу для можливих альтернатив мають вигляд

$$\mu_f(F_1^*(x_1,P)) = \exp\left\{-\frac{(f_1 - 3{,}3)^2}{2 \times 0{,}69}\right\},$$
$$\mu_f(F_2^*(x_2,P)) = \exp\left\{-\frac{(f_2 - 5{,}3)^2}{2 \times 1{,}4}\right\},$$
$$\mu_f(F_3^*(x_3,P)) = \exp\left\{-\frac{(f_3 - 5{,}2)^2}{2 \times 0{,}9}\right\}.$$

Задамо рівень належності значення середнього виграшу таким, що дорівнює 0,9, та розв'яжемо рівняння $\mu_f(F^*(x_k,P)) = 0{,}9$ і виберемо найменший корінь.

Маємо:

$$F_1 = \overline{F}_1 - \left[D_1 \ln \frac{1}{0{,}81}\right]^{0{,}5} = 3{,}3 - [0{,}69] \cdot [0{,}221]^{0{,}5} = 2{,}91;$$

$$F_2 = 4{,}47, \qquad F_3 = 4{,}76.$$

Отже,

$$x^* = \arg\max_{x_k}\{F_k\} = \arg\max\{2{,}91; 4{,}74; 4{,}76\} = x_3.$$

9.2. Критерій Кофмана

Якщо якість вибраного рішення $x \in X$ є низькою ($F(x_k,P) < d_1$, де d_1 – задана константа), то оголошується невдача, якщо $F(x_k,P) > d_3$, де $d_3 = \text{const} > d_1$, то оголошується успіх. При $d_1 \leq F(x_k,P) \leq d_2$ ($d_1 < d_2 < d_3$) оголошується невизначеність.

Множина станів середовища розбивається на три підмножини:

$$E_k^- = \{j : f_{kj} < d_1\},$$
$$E_k^0 = \{j : d_1 \leq f_{kj} \leq d_2\},$$
$$E_k^+ = \{j : f_{kj} > d_2\}.$$

Позначимо

$$F^-(x_k,E_k^-) = \sum_{j \in E_k^-}^{n} p_j f_{kj},$$
$$F^0(x_k,E_k^0) = \sum_{j \in E_k^0}^{n} p_j f_{kj},$$
$$F^+(x_k,E_k^+) = \sum_{j \in E_k^+}^{n} p_j f_{kj}.$$

За найкращу альтернативу приймаємо

$$x^* = \arg\max_{x_k \in X} \{F^+(x_k,E_k^+) - F^-(x_k,E_k^-)\}.$$

Розглянемо технологію вибору найкращої альтернативи за критерієм Кофмана.

Маємо:

$$\mu\Big(\sum_{j\in E_k^+} f_{kj}^{\pm}p_j\Big) = \exp\left\{-\frac{(F_k^{\pm}-\overline{F}_k^{\pm})^2}{2D_k^{\pm}}\right\},$$
$$\overline{F}_k^{\pm} = \sum_{j\in E_k^+} f_{kj}^{\pm}\overline{p}_j,$$
$$\overline{D}_k^{\pm} = \sum_{j\in E_k^+} (f_{kj}^{\pm})^2\sigma_k^2.$$

Тепер

$$\mu(F_k^+ - F_k^-) = \exp\{-\frac{(F_k-\overline{F}_k)^2}{2D_k}\},$$
$$\overline{F}_k = \overline{F}_k^+ - \overline{F}_k^-,$$
$$D_k = D_k^+ - D_k^-.$$

Подальша процедура в методі Кофмана аналогічна описаній вище процедурі в методі Байєса – Лапласа. При цьому розв'язуємо рівняння

$$\mu(F_k) = \mu(F_k^+ - F_k^-) = \alpha,\ k=\overline{1,m},\ 0<\alpha\le 1,$$

та для кожного k вибираємо менший корінь, який шляхом вибору x_k максимізується. Відмінність полягає лише у способі розрахунку функції належності нечіткого значення середньої переваги виграшу на множині станів E_k^+ над виграшем на підмножині E_k^-.

Приклад 9.2. Продовжимо приклад 9.1.

Задамо $d_1 = 3{,}5$, $d_3 = 4{,}5$.

Маємо:

$$E_1^- = \{2;4\},\quad E_1^0 = \varnothing,\quad E_1^+ = \{1{,}3\},$$
$$E_2^- = \{1;3\},\quad E_2^0 = \varnothing,\quad E_2^+ = \{2{,}4\},$$
$$E_3^- = \{1;3\},\quad E_3^0 = \varnothing,\quad E_3^+ = \{2{,}4\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
F^+(x_1,P) - F^-(x_1,P) &= (0{,}1 \times 8 + 0{,}2 \times 7) - \\
&\quad - (0{,}3 \times 1 + 0{,}4 \times 2) = 1{,}1, \\
F^+(x_2,P) - F^-(x_2,P) &= 3{,}9, \\
F^+(x_3,P) - F^-(x_3,P) &= 3{,}6.
\end{aligned}$$

Отже, $x^* = \arg\max\{1{,}1; 3{,}9; 3{,}6\} = x_2$.

У випадку нечіткого виграшу маємо:

$$\begin{aligned}
\overline{F}_1 &= F_1^+ - F_1^- = 1{,}1, \\
\overline{F}_2 &= F_2^+ - F_2^- = 3{,}9, \\
\overline{F}_3 &= F_3^+ - F_3^- = 3{,}6.
\end{aligned}$$

Значення дисперсії D_i, $i = \overline{1{,}3}$, залишається таким, що дорівнює $D_1 = 0{,}69$, $D_2 = 1{,}41$, $D_3 = 0{,}9$.

Задамо $\varepsilon = 0{,}01$, тобто $\alpha_2 = 0{,}99$.

У результаті маємо:

$$F_1 = \overline{F}_1 - \left[D_1 \ln \frac{1}{\alpha_2^2}\right]^{0{,}5} = -0{,}683, \quad F_2 = 1{,}352, \quad F_3 = 1{,}56.$$

Тоді $x^* = \arg\max_{x_k}\{F_k\} = \arg\max\{-0{,}683; 1{,}352; 1{,}56\} = x_3$.

9.3. Критерій Марковіца

Для кожної стратегії x_k обчислюються значення математичного оцінювання та дисперсії функціонала оцінювання:

$$F(x_k,P) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj}, \quad D(x_k,P) = \sum_{j=1}^{n} (f_{kj} - F(x_k,P))^2 p_j.$$

Тоді оптимальний розв'язок визначається з умови

$$x^* = \arg\min_{x_k \in X} D(x_k,P), \quad x_k = \{x : F(x_k,P) \geq P^*\},$$

де P^* – порогове значення функціонала оцінювання.

У реальній ситуації параметри стану зовнішнього середовища не можуть бути оцінені з необхідною точністю. Тому приймемо тезу, що всі компоненти вектора P є нечіткими числами із заданими функціями належності

$$\mu(p_j) = \exp\left\{-\frac{(P_i - \overline{P}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Процедура вибору за критерієм Марковіца порівняно з попередніми процедурами Байєса і Кофмана ускладнюється, оскільки вибір у цій процедурі пов'язаний з необхідністю розв'язання задачі умовної оптимізації. Визначимо функції належності для середнього виграшу та його дисперсії. Функція належності значення дисперсії виграшу має вигляд

$$\mu(D^+(x_k,P)) = \mu\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{kj}^+ - F_k^+(x_k,P))^2\Big) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{(D_k^+ - \overline{D}_k^+)^2}{2D_D^+}\right\},$$

де

$$\overline{D}_k^+ = \sum_{j=1}^{n} \overline{p}_j \Big(f_{kj}^+ - F_k^+(x_k,P)\Big)^2,$$

$$\overline{D}_D^+ = \sum_{j=1}^{n} \Big(f_{kj}^+ - F_k^+(x_k,P)\Big)^4 \sigma_j^2.$$

Далі аналогічно вищевикладеному розв'язуємо рівняння $\mu(F^+(x_k,P)) = \alpha_1$.

Спочатку розглядаємо значення $\alpha_1 = 0{,}9$ і за необхідності розглядаємо $\alpha_2 > \alpha_1$, ($\alpha_2 = 0{,}99$).

У дискретних задачах прийняття рішень множина можливих альтернатив зазвичай скінченна та містить не занадто велику кількість елементів. У зв'язку із цим для кожної альтернативи x_k розв'яжемо рівняння

$$\mu(F^+(x_k,P)) = \alpha_1,$$

де α_1 – деякий достатньо високий рівень належності r, і виберемо менший його корінь.

При цьому значення

$$F_{k\alpha_1} = \overline{F}_{\sigma,k} - \left[2D_{\sigma,k} \ln \frac{1}{\alpha_1}\right]^{0{,}5}$$

визначає нижню границю можливого середнього виграшу, що відповідає альтернативі x_k, зі степенем належності не нижчим за α_1. Тепер із множини альтернатив виділимо підмножину Q_{α_1} таких, для яких $F_{k,\alpha_1} \geq R_\Pi$, $x_k \in Q_{\alpha_1}$.

Далі для кожної альтернативи із підмножини Q_{α_1} розв'яжемо рівняння

$$\mu(D^+(x_k,P)) = \alpha_2, \quad \alpha_2 > \alpha_1,$$

і виберемо більший його корінь:

$$D_{k,\alpha_2} = \overline{D}_k^+ + \left[2D_{D_k}^+ \ln \frac{1}{\alpha_2}\right]^{0.5}.$$

Значення D_{k,α_2} визначає верхню границю дисперсії виграшу, що відповідає альтернативі $x_k \in Q_{\alpha_k}$, зі степенем належності α_2.

При виборі D_{k,α_2} за малого значення α_2 основна частина множини невизначеності, що задається функцією належності $\mu(D^+(x_k,P))$, лежить ліворуч від абсциси D_{k,α_2}.

Тепер із підмножини альтернатив D_{α_1} виділимо підмножину альтернатив таких, для яких $D^+(x_k,P) \le D_{k,\alpha_2}$, $x_k \in Q_{\alpha_2} \subset Q_{\alpha_1}$.

Після цього на підмножині альтернатив Q_{α_2} виберемо альтернативу, що мінімізує $D^+(x_k,P)$.

Аналогічно чинимо з нечітко заданими значеннями $\{f_{kj}\}$. Нехай

$$\mu(f_{kj}) = \exp\left\{-\frac{(f_{kj} - \overline{f}_{kj})^2}{2D_{kj}}\right\}, \quad k = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Тоді функція належності нечіткого значення середнього виграшу має вигляд

$$\mu_f(F_k^+(x_k,P)) = \exp\left\{-\frac{(F_k - \overline{F}_k)^2}{2D_k}\right\},$$

де

$$\overline{F}_k = \sum_{j \in E_k^+} p_j \overline{f}_{kj}, \quad D_k^+ = \sum_{j \in E_k^+} D_{kj} p_j^2, \quad k = \overline{1,m}.$$

Подальший вибір найкращої альтернативи виконується аналогічно попередньому.

Аналогічна попередньому і процедура вибору найкращого розв'язку за критерієм Марковіца.

Нечітке значення дисперсії середнього виграшу для альтернативи x_k дорівнює середньому значенню квадрата центрованого значення нечіткого виграшу:

$$D_k = \mu((f_{kj} - \overline{f}_{kj})^2) = \sum_{j=1}^{n} p_j \Big(f_{kj} - \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj}\Big)^2. \qquad (9.1)$$

Для отримання функції належності нечіткого значення дисперсії середнього виграшу спочатку запишемо функцію належності центрованого значення виграшу для альтернативи x_k:

$$\mu\Big(f_{kj} - \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj}\Big) = \sum_{j=1}^{n} p_j \Big(f_{kj} - \sum_{j=1}^{n} p_j f_{kj}\Big)^2 =$$
$$= \mu(f^{ц}_{kj}) = \exp\left\{-\frac{(f^{ц}_{kj} - \overline{f}^{ц}_{kj})^2}{D^{ц}_{k}}\right\},$$
$$\text{де } \overline{f}^{ц}_{kj} = \overline{f}_{kj} - \sum_{j\in E_k^+} p_j \overline{f}_{kj}, \quad D^{ц}_{kj} = D_{kj} + \sum_{j=1}^{n} p_j^2 D_{kj}.$$

Функції належності квадрата центрованого значення виграшу є

$$\mu\Big((f^{ц}_{kj})^2\Big) = \mu(u_{kj}) = \exp\left\{-\frac{(u_{kj} - \overline{u}_{kj})^2}{D_{kj}}\right\}, \qquad (9.2)$$
$$\text{де } u_{kj} = f^{ц}_{kj}, \quad D_{kj} = (D^{ц}_{kj})^2 + 2D^{ц}_{kj}(f^{ц}_{kj})^2.$$

Функція належності нечіткого числа (9.1) з урахуванням (9.2) має вигляд

$$\mu(D_k) = \mu\Big(\sum_{j=1}^{n} p_j (f_{kj}^{\text{ц}})^2\Big) = \exp\left\{-\frac{(D_k - \overline{D}_k)^2}{D_{D_k}}\right\},$$

де $\overline{D}_k = \sum_{j=1}^{n} p_j (f_{kj}^{\text{ц}})^2, \quad D_{D_k} = \sum_{j=1}^{n} p_j \Big((D_{kj}^{\text{ц}})^2 + 2D_{kj}(\overline{f}_{kj}^{\text{ц}})^2\Big).$

Подальші дії з вибору найкращої альтернативи зводяться до повторення вищенаведеної схеми.

Приклад 9.3. Задамо порогове значення функціонала оцінювання $R_p = 4{,}5$, при цьому нерівності задають альтернативи x_2 і x_3. Для цих альтернатив маємо:

$$\begin{aligned} D(x_2,P) &= \sum_{j=1}^{n} (f_{2j} - F(x_2,P))^2 p_j = \\ &= 0{,}1 \times (2{,}3)^2 + 0{,}3 \times (0{,}7)^2 + \\ &+ 0{,}2 \times (3{,}3)^2 + 0{,}4 \times (4{,}7)^2 = 4{,}1; \\ D(x_3,P) &= 4{,}36. \end{aligned}$$

Отже,

$$x^* = \arg\min_{x_k} D(x_k,P) = \arg\min\{4{,}01, 4{,}36\} = x_2.$$

Розглянемо альтернативи x_2 та x_3, у яких значення виграшу є нечіткими числами з функціями належності

$$\begin{aligned} &\overline{f}_{21} = 3 - 5{,}3 = -2{,}3, \quad \overline{f}_{22} = 0{,}7, \quad \overline{f}_{23} = -3{,}3, \quad \overline{f}_{24} = 1{,}7, \\ &\overline{f}_{31} = -3{,}2, \quad \overline{f}_{32} = 2{,}8, \quad \overline{f}_{33} = -2{,}2, \quad \overline{f}_{34} = -0{,}2. \end{aligned}$$

Маємо

$$D_{21} = 1 + 1{,}41 = 2{,}41,\ D_{22} = 2{,}41,\ D_{23} = 3{,}41,\ D_{24} = 7{,}41,$$
$$D_{31} = 4{,}9,\ D_{32} = 1{,}9,\ D_{33} = 4{,}9,\ D_{34} = 4{,}9.$$

Обчислюємо компоненти функції належності:

$$\begin{aligned}
\overline{D}_2 &= 0{,}1 \times (2{,}3)^2 + 0{,}3 \times (0{,}7)^2 + \\
&\quad + 0{,}2 \times (3{,}3)^2 + 0{,}4 \times (1{,}7)^2 = 4{,}01, \\
\overline{D}_3 &= 4{,}36.
\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}
D_{D_2} &= 0{,}01(2{,}41^2 + 2 \times 2{,}41 \times 2{,}3^2) + \\
&\quad + 0{,}09(5{,}41^2 + 2 \times 5{,}41 \times 0{,}7^2) + \\
&\quad + 0{,}04(3{,}41^2 + 2 \times 3{,}41 \times 3{,}3^2) + \\
&\quad + 0{,}16(7{,}41^2 + 2 \times 7{,}41 \times 1{,}7^2) = 22{,}5, \\
D_{D_3} &= 11{,}05.
\end{aligned}$$

Задамо тепер рівень належності $\alpha_2 = 0{,}99$ і знайдемо D_{k,α_2}. При цьому $D_{2,\alpha_2} = 14{,}19$, $D_{3,\alpha_2} = 11{,}49$.

Отже, $D_{3,\alpha_2} < D_{2,\alpha_2}$ і альтернатива x_3 є розв'язком даної задачі.

10. Приклади варіантів лабораторних робіт

10.1. Лабораторна робота №1

Задано універсальну множину $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і дві нечіткі підмножини: $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$, $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, $x,y \in X$.

Виконайте такі завдання:

1. Знайдіть ядра та носії нечітких чисел, а також α-перерізи для $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}8$.
2. Знайдіть множини $\overline{\tilde{A}}$, $\overline{\tilde{B}}$, $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\tilde{A} \setminus \tilde{B}$, $\tilde{B} \setminus \tilde{A}$.

Варіанти завдань

Варіант 1

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0,6	0,3	0	0	0,5	0,5	0,9
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,7	0,4	0	0,5	0,8	1	1	0,6

Варіант 2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,2	0,8	0,5	1	0	0,9	0,3	0,4
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,7	0	0	0,6	0,4	1	0	0,4

Варіант 3

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,5	0,3	0	1	0,9	0,3	0,4	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,5	1	1	0,8	0,7	0,2	0	0,1

Варіант 4

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	1	0,5	0,8	0,1	0,8	0,4	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,5	0,6	0,6	0,8	0,5	1	0,6	0,1

Варіант 5

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,4	0,1	0	1	1	0,3	0,7	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,5	0,7	0,5	0	1	0,8	0	0,1

Варіант 6

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	1	0,3	0,7	0,8	0,9	0,4	0,7	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,5	0,7	0,3	0,5	0,9	1	0	0,1

Варіант 7

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,6	1	0,7	0,8	0	0,4	0,7	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,6	0,7	1	0,5	0,9	0	0	0,1

Варіант 8

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,1	0,3	0,4	0,5	1	0,4	0,7	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0,5	0,8	0,3	0,4	0,9	0	0	1

Варіант 9

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,1	0,3	1	1	0,6	0,4	0,7	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	0	0,7	0,4	0,7	0,8	1	0	0,1

Варіант 10

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,9	0,3	0,7	1	1	0,2	0,4	0,2
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	1	0	0,3	0,6	0,9	0	0,6	0,1

Варіант 11

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	0,7	0,6	1	1	0	0,2	0,4	0,7
$\mu_{\tilde{B}}(x)$	1	1	0	0,6	0,9	0,7	0,3	0,8

10.2. Лабораторна робота №2

Нехай $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ – два нечіткі числа трикутного вигляду.
Завдання:

1. Зобразити $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ графічно.

2. Знайти та зобразити графічно $\tilde{p} \ominus \tilde{q}$, $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$, $\tilde{p} \oslash \tilde{q}$.

Варіанти завдань

Варіант 1. $\tilde{p} = (10; 2; 1)$, $\tilde{q} = (5{,}2{,}3)$.
Варіант 2. $\tilde{p} = (15; 2; 2)$, $\tilde{q} = (3{,}2{,}3)$.
Варіант 3. $\tilde{p} = (8; 2; 1)$, $\tilde{q} = (4{,}1{,}1)$.
Варіант 4. $\tilde{p} = (12; 1; 2)$, $\tilde{q} = (3{,}1{,}1)$.
Варіант 5. $\tilde{p} = (14; 2; 1)$, $\tilde{q} = (2{,}1{,}2)$.
Варіант 6. $\tilde{p} = (9; 1; 1)$, $\tilde{q} = (3{,}1{,}2)$.
Варіант 7. $\tilde{p} = (16; 2; 3)$, $\tilde{q} = (4{,}2{,}1)$.
Варіант 8. $\tilde{p} = (10; 1; 3)$, $\tilde{q} = (2{,}1{,}1)$.
Варіант 9. $\tilde{p} = (18; 2; 1)$, $\tilde{q} = (9{,}2{,}3)$.
Варіант 10. $\tilde{p} = (6; 2; 1)$, $\tilde{q} = (2{,}1{,}2)$.
Варіант 11. $\tilde{p} = (4; 2; 8)$, $\tilde{q} = (3{,}1{,}1)$.

10.3. Лабораторна робота №3

Завдання:

Розв'яжіть нижченаведену ПНСЛАР, де $v = 1{,}2,\ldots,10$ – номер варіанта.

$$\begin{cases} (2+v;1;1)\otimes\tilde{x}_1 + (17-v;2;1)\otimes\tilde{x}_2 & = (6;2;3); \\ (3;1;2)\otimes\tilde{x}_1 + (5+v;2;2)\otimes\tilde{x}_2 & = (5;1;2). \end{cases}$$

10.4. Лабораторна робота №4

Нехай $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ – два нечіткі числа трикутного вигляду.

Завдання:

1. Зобразити $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ графічно.

2. Порівняти $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$, використовуючи методи порівняння першого та другого типу.

Зауваження: У варіантах завдань цієї лабораторної роботи нечіткі числа задані **через крайні точки**.

Варіанти завдань

Варіант 1. $\tilde{p} = (7;10;13)$, $\tilde{q} = (9{,}11{,}12)$.
Варіант 2. $\tilde{p} = (1;5;7)$, $\tilde{q} = (3{,}4{,}8)$.
Варіант 3. $\tilde{p} = (5;7;8)$, $\tilde{q} = (7{,}8{,}10)$.
Варіант 4. $\tilde{p} = (4;8;9)$, $\tilde{q} = (5{,}7{,}11)$.
Варіант 5. $\tilde{p} = (5;9;10)$, $\tilde{q} = (6{,}8{,}9)$.
Варіант 6. $\tilde{p} = (4;7;9)$, $\tilde{q} = (5{,}6{,}8)$.
Варіант 7. $\tilde{p} = (1;3;4)$, $\tilde{q} = (2{,}4{,}7)$.
Варіант 8. $\tilde{p} = (6;9;13)$, $\tilde{q} = (5{,}10{,}11)$.
Варіант 9. $\tilde{p} = (3;8;10)$, $\tilde{q} = (4{,}5{,}6)$.
Варіант 10. $\tilde{p} = (7;9;11)$, $\tilde{q} = (7{,}10{,}15)$.
Варіант 11. $\tilde{p} = (3;8;11)$, $\tilde{q} = (5{,}9{,}11)$.

10.5. Лабораторна робота №5

Завдання:

Розв'яжіть задану задачу лінійного програмування. Самостійно задайте поступки для цільової функції та обмежень, розв'яжіть відповідну нечітку задачу.

Варіант 1

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\to \max; \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 2

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &\to \min; \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 3

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 4

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \min; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 5

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\to \max; \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ x_1 + 6x_2 &\leq 18, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 6

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 7

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\to \min; \\ x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 8

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &\to \max; \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10, \\ 12x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 9

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\to \max; \\ 3x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 - 6x_2 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 10

$$\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 18, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 12, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 11

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\to \max; \\ x_1 + 5x_2 &\geq 7, \\ 2x_1 - 6x_2 &\leq 20, \\ x_1 + 5x_2 &\leq 18, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 12

$$\begin{aligned} 11x_1 + 2x_2 &\to \max; \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 8, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16, \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 14, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. Рекомендовані літературні джерела

Основна література

1. Раскин Л.Г., Серая О.В., Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. – Харьков: Парус, 2008. – 352 с.

2. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Відавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010, 2018. – 336 с.

3. Згуровський М.З., Зайченко Ю.П. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях / М. З. Згуровский, Ю. П. Зайченко ; Нац. акад. наук Украины, Ин-т приклад. систем. анализа. – К. : Наукова думка, 2011. – 279 с.

4. A. Kaufmann and M. Gupta.Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications. Electrical-Computer Science and Engineering Series.Van Nostrand Reinhold Company, 1985.

5. Zimmermann, H.-J. Fuzzy Set Theory - and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 2001. – 514 p.

Додаткова література

6. Волошин А.Ф., Лавер В.А. Нечеткие обобщения модели распределения затрат. Information Models of Knowledge. 2010. P. 215–219.

7. Voloshyn O., Laver V. Generalization of Distributing Method for Fuzzy Problems // International Jornal "Information Theories and Applications Bulgaria, 2013, Vol. 20, Number 4. - P. 303-310. (ISSN 1310-0513).

8. Волошин О.Ф., Лавер В.О. Аксіоматична характеризація нечітких узагальнень методів розподілу витрат // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки, 2014, вип. № 1. – С. 128-132.

9. Волошин О.Ф., Лавер В.О. Нечіткі узагальнення методів розподілу у випадку нечітко заданих витрат і запасів грошей

агентів // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – спецвипуск. — С. 311–314.

10. Voloshyn, O.F., Laver, V.O. Fuzzy models and methods of rational resource allocation.Information Models and Analyses. 2016, № 5(1). P:3–12.

11. L. Zadeh. Fuzzy sets.Information and Control, 8(3):338-353, 1965.

12. L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—i.Information Sciences, 8(3):199–249, 1975.

13. R. Bellman and L. Zadeh. Decision-Making in a Fuzzy Environment.Management Science, 17, 1970.

14. S. Bodjanova. Median value and median interval of a fuzzy number.Inf.Sci., 172(1–2):73–89, June 2005.

15. M. Brunelli and J. Mezei. How different are ranking methods for fuzzy numbers? A numerical study. Internat. J. Approx. Reason., 54(5):627–639, 2013.

16. J. J. Buckley and E. Eslami.Advances in Soft Computing: An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets. Physica-Verlag GmbH, DEU, 2002.

17. M. Hanss.Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.

18. X. Liu. Measuring the satisfaction of constraints in fuzzy linear programming.Fuzzy Sets, 122(2):263–275, 2001.

19. R. E. Moore.Interval analysis [by] Ramon E. Moore. Prentice-Hall Englewood Cliffs, N.J, 1966.

20. H. T. Nguyen and E. A. Walker.A First Course in Fuzzy Logic. Chapman and Hall/CRC, 2005.

21. Івохін Є.В., Волошин О.Ф., Махно М.Ф. Моделювання процесів розповсюдження інформації на основі дифузійних рівнянь з нечітким часом // Кібернетика і системний аналіз, 2021, №6, – С. 61-71.

Зміст

1. Поняття нечіткості **3**

1.1. Означення нечіткої множини 3

1.2. Основні операції над нечіткими множинами . . . 6

1.3. Нечіткі бінарні відношення 9

2. Нечітка арифметика **13**

2.1. Принцип узагальнення 13

2.2. Поняття нечіткого числа 14

2.3. Арифметичні операції над нечіткими числами 19

3. Нечіткі лінійні рівняння та нечіткі системи лінійних рівнянь **28**

3.1. Нечіткі лінійні рівняння 28

3.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь із нечіткою правою частиною 30

3.3. Повністю нечіткі системи лінійних алгебраїчних рівнянь 35

4. Методи порівняння нечітких чисел **38**

4.1. Методи порівняння нечітких чисел першого типу 38

4.1.1. Метод Адамо 38

4.1.2. Метод порівняння центрів ядер 39

4.1.3. Метод порівняння центрів тяжіння 40

4.1.4. Метод порівняння медіан 41

4.1.5. Метод порівняння можливих середніх значень 43

4.2. Методи порівняння нечітких чисел другого типу 43

5. Нечітке математичне програмування **46**

6. Нечітка задача математичного програмування **60**

7. Нечітка задача цілочислового програмування **68**

8. Нечітке лінійне програмування **74**
8.1. Симетричне лінійне програмування 74
8.2. Задача нечіткого лінійного програмування із чіткою цільовою функцією 82
8.2.1. Задання нечіткої множини "розв'язок задачі" 83
8.2.2. Визначення розв'язку агрегуванням цільової функції 84

9. Прийняття рішень у нечітко заданому середовищі **89**
9.1. Критерій Байєса – Лапласа 89
9.2. Критерій Кофмана 93
9.3. Критерій Марковіца 96

10. Приклади варіантів лабораторних робіт **102**
10.1. Лабораторна робота №1 102
10.2. Лабораторна робота №2 104
10.3. Лабораторна робота №3 105
10.4. Лабораторна робота №4 105
10.5. Лабораторна робота №5 106

11. Рекомендовані літературні джерела **108**

Навчальне видання

Волошин Олексій Федорович
Лавер Василь Олександрович

Нечітка математика

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат $60x84^{1/16}$. Ум. друк. арк. 6,51. Наклад 100. Зам. № 223-10605.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К4.
Підписано до друку 20.04.23

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (044) 239 32 22; (044) 239 31 72; тел./факс (044) 239 31 28
e-mail: vpc@knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02