МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. В. Пічкур
О. В. Капустян
В. В. Собчук

СТІЙКІСТЬ ТА АТРАКТОРИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Рецензенти:
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. О. А. Бойчук,
д-р фіз.-мат. наук, проф. О. М. Станжицький

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
(протокол № 9 від 3 лютого 2022 року)

Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 3-22 від 14 квітня 2022 року)

Пічкур В. В.
Стійкість та атрактори еволюційних рівнянь : навч. посіб. / В. В. Пічкур, О. В. Капустян, В. В. Собчук. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2023. – 367 с.

ISBN

Викладено класичні й сучасні методи дослідження стійкості та граничних режимів нелінійних диференціальних рівнянь.

Для викладачів, науковців, аспірантів, студентів закладів вищої освіти, які здобувають фах за освітніми програмами "Математика", "Статистика", "Прикладна математика", "Системний аналіз", "Середня освіта (Математика)" та спеціалізуються в теорії диференціальних рівнянь, динамічних систем, теорії стійкості та в галузі математичного моделювання.

УДК

ISBN

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\forall$ – для кожного, для всіх (квантор загальності);

$\exists$ – існує (квантор існування);

$\emptyset$ – порожня множина;

$a \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ – a належить множині $\mathcal{A}$ яка є підмножиною множини $\mathcal{B}$;

$\overline{\mathcal{A}}$ – замикання множини $\mathcal{A}$;

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ – об'єднання та перетин множин $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$;

$\partial\mathcal{A}$, $int\ \mathcal{A}$ – границя і внутрішність множини $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$;

$comp(\mathbb{R}^n)$ – сукупність усіх непорожніх компактів в $\mathbb{R}^n$;

$conv(\mathbb{R}^n)$ – сукупність усіх непорожніх опуклих компактів в $\mathbb{R}^n$;

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ – прямий добуток множин $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$;

$f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – f відображає множину $\mathcal{A}$ у множину $\mathcal{B}$;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, дійсна вісь;

$\mathbb{R}_+$ – множина дійсних невід'ємних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел, комплексна площина;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідовий простір зі скалярним добутком $\langle x, y\rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, x_i, y_i – компоненти векторів $x, y \in \mathbb{R}^n$ відповідно, $i = 1,2, \dots, n$;

$\mathbb{C}^n$ – комплексний n-вимірний векторний простір;

T – знак транспонування;

$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^n$;

$K_r(a) = a + rK_1(0)$ – замкнена куля радіуса $r \geq 0$ із центром у точці $a \in \mathbb{R}^n$, $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq 1\}$;

$U_r(a) = a + rU_1(0)$ – відкрита куля радіуса $r \geq 0$ із центром у точці $a \in \mathbb{R}^n$, $U_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| < 1\}$;

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| = 1\}$ – сфера із центром у точці 0 одиничного радіуса;

E – одинична матриця;

$\|A\|$ – евклідова норма матриці A, $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{A}^T \mathrm{A})}$, $\mathrm{tr}(\cdot)$ – слід матриці;

$\dot{x}$ – похідна за часовою змінною t;

$f'(x)$ – похідна відображення f;

$\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$ – матриця Якобі відображення $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

$C([a,b], \mathbb{R}^n)$ – простір неперервних функцій з $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$;

$C(a,b)$ – простір неперервних функцій з $[a,b]$ в $\mathbb{R}$;

$C^1(a,b)$ – простір неперервно диференційованих функцій з $[a,b]$ в $\mathbb{R}$;

grad φ – градієнт функції φ

ВСТУП

Дослідження сучасних складних еволюційних процесів у різних прикладних сферах вимагає побудови адекватних математичних моделей. Одна з основних проблем у цій області полягає в аналізі взаємозалежності між розв'язками відповідних математичних співвідношень і вхідними початковими умовами та параметрами моделі. Указана проблематика є предметом дослідження якісної теорії диференціальних рівнянь. Якісна теорія диференціальних рівнянь містить такі розділи: умови існування, єдиності та продовжуваності розв'язків, методи фазового простору, теорія стійкості, теорія граничних множин та атракторів. У прикладному аспекті найбільшого розвитку досягла теорія стійкості механічних систем, оскільки саме механіка, як найстаріша наука, уперше зіткнулася з проблемами стійкості розв'язків диференціальних рівнянь.

Дослідження стійкості рівноваги велися ще в часи античності. Архімед (287–212 рр. до н. е.) у праці "Про рівновагу плоских фігур" досліджував, чи може тіло (важіль), яке вивели зі стану рівноваги, повернутися до нього. У цій праці він розглянув умови рівноваги плаваючого сегмента параболоїда обертання.

Леонардо да Вінчі у XV ст. розвинув учення про момент сили, довів, що тіло, яке спирається на горизонтальну площину, залишається в рівновазі, якщо вертикаль, проведена з його центра ваги, потрапляє всередину площі опори.

Е. Торрічеллі у праці "Про рух вільно падаючих і кинутих важких тіл" (1641) вивчав питання стійкості системи двох тіл (двох з'єднаних вантажів), які перебувають під дією сил тяжіння. Він вважав, що такий вантаж перебуватиме у спокої, якщо його центр тяжіння не опускається. З урахуванням такого висновку Е. Торрічеллі встановив закон рівноваги тіла на похилій площині та принцип руху центрів ваги.

Х. Гюйгенс узагальнив висновок Торрічеллі на випадок руху у праці "Маятниковий годинник" ("Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum an horologia aptato demonstrationes geometrica", 1673). Скромна назва не повинна вводити в оману.

Окрім теорії годинника, твір містив безліч першокласних відкриттів у галузі аналізу та теоретичної механіки. Гюйгенс також наводить там квадратуру деяких поверхонь обертання. Цей та інші його твори мали величезний вплив на молодого І. Ньютона.

У першій частині праці Гюйгенс описує вдосконалений, циклоїдальний маятник, який мав сталий період коливань незалежно від амплітуди. Поясненню цієї властивості він присвячує другу частину книги: виведення загальних законів руху тіл у полі тяжіння – вільних, на похилій площині, та таких, що котяться циклоїдою. Зазначимо, що це вдосконалення не знайшло практичного застосування, оскільки за малих коливань підвищення точності від циклоїдального приросту ваги незначне. Проте методика дослідження увійшла до золотого фонду науки.

Гюйгенс виводить закони рівноприскореного руху тіл у вільному падінні, враховуючи припущення, що дія сталої сили на тіло не залежить від величини й напрямку початкової швидкості. Записуючи залежність між висотою падіння і квадратом часу, Гюйгенс робить зауваження, що висоти падінь відносяться як квадрати набутих швидкостей. Далі, розглядаючи вільний рух тіла, підкинутого вгору, він зауважує, що тіло підіймається на найбільшу висоту, втративши всю надану йому швидкість, і отримує її знову під час повернення назад.

У середині XVIII ст. створюється математичний апарат і зароджуються основи теорії стійкості. У роботі Л. Ейлера "Корабельна наука або трактат про будову кораблів і керованість ними" (1749) вироблено прийоми розрахунку елементів плавучості й початкової стійкості за теоретичним кресленням, методи визначення центра ваги корабля. Ця праця фактично стала першою, в якій містилися початки математичного апарату теорії стійкості. У її третьому розділі "Про стійкість, з якою тіла, занурені у воду, протидіють у положенні рівноваги" Ейлер увів міру стійкості, яка визначається величиною моменту відновлювальної сили. Ейлер запровадив поняття про стійкість рівноваги відносно нескінченно малих збурень і досліджував її за допомогою аналізу малих коливань плаваючого тіла навколо положення рівноваги.

Після Ейлера дослідженням малих коливань механічної системи біля положення рівноваги займалися А. Клеро, Д. Бернуллі, Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж.

Значну роль у розвитку вчення про стійкість руху відіграли дослідження руху тіл Сонячної системи. Уперше (1786) задачу про стійкість руху небесних тіл поставив Лагранж. Він заклав основи теорії малих (лінійних) коливань, зводячи деякі задачі теорії малих коливань до лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Лагранж вивів із диференціальних рівнянь вікових збурень інтегральне співвідношення, в якому деяка додатна квадратична функція збурень ексцентриситету й довготи перигелію залишається незмінною. Лагранж використовував цей інтеграл для доведення стійкості незбуреного стану планетної системи. Він довів теорему про стійкість ізольованого положення рівноваги матеріальної системи, коли функція сил, які діють на систему, досягає максимуму, сформулював теорему про стійкість стану рівноваги консервативної системи, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії.

У своїй праці "Аналітична механіка" (1787) Лагранж досліджував диференціальні рівняння, які описують взаємодію в різних системах тіл, які завжди інтегровані, зокрема і випадки, коли тіла дуже мало відхиляються від своїх положень рівноваги. Досліджуючи корені алгебричного рівняння, яке визначає частоти коливань, він висловив помилкове твердження, що за наявності кратних коренів цього рівняння повинні з'являтися вікові члени (члени, які містять часову змінну поза знаком синуса або косинуса) і стійкості не буде. Оскільки в консервативній системі амплітуда коливань зростати не може, то Лагранж вважав, що рівняння частот не може містити кратних коренів. Цієї ж помилки допустився 1761 р. і Д'Аламбер.

Дослідження Лагранжа зі стійкості руху планет продовжив П. Лаплас. Зокрема, до п'ятого тому своєї праці "Небесна механіка" (1799–1805) він включив мемуари Лагранжа "Щодо виправлення методів наближеного розв'язання рівнянь руху планет". Лаплас представив взаємні збурення планет у вигляді математичних рядів і довів, що Лагранж відкинув члени ряду, які не можна було відкидати. 1784 р. Лаплас знову звернувся до цієї задачі. Він виявив періодичні члени ряду, які далеко стоять від його початку і величиною яких нехтувати не можна, знайшов їхній період – понад 900 років. Лаплас довів стійкість руху Сонячної системи протягом великого проміжку часу завдяки малим ексцентриситетам і малим взаємним нахилам орбіт і руху всіх планет в один бік.

1809 р. С. Пуассон, знайшовши збурення великих півосей планетних орбіт із точністю до членів другого порядку відносно збурених мас, теж зацікавився питанням стійкості Сонячної системи. Він указав, що стійкість існує, якщо враховувати квадрати мас і нехтувати їхніми кубами, які містять вікові члени. Тобто, коли параметри, які визначають конфігурацію системи, не мають вікових членів, то справджується стійкість. За наявності вікових членів амплітуда коливань необмежено зростає і стійкість порушується.

Ф. Міндінг у курсі механіки (1838) удосконалив доведення Лагранжем теореми про стійкість стану рівноваги консервативної системи, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії. Г. Діріхле у праці "Про стійкість рівноваги" (1846) дав точне доведення цієї теореми. Він без розвинення в ряди показав, що строгий висновок щодо стійкості можна отримати з інтеграла рівнянь руху (точне доведення цього факту привело до виникнення методу функцій Ляпунова). Діріхле також довів, що висновки щодо стійкості необхідно робити, провівши дослідження на всьому інтервалі руху.

Дослідженням стійкості Сонячної системи займався й У. Леверр'є. 1839 р. він дослідив вікові зміни планетних орбіт, 1845 р. почав вивчати нерівності в русі планети Уран, а в 1855–1877 рр. методом послідовних наближень отримав розв'язок рівнянь довгот, широт і радіусів-векторів планет із точністю до членів першого і частково другого порядків відносно збурювальних мас. З урахуванням цього, він передбачив існування планети Нептун.

Першу спробу побудувати загальну теорію стійкості руху зробили У. Томсон і П. Тет у спільній праці "Курс натуральної філософії" (1867). Вони вважали рух системи під дією сил, які мають силову функцію, консервативним, за якого повна енергія системи не змінюється. Беручи за незалежну змінну одну з координат системи, Томсон і Тет склали диференціальні рівняння для визначення інших координат у збуреному русі й дослідили стійкість руху системи у просторі. На основі різноманітності окремих прикладів і загальних міркувань вони знайшли зв'язок стійкості руху з інтегралом дії, визначили роботу в час удару і показали, що мінімум руху на траєкторії визначає її стійкість (стаціонарність руху на траєкторії залишає це питання відкритим).

1875 р. Кембриджський університет запропонував на здобуття премії Адамса задачу про стійкість руху. Вона була присуджена 1877 р. Е. Роусу. Основні результати його досліджень із доповненнями ввійшли до книги "Удосконалена частина динаміки системи твердих тіл" (1877). У ній розглянуто диференціальні рівняння відхилень координат системи від їхніх значень (рівняння збуреного руху). Роус вважав, що ці відхилення спричинено миттєвими збуреннями. Він розглянув випадок, коли коефіцієнти лінійних диференціальних рівнянь збуреного руху є сталими, і провів повне дослідження стійкості. Застосовуючи метод лінеаризації, Роус показав, як за певних умов рівняння збуреного руху зі змінними коефіцієнтами за допомогою лінійних підстановок можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для загального випадку він установив критерій стійкості для визначення знаків дійсних складових коренів характеристичного рівняння, якщо для розглядуваного руху відомі характеристична або головна функції. Визначення стійкості у Роуса не було строгим, воно ґрунтувалося на понятті малих збурень, яке є нечітким. Він писав про стандарт малих величин, не вказуючи, як його ввести. Роус підкреслював відносність стійкості: рух може бути стійким для одного роду збурень і нестійким для іншого. Роус, як до нього і Пуассон, намагався вдосконалити метод лінеаризації, розглядаючи рівняння другого наближення. Критерій стійкості стаціонарного руху Роуса є аналогічним критерію Лагранжа для стійкої рівноваги. У праці "Елементарний трактат із динаміки системи твердих тіл" (1877) вчений розглянув стійкість обертального руху рівностороннього трикутника у випадку дії сил, пропорційних будь-яким степеням відстані.

Томсон і Тет установили критерій стійкості збуреного руху, коли коефіцієнти диференціальних рівнянь руху сталі, розширивши тим самим дослідження Роуса. Важливо зазначити, що Томсон, Тет і Роус користувалися першим наближенням і відкидали члени нелінійних рівнянь вище першого порядку, отримуючи лінійні рівняння (метод першого наближення). Правильність цих дій не доводилася.

Відтак математичний апарат, який можна було застосувати до дослідження стійкості руху, у середині XIX ст. існував, але не був узагальнений. Для стійких станів руху, малі відхилення від яких приводять до малих коливань фізичних величин навколо деяких середніх значень, використовували метод лінеаризації і нехтували малими нелінійними членами. Цього робити не можна, коли відхилення не є малими або стан руху, поблизу якого вони розглядаються, стає нестійким і малі відхилення необмежено зростають. Крім того, вплив нелінійних членів може істотно змінити характер руху, коли вони є малими порівняно з лінійними. Це призводить до явищ, які не можна описати лінійною теорією. Тому метод зведення нелінійних задач до лінійних працює в тому випадку, коли нелінійність не є суттєвою і нею можна знехтувати для конкретної задачі.

Першу спробу розв'язати задачу про стійкість руху в першому наближенні зробив Ж. А. Пуанкаре. 1882 р. Пуанкаре на прикладі рівнянь першого і другого порядків створює новий розділ математики – якісний аналіз диференціальних рівнянь, що дозволяє, зокрема і судити про поведінку системи без аналітичного розв'язання його диференціального рівняння, що не завжди можливо. Один із найвідоміших методів цього розділу – метод фазової площини (фазового портрета), що показує, наприклад, залежність швидкості руху об'єкта від координати його положення. Усі змінні системи (положення, швидкість, прискорення тощо) Пуанкаре називав змінними стану, або координатами зображувальної точки; сукупність станів системи – фазовим простором, а множину траєкторій руху зображувальної точки у фазовому просторі – фазовим портретом. Отже, для судження про стійкість системи необов'язково знаходити корені її характеристичного полінома, а досить розглянути вид фазової траєкторії (фазового портрета). Досліджуючи фазові траєкторії, він шукав відповідь на питання, чи може задана система перебувати у рівновазі або у періодичному русі. Важливими для визначення поведінки системи є введені Пуанкаре поняття особливої точки та граничних циклів, зв'язок між якими він установив за допомогою поняття індексу. У загальному випадку система може описуватися системою диференціальних рівнянь будь-якого порядку. Тоді поведінку системи в будь-який момент часу задають зображувальною точкою у відповідному просторі станів.

У своїй праці "Нові методи небесної механіки" (1892–1899) Пуанкаре розглянув: інтегральні інваріанти (визначені інтеграли, які залишаються сталими за зміни області інтегрування) та їхнє застосування до дослідження стійкості за Пуассоном для систем зі скінченним об'ємом фазового простору; періодичні розв'язки другого роду; двояко асимптотичні розв'язки та їхній зв'язок зі стійкістю за Лагранжем. Лагранж довів, що коли знехтувати квадратами мас, то розклади великих осей орбіт не міститимуть вікових членів. Це є повна стійкість у його розумінні, що відрізняється від її розуміння Пуассоном (враховувати квадрати мас і нехтувати кубами). Пуанкаре сформулював умови для визначення повної стійкості: 1) щоб жодне з тіл не віддалялося необмежено; 2) щоб два тіла не співударялися і щоб відстань між цими двома тілами не змогла стати меншою за деяку межу; 3) щоб система проходила нескінченно багато разів як завгодно близько від її початкового положення. Якщо виконано тільки третю умову і невідомо, чи виконано перші дві, то вважають, що існує стійкість за Пуассоном.

Озброєний новим методом Пуанкаре береться за задачу трьох тіл і несподівано доходить висновку, що відомі математичні функції не можуть стати її розв'язком. Він указав не лише на окремі випадки, коли рух може бути періодичним і стійким, а й на можливість хаотичного руху (початок *теорії хаосу*).

У середині XIX ст. Д. Максвелл, Ш. Ерміт сформулювали і започаткували дослідження математичної проблеми знаходження умов належності коренів полінома до лівої напівплощини в комплексній площині (проблема Рауса – Гурвіца). Ця задача має фундаментальне значення у дослідженні умов стійкості систем, для побудови регуляторів механічних систем і механізмів. 1875 р. Раус запропонував метод, а 1895 р. Гурвіц, спираючись на роботи Ерміта, дає незалежне від Рауса розв'язання задачі (критерій Рауса – Гурвіца). 1914 р. А. Ліенаром і Г. Шипаром запропоновано його модифікований варіант.

Загальну якісну теорію Пуанкаре розвивали А. Данжуа, І. Бендіксон, А. Кнезер, С. Лефшец, Дж. Біркгофф, О. О. Андронов та ін. Пуанкаре провів ґрунтовні дослідження з проблем стійкості. Створення загальної теорії стійкості належить О. М. Ляпунову. Він розпочав свої дослідження з магістерської дисертації "Про стійкість еліпсоїдальних форм рівноваги рідини, яка обертається". Ця актуальна для астрономії задача, що пояснює видиму форму планет та інших небесних тіл, які утворилися внаслідок застигання спочатку рідких обертових мас, стає для Ляпунова головною, і він неодноразово до неї повертався.

Дослідження питань стійкості, зокрема і стосовно задачі трьох тіл, Ляпунов активно займався, працюючи у Харківському університеті. Підсумком цієї роботи стала докторська дисертація "Загальна задача про стійкість руху", яку він захистив 1892 р. Також він був відомий роботами з теорії потенціалу, гідродинаміки і теорії ймовірності.

У своїх працях Ляпунов узявся за розв'язання складної задачі: визначення стійкості в загальному випадку нелінійної, нестаціонарної, взаємопов'язаної системи будь-якого порядку. На початках допоміжна задача про критерії стійкості форми рідкого тіла, яке обертається, поступово переросла у геніальну загальну теорію стійкості руху, не перевершену донині.

У цих дослідженнях Ляпунов використовував роботи з якісного аналізу диференціальних рівнянь Пуанкаре, з яким постійно листувався. Однак, на відміну від останнього, Ляпунов визнавав лише строгі аналітичні методи доведення, а в розв'язках за допомогою рядів давав повну оцінку збіжності, ніколи не обмежуючись першим наближенням. Це робило його роботи дуже важкими для розуміння, що неодноразово зазначено його сучасниками, послідовниками і студентами. Наприклад, один відомий французький математик відповів на надіслану докторську дисертацію Ляпунова словами: "Напевно, це прекрасна робота; на жаль, мого життя не вистачить для того, щоб зрозуміти її".

Основний внесок Ляпунова у розв'язання проблеми стійкості полягає у тому, що насамперед він дав точне математичне означення поняття стійкості розв'язку системи. Не вдаючись до математичних позначень, обмежимося описовою інтерпретацією поняття асимптотичної стійкості. Припустимо, що система перебуває в деякому положенні рівноваги. Тоді таке положення рівноваги є асимптотично стійким, якщо після примусового виведення системи із цього вихідного положення, вона до нього наближається з плином часу.

Найважливішим серед запропонованих Ляпуновим методів є прямий метод Ляпунова (другий метод Ляпунова). Він визначає умови стійкості розв'язку системи довільного порядку. Розглянемо систему, стан рівноваги якої міститься в початку координат. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість для автономних систем стверджує, що стан рівноваги системи є асимптотично стійким, якщо існує деяка додатно визначена функція, повна похідна за часом якої, знайдена відповідно до рівнянь стану системи, від'ємно визначена. Таку функцію називають тепер функцією Ляпунова. Фізичний зміст функції Ляпунова – повна енергія системи у вигляді суми її кінетичної і потенціальної енергій. Очевидно, якщо у процесі руху вона постійно зменшується (похідна від'ємна), у цьому випадку, завдяки тертю, то тіло врешті-решт прийде у стан рівноваги. Залежно від прикладної галузі, функція Ляпунова може мати різний зміст, але формулювання умов стійкості буде аналогічним.

Ляпунов розв'язав складну проблему стійкості в найзагальнішому вигляді. Про правильність його методів свідчить багаторічна суперечка з Пуанкаре й іншим відомим математиком і астрономом, сином знаменитого Чарльза Дарвіна і президентом англійського астрономічного товариства – Джорджем Дарвіном. Останній висунув гіпотезу космогонії про процес утворення Місяця, який, на його думку, відбувався таким чином. Ідеться про одну з унікальних планет Сонячної системи, яка називається Протоземля і має еліпсоїдальну форму, що унаслідок швидкого обертання набула, завдячуючи відцентровим силам, спочатку сигароподібної, а потім і грушоподібної форми. Вона була названа так за пропозицією Пуанкаре. Згодом завдяки все тим же відцентровим силам маленька головка цієї "груші" відокремилася, утворивши супутник материнської планети – Місяць. Процес цей відбувався мільйони років, і вчені розуміли, що для його реалізації необхідно, щоб усі проміжні форми цієї Протоземлі були стійкими. Питання, таким чином, було у проблемі стійкості форм рідини, що обертається.

Пуанкаре у властивій йому інтуїтивній манері розв'язав цю задачу, обмежившись першим наближенням, яке вказувало на стійкість грушоподібної форми. Але він розумів недостатність такого підходу, тому, коли Дарвін звернувся до нього із цим питанням, Пуанкаре порадив йому прорахувати друге наближення, забезпечивши його формулами і методикою розрахунку. Взявшись за цей надважкий розрахунок, Дарвін врешті-решт довів його до успішного завершення та із задоволенням з'ясував, що і в другому наближенні грушоподібна форма може бути стійкою. Це було сприйнято науковим співтовариством як безсумнівний доказ гіпотези Дарвіна.

Однак із цим не погодився Ляпунов. У своїй магістерській дисертації він писав про можливість грушоподібної форми рідини, що обертається, однак не міг перевірити її стійкість. Через 20 років він повернувся до цього питання, озброєний своєю загальною теорією стійкості, і знайшов точний розв'язок задачі, що показує нестійкість грушоподібної форми. Він указав і на джерело неправильних висновків Пуанкаре і Дарвіна, що полягало у використанні лише перших двох членів розвинення ряду. Пізніше, 1917 р., відомий англійський математик і астроном Д. Джинс опублікував свої розрахунки щодо третього наближення цієї задачі. Цього разу грушоподібна форма виявилася нестійкою, що безсумнівно підтвердило правоту Ляпунова.

Згодом гіпотеза Дарвіна була спростована і геохімічними дослідженнями місячних порід, а після експедиції американців на Місяць домінуючою стала теорія удару, згідно з якою Протоземля зіткнулася з іншою, меншою планетою Сонячної системи, викликавши викид речовини земної мантії, яка утворила потім кулясту форму нашого супутника.

Однак сучасники не змогли оцінити глибину і перспективність ідей Ляпунова, і довгий час наукове співтовариство не помічало його робіт, хоча вчений публікував більшість своїх робіт французькою мовою і вів регулярне листування з провідними європейськими математиками. Його знамениту дисертацію повністю перекладено французькою мовою 1907 р., а англійською лише через 100 років після її захисту – 1992 р.

Ідеї Пуанкаре і Ляпунова розвивалися провідними світовими математичними школами, зокрема і метод функції Ляпунова в подальшому розвинено у роботах М. Г. Четаєва, Д. П. Ла Саля, Є. О. Барбашина, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського та інших дослідників.

Нового поштовху розвиток теорії отримав після запуску 1957 р. першого супутника Землі, коли з'ясувалося, що синтез алгоритмів керування ракетно-космічними системами може ефективно виконуватися з використанням методів теорії стійкості.

Водночас дослідження стійкості систем поклало початок абсолютно нового напрямку – теорії хаосу і математичного апарату, що описує поведінку деяких нелінійних динамічних систем, схильних за певних умов до явищ, відомих як хаос (динамічний хаос, детермінований хаос). Поведінка такої системи видається випадковою, навіть якщо модель, що описує систему, є детермінованою. Для акцентування особливого характеру явища, яке досліджується в межах цієї теорії, зазвичай прийнято використовувати назву теорія динамічного хаосу.

Прикладами подібних систем є атмосфера, турбулентні потоки, деякі види аритмій серця, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій і його підсистеми: економічні, політичні, психологічні (культурно-історичні й інтеркультуральні) й інші соціальні системи. Їхнє вивчення, поряд з аналітичним дослідженням наявних рекурентних співвідношень, зазвичай супроводжується математичним моделюванням.

У першій половині XX ст. дослідження динамічного хаосу залишалося другорядним, теорія динамічних систем була сконцентрована на задачах нелінійних коливань та їхніх застосунках у фізиці й інженерії. Нелінійні осцилятори відігравали провідну роль у розробленні технологій для радіо, радарів і лазерів.

Завдяки роботам Б. Ван дер Пола, А. Андронова, Д. Літлвуда, Х. Харді, М. Картрайта, Н. Левінсона, С. Смейла з'явилася нова математична техніка. Водночас паралельно розвивалися геометричні методи Пуанкаре, які дозволили значно просунутися у класичній механіці. Сучасна наука поповнила свій доробок у цьому напрямку завдяки роботам Д. Біркгофа, а пізніше – В. Арнольда та Ю. Мозера.

Винахід комп'ютерів став справжнім вододілом в історії теорії стійкості. Комп'ютери дозволили проводити експерименти, які раніше неможливо було здійснити через неймовірну складність розрахунків, і тим самим сприяли виникненню нових гіпотез. Саме комп'ютерні експерименти привели Е. Н. Лоренца до відкриття 1963 р. реального хаотичного руху, який тепер називають дивним атрактором. Лоренц вивчав найпростішу модель конвекції в атмосфері. Він виявив, що розв'язки системи ніколи не стають стійкими або періодичними – замість цього вони неперервно осцилюють іррегулярно та неперіодично. Більше того, розв'язки з початковими умовами, які в початковий момент несуттєво відрізняються, через відносно невеликий інтервал часу з еволюцією системи стають абсолютно несхожими. Отже, системі властива непередбачуваність (хаотичність). Водночас, зобразивши рух у тривимірному просторі, Лоренц показав, що цей хаос має певну структуру. Розв'язки утворюють безліч кривих на кшталт крил метелика.

Робота Лоренца дала поштовх численним дослідженням хаосу в 1970-х рр. Зазначимо лише головні з них. 1971 р. Д. Рюелль і Ф. Такенса запропонували нову теорію для пояснення турбулентної течії рідини, засновану на загальних припущеннях про природу дивного атрактора. Кількома роками пізніше Р. Мей виявив приклади хаосу в популяційній біології. У своїй статті він підкреслив методологічну важливість вивчення простих нелінійних систем, які врівноважують лінійну інтуїцію, що часто призводить до помилкових міркувань і яка водночас заполонила традиційні навчальні курси.

Власне *теорія хаосу* – підрозділ математики та фізики, який займається дослідженням систем, динаміка яких, за певних умов, значною мірою залежить від початкових умов, що робить довгострокове прогнозування неможливим. Через те що, з одного боку, динаміка поведінки таких систем відповідає законам фізики, а з другого, виглядає нерегулярною, вона й називається детермінованим хаосом. Хаотичні системи є нелінійними динамічними системами. Прикладами хаотичних систем є атмосфера, турбулентні потоки, деякі види аритмій серця, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій та його складові (економічна, політична, психологічна тощо). Їх вивчення, поряд з аналітичним дослідженням наявних рекурентних співвідношень, зазвичай супроводжується математичним моделюванням.

Отже, до кінця XX ст. теорія стійкості перетворилася на великий розділ математики. Зазначимо, що вагомий внесок у розвиток теорії стійкості української математичної школи становить науковий доробок М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольского, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, О. М. Шарковського, І. В. Скрипника, В. С. Мельника, М. Ф. Кириченка, Ф. Г. Гаращенка, В. О. Плотнікова та інших учених.

Пропонований посібник написано на основі лекцій, які читали автори в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка для студентів механіко-математичного факультету та факультету комп'ютерних наук і кібернетики.

Теорія стійкості, як область сучасної математичної науки, входить до програм навчальних дисциплін із переліку освітніх компонент, що забезпечують професійну підготовку здобувачів першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівнів здобувачів вищої освіти за освітніми програмами: "Математика", "Статистика", "Прикладна математика", "Системний аналіз", "Інформатика", "Середня освіта (Математика)". Освітні програми спрямовані на формування у майбутніх фахівців основних понять, вивчення теоретичних положень і методів сучасної теорії диференціальних рівнянь і теорії стійкості, вміння застосувати їх до розв'язування фізичних та інших прикладних задач.

Згідно з вимогами стандартів освітніх програм, у процесі вивчення комплексу дисциплін "Диференціальні рівняння", "Якісні й асимптотичні методи диференціальних рівнянь", "Вибрані питання динамічних систем", "Динамічні системи", "Якісні й аналітичні методи дослідження диференціальних рівнянь", "Прикладні задачі стійкості", "Числові методи стійкості та чутливості", "Методи дослідження стійкості еволюційних рівнянь" у студентів формуються ключові програмні компетентності, зокрема:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;
- вміння вчитися й оволодівати сучасними знаннями;
- здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел;
- здатність приймати обґрунтовані рішення;
- навички працювати в команді й автономно;
- здатність зберігати та примножувати моральні, культурні, наукові цінності й досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та в розвитку суспільства, техніки і технологій, використовувати різні види та форми рухової активності для активного відпочинку й ведення здорового способу життя;
- здатність застосовувати у професійній діяльності базові знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук;
- вміння використовувати стандартні прийоми та методи математичних досліджень, проявляти творчий підхід, ініціативу;
- здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;
- здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати й обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;
- здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, зокрема і відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;

• здатність конструювати формальні доведення з аксіом і постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних;

• здатність до кількісного мислення;

• здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів і систем;

• вміння застосовувати числові методи для дослідження математичних моделей;

• здатність до аналізу математичних структур, зокрема і до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів;

• здатність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики;

• здатність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси;

• здатність отримувати якісну інформацію на основі кількісних даних;

• здатність розробляти експериментальні та спостережні дослідження й аналізувати дані, отримані на їх основі;

• здатність пояснювати математичними термінами результати, отримані під час розрахунків.

Метою вивчення комплексу дисциплін є ознайомлення з основними поняттями та положеннями якісної теорії диференціальних рівнянь, опанування основних методів аналізу систем диференціальних рівнянь, стійкості положень рівноваги для звичайних диференціальних рівнянь, а також застосування цих методів до дослідження граничної поведінки диференціальних систем, що виникають у прикладних задачах.

За результатами навчання студенти знатимуть:

• основні поняття: задача Коші, автономна система, динамічна система, траєкторія, фазовий простір, стійкий розв'язок тощо;

• теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші, умови продовжуваності розв'язку, теореми про неперервну залежність розв'язку від правої частини, початкових умов, параметрів, теореми про диференційованість розв'язку за початковими умовами і параметром;

• основні теореми і сучасні методи теорії стійкості;

• методи побудови функції Ляпунова;

• основні означення та теореми практичної стійкості незбуреного розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь;

• означення й основні властивості ω-граничних та α-граничних множин траєкторій автономних систем диференціальних рівнянь;

• основні властивості глобальних атракторів напівдинамічних систем;

• приклади застосування теорії стійкості.

Студенти вмітимуть:

• аналізувати умови існування, єдиності, продовжуваності розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь;

• застосовувати перший і другий методи Ляпунова до дослідження стійкості систем звичайних диференціальних рівнянь;

• застосовувати методи практичної стійкості до аналізу розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь на скінченному проміжку часу;

• застосовувати методи фазової площини для дослідження поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь;

• вміти визначати умови дисипативності автономних систем диференціальних рівнянь;

• вміти визначати граничні множини й атрактори динамічних систем;

• формулювати умови практичної стійкості, конструювати алгоритми побудови оптимальних множин і оцінок практичної стійкості лінійних систем диференціальних рівнянь;

• застосовувати теорію стійкості динамічних систем для розв'язування прикладних задач.

Основною метою посібника є систематизація та популяризація теорії стійкості, з огляду на її активний розвиток та ілюстрація широкого спектра застосувань у різноманітних сферах сучасної математичної науки.

РОЗДІЛ 1
ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ

1.1. Існування розв'язків. Теорема Пеано

Розглянемо теореми, які описують умови існування розв'язку задачі Коші. Для цього використаємо такі допоміжні твердження.

Лема 1.1. *Нехай* $\mathcal{D}$ *– область в* $\mathbb{R}^{n+1}$, (t_0, x_0) *– фіксована точка з* $\mathcal{D}$, $I \subset \mathbb{R}$ *– відрізок, який містить точку* t_0, $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$. *Функція* $x(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, *графік якої належить* $\mathcal{D}$, *тоді і лише тоді є розв'язком задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

коли вона задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ t \in I. \tag{1.2}$$

Доведення. Нехай $x(t)$ – розв'язок задачі (1.1), визначений на I. Тоді

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \qquad t \in I.$$

Інтегруємо обидві частини рівності в межах від t_0 до t

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Оскільки $x(\cdot) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, то за теоремою Ньютона – Лейбніца

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dx(s)}{ds} ds = x(t) - x(t_0).$$

Враховуючи, що $x(t_0) = x_0$, одержуємо, що функція $x(t)$ задовольняє на I рівняння (1.2).

Навпаки, нехай $x(t)$ – неперервний розв'язок інтегрального рівняння (1.2), $t \in I$. Оскільки $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, то функція $f(t, x(t))$ є неперервною на I. Тому функція

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

є неперервно диференційованою, $t \in I$. Диференціюємо праву і ліву частини рівняння (1.2) і одержуємо

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \qquad t \in I.$$

Підставляємо $t = t_0$ в (1.2) і отримуємо $x(t_0) = x_0$. Отже, функція $x(t)$ є розв'язком задачі Коші (1.1).

■

Лема 1.2 (про існування збіжної підпослідовності). *Нехай* $x_k: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2, \ldots$ *– послідовність визначених на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *функцій така, що існує константа* $M > 0$, *що для довільної пари точок* t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$ *і для кожного* $k = 1,2, \ldots$ *виконується нерівність*

$$\| x_k(t_1) - x_k(t_2) \| \leq M|t_1 - t_2|. \qquad (1.3)$$

Якщо знайдеться точка $t_0 \in [\alpha, \beta]$, *для якої послідовність* $\| x_k(t_0) \|$ *обмежена,* $k = 1,2, \ldots$, *то з послідовності функцій* $\{x_k(\cdot)\}$ *можна вибрати рівномірно збіжну на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *підпослідовність.*

Доведення. За умовою леми існують числа $t_0 \in [\alpha, \beta]$ та $r > 0$ такі, що $\| x_k(t_0) \| \leq r$ для всіх $k = 1,2, \ldots$. Тоді для кожного $t \in [\alpha, \beta]$ справедлива нерівність

$$\| x_k(t) \| \leq \| x_k(t) - x_k(t_0) \| + \| x_k(t_0) \| \leq M|t - t_0| + r \leq$$
$$\leq M(\beta - \alpha) + r.$$

Це означає, що послідовність $\{x_k(\cdot)\}$ рівномірно обмежена.

Послідовність $\{x_k(\cdot)\}$ є також одностайно неперервною. Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що нерівність

$$\| x_k(t_1) - x_k(t_2) \| < \varepsilon$$

виконується одночасно для всіх точок t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$ таких, що $|t_1 - t_2| < \delta$ і для всіх $k = 1,2, \ldots$. Справді. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Тоді для будь-яких t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$ таких, що $|t_1 - t_2| < \delta$ і для всіх $k = 1,2, \ldots$, з (1.3) випливає

$$\| x_k(t_1) - x_k(t_2) \| \leq M|t_1 - t_2| < M\delta = \varepsilon. \qquad (1.4)$$

За теоремою Арцела [4] з послідовності $\{x_k(\cdot)\}$ у просторі $C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$ можна виділити збіжну підпослідовність.

■

Теорема 1.1 (Пеано). *Нехай* $f \in C(\Pi, \mathbb{R}^n)$, *де* $\Pi \subset \mathcal{D}$ *є околом точки* $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. *Тоді знайдеться таке* $h > 0$, *що на відрізку* $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *існує розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.5}$$

Зокрема, якщо

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \le a, \ \| x - x_0 \| \le b\}, \tag{1.6}$$

то

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{1.7}$$

де $M = \max_{(t,x)\in\Pi} \| f(t, x) \|$.

Доведення. Ми покажемо, що теорема справджується для випадку, коли окіл точки (t_0, x_0) має вигляд (1.6). Позначимо

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| \le b\}.$$

Доведемо, що існує функція $x \in C([t_0 - h, t_0 + h], \mathcal{B})$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (1.2), де $h > 0$ визначається за формулою (1.7). Тоді за лемою 1.1 така функція є розв'язком задачі Коші (1.5). Спочатку обґрунтуємо існування розв'язку інтегрального рівняння (1.2) на відрізку $[t_0, t_0 + h]$.

Для цього побудуємо послідовність функцій, які рівномірно збігаються до розв'язку задачі Коші (1.5). Побудова такої послідовності здійснюватиметься у кілька етапів.

Етап 1. Для кожного $k = 1,2, \dots$ візьмемо $d_k = \frac{h}{k}$. Розіб'ємо відрізок $[t_0, t_0 + h]$ на відрізки $[t_0 + jd_k, t_0 + (j+1)d_k]$, де $h > 0$ задовольняє (1.7), $j = 0,1, \dots, k-1$. Покладемо $x_k(t) = x_0$, $t \in [t_0 - h, t_0]$. Послідовно на кожному відрізку $[t_0 + jd_k, t_0 + (j+1)d_k]$ для всіх $t \in [t_0 + jd_k, t_0 + (j+1)d_k]$ визначимо функцію $x_k(t)$ за формулою

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_k(s - d_k)\big) ds, \quad j = 0,1, \dots, k-1. \tag{1.8}$$

У такий спосіб побудована функція $x_k(t)$ є неперервною на відрізку $[t_0 - h, t_0 + h]$ і $x_k(t) \in \mathcal{B}$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Справді, для $t \in [t_0 - h, t_0]$ функція $x_k(t) = x_0$, тому неперервна на цьому відрізку й $x_k(t) \in \mathcal{B}$. Якщо $j = 0$ на відрізку $t \in [t_0, t_0 + d_k]$, маємо $x_k(t - d_k) = x_0$ і

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_k(s - d_k)\big)ds =$$
$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds$$

є неперервною функцією, оскільки інтеграл зі змінною верхньою межею від неперервної функції є неперервним. Крім того,

$$\| x_k(t) - x_0 \| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\| ds \leq M|t - t_0| \leq Md_k \leq Mh \leq b.$$

Отже $x_k(t) \in \mathcal{B}$, $t \in [t_0, t_0 + d_k]$. Далі, застосовуючи індукцію за $j = 1,2,\dots,k-1$, з того, що $x_k(t - d_k) \in \mathcal{B}$ і $x_k(t - d_k)$ є неперервною функцією при $t \in [t_0 + jd_k, t_0 + +(j+1)d_k]$, функція $x_k(t)$, побудована за (1.8), є неперервною і, враховуючи (1.7),

$$\| x_k(t) - x_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_k(s - d_k)\big)ds \right\| \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t} \left\| f\big(s, x_k(s - d_k)\big) \right\| ds \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b.$$

Отже, $x_k(t) \in \mathcal{B}$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ і $x_k(\cdot) \in C([t_0 - h, t_0 + +h], \mathcal{B})$.

Етап 2. Перевіряємо, що послідовність $\{x_k(\cdot)\}$ задовольняє умови леми 1.2. Обґрунтуємо умову Ліпшиця (1.3). Якщо обидві точки t_1, t_2 належать $[t_0 - h, t_0)$, то цей випадок тривіальний, оскільки $x_k(t_1) = x_k(t_2) = x_0$ і

$$\| x_k(t_1) - x_k(t_2) \| = 0 \leq M|t_1 - t_2|.$$

Якщо $t_1 \in [t_0 - h, t_0)$, $t_2 \in [t_0, t_0 + h]$, то

$$\| x_k(t_1) - x_k(t_2) \| = \left\| x_0 - x_0 - \int_{t_0}^{t_2} f(s, x_k(s - d_k))ds \right\| \leq$$
$$\leq \int_{t_0}^{t_2} \| f(s, x_k(s - d_k)) \| ds \leq M(t_2 - t_0) \leq M|t_1 - t_2|.$$

У випадку $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + h]$ маємо

$$\| x_k(t_1) - x_k(t_2) \| =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t_1} f\big(s, x_k(s - d_k)\big) ds - \int_{t_0}^{t_2} f\big(s, x_k(s - d_k)\big) ds \right\| \le$$

$$\le \int_{t_1}^{t_2} \| f(s, x_k(s - d_k)) \| \, ds \le M |t_1 - t_2|.$$

Доходимо висновку, що послідовність $\{x_k(\cdot)\}$ задовольняє умови леми 1.2. Тому з послідовності $\{x_k(\cdot)\}$ виділяємо рівномірно збіжну на $[t_0, t_0 + h]$ підпослідовність $\{x_{k_m}(\cdot)\}$. Отже, якщо $m \to \infty$ рівномірно на $[t_0, t_0 + h]$, то підпослідовність $\{x_{k_m}(\cdot)\}$ збігається до деякої функції $x(\cdot) \in C([t_0, t_0 + h], \mathcal{B})$.

Етап 3. Покажемо, що гранична функція $x(\cdot)$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.2). З доведення попереднього етапу випливає, що

$$\| x_k(t - d_k) - x_k(t) \| \le M d_k, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тому

$$\| x_k(t - d_k) - x(t) \| \le \| x_k(t - d_k) - x_k(t) \| +$$

$$+ \| x_k(t) - x(t) \| \le M d_k + \| x_k(t) - x(t) \|,$$

$$t \in [t_0, t_0 + h].$$

Застосовуючи цю оцінку для членів підпослідовності $\{x_{k_m}(\cdot)\}$, враховуючи, що

$$\lim_{m \to \infty} M d_{k_m} = \lim_{m \to \infty} \frac{Mh}{k_m} = 0,$$

доходимо висновку, що $x_{k_m}(t - d_{k_m})$ прямує до $x(t)$ рівномірно на $[t_0, t_0 + h]$. Оскільки функція $f(t, x)$ є рівномірно неперервною на компакті П, то послідовність $f\big(t, x_{k_m}(t - d_{k_m})\big)$ рівномірно збігається на $[t_0, t_0 + h]$ до $f(t, x(t))$, якщо $m \to \infty$. Звідси

$$x(t) = \lim_{m \to \infty} x_{k_m}(t) = \lim_{m \to \infty} \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{k_m}(s - d_{k_m})\big) ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds, \qquad t \in [t_0, t_0 + h].$$

Отже, функція $x(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші при $t \in [t_0, t_0 + h]$. Аналогічно показуємо, що існує розв'язок $x(\cdot) \in C([t_0 - h, t_0], \mathcal{B})$ інтегрального рівняння (1.2) на відрізку $[t_0 - h, t_0]$. ■

Приклад 1.1. Знайдемо інтервал існування розв'язку задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t, \quad x(0) = 1 \tag{1.9}$$

на множині

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \le 1, \qquad |x - 1| \le 2\}.$$

Використовуючи позначення теореми Пеано, маємо $a = 1$, $b = 2$. З $|t| \le 1$, $|x - 1| \le 2$ випливає $t \in [-1,1]$, $x \in [-1,3]$. Тому

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-1,1], x \in [-1,3]\} = [-1,1] \times [-1,3].$$

Знайдемо

$$M = \max_{(t,x)\in\Pi} |x^2 + t| = \max_{t\in[-1,1], x\in[-1,3]} |x^2 + t| = 10.$$

Тоді з (1.7) випливає

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{1}{5}.$$

За теоремою Пеано на інтервалі $t \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ існує розв'язок задачі Коші (1.9).

Приклад 1.2. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0. \tag{1.10}$$

Права частина цього рівняння $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ є неперервною функцією, тому в довільному околі початку координат для (1.10) виконуються умови теореми Пеано. Разом із тим підстановкою переконуємося, що задача Коші (1.10) має два розв'язки

$$x_1(t) = 0, \qquad x_2(t) = t^3.$$

Отже, розв'язок задачі Коші (1.10) не єдиний.

1.2. Лема Гронуола – Белмана

Обґрунтуємо твердження, яке відіграє фундаментальну роль в аналізі розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Лема 1.3 (Гронуола – Белмана). *Нехай функції* $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ *– неперервні при* $t \geq t_0$, $c \geq 0$ *– стала і при* $t \geq t_0$ *виконується нерівність*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau. \tag{1.11}$$

Тоді при $t \geq t_0$ *справджується нерівність*

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}. \tag{1.12}$$

Доведення. Позначимо

$$a(t) = c + \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Оскільки функції $u(t)$, $v(t)$ є неперервними й інтеграл зі змінною верхньою межею від неперервної функції є неперервно диференційованим, то функція $a(t)$ є неперервно диференційованою. Тому, враховуючи, що з (1.11) випливає $u(t) \leq a(t)$, одержуємо

$$a'(t) = u(t)v(t) \leq a(t)v(t).$$

Звідси

$$a'(t) - a(t)v(t) \leq 0.$$

Домножуємо ліву і праву частини останньої нерівності на додатну функцію $e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$. У такий спосіб маємо

$$e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a'(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a(t)v(t) \leq 0.$$

Помітимо, що

$$e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a'(t) - e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a(t)v(t) = \frac{d}{dt}\left(a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}\right).$$

Тому

$$\frac{d}{dt}\left(a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}\right) \leq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Остання нерівність означає, що функція $F(t) = a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$ не зростає при $t \geq t_0$. Зважаючи на це, маємо

$$F(t_0) = a(t_0) \geq F(t) = a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}, \qquad t \geq t_0.$$

Враховуючи, що $a(t_0) = c$, одержуємо $c \geq a(t)e^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$, $t \geq t_0$. Звідси

$$a(t) \leq ce^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}, \qquad t \geq t_0.$$

Але, як наслідок (1.11), $u(t) \leq a(t)$, тому справджується (1.12). ■

Наслідок 1.1. *Нехай функції* $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ *– неперервні при* $t \leq t_0$, $c \geq 0$ *– стала і при* $t \leq t_0$ *виконується*

$$u(t) \leq c + \int_t^{t_0} u(\tau)v(\tau)d\tau. \qquad (1.13)$$

Тоді при $t \leq t_0$ *справджується нерівність*

$$u(t) \leq ce^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}. \qquad (1.14)$$

Доведення. Ідея доведення подібна до доведення леми 1.3. Позначимо

$$a(t) = c + \int_t^{t_0} u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Функція $a(t)$ є неперервно диференційованою. Тому, враховуючи, що з (1.13) випливає $u(t) \leq a(t)$, одержуємо

$$a'(t) = -u(t)v(t) \geq -a(t)v(t).$$

Звідси

$$a'(t) + a(t)v(t) \geq 0.$$

Домножуємо ліву і праву частини останньої нерівності на додатну функцію $e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$. У такий спосіб маємо

$$e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a'(t) + e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a(t)v(t) \geq 0.$$

Помітимо, що

$$e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a'(t) + e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}a(t)v(t) = \frac{d}{dt}\left(a(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}\right).$$

Тому

$$\frac{d}{dt}\left(a(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}\right) \geq 0, \qquad t \leq t_0.$$

Остання нерівність означає, що функція $F(t) = a(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}$ не спадає при $t \leq t_0$. Тому

$$F(t) = a(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} \leq F(t_0) = a(t_0), \qquad t \leq t_0.$$

Враховуючи, що $a(t_0) = c$, одержуємо

$$a(t)e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} \leq c, \qquad t \leq t_0.$$

Звідси

$$a(t) \le ce^{-\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau}, \qquad t \le t_0.$$

Але, як наслідок (1.13), $u(t) \le a(t)$, отже справджується (1.14).

■

Наслідок 1.2. *Нехай функції* $u(t) \ge 0,\ v(t) \ge 0$ *– неперервні при* $t \in (-\infty, +\infty)$, $c \ge 0$ *– стала і при* $t \in (-\infty, +\infty)$ *виконується нерівність*

$$u(t) \le c + \left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau\right|. \qquad (1.15)$$

Тоді при $t \in (-\infty, +\infty)$ *справджується нерівність*

$$u(t) \le ce^{\left|\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau\right|}. \qquad (1.16)$$

Наслідок 1.3. *Нехай функція* $r(t) \ge 0$ *– неперервна,* $t \in (-\infty, +\infty)$, $r(t_0) = r_0 \ge 0$, $k > 0$, $m \ge 0$ *і при* $t \in (-\infty, +\infty)$ *виконується нерівність*

$$r(t) \le r_0 + \left|\int_{t_0}^{t} (kr(s) + m)ds\right|. \qquad (1.17)$$

Тоді

$$r(t) \le r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right),\ t \in (-\infty, +\infty). \qquad (1.18)$$

Доведення. З (1.17) випливає

$$r(t) \le r_0 + k\left|\int_{t_0}^{t}\left(r(s) + \frac{m}{k}\right)ds\right|, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Додаючи до лівої і правої частини $\frac{m}{k}$, маємо

$$r(t) + \frac{m}{k} \le r_0 + \frac{m}{k} + k\left|\int_{t_0}^{t}\left(r(s) + \frac{m}{k}\right)ds\right|, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

За наслідком 1.2 з леми Гронуола – Белмана

$$r(t) + \frac{m}{k} \le \left(r_0 + \frac{m}{k}\right)e^{k|t-t_0|}, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Звідси дістаємо

$$r(t) \le \left(r_0 + \frac{m}{k}\right)e^{k|t-t_0|} - \frac{m}{k}, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Останню нерівність можна подати у вигляді (1.18).

■

Лема 1.4 (диференціальна нерівність). *Нехай функція* $u \in C^1([c,d],\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in [c,d]$ *і*

$$\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| \le k\|u(t)\| + m, \qquad u(t_0) = u_0. \tag{1.19}$$

Тут $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $k \ge 0$, $m \ge 0$ *– сталі. Тоді, якщо* $k = 0$, *то виконується нерівність*

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + m|t - t_0|, \qquad t \in [c,d], \tag{1.20}$$

і якщо $k > 0$, *то справедлива оцінка*

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right), \qquad t \in [c,d]. \tag{1.21}$$

Доведення. Оскільки $u \in C^1([c,d],\mathbb{R}^n)$, то

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} u'(s)ds.$$

При $t \in [c,d]$, враховуючи (1.19), одержуємо

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|u'(s)\| ds\right| \le$$

$$\le \|u_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} (k\|u(s)\| + m) ds\right|.$$

Позначимо $r(t) = \|u(t)\|$, $r_0 = \|u_0\|$. Одержуємо

$$r(t) \le r_0 + \left|\int_{t_0}^{t} (kr(s) + m) ds\right|, \qquad t \in [c,d].$$

Якщо $k = 0$, то

$$r(t) \le r_0 + m|t - t_0|, \qquad t \in [c,d],$$

звідки випливає (1.20). У випадку $k > 0$ з наслідку 1.3 леми Гронуола – Белмана слідує (1.21).

■

Лема 1.5 (Гронуола – Белмана, узагальнена). *Нехай функції* $u(t) \ge 0$, $v(t) \ge 0$ *є неперервними при* $t \in (a,b)$ *і для всіх* $\tau, s \in (a,b)$ *справедлива нерівність*

$$u(\tau) \le u(s) + \left|\int_{s}^{\tau} u(p)v(p)dp\right|.$$

Тоді при $t, t_0 \in (a,b)$, $t \ge t_0$, *справджується оцінка*

$$u(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} v(p)dp} \le u(t) \le u(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} v(p)dp}.$$

Доведення. Якщо $\tau \geq s$, то

$$u(\tau) \leq u(s) + \int_s^\tau u(p)v(p)dp$$

і за лемою Гронуола – Белмана $u(\tau) \leq u(s)e^{\int_s^\tau v(p)dp}$. Якщо $\tau = t$, $s = t_0$, то одержуємо

$$u(t) \leq u(t_0)e^{\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}.$$

Розглянемо випадок $\tau \leq s$, $\tau, s \in (a, b)$. Тоді за умовами леми

$$u(\tau) \leq u(s) + \int_\tau^s u(p)v(p)dp.$$

З наслідку 1.1 леми Гронуола – Белмана випливає

$$u(\tau) \leq u(s)e^{-\int_s^\tau v(p)dp}.$$

Звідси маємо оцінку $u(\tau)e^{\int_s^\tau v(p)dp} \leq u(s)$. Враховуючи, що $\tau \leq s$, виконуємо заміну $s = t$, $\tau = t_0$ й одержуємо

$$u(t_0)e^{-\int_{t_0}^t v(p)dp} \leq u(t),$$

що остаточно обґрунтовує лему. ■

1.3. Продовження розв'язку

Теорема Пеано є локальною теоремою існування розв'язку задачі Коші. Вона показує, що розв'язок існує на деякому, можливо, достатньо малому відрізку. Утім розв'язок можна продовжити на суттєво більший інтервал.

Нехай $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1.22}$$

Припустимо, що $x^{(1)}(t)$ – розв'язок системи (1.22), визначений на $[c_1, d_1]$, $x^{(2)}(t)$ – розв'язок системи (1.22), визначений на $[c_2, d_2]$, $[c_1, d_1] \subseteq [c_2, d_2]$.

Означення 1.1. *Розв'язок* $x^{(2)}(t)$ *системи* (1.22) *називають продовженням розв'язку* $x^{(1)}(t)$ *системи* (1.22) *на відрізок* $[c_2, d_2]$, *якщо*

$$x^{(2)}(t) = x^{(1)}(t), \qquad t \in [c_1, d_1].$$

Справедлива така теорема.

Теорема 1.2. *Нехай* $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ *– компакт. Тоді для довільної точки* $(t_0, x_0) \in int\, \mathcal{K}$ *розв'язок* $x(t)$ *задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.23}$$

можна продовжити в обидві сторони до границі компакта $\mathcal{K}$. *Це означає, що існує продовження цього розв'язку на такий відрізок* $[a, b]$, *що* $(a, x(a)) \in \partial\mathcal{K}$, $(b, x(b)) \in \partial\mathcal{K}$.

Доведення. Нехай $M = \max_{(t,x)\in\mathcal{K}} \| f(t, x) \|$. Виберемо $b_1 > 0$, не більше половини відстані від точки $p_0 = (t_0, x_0) \in int\, \mathcal{K}$ до границі компакта $\mathcal{K}$, тобто

$$b_1 \leq \frac{1}{2}\rho(p_0, \partial\mathcal{K}).$$

Знайдемо

$$h_1 = \min\left(b_1, \frac{b_1}{M}\right).$$

Тоді

$$\Pi_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq h_1, \| x - x_0 \| \leq b_1\}$$

міститься в компакті $\mathcal{K}$ і за теоремою Пеано щонайменше на відрізку $[t_0, t_0 + h_1]$ існує розв'язок $x(t)$ задачі Коші (1.23). Якщо точка $\left(t_0 + h_1, x(t_0 + h_1)\right)$ розміщена на відстані, що не менша за $2b_1$ до границі $\partial\mathcal{K}$ компакта $\mathcal{K}$, то за теоремою Пеано розв'язок $x(t)$ задачі Коші (1.23) можна продовжити праворуч ще на h_1 так, що розв'язок $x(t)$ існує на відрізку $[t_0, t_0 + 2h_1]$. Продовжуємо цей процес, доки не прийдемо до точки $p_1 = \left(t_1, x(t_1)\right) \in int\, \mathcal{K}$, для якої

$$\rho(p_1, \partial\mathcal{K}) < 2b_1.$$

Далі виберемо

$$b_2 \leq \frac{1}{2}\rho(p_1, \partial\mathcal{K}) < b_1, \qquad h_2 = \min\left(b_2, \frac{b_2}{M}\right).$$

Тоді

$$\Pi_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |t - t_1| \le h_2, \parallel x - x(t_1) \parallel \le b_2\}$$

міститься в компакті $\mathcal{K}$ і за теоремою Пеано щонайменше на відрізку $[t_1, t_1 + h_2]$ існує розв'язок $x(t)$ системи

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

з умовою Коші в точці p_1. Продовжуємо розв'язок праворуч, доки не прийдемо до точки $p_2 = \big(t_2, x(t_2)\big) \in int\,\mathcal{K}$, для якої

$$\rho(p_2, \partial\mathcal{K}) < 2b_2.$$

Вибираємо послідовність $b_i > 0$, $i = 1,2, \ldots$, $\lim_{i\to\infty} b_i = 0$, і продовжуємо розв'язки послідовно до точок p_i, $i = 1,2, \ldots$, так, що

$$\rho(p_i, \partial\mathcal{K}) < 2b_i, \qquad i = 1,2, \ldots.$$

Таким способом

$$\lim_{i\to\infty} \rho(p_i, \partial\mathcal{K}) = 0.$$

Враховуємо, що відповідна послідовність точок $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ є обмеженою зверху в силу обмеженості $\mathcal{K}$ і, як наслідок, такою, що збігається до деякої точки a:

$$\lim_{i\to\infty} t_i = a.$$

На кожному проміжку $[t_0, t_i]$, $i = 1,2, \ldots$, ми одержали розв'язок $x(t)$ задачі Коші (1.23). У такий спосіб визначено розв'язок $x(t)$ для всіх $t \in [t_0, a)$. За лемою 1.1 цей розв'язок задовольняє інтегральне рівняння (1.2) і є неперервною функцією. Тому

$$\left\|x(t_i) - x(t_j)\right\| \le \int_{t_i}^{t_j} \|f(s, x(s))\| ds \le M\left|t_i - t_j\right|.$$

Звідси випливає, що послідовність $\{x(t_i)\}$ фундаментальна, а тому збіжна і

$$\lim_{i\to\infty} x(t_i) = x_*.$$

Оскільки $\lim_{i\to\infty} \rho(p_i, \partial\mathcal{K}) = 0$, то $(a, x_*) \in \partial\mathcal{K}$. Отже,

$$\lim_{t\to a-0} x(t) = x(t) = x_0 + \lim_{t\to a-0}\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)ds =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{a} f(s, x(s))ds = x(a) = x_*.$$

У такий спосіб ми побудували продовження розв'язку задачі Коші (1.23) праворуч до границі $\mathcal{K}$. Аналогічно можна продовжити розв'язок $x(t)$ ліворуч для $t < t_0$ до границі компакта $\mathcal{K}$.

■

Наступний приклад показує, що в теоремі 1.2 умова неперервності правої частини диференціального рівняння є суттєвою.

Приклад 1.3. Розглянемо рівняння

$$\dot{x} = 1 - 2\mathrm{sgn}(x),$$

де

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Правою частиною цього диференціального рівняння є функція $f(x) = 1 - 2\mathrm{sgn}(x)$, яка є розривною в точці $x = 0$. Отже, для такого рівняння порушуються умови теореми Пеано, а також теореми 1.2 в околі нуля. Якщо початкова умова $x(0) = x_0 < 0$, то існує окіл точки x_0, в якому $\mathrm{sgn}(x) = -1$ і $f(x) = 3$. Тоді задача Коші

$$\dot{x} = 1 - 2\mathrm{sgn}(x), \qquad x(0) = x_0$$

може бути записана як

$$\dot{x} = 3, \qquad x(0) = x_0$$

на інтервалі $t \in [0, t_1]$, на якому її розв'язок $x(t) = 3t + x_0 < 0$. Помітимо, що $x(t) < 0$ при $t \in \left[0, -\frac{x_0}{3}\right)$, $t_1 = -\frac{x_0}{3}$ (рис. 1.1). У точці t_1 функція $x(t)$ рівна нулеві і в цій точці $f\big(x(t)\big) = 1$.

Розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = 1, \qquad x(t_1) = 0, \qquad t \geq t_1$$

задається функцією $x(t) = t - t_1 > 0, t > t_1$.

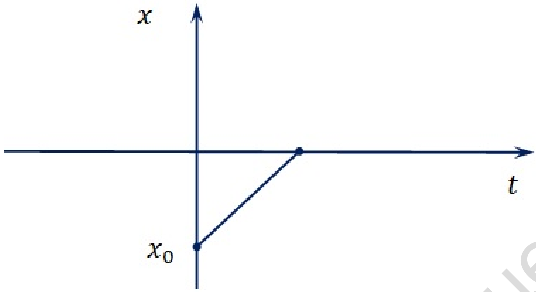


Рис. 1.1. Ілюстрація прикладу 1.3

Утім, якщо $x(t)$ є додатною функцією, то $f\big(x(t)\big) = -1$, $t > t_1$. Розв'язком задачі Коші

$$\dot{x} = -1, \qquad x(t_1) = 0, \qquad t \geq t_1$$

є функція $x(t) = -t + t_1 < 0$, $t > t_1$. Це означає, що розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\dot{x} = 1 - 2\mathrm{sgn}(x), \qquad x(0) = x_0$$

не зберігає знак при $t \in (t_1, t_1 + h)$ для будь-якого $h > 0$. Отже $x(t) = 0$ при $t \geq t_1$. Підстановка цієї функції в диференціальне рівняння $\dot{x} = 1 - 2\mathrm{sgn}(x)$ показує, що $x(t) = 0$, $t \geq t_1$ не є розв'язком цього рівняння. Отже, при $t \geq t_1$ розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = 1 - 2\mathrm{sgn}(x), \qquad x(0) = x_0$$

не існує. Він визначений лише на відрізку $t \in \left[0, -\frac{x_0}{3}\right]$ і рівний $x(t) = 3t + x_0$.

Зазначимо, що розв'язок є обмеженим.

Наслідок 1.4. *Нехай* $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ *є компактом. Тоді для довільної точки* $(t_0, x_0) \in int\,\mathcal{K}$ *існують* $t_1 < t_0$, $t_2 > t_0$ *і розв'язок* $x(t)$ *задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

визначений на відрізку $[t_1, t_2]$, *такі, що* $(t_1, x(t_1)) \notin \mathcal{K}$, $(t_2, x(t_2)) \notin \mathcal{K}$.

Доведення. Для доведення цього наслідку беремо довільний компакт $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{D}$, який містить у собі компакт $\mathcal{K}$, тобто

$\mathcal{K} \subset int\, \mathcal{K}_1$, і за теоремою 1.2 продовжуємо розв'язок $x(t)$ ліворуч і праворуч до границі компакта $\mathcal{K}_1$. Тоді ті значення $t_1 < t_0$, $t_2 > t_0$, для яких $(t_1, x(t_1)) \in \partial\mathcal{K}_1$, $(t_2, x(t_2)) \in \partial\mathcal{K}_1$, є шуканими.

■

Наслідок 1.5. *Нехай $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ – замкнена необмежена область, причому для будь-яких τ, s множина*

$$\{(t,x) \in \mathcal{K}: \tau \le t \le s\}$$

є компактом. Тоді для довільної точки $(t_0, x_0) \in int\, \mathcal{K}$ розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити або до границі $\partial\mathcal{K}$, або на нескінченний проміжок зміни незалежної змінної $t \in (-\infty, +\infty)$ як ліворуч, так і праворуч.

Доведення. Візьмемо такі τ, s_i, $i = 1,2,...$, що

$$\tau < t_0 < s_1 < s_2 < \cdots, \lim_{i\to\infty} s_i = +\infty.$$

За теоремою 1.2 для кожного $i = 1,2,...$ розв'язок $x(t)$ задачі Коші можна продовжити до точки $(t_i, x(t_i))$, яка лежить на границі компакта

$$\{(t,x) \in \mathcal{K}: \tau \le t \le s_i\}.$$

Якщо $t_i < s_i$, то $(t_i, x(t_i))$ належить границі необмеженої замкненої множини $\mathcal{K}$. Якщо для всіх $i = 1,2,...$ маємо $t_i = s_i$, то роз'язок $x(t)$ задачі Коші можна продовжити праворуч на необмежений інтервал. Аналогічно продовжуємо розв'язок ліворуч або до границі необмеженої замкненої множини $\mathcal{K}$, або на необмежений інтервал зміни незалежної змінної t.

■

Наслідок 1.5 дозволяє зробити висновок, що у випадку $\mathcal{K} = \mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

або можна продовжити на нескінченний проміжок зміни незалежної змінної $t \in (-\infty, +\infty)$ як ліворуч, так і праворуч, або існує скінченне T^* таке, що

$$\lim_{t\to T^*} \|x(t)\| = +\infty.$$

Означення 1.2. *Розв'язок* $x(t)$ *задачі* (1.23)*, визначений на інтервалі* $I \subset \mathbb{R}$*, називають повним (непродовжуваним), якщо не існує розв'язку цієї задачі, що визначений на деякому інтервалі* $I_0 \subset \mathbb{R}$*,* $I \subset I_0$*,* $I \neq I_0$*, який є продовженням розв'язку* $x(t)$.

Для доведення теореми існування повного розв'язку нам знадобиться лема Цорна.

1.3.1. Відношення часткового порядку і лема Цорна

Нехай для деяких елементів множини $\mathcal{X}$ визначено бінарне відношення $\prec$ часткового порядку. Це означає, що виконуються такі умови:

1. $a \prec a$, $a \in \mathcal{X}$ (рефлексивність);
2. якщо $a \prec b$ і $b \prec c$, то $a \prec c$, $a, b, c \in \mathcal{X}$ транзитивність);
3. якщо $a \prec b$ і $b \prec a$, то $a = b$, $a, b \in \mathcal{X}$ (антисиметричність).

Пару $(\mathcal{X}, \prec)$ називають *частково впорядкованою множиною*. Слід підкреслити, що можливо не для всіх елементів множини $\mathcal{X}$ установлено відношення часткового порядку $\prec$. Ті елементи множини $\mathcal{X}$, для яких установлено відношення часткового порядку, називають *порівнюваними*.

Якщо для елементів $a, b \in \mathcal{X}$ виконується співвідношення $b \prec a$, то говорять, що елемент a мажорує елемент b. Якщо $a \neq b$, то говорять, що елемент a строго мажорує елемент b.

Підмножину $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ називають обмеженою, якщо у множині $\mathcal{X}$ існує елемент, який мажорує всі елементи множини $\mathcal{Y}$. Такий елемент називають верхньою гранню множини $\mathcal{Y}$. Найменшу верхню грань множини $\mathcal{Y}$ називають її точною верхньою гранню. Елемент $a \in \mathcal{X}$ називають максимальним елементом множини $\mathcal{X}$, якщо у множині $\mathcal{X}$ не існує елемента, який строго мажорує a.

Підмножину $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ називають ланцюгом або лінійно впорядкованою множиною, якщо будь-які два її елементи є порівнюваними, тобто для будь-яких елементів $a, b \in \mathcal{Y}$ маємо $a \prec b$ або $b \prec a$. Ланцюг множини $\mathcal{X}$ називають максимальним, якщо він не є підмножиною жодного іншого ланцюга множини $\mathcal{X}$. Частково впорядковану множину $(\mathcal{X}, \prec)$ називають індуктивною, якщо $\mathcal{X} \neq \emptyset$ і кожний ланцюг множини $\mathcal{X}$ є обмеженим.

Лема 1.6 (Цорна). *Індуктивна частково впорядкована множина містить максимальний елемент.*

Лема 1.7 (принцип максимуму Гаусдорфа). *У частково впорядкованій множині будь-який ланцюг міститься в деякому максимальному ланцюзі цієї множини.*

1.3.2. Існування повного розв'язку

Повернемось до обґрунтування існування повного розв'язку задачі Коші.

Теорема 1.3. *Якщо* $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$*, то для довільної точки* $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ *існує повний розв'язок задачі Коші* (1.23).

Доведення. Нехай $x(\cdot)$ – розв'язок задачі Коші (1.23). Якщо цей розв'язок є повним, то теорему доведено. Тому вважаємо, що розв'язок $x(\cdot)$ не повний та існує продовження цього розв'язку. Позначимо як $\mathcal{P}$ множину всіх розв'язків задачі Коші (1.23), які продовжують розв'язок $x(\cdot)$. За означенням 1.1 множина $\mathcal{P}$ не є порожньою, оскільки вона містить $x(\cdot)$, а також щонайменше ще один розв'язок задачі Коші (1.23), який продовжує $x(\cdot)$. На $\mathcal{P}$ встановимо відношення $\prec$, а саме, якщо $y, z \in \mathcal{P}$, то $y \prec z$, якщо z є продовженням y. Таке відношення $\prec$ є відношенням часткового порядку. Крім того, пара $(\mathcal{P}, \prec)$ є індуктивною. Справді, якщо $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ є ланцюгом, то будь-яка функція, графік якої містить графіки всіх функцій з $\mathcal{P}_0$, є верхньою гранню множини $\mathcal{P}_0$. З леми Цорна випливає, що існує щонайменше один максимальний елемент $x_* \in \mathcal{P}$. Це означає, що x_* є повним розв'язком.

■

Повний розв'язок або визначений для всіх $t \in (-\infty, +\infty)$ або є необмеженим.

Приклад 1.4. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, \qquad x(0) = 0.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = dt.$$

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння

$$\operatorname{arctg} x = t + C,$$

де C – довільна стала.

Умова Коші $x(0) = 0$ дає $C = 0$. Отже,

$$x(t) = \operatorname{tg}(t)$$

є повним розв'язком задачі Коші. Він визначений на проміжку $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, є необмеженим і не може бути продовженим для довільних значень змінної t.

Теорема 1.4. *Нехай $f \in C([c,d] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ і*

$$\| f(t,x) \| \leq a(t) \| x \| + b(t),$$

де $a(t)$, $b(t)$ – неперервні функції, $t \in [c,d]$. Тоді для довільної точки (t_0, x_0) такої, що $t_0 \in (c,d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити на весь інтервал $[c,d]$.

Доведення. Оскільки $a(t)$, $b(t)$ – неперервні функції, $t \in [c,d]$, то існують

$$k = \max_{t \in [c,d]} |a(t)|, \qquad m = \max_{t \in [c,d]} |b(t)|.$$

Нехай $\| x_0 \| = r_0$, $k > 0$ (випадок $k = 0$ аналізують аналогічно). Тоді за наслідком леми 1.4

$$\| x(t) \| \leq g(t) = r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right), \qquad t \in [c,d].$$

Позначимо $R = \max_{t \in [c,d]} |g(t)|$. Розглянемо компакти

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq R + 1\},$$

$$\mathcal{Z} = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in [c,d], x \in \mathcal{K}\}.$$

Точка (t_0, x_0) належить внутрішності $\mathcal{Z}$. За теоремою 1.2 продовжимо ліворуч і праворуч розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

до границі компакта $\mathcal{Z}$. Границя компакта $\mathcal{Z}$ складається з точок $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $x \in \partial\mathcal{K}$, $t \in (c,d)$, а також $x \in \mathcal{K}$, якщо

$t = c$ і $t = d$. Оскільки $\| x(t) \| \leq R$, то $x(t) \in int\mathcal{K}$, $t \in [c, d]$. Це означає, що розв'язок $x(t)$ потрапляє на границю $\mathcal{Z}$ як для $t = c$, так і для $t = d$. Отже, розв'язок $x(t)$ можна продовжити на весь інтервал $[c, d]$.

■

З наслідку 1.5 теореми 1.2 та теореми 1.4 випливає такий наслідок.

Наслідок 1.6. *Нехай* $f \in C(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ *і*

$$\| f(t, x) \| \leq a(t) \| x \| + b(t),$$

де $a(t)$, $b(t)$ *– неперервні функції,* $t \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільної точки* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *розв'язок* $x(t)$ *задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити на нескінченний проміжок $t \in (-\infty, +\infty)$ *як ліворуч, так і праворуч.*

Приклад 1.5. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x \sin x + t,$$

де $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Для правої частини $f(t, x) = x \sin x + t$ рівняння справджується оцінка

$$|f(t, x)| \leq |x| + |t|,$$

де $t \in \mathbb{R}$. За наслідком із теореми 1.4, розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = x \sin x + t, \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити на нескінченний проміжок $t \in (-\infty, +\infty)$ як ліворуч, так і праворуч.

Приклад 1.6. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $g(t)$ – n-вимірна неперервна вектор-функція, $t \in \mathbb{R}$. Для правої частини $f(t, x) = A(t)x + g(t)$ системи виконується умова

$$\| f(t,x) \| \leq \| A(t) \| \| x \| + \| g(t) \|,$$

де $t \in \mathbb{R}$. За наслідком із теореми 1.4, розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити на нескінченний проміжок як ліворуч, так і праворуч.

Теорема 1.5. *Нехай* $f \in C([t_0, d] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *і*

$$\langle x, f(t,x) \rangle \leq a(t) \| x \|^2 + b(t),$$

де $a(t)$, $b(t)$ *– неперервні функції,* $t \in [t_0, d]$. *Тоді для довільної точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *розв'язок* $x(t)$ *задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити праворуч на весь інтервал $[t_0, d]$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$r(t) = \| x(t) \|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle, \qquad t \in [t_0, d].$$

Знайдемо

$$r'(t) = 2\langle x(t), x'(t) \rangle = 2\langle x(t), f(t, x(t)) \rangle \leq$$
$$\leq 2a(t) \| x(t) \|^2 + 2b(t) \leq kr(t) + m, \qquad t \in [t_0, d],$$

де

$$k = 2 \max_{t \in [t_0, d]} |a(t)|, \qquad m = 2 \max_{t \in [t_0, d]} |b(t)|.$$

Позначимо $\| x_0 \|^2 = r_0$, $k > 0$ (випадок $k = 0$ аналізують аналогічно). Тоді, інтегруючи нерівність

$$r'(t) \leq kr(t) + m, \qquad t \in [t_0, d],$$

від t_0 до $t \in [t_0, d]$, матимемо

$$r(t) \leq r_0 + \int_{t_0}^{t} (kr(s) + m)ds.$$

Згідно з наслідком 1.3 леми Гронуола – Белмана,

$$r(t) = \| x(t) \|^2 \leq g(t) = r_0 e^{k(t-t_0)} + \frac{m}{k}\left(e^{k(t-t_0)} - 1\right),$$
$$t \in [t_0, d].$$

Позначимо $R = \max_{t \in [t_0, d]} \sqrt{g(t)}$ і візьмемо $c < t_0$. Розглянемо компакти

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq R + 1\},$$
$$\mathcal{Z} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in [c, d], \quad x \in \mathcal{K}\}.$$

Точка (t_0, x_0) належить внутрішності $\mathcal{Z}$. За теоремою 1.2 продовжимо праворуч розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

до границі компакта $\mathcal{Z}$. Границя компакта $\mathcal{Z}$ складається з точок $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $x \in \partial\mathcal{K}$, $t \in (c, d)$, а також $x \in \mathcal{K}$ при $t = c$ і $t = d$.

Оскільки $\| x(t) \| \leq R$, $t \in [t_0, d]$, то $x(t) \in int\mathcal{K}$, $t \in [t_0, d]$. Це означає, що розв'язок $x(t)$ потрапляє на границю $\mathcal{Z}$ тільки, якщо $t = d$. Тобто, цей розв'язок можна продовжити праворуч на весь інтервал $[t_0, d]$.

■

Наслідок 1.7. *Нехай $f \in C([t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ і*

$$\langle x, f(t, x) \rangle \leq a(t) \| x \|^2 + b(t),$$

де $a(t)$, $b(t)$ – неперервні функції, $t \geq t_0$. Тоді для довільної точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ розв'язок $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

можна продовжити праворуч на весь інтервал $[t_0, +\infty)$.

Приклад 1.7. Розглянемо диференціальне рівняння Ріккаті

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{1.24}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – неперервні функції, $t \geq 0$. Покажемо, що розв'язок $x(t)$ рівняння (1.24) за умови, що $x(0) = x_0 \geq 0$, $a(t) \leq 0$, $c(t) > 0$, $t \geq 0$ можна продовжити праворуч на всю додатну піввісь.

Спочатку покажемо, що якщо проміжок $t \in [0, H)$ є проміжком існування розв'язку $x(t)$, то $x(t) \geq 0$, $t \in [0, H)$. Помітимо, що якщо $x_0 = 0$, то $\dot{x}(0) = c(0) > 0$ і знайдеться $d > 0$ таке, що $x(t) > 0$, $t \in (0, d]$. Тому можемо вважати, що

$x_0 > 0$. Якщо на інтервалі $t \in [0, H)$ знайдеться таке $s \in [0, H)$, що $x(s) = 0$, то, повторюючи попередні міркування, маємо $\dot{x}(s) = c(s) > 0$, й існує $d > 0$ таке, що $x(s) > 0$, $t \in (s, s + d]$. Тому $x(t) \geq 0$, $t \in [0, H)$.

Виберемо довільне $T > 0$. Оскільки $a(t) \leq 0$, $t \geq 0$, то

$$\dot{x}(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t) \leq b(t)x(t) + c(t),$$
$$t \in [0, T].$$

Знайдемо

$$k = \max_{t \in [0,T]} |b(t)|, \qquad m = \max_{t \in [0,T]} c(t).$$

Вважаємо, що $k > 0$. Інакше, у випадку $b(t) = 0$, $t \in [0, T]$, візьмемо довільне додатне k. Тоді

$$\dot{x}(t) \leq kx(t) + m, \qquad t \in [0, T].$$

За лемою 1.4

$$0 \leq x(t) \leq R,\ R = x_0 e^{kT} + \frac{m}{k}\left(e^{kT} - 1\right),\ t \in [0, T]. \quad (1.25)$$

Розглянемо компакт

$$\mathcal{K} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq T, |x| \leq R + 1\}.$$

За теоремою 1.2 розв'язок $x(t)$ може бути продовжений праворуч до виходу на границю компакта $\mathcal{K}$. Але з оцінки (1.25) випливає, що $\big(T, x(T)\big)$ належить $\partial\mathcal{K}$, тому що

$$-(R + 1) < 0 \leq x(t) \leq R < R + 1, \qquad t \in [0, T].$$

Тобто розв'язок $x(t)$ існує при $t \in [0, T]$. Оскільки $T > 0$ – довільне, то це означає, що розв'язок $x(t)$ може бути продовжений праворуч на всю додатну піввісь $t \in [0, +\infty)$.

1.4. Єдиність розв'язку

Нехай $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (1.26)$$

де $(t, x) \in \mathcal{D}$.

Означення 1.3. *Ми будемо говорити, що точка* $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ *є точкою єдиності розв'язку задачі Коші, якщо будь-які два розв'язки задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (1.27)$$

збігаються на деякому інтервалі їхнього спільного існування, який містить точку t_0.

Розв'язок задачі Коші (1.27) позначатимемо $x(t, x_0, t_0)$.

Означення 1.4. *Функція* $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ *задовольняє умову Ліпшиця відносно змінної* x *в області* $\mathcal{D}$, *якщо знайдеться інтегрована функція* $\ell(t) > 0$ *така, що для будь-яких точок* $(t, x) \in \mathcal{D}$, $(t, y) \in \mathcal{D}$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le \ell(t)\|x - y\|. \qquad (1.28)$$

Теорема 1.6. *Нехай для правої частини системи диференціальних рівнянь* (1.26) *в області* $\mathcal{D}$ *справедлива умова Ліпшиця* (1.28), $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ *і на інтервалі* $[c, d]$ *визначено розв'язки* $x(t, x_0, t_0)$, $x(t, y_0, t_0)$ *системи диференціальних рівнянь* (1.26), $t_0 \in [c, d]$. *Тоді*

$$\|x(t, x_0, t_0) - x(t, y_0, t_0)\| \le L(t)\|x_0 - y_0\|, \qquad (1.29)$$

де $L(t) = e^{\left|\int_{t_0}^{t} \ell(s)ds\right|}$, $t \in [c, d]$. *У випадку, якщо* $\ell(t) = \ell > 0$ – *константа, то* $L(t) = e^{\ell|t - t_0|}$, $t \in [c, d]$.

Доведення. З леми 1.1 випливає, що

$$x(t, x_0, t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, x_0, t_0))ds,$$

$$x(t, y_0, t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, y_0, t_0))ds, \qquad t \in [c, d].$$

Якщо $t \in [t_0, d]$, то, застосовуючи нерівність трикутника, одержуємо

$$\|x(t, x_0, t_0) - x(t, y_0, t_0)\| \le \|x_0 - y_0\| +$$
$$+ \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\big(s, x(s, x_0, t_0)\big) - f\big(s, x(s, y_0, t_0)\big)\right\| ds\right|.$$

З умови Ліпшиця (1.28) випливає

$$\|x(t,x_0,t_0) - x(t,y_0,t_0)\| \le$$
$$\le \|x_0 - y_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \ell(s) \|x(s,x_0,t_0) - x(s,y_0,t_0)\| ds \right|,$$

де $t \in [c,d]$. За наслідком 1.2 з леми Гронуола – Белмана

$$\|x(t,x_0,t_0) - x(t,y_0,t_0)\| \le e^{\left|\int_{t_0}^{t} \ell(s)ds\right|} \|x_0 - y_0\|, \qquad t \in [c,d].$$

Отже, виконується (1.29). У випадку, якщо $\ell(t) = \ell > 0$ – константа, то $\left|\int_{t_0}^{t} \ell(s)ds\right| = \ell|t - t_0|$, $t \in [c,d]$.

■

Теорема 1.6 показує, що якщо в області $\mathcal{D}$ справедлива умова Ліпшиця (1.28), то розв'язок $x(t,x_0,t_0)$ задовольняє умову Ліпшиця (1.29) за вектором початкових умов x_0. З теореми 1.6 також випливає таке твердження.

Теорема 1.7. *Нехай* $(t_0,x_0) \in \mathcal{D}$ *і для правої частини системи диференціальних рівнянь* (1.26) *в області* $\mathcal{D}$ *виконується умова Ліпшиця* (1.28). *Тоді в області* $\mathcal{D}$ *може існувати не більше одного розв'язку задачі Коші* (1.27).

Доведення. Нехай $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ – два розв'язки задачі Коші (1.27) й інтервал $[c,d]$ є відрізком спільного існування цих розв'язків, $t_0 \in [c,d]$. Оскільки в області $\mathcal{D}$ виконується умова Ліпшиця (1.28), то справджується теорема 1.6. З нерівності (1.29) випливає

$$\left\|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\right\| = 0, \qquad t \in [c,d].$$

Це означає, що розв'язки $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ збігаються на інтервалі $[c,d]$.

■

Теорема 1.8 (Пікара). *Нехай* $f \in C(\Pi, \mathbb{R}^n)$, *де* $\Pi \subset \mathcal{D}$ *є околом точки* $(t_0,x_0) \in \mathcal{D}$ *і, більше того, на* Π *виконується умова Ліпшиця* (1.28). *Тоді знайдеться* $h > 0$ *таке, що на відрізку* $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *існує розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

і цей розв'язок єдиний. Зокрема, якщо

$$\Pi = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \le a,\ \| x - x_0 \| \le b\}, \quad (1.30)$$

то

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad (1.31)$$

де $M = \max_{(t,x)\in\Pi} \| f(t,x) \|$.

Доведення. За теоремою Пеано на відрізку $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, де $h > 0$ визначається відповідно до (1.31), існує розв'язок задачі Коші (1.27). За теоремою 1.7 цей розв'язок єдиний.

■

Наслідок 1.8. *Нехай* $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ *і на* $\mathcal{D}$ *справджується умова Ліпшиця (1.28),* $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. *Тоді повний розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

існує і є єдиним.

Лема 1.8 (Адамара). *Нехай* $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. *Тоді для матриці*

$$G(x, x_0) = \int_0^1 \frac{\partial g(tx + (1-t)x_0)}{\partial x} dt$$

розмірності $m \times n$ *із неперервними за* $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ *компонентами виконується рівність*

$$g(x) = g(x_0) + G(x, x_0)(x - x_0).$$

Доведення. Позначимо $x(t) = tx + (1-t)x_0,\ \ t \in [0,1]$. За формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_0^1 \frac{dg\big(x(t)\big)}{dt} dt = \int_0^1 \frac{dg(tx + (1-t)x_0)}{dt} dt =$$
$$= g\big(x(1)\big) - g\big(x(0)\big) = g(x) - g(x_0).$$

З іншого боку

$$\frac{dg\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\partial g\big(x(t)\big)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial g\big(x(t)\big)}{\partial x}(x - x_0).$$

Тому

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{dg\big(x(t)\big)}{dt} dt = \int_0^1 \frac{\partial g\big(x(t)\big)}{\partial x} dt (x - x_0) =$$
$$= G(x, x_0)(x - x_0).$$

■

Наслідок 1.9. *Нехай* $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *й опукла множина* $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ *є такою, що* $\frac{\partial g(x)}{\partial x}$ *обмежена на* $\mathcal{K}$. *Тобто, існує* $L \geq 0$, *для якого*

$$\left\|\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right\| \leq L, \qquad x \in \mathcal{K}.$$

Тоді функція g *задовольняє умову Ліпшиця на* $\mathcal{K}$, *а саме:*

$$\left\|g\left(x^{(1)}\right) - g\left(x^{(2)}\right)\right\| \leq L\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|, \qquad x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathcal{K}.$$

Зокрема, якщо $\mathcal{K}$ *– опуклий компакт, то* $L = \max_{x\in\mathcal{K}} \left\|\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right\|$.

Доведення. Позначимо $x(t) = tx^{(1)} + (1-t)x^{(2)}$, де $t \in [0,1]$, $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathcal{K}$. Оскільки множина $\mathcal{K}$ – опукла, то $x(t) \in \mathcal{K}$, де $t \in [0,1]$. За лемою Адамара

$$g\left(x^{(1)}\right) - g\left(x^{(2)}\right) = \int_0^1 \frac{\partial g\left(x(t)\right)}{\partial x} dt \left(x^{(1)} - x^{(2)}\right).$$

Звідси

$$\left\|g\left(x^{(1)}\right) - g\left(x^{(2)}\right)\right\| \leq \int_0^1 \left\|\frac{\partial g\left(x(t)\right)}{\partial x}\right\| dt \left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\| \leq$$
$$\leq L\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|.$$

■

Наслідок 1.10. *Нехай* $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $g(0) = 0$. *Тоді існує матриця* $G(x)$ *розмірності* $m \times n$ *із неперервними компонентами така, що*

$$g(x) = G(x)x.$$

Наслідок 1.11. *Якщо права частина* $f(t, x)$ *системи* (1.26) *є неперервною за змінною* t *і неперервно диференційованою за змінною* x *на множині* П, *яка визначається відповідно до* (1.30), *то на відрізку* $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, *де* $h > 0$ *визначається за* (1.31), *існує розв'язок задачі Коші* (1.27) *і такий розв'язок єдиний.*

Доведення. З наслідку 1.9 випливає, що для правої частини системи (1.26) виконуються умови теореми Пікара 1.8.

■

Наслідок 1.12. *Нехай* $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ *і* $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ *є обмеженою на* $\mathcal{D}$, $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. *Тоді повний розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

існує і є єдиним.

Приклад 1.8. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t) - n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $g(t) - n$-вимірна неперервна вектор-функція, $t \in \mathbb{R}$. Покажемо, що для цієї системи справджується теорема Пікара. Справді, функція $f(t,x) = A(t)x + g(t)$ є неперервною на множині (1.30). Крім того,

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| = \|A(t)x - A(t)y\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - y\|.$$

Отже, виконується умова Ліпшиця. Тому для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь виконується теорема Пікара.

Приклад 1.9. У прикладі 1.2 показано, що задача Коші

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0$$

має два розв'язки $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = t^3$. Права частина цього рівняння $f(t,x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ є неперервною функцією, тому в довільному околі початку координат для цієї задачі Коші виконуються умови теореми Пеано. Разом із тим

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Отже, у довільному околі початку координат $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ є необмеженою і порушуються умови наслідку 1.12.

Теорему Пікара можна обґрунтувати методом послідовних наближень. Вважаємо, що в умові Ліпшиця (1.28) константа Ліпшиця не залежить від t, тобто $\ell(t) = \ell > 0$.

Теорема 1.9 (Пікара). *Нехай* $f \in C(\Pi, \mathbb{R}^n)$, *де*

$$\Pi = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}: |t - t_0| \le a, \ \| x - x_0 \| \le b\} \quad (1.32)$$

й існує константа $\ell > 0$ *така, що для довільних точок* (x,t), (y,t), *які належать* Π, *справджується умова Ліпшиця*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le \ell \|x - y\|. \quad (1.33)$$

Тоді на відрізку $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *існує розв'язок задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

і цей розв'язок є єдиним, де

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \qquad M = \max_{(t,x)\in\Pi} \| f(t,x) \|.$$

Доведення. Крок 1. *Метод послідовних наближень.*

Виберемо $x^{(0)}(t) = x_0$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ і

$$x^{(k)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x^{(k-1)}(s)\right) ds, \quad (1.34)$$

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h], \qquad k = 1,2, \dots .$$

Усі функції $x^{(k)}(t)$, які побудовані за формулою (1.34), на відрізку $[t_0 - h, t_0 + h]$ є неперервними і

$$\left\|x^{(k)}(t) - x_0\right\| \le Mh, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \qquad k = 0,1, \dots ,$$

звідки доходимо висновку, що $\left(t, x^{(k)}(t)\right) \in \Pi$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, оскільки $Mh \le b$.

Покажемо це за індукцією. Для $k = 0$ маємо $x^{(0)}(t) = x_0$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Для цієї функції виконуються твердження, які зазначались вище. Припустимо, що $x^{(k-1)}(t)$ є неперервною на відрізку $[t_0 - h, t_0 + h]$ функцією і

$$\left\|x^{(k-1)}(t) - x_0\right\| \le Mh, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тоді з (1.34) і властивостей інтеграла зі змінною верхньою межею випливає, що функція $x^{(k)}(t)$ неперервна на $[t_0 - h, t_0 + h]$ і з (1.34) маємо

$$\left\|x^{(k)}(t) - x_0\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(s, x^{(k-1)}(s)\right) ds\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\left(s, x^{(k-1)}(s)\right)\right\| ds\right| \le Mh, \qquad Mh \le b.$$

Звідси одержуємо $\left(t, x^{(k)}(t)\right) \in \Pi$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0,1, \dots$.

Крок 2. *Збіжність послідовності.*

Покажемо, що послідовність неперервних функцій $x^{(k)}(t)$ рівномірно збігається на відрізку $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0,1, \dots$. Помітимо, якщо $k = 1$, то

$$x^{(1)}(t) = x^{(0)}(t) + \left(x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)\right),$$

якщо $k = 2$, то

$$x^{(2)}(t) = x^{(0)}(t) + \left(x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)\right) + \left(x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)\right)$$

і загалом

$$x^{(k)}(t) = x^{(0)}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t)\right), \qquad k = 1,2, \dots.$$

Покажемо, що

$$u^{(k)}(t) = \left\|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\right\| \le \frac{M\ell^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad (1.35)$$

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h], \qquad k = 0,1, \dots .$$

Справді, за індукцією, при $k = 0$ маємо

$$u^{(0)}(t) = \left\|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)\right\| = \left\|x^{(1)}(t) - x_0\right\| =$$

$$= \left\|\int_{t_0}^{t} f(s, x_0) ds\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\| ds\right| \le M|t - t_0|, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Отже, виконується (1.35) при $k = 0$. Припустимо, що для деякого k

$$u^{(k-1)}(t) = \left\|x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)\right\| \le \frac{M\ell^{k-1} |t - t_0|^k}{k!},$$

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \qquad (1.36)$$

Тоді з (1.34) і з умови Ліпшиця (1.33)

$$u^{(k)}(t) = \left\|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\right\| =$$

$$= \left\|\int_{t_0}^{t} \left(f\left(s, x^{(k)}(s)\right) - f\left(s, x^{(k-1)}(s)\right)\right) ds\right\| \le$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f(s, x^{(k)}(s)) - f(s, x^{(k-1)}(s)) \right\| ds \right| \le$$

$$\le \ell \left| \int_{t_0}^{t} \left\| x^{(k)}(s) - x^{(k-1)}(s)) \right\| ds \right| \le$$

$$\le \ell \left| \int_{t_0}^{t} \frac{M\ell^{k-1}|s - t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{M\ell^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Звідси з урахуванням (1.36) доходимо висновку, що

$$u^{(k)}(t) = \left\| x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t) \right\| \le a^{(k)} = \frac{M\ell^k h^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad (1.37)$$

$$t \in [t_0 - h, t_0 + h], \qquad k = 0,1, \dots .$$

Ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^{(i)}$$

збігається за ознакою Д'Аламбера, оскільки

$$\lim_{i \to \infty} \frac{a^{(i+1)}}{a^{(i)}} = \lim_{i \to \infty} \frac{\ell h}{i+2} = 0 < 1.$$

За ознакою Веєрштраса з (1.37) випливає, що ряд

$$x^{(0)}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t) \right)$$

збігається рівномірно на $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Позначимо

$$x(t) = x^{(0)}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t) \right) = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}(t).$$

Ми показали, що

$$x(t) = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}(t)$$

рівномірно на $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Крок 3. *Границя послідовності є розв'язком задачі Коші.*

З умови Ліпшиця (1.33) випливає, що

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \left(f\left(s, x^{(k)}(s)\right) - f\left(s, x(s)\right) \right) ds \right\| \le$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f\left(s, x^{(k)}(s)\right) - f\big(s, x(s)\big) \right\| ds \right| \leq$$
$$\leq \ell h \max_{s \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\| x^{(k)}(s) - x(s) \right\|.$$

Оскільки

$$x(t) = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}(t)$$

рівномірно на $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, то $\int_{t_0}^{t} f(s, x^{(k)}(s))ds$ збігається до $\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$, причому рівномірно на $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Тоді в (1.34) переходимо до границі $k \to \infty$ й одержуємо

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \quad (1.38)$$

За лемою 1.1 функція $x(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

З єдиності границі випливає єдиність розв'язку.

Зауважимо, що

$$\max_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\| x^{(k)}(t) - x(t) \right\| \leq \frac{M \ell^k h^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (1.39)$$

Доведемо це за індукцією. З (1.38) маємо

$$\|x(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Отже, при $k = 0$ (1.39) справджується. Припустимо, що для деякого $k - 1$

$$\left\| x^{(k-1)}(t) - x(t) \right\| \leq \frac{M \ell^{k-1} |t - t_0|^k}{k!} \leq \frac{M \ell^{k-1} h^k}{k!},$$
$$t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тоді, враховуючи (1.38), з умови Ліпшиця (1.33) для k випливає

$$\left\| x^{(k)}(t) - x(t) \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| f(s, x^{(k-1)}(s)) - f(s, x(s)) \right\| ds \right| \leq$$

$$\leq \ell \left| \int_{t_0}^{t} \left\| x^{(k-1)}(s) - x(s) \right\| ds \right| \leq \ell \frac{M\ell^{k-1}}{k!} \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{M\ell^{k-1}}{k!} \frac{|t - t_0|^{k+1}}{k+1} \leq \frac{M\ell^k h^{k+1}}{(k+1)!}, \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Отже, (1.39) обґрунтовано.

■

Приклад 1.10. Знайдемо наближений розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = t - x, \qquad x(0) = 1$$

в області

$$\mathcal{D} = \{(t, x): |t| \leq 1, \qquad |x - 1| \leq 1\}$$

методом послідовних наближень.

Застосовуючи теорему Пікара, визначимо

$$M = \max_{(t,x)\in\mathcal{D}} |t - x| = 3,$$

а також

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \min\left(1, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо константу Ліпшиця

$$\ell = \max_{(t,x)\in\mathcal{D}} \left| \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right| = 1.$$

Отже, метод послідовних наближень буде збігатися на відрізку $-\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{3}$. Оскільки умова Коші $x(0) = x_0 = 1$, то $x^{(0)}(t) = 1$, $t \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Метод послідовних наближень має вигляд

$$x^{(k)}(t) = x_0 + \int_0^t \left(s - x^{(k-1)}(s)\right) ds, \qquad t \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right],$$
$$k = 1, 2, \dots .$$

Тому

$$x^{(1)}(t) = x_0 + \int_0^t (s - x_0) ds = 1 + \int_0^t (s - 1) ds = 1 - t + \frac{t^2}{2},$$

$$x^{(2)}(t) = x_0 + \int_0^t \left(s - x^{(1)}(s)\right) ds =$$

$$= 1 + \int_0^t \left(s - 1 + s + \frac{s^2}{2} \right) ds = 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{6},$$

$$x^{(3)}(t) = x_0 + \int_0^t \left(s - x^{(2)}(s) \right) ds =$$

$$= 1 + \int_0^t \left(s - 1 + s - s^2 + \frac{s^3}{6} \right) ds =$$

$$= 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24},$$

$$x^{(4)}(t) = x_0 + \int_0^t \left(s - x^{(3)}(s) \right) ds =$$

$$= 1 + \int_0^t \left(s - 1 + s - s^2 + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{24} \right) ds =$$

$$= 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{120}.$$

Знайдемо з (1.39) похибку обчислень

$$\max_{t \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]} \left\| x^{(4)}(t) - x(t) \right\| \le$$

$$\le \frac{M \ell^4 h^5}{5!} = \frac{1}{27 \cdot 120} = \frac{1}{3240} < 4 \cdot 10^{-4}. \qquad (1.40)$$

Теорему Пікара можна також довести і за допомогою теореми про нерухому точку [4].

Теорема 1.10. *Нехай* $f(t, x)$ *є кусково-неперервною за* t *і задовольняє умову Ліпшиця*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le L \|x - y\|, \qquad L > 0$$

для всіх

$$x, y \in \mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}, \qquad t \in [t_0, T].$$

Тоді існує $h > 0$ *таке, що для задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

існує єдиний розв'язок на інтервалі $[t_0, t_0 + h] \subset [t_0, T]$.

Доведення. Зведемо задачу Коші до інтегрального рівняння (лема 1.1)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) ds. \tag{1.41}$$

Побудуємо відображення $\mathcal{F}$, яке кожній непервній функції $x: [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ ставить у відповідність неперервну функцію

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) ds.$$

У такий спосіб рівняння (1.41) можна записати як

$$x(t) = (\mathcal{F}x)(t). \tag{1.42}$$

Розв'язок (1.42) є нерухомою точкою відображення $\mathcal{F}$. Існування нерухомої точки встановимо за допомогою *теореми Банаха про нерухому точку*. Для цього визначимо банахів простір $\mathcal{X}$ і множину $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ таку, що $\mathcal{F}$ відображає $\mathcal{B}$ у $\mathcal{B}$ і є оператором стиску на $\mathcal{B}$.

Нехай $\mathcal{X} = C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$, $h > 0$. Нормою простору $\mathcal{X}$ є

$$\|x\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + h]} \|x(t)\|.$$

Розглянемо

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{X}: \|x - x_0\|_C \le r\} \subset C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n).$$

Константу $h > 0$ ми визначатимемо далі. Перша умова, яку повинна задовольняти константа $h > 0$, така:

$$h \in (0, T - t_0).$$

Тоді $[t_0, t_0 + h] \subset [t_0, T]$.

За означенням $\mathcal{F}$ відображає $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$. Покажемо, що за певних умов $\mathcal{F}$ відображає $\mathcal{B}$ у $\mathcal{B}$. Для цього запишемо

$$(\mathcal{F}x)(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big) ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Big\{\Big(f\big(s, x(s)\big) - f(s, x_0)\Big) + f(s, x_0)\Big\} ds.$$

Оскільки $f(t, x_0)$ є кусково-неперервною за t на $[t_0, T]$, то ця функція є обмеженою на цьому інтервалі. Нехай

$$M = \max_{t \in [t_0, T]} \|f(t, x_0)\|.$$

Враховуючи, що за умовами теореми справджується умова Ліпшиця, а також для будь-якого $x \in \mathcal{B}$ виконується

$$\|x(t) - x_0\| \le r, \qquad t \in [t_0, t_0 + h],$$

то одержимо

$$\|(\mathcal{F}x)(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \{\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|\} ds \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \{L\|x(s) - x_0\| + M\} ds \le \int_{t_0}^{t} \{Lr + M\} ds =$$

$$= (t - t_0)(Lr + M) \le h(Lr + M).$$

Тому

$$\|\mathcal{F}x - x_0\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + h]} \|(\mathcal{F}x)(t) - x_0\| \le h(Lr + M).$$

Отже, вибираємо $h > 0$ так, щоб мати нерівність

$$h(Lr + M) \le r.$$

Звідси одержуємо другу умову, яку повинна задовольняти $h > 0$, а саме

$$h \le \frac{r}{(Lr + M)}.$$

Тоді $\|\mathcal{F}x - x_0\|_C \le r$ і $\mathcal{F}$ відображає $\mathcal{B}$ у $\mathcal{B}$.

Щоб показати, що $\mathcal{F}$ є відображенням стиску на $\mathcal{B}$, візьмемо $x, y \in \mathcal{B}$ і розглянемо

$$\|(\mathcal{F}x)(t) - (\mathcal{F}y)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \{f(s, x(s)) - f(s, y(s))\} ds \right\| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \le L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\| ds \le$$

$$\le (t - t_0) L \|x - y\|_C.$$

Тому

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\|_C \le L \cdot h \cdot \|x - y\|_C \le k\|x - y\|_C,$$

де $k \ge Lh$. Маємо ще одне обмеження на h, а саме

$$h \le \frac{k}{L}.$$

При $k \in (0,1)$, $h < k/L$ відображення $\mathcal{F}$ є стискальним на $\mathcal{B}$. За теоремою Банаха про нерухому точку рівняння (1.42) має єдиний розв'язок у $\mathcal{B}$ за умови, що

$$h \le \min\left\{T - t_0, \frac{r}{Lr + M}, \frac{k}{L}\right\}, \qquad h > 0, \qquad k \in (0,1).$$

Це означає, що за таких умов існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (1.41).

На завершення доведення покажемо, що розв'язок (1.41) є єдиним в $\mathcal{X}$. Виявляється, що будь-який розв'язок (1.41) з $\mathcal{X}$ належить $\mathcal{B}$. Щоб це довести, зазначимо, що оскільки

$$x(t_0) = x_0 \in int\, \mathcal{K},$$

то будь-який непервний розв'язок (1.41) має належати $\mathcal{K}$ на деякому проміжку часу. Припустимо, що розв'язок $x(t)$ рівняння (1.41) покидає кулю $\mathcal{K}$ і $t_0 + d$ є найменшим моментом часу, за якого $x(t)$ потрапляє на границю кулі $\mathcal{K}$, $d > 0$. Тоді

$$\|x(t_0 + d) - x_0\| = r.$$

З іншого боку, для всіх $t \in [t_0, t_0 + d]$ виконується

$$\|x(t) - x_0\| \le \int_{t_0}^{t} \left\{\left\|f\big(s, x(s)\big) - f(s, x_0)\right\| + \|f(s, x_0)\|\right\} ds \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \{L\|x(s) - x_0\| + M\} ds \le \int_{t_0}^{t} (Lr + M) ds.$$

Тому

$$r = \|x(t_0 + d) - x_0\| \le (Lr + M)d.$$

Звідси

$$d \ge \frac{r}{Lr + M} \ge h.$$

Отже $x(t)$ не може покинути множину $\mathcal{K}$ на інтервалі $[t_0, t_0 + h]$. Це означає, що будь-який розв'язок $x \in \mathcal{X}$ інтегрального рівняння (1.41) належить $\mathcal{B}$. Оскільки у $\mathcal{B}$ розв'язок (1.41) єдиний, то він єдиний і в $\mathcal{X}$. ■

1.5. Неперервна залежність розв'язку від правої частини, початкових умов і параметрів

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.43}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область, в якій визначена права частина системи (1.43). Позначимо як $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок системи (1.43) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$.

Теорема 1.11. *Нехай розв'язок* $x(t, x_0, t_0)$ *системи* (1.43)*, який відповідає умові Коші* $x(t_0) = x_0$*, існує на відрізку* $[a, b]$*,* $t_0 \in [a, b]$ *і в*

$$\mathcal{V} = \{(t, x) \in \mathcal{D}\colon \ t \in [a, b], \qquad \|x - x(t, x_0, t_0)\| \le r\}$$

виконується умова Ліпшиця

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le \ell \|x - y\|,$$
$$(t, x) \in \mathcal{V}, \qquad (t, y) \in \mathcal{V} \tag{1.44}$$

з константою Ліпшиця $\ell > 0$*. В області* $\mathcal{D}$ *задана ще одна система звичайних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \tag{1.45}$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$*,* $g \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$*,* $y(t, y_0, t_0)$ *– розв'язок системи* (1.45) *з умовою Коші* $y(t_0) = y_0$*. Крім цього, для правої частини системи* (1.45) *справедлива умова Ліпшиця*

$$\|g(t, x) - g(t, y)\| \le \ell \|x - y\|, \qquad (t, x) \in \mathcal{V}, \qquad (t, y) \in \mathcal{V}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $\delta > 0$*, що як тільки*

$$\|x_0 - y_0\| \le \delta, \quad \|f(t, x) - g(t, x)\| \le \delta, \quad (t, x) \in \mathcal{V}, \tag{1.46}$$

то розв'язок $y(t, y_0, t_0)$ *системи* (1.43) *існує на* $[a, b]$ *і*

$$\|x(t, x_0, t_0) - y(t, y_0, t_0)\| \le \varepsilon, \quad t \in [a, b]. \tag{1.47}$$

Доведення. Множина $\mathcal{V} \in \mathcal{D}$ є компактом. Нехай розв'язок $y(t, y_0, t_0)$ системи (1.45) визначений на відрізку $[a_0, b_0] \subset [a, b]$, і на цьому відрізку графік розв'язку належить множині $\mathcal{V}$. Позначимо

$$z(t) = x(t, x_0, t_0) - y(t, y_0, t_0) = x(t) - y(t),$$

де $x(t) = x(t, x_0, t_0)$, $y(t) = y(t, y_0, t_0)$. Тоді

$$\frac{dz(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big) - g\big(t, y(t)\big)$$

і

$$\left\|\frac{dz(t)}{dt}\right\| = \big\|f\big(t, x(t)\big) - g\big(t, y(t)\big)\big\| \le$$
$$\le \big\|f\big(t, x(t)\big) - f\big(t, y(t)\big)\big\| + \big\|f\big(t, y(t)\big) - g\big(t, y(t)\big)\big\|,$$
$$t \in [a_0, b_0].$$

Звідси

$$\left\|\frac{dz(t)}{dt}\right\| \le \ell\|x(t) - y(t)\| + \delta = \ell\|z(t)\| + \delta, \qquad t \in [a_0, b_0].$$

Отже,

$$\left\|\frac{dz(t)}{dt}\right\| \le \ell\|z(t)\| + \delta, \qquad t \in [a_0, b_0].$$

За лемою про диференціальну нерівність (лема 1.4)

$$\|z(t)\| \le \delta e^{\ell|t-t_0|} + \frac{\delta}{\ell}\left(e^{\ell|t-t_0|} - 1\right), \qquad t \in [a_0, b_0],$$

$$\|x(t, x_0, t_0) - y(t, y_0, t_0)\| \le \delta\left(e^{\ell h} + \frac{1}{\ell}\left(e^{\ell h} - 1\right)\right),$$
$$t \in [a_0, b_0], \tag{1.48}$$

$$h = \max_{t \in [a,b]} |t - t_0| = \max\{|a - t_0|, \qquad |b - t_0|\}.$$

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 = \min\{r, \varepsilon\}$ і виберемо $\delta > 0$ таким чином, щоб

$$\delta\left(e^{\ell h} + \frac{e^{\ell h} - 1}{\ell}\right) < \varepsilon_0. \tag{1.49}$$

Звідси $\delta < \frac{\ell\varepsilon_0}{e^{\ell h}(\ell+1) - 1}$. Тоді

$$\|x(t, x_0, t_0) - y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon_0, \qquad t \in [a_0, b_0].$$

Побудуємо множину

$$\mathcal{W} = \{(t,x) \in \mathcal{D}\colon\ t \in [a,b], \qquad \|x - x(t,x_0,t_0)\| \le \varepsilon_0\},$$

яка лежить у множині $\mathcal{V}$. Ця множина є компактом і розв'язок $y(t) = y(t,y_0,t_0)$ можна продовжити до границі компакта $\mathcal{W}$. Границя компакта $\mathcal{W}$ складається з точок $(t,x) \in \mathcal{W}$ таких, що

$$\|x - x(t,x_0,t_0)\| = \varepsilon_0, \qquad t \in (a_0,b_0),$$

або при $t = a$ і $t = b$

$$\|x - x(a,x_0,t_0)\| < \varepsilon_0, \qquad \|x - x(b,x_0,t_0)\| < \varepsilon_0.$$

Але

$$\|y(t,y_0,t_0) - x(t,x_0,t_0)\| < \varepsilon_0, \quad t \in [a_0,b_0].$$

Враховуючи, що оцінка (1.48), (1.49) виконується для всіх $t \in [a,b]$, доходимо висновку, що розв'язок $y(t) = y(t,y_0,t_0)$ виходить на границю компакта $\mathcal{W}$ лише на кінцях відрізка $[a,b]$ в точках $(a,y(a))$, $(b,y(b))$. Це означає, що розв'язок $y(t) = y(t,y_0,t_0)$ визначений на $[a,b]$ і

$$\|x(t,x_0,t_0) - y(t,y_0,t_0)\| < \varepsilon, \qquad t \in [a,b].$$

■

Теорема 1.12. *Нехай розв'язок* $x(t,x_0,t_0)$ *системи* (1.43), $x(t_0) = x_0$ *існує на відрізку* $[a,b]$, $t_0 \in [a,b]$ *і на*

$$\mathcal{V} = \{(t,x) \in \mathcal{D}\colon\ t \in [a,b], \qquad \|x - x(t,x_0,t_0)\| \le r\}$$

виконується умова Ліпшиця

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \le \ell\|x - y\|, (t,x) \in \mathcal{V}, \qquad (t,y) \in \mathcal{V}$$

з константою Ліпшиця $\ell > 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $\delta > 0$, *що як тільки* $\|x_0 - y_0\| \le \delta$, *то розв'язок* $x(t,y_0,t_0)$ *системи* (1.43) *існує на* $[a,b]$ *і*

$$\|x(t,x_0,t_0) - x(t,y_0,t_0)\| \le \varepsilon, \qquad t \in [a,b].$$

Доведення. Справедливість теореми випливає з теореми 1.11, якщо $g(t,x) = f(t,x)$.

■

Наслідок 1.13. *Якщо в умовах теореми 1.12 існує послідовність* $\left\{x_0^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ *така, що*

$$\lim_{k\to\infty} x_0^{(k)} = x_0,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[a,b]}\left\|x\left(t,x_0^{(k)},t_0\right)-x(t,x_0,t_0)\right\|=0,$$

тобто розв'язки $x\left(t,x_0^{(k)},t_0\right)$ *системи* (1.43) *з умовою Коші* $x(t_0)=x_0^{(k)}$ *збігаються рівномірно до розв'язку* $x(t,x_0,t_0)$, $t\in[a,b]$.

Наслідок 1.14. *В умовах теореми 1.12*

$$\|x(t,x_0,t_0)-x(t,y_0,t_0)\|\le L(t)\|x_0-y_0\|,\qquad t\in[a,b],$$

де

$$L(t)=e^{\ell|t-t_0|},(x_0,t_0),\qquad (y_0,t_0)\in\mathcal{V},\qquad y_0\in\mathcal{K}_\delta(x_0).$$

Тут $\mathcal{K}_\delta(x_0)>0$ – δ-*окіл, що визначається з умови* (1.49) *теореми 1.11 при* $g(t,x)=f(t,x)$.

Наслідок 1.15. *Якщо в умовах теореми 1.12 існують послідовності* $\left\{x_0^{(k)}\right\}$ *та* $\left\{t_0^{(k)}\right\}$ *такі, що*

$$\lim_{k\to\infty}x_0^{(k)}=x_0,\qquad \lim_{k\to\infty}t_0^{(k)}=t_0,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t\in[a,b]}\left\|x\left(t,x_0^{(k)},t_0^{(k)}\right)-x(t,x_0,t_0)\right\|=0.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із параметром

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,p),\qquad x(t_0)=x_0(p),\tag{1.50}$$

де $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$, $p=(p_1,p_2,\dots,p_m)^T$ – параметр; $p\in\mathcal{M}$, $f\in C(\mathcal{D}\times\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^m$ – область визначення параметра p, $x_0(\cdot)\in C(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$. Позначимо $x(t,p)$ – розв'язок задачі Коші (1.50) для фіксованого $p\in\mathcal{M}$.

Теорема 1.13. *Нехай при* $p=p_0\in\mathcal{M}$ *розв'язок* $x(t,p_0)$ *задачі Коші* (1.50) *існує на відрізку* $[a,b]$, *функція* $f\in C(\mathcal{D}\times\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$ *і в*

$$\mathcal{V}=\{(t,x)\in\mathcal{D}\colon\ t\in[a,b],\qquad \|x-x(t,p_0)\|\le r\}$$

для $p\in\mathcal{M}$ *виконується умова Ліпшиця*

$$\|f(t,x,p)-f(t,y,p)\|\le\ell\|x-y\|,$$

де $(t,x)\in\mathcal{V}$, $(t,y)\in\mathcal{V}$, $t\in[a,b]$, $p\in\mathcal{M}$, *причому функція* $x_0(\cdot)\in C(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$. *Тоді знайдеться таке* $h>0$, *що функція*

$x(t,p)$ *неперервна за сукупністю змінних при* $t \in [a,b]$, $p \in \mathcal{K}_h(p_0)$.

Доведення. У разі фіксованого $p = p_0$ задача (1.50) задовольняє умови теореми про неперервну залежність розв'язку від правої частини системи (теорема 1.11). Тому для довільного $\varepsilon \in (0,r)$ існує $\delta > 0$ таке, що у випадку

$$\|f(t,x,p) - f(t,x,p_0)\| \le \delta, \ (t,x) \in \mathcal{V}, \tag{1.51}$$

$$\|x_0(p) - x_0(p_0)\| \le \delta \tag{1.52}$$

розв'язок $x(t,p)$ при $t \in [a,b]$ існує і

$$\|x(t,p) - x(t,p_0)\| < \varepsilon, \ t \in [a,b]. \tag{1.53}$$

Нехай $K_\delta(p_0) \subset \mathcal{M}$, $\delta > 0$. Тоді для $\delta > 0$ існує $h \in (0,\delta)$ таке, що при $p \in \mathcal{K}_h(p_0)$ виконуються (1.51), (1.52). Це випливає з умов теореми, а саме з того, що $f \in C(\mathcal{D} \times \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$, $x_0(\cdot) \in C(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$. Тоді справджується (1.53).

Якщо $(t,x) \in \mathcal{V}$, $p \in \mathcal{K}_h(p_0)$, то функція $f(t,x,p)$ неперервна, а тому обмежена. Отже, існує константа $R > 0$ така, що

$$\|f(t,x,p)\| \le R, \qquad (t,x) \in \mathcal{V}, \qquad p \in \mathcal{K}_h(p_0).$$

Тому

$$\left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\| \le R, \qquad t \in [a,b],$$

де $x(t) = x(t,p)$, $p \in \mathcal{K}_h(p_0)$ і для довільних $t, \tau \in [a,b]$ виконується

$$\|x(t,p) - x(\tau,p)\| \le \left\|\int_\tau^t \frac{dx(s)}{ds} ds\right\| \le \left|\int_\tau^t \left\|\frac{dx(s)}{ds}\right\| ds\right| \le$$
$$\le R|t-\tau|.$$

Звідси і з (1.53) випливає, що для $|t-\tau| \le \frac{\varepsilon}{R}$ справджується

$$\|x(t,p) - x(\tau,p)\| \le R|t-\tau| \le \varepsilon.$$

Отже, при $\|p - p_0\| \le h$, $|t-\tau| \le \frac{\varepsilon}{R}$ маємо

$$\|x(\tau,p) - x(t,p_0)\| \le \|x(\tau,p) - x(t,p)\| + \|x(t,p) - x(t,p_0)\| \le$$
$$\le 2\varepsilon.$$

Тому розв'язок $x(t,p)$ неперервний за сукупністю змінних у точці $p = p_0$, $t \in [a,b]$. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0,r)$. Для будь-якого

$h_1 \in (0, h)$ при довільному $p_1 \in K_{h_1}(p_0)$ існує розв'язок $x(t, p_1)$ на $[a, b]$, який задовольняє умову (1.53). Тоді

$$\mathcal{V}_1 = \{(t, x)\colon\ t \in [a, b], \qquad \|x - x(t, p_1)\| \le r - \varepsilon\}$$

міститься у $\mathcal{V}$. У $\mathcal{V}_1$ виконуються умови теореми 1.13, де в ролі p_0 виступає $p_1 \in \mathcal{M}$. Отже, розв'язок $x(t, p)$ неперервний за сукупністю змінних (t, p) в точці $p = p_1$, $\|p_1 - p_0\| < h_1$, $t \in [a, b]$.

■

1.6. Диференційованість розв'язку задачі Коші за початковими умовами і параметром

Розглянемо теорему про диференційованість розв'язку задачі Коші від початкової умови.

Теорема 1.14. *Нехай $x(t, x_0, t_0)$ є розв'язком задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.54}$$

що визначений на інтервалі $t \in [a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, функція $f(t, x)$ є неперервною за t і неперервно диференційованою за x в області $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$. Тоді розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ має неперервні частинні похідні за компонентами вектора x_0 і

$$\frac{dU(t, x_0)}{dt} = \frac{\partial f\big(t, x(t, x_0, t_0)\big)}{\partial x} U(t, x_0), \tag{1.55}$$

$$U(t_0, x_0) = E, \quad t \in [a, b], \tag{1.56}$$

де

$$U(t, x_0) = \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial x_0}.$$

Доведення. Побудуємо компакт

$$\mathcal{V} = \{(t, x) \in \mathcal{D}\colon\ t \in [a, b], \|x - x(t, x_0, t_0)\| \le r\} \subset \mathcal{D}.$$

На компакті $\mathcal{V}$ виконується умова теореми 1.12 про неперервну залежність розв'язку (1.54) від початкових умов. Крім того, знайдеться $\delta > 0$ таке, що для довільного $y_0 \in U_\delta(x_0)$ розв'язок $x(t, y_0, t_0)$ визначений на $[a, b]$ і його графік належить $\mathcal{V}$. Це випливає з доведення теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов. Зафіксуємо i-й орт e_i і візьмемо $y_0 = x_0 + se_i$, де $|s| < \delta$. Тоді $x_0 + se_i \in U_\delta(x_0)$.

Розглянемо (1.54) у вигляді інтегрального рівняння

$$x(t, x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau, x_0, t_0)\big)d\tau + x_0,$$

$$x(t, x_0 + se_i, t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau, x_0 + se_i, t_0)\big)d\tau + x_0 + se_i,$$

$$t \in [a, b].$$

Тоді, позначивши

$$y(t, s) = \frac{1}{s}\big(x(t, x_0 + se_i, t_0) - x(t, x_0, t_0)\big),$$

для $t \in [a, b]$ одержимо

$$y(t, s) = \frac{1}{s}\int_{t_0}^{t} \{f\big(\tau, x(\tau, x_0 + se_i, t_0)\big) - \\ - f\big(\tau, x(\tau, x_0, t_0)\big)\}d\tau + e_i. \tag{1.57}$$

За лемою Адамара

$$f\big(\tau, x(\tau, x_0 + se_i, t_0)\big) - f\big(\tau, x(\tau, x_0, t_0)\big) = \\ = G\big(\tau, x(\tau, x_0 + se_i, t_0), x(\tau, x_0, t_0)\big) \times \\ \times \big(x(\tau, x_0 + se_i, t_0) - x(\tau, x_0, t_0)\big), \tag{1.58}$$

де

$$G(\tau, y_0, z_0) = \int_0^1 \frac{\partial f(\tau,\ \sigma y_0 + (1-\sigma)z_0)}{\partial x} d\sigma$$

є неперервною матрицею за τ, y_0, z_0. З (1.57), (1.58) випливає

$$y(t, s) = \int_{t_0}^{t} A(\tau, s)y(\tau, s)d\tau + e_i,\ \ t \in [a, b], \tag{1.59}$$

де $A(\tau, s) = G\big(\tau, x(\tau, x_0 + se_i, t_0), x(\tau, x_0, t_0)\big)$ – неперервна матриця за τ, s, причому

$$\lim_{s \to 0} A(\tau, s) = \lim_{s \to 0} G\big(\tau, x(\tau, x_0 + se_i, t_0), x(\tau, x_0, t_0)\big) = \\ = \frac{\partial f\big(\tau, x(\tau, x_0, t_0)\big)}{\partial x}.$$

Інтегральне рівняння (1.59) еквівалентне такій задачі Коші:

$$y'(t,s) = A(t,s)y(t,s), \quad y(t_0,s) = e_i, \qquad t \in [a,b].$$

Система диференціальних рівнянь задовольняє умови теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра s, тому існує границя

$$\lim_{s\to 0} y(t,s) = \lim_{s\to 0} \frac{x(t,x_0+se_i,t_0) - x(t,x_0,t_0)}{s} = \frac{\partial x(t,x_0,t_0)}{\partial x_{0i}},$$
$$i = 1,2,\dots,n.$$

З інтегрального рівняння (1.59) маємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t,x_0,t_0)}{\partial x_{0i}} = A_0(t)\frac{\partial x(t,x_0,t_0)}{\partial x_{0i}}, \tag{1.60}$$

$$\frac{\partial x(t_0,x_0,t_0)}{\partial x_{0i}} = e_i, \quad t \in [a,b], \quad i = 1,2,\dots,n, \tag{1.61}$$

де $A_0(t) = \frac{\partial f\left(t,x(t,x_0,t_0)\right)}{\partial x}$. Виконується (1.55), (1.56). Розв'язок (1.60), (1.61) є неперервною функцією за (t,x_0,t_0).

■

Означення 1.5. *Систему рівнянь* (1.60), (1.61) *називають системою рівнянь у варіаціях відносно початкових умов. Матрицю*

$$U(t,x_0) = \frac{\partial x(t,x_0,t_0)}{\partial x_0}$$

називають матрицею чутливості (1.54) *відносно початкових умов. Матричне рівняння* (1.55), (1.56) *називають матричним рівнянням чутливості відносно початкових умов.*

Теорема 1.15. *Нехай* $x(t,x_0,t_0,p)$ *є розв'язком задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,p), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0,x_0) \in \mathcal{D}, \tag{1.62}$$

який визначений на інтервалі $t \in [a,b]$, $t_0 \in [a,b]$. *Функція* $f(t,x,p)$ *є неперервною за* t, *а також неперервно диференційованою за* x *та* p, $(t,x) \in \mathcal{D}$, $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *– область,* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ *– область. Тоді розв'язок* $x(t,x_0,t_0,p)$ *має неперервні частинні похідні за* p і x_0, $t \in [a,b]$.

Доведення. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y), \ \frac{dy}{dt} = 0, \tag{1.63}$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = p, \tag{1.64}$$

де $t \in [a,b]$, $y \in \mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$. Задача (1.63)–(1.64) еквівалентна задачі (1.62). Крім того, задача (1.63)–(1.64) задовольняє умови теореми 1.14, отже розв'язок $x(t,x_0,t_0,p)$ має неперервні частинні похідні за x_0 і p.

■

Теорема 1.16. *Нехай $x(t,t_0,p)$ є розв'язком задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,p), \qquad x(t_0) = x_0(p), \tag{1.65}$$

який визначений на інтервалі $[a,b]$. Тут функція $f(t,x,p)$ є неперервною за t і неперервно диференційованою за x та p, $x_0(\cdot) \in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R}^n)$, $(t,x) \in \mathcal{D}$, $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ – область. Тоді $x(t,t_0,p)$ має неперервні частинні похідні за компонентами вектора p, причому

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x(t,t_0,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial f(t,x(t,t_0,p),p)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x(t,t_0,p)}{\partial p_i} + \\ + \frac{\partial f(t,x(t,t_0,p),p)}{\partial p_i}, \tag{1.66}$$

$$\frac{\partial x(t_0,t_0,p)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_0(p)}{\partial p_i}, \qquad i = 1,2,\dots,m. \tag{1.67}$$

Доведення. Теорема 1.16 є прямим наслідком теорем 1.14 і 1.15 з урахуванням (1.63), (1.64).

■

Означення 1.6. *Систему* (1.66)–(1.67) *називають системою рівнянь у варіаціях за параметром* p. *Матрицю*

$$U(t,p) = \frac{\partial x(t,t_0,p)}{\partial p}$$

називають матрицею чутливості (1.65) *за параметром* p.

З (1.66)–(1.67) випливає, що виконується матричне рівняння чутливості за параметром p, яке має вигляд

$$\frac{dU(t,p)}{dt} = \frac{\partial f(t,x(t,t_0,p),p)}{\partial x}U(t,p) + \\ + \frac{\partial f(t,x(t,t_0,p),p)}{\partial p}, \qquad U(t_0,p) = \frac{\partial x_0(p)}{\partial p}. \tag{1.68}$$

Приклад 1.11. Знайдемо рівняння чутливості для диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x), \qquad x(0) = x_0, \tag{1.69}$$

де $a > 0$ – параметр, $t \geq 0$. З урахуванням (1.55)–(1.56) рівняння чутливості за x_0 має вигляд

$$\frac{dU(t,x_0)}{dt} = a\big(1 - 2x(t,x_0)\big)U(t,x_0), \qquad U(0,x_0) = 1,$$

де $x(t,x_0)$ – розв'язок задачі Коші (1.69). Рівняння чутливості за параметром a для $x(0) = \sin a$ має вигляд

$$\frac{dU(t,a)}{dt} = a\big(1 - 2x(t,a)\big)U(t,a) + x(t,a)\big(1 - x(t,a)\big),$$

$$U(0,a) = \cos a,$$

де $x(t,a)$ – розв'язок (1.69), $x(0) = \sin a$ для фіксованого значення a. Зауважимо: щоб знайти розв'язок рівняння чутливості при заданому значенні a, слід спочатку розв'язати (1.69), $x(0) = \sin a$, знайдений розв'язок $x(t,a)$ підставити в рівняння чутливості і розв'язати рівняння чутливості.

1.7. Інтегральна лійка. Теорема Ліувілля

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.70}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану, $t \in \mathbb{R}$, $(x,t) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область, $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ – функція, яка в області $\mathcal{D}$ задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші системи (1.70). Зокрема, можемо вважати, що відображення f задовольняє умову неперервності за змінною t і локальної ліпшицевості за x. Позначимо як $x(t,x_0,t_0)$ розв'язок системи (1.70) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$.

Теорема 1.17. *Припустимо, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ – компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, усі розв'язки $x(t,x_0,t_0)$ системи* (1.70) *із початковими умовами*

$x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$ *при* $t \in [a, b]$ *існують і їхні графіки належать області* $\mathcal{D}$. *Тоді сукупність* Ψ *таких розв'язків є компактом у просторі* $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. *Крім того, множина*

$$\mathcal{H} = \{(x, t) \in \mathcal{D}: x = x(t, x_0, t_0), t \in [a, b], (x_0, t_0) \in \mathcal{A}\},$$

яка складається з точок, що лежать на графіках розв'язків системи (1.70) *із початковими умовами* $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$ *при* $t \in [a, b]$ *є компактом в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доведення. Нагадаємо, що сім'ю Φ функцій $\phi: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, визначених на відрізку $[a, b]$, називають рівномірно обмеженою, якщо існує константа $K > 0$ така, що $\| \phi(t) \| \leq K$, $t \in [a, b]$.

Сім'ю функцій Φ називають *одностайно неперервною*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$\| \phi(t) - \phi(s) \| < \varepsilon$$

для всіх $t, s \in [a, b]$, $|t - s| < \delta$ і для всіх $\phi \in \Phi$. За теоремою Арцела, щоб сім'я неперервних функцій Φ була передкомпактною в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, необхідно і достатньо, щоб Φ була рівномірно обмеженою і одностайно неперервною.

Оскільки область $\mathcal{D}$ є обмеженою, то існує $m > 0$ таке, що $\| f(x, t) \| \leq m$, $(x, t) \in D$. Звідси випливає, що всі розв'язки $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ системи (1.70), які задовольняють умови $x(t_0) = x_0$, $(x_0, t_0) \in \mathcal{A}$, $t \in [a, b]$, є такими, що

$$\left\| \frac{dx(t)}{dt} \right\| \leq m, \quad t \in [a, b].$$

Зазначимо, що всі такі функції $x(\cdot)$ складають множину Ψ. Тоді

$$\| x(t) - x(s) \| \leq \left\| \int_s^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \right\| \leq \left| \int_s^t \left\| \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau \right| \leq m|t - s|,$$

де $t, s \in [a, b]$, $x \in \Psi$. З останньої нерівності випливає, що сукупність Ψ є рівномірно обмеженою і одностайно неперервною в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

За теоремою Арцела це означає, що Ψ є передкомпактною в $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Крім того, будь-яка збіжна послідовність розв'язків системи (1.70) збігається до розв'язку цієї системи. Враховуючи компактність множини початкових умов $\mathcal{A}$, звідси одержуємо, що якщо послідовність $x^{(k)}(\cdot) \in \Psi$ збігається в нормі простору $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ до деякої функції $x(\cdot)$, то $x(\cdot) \in \Psi$. Тобто множина Ψ є замкненою, а тому компактною в $C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Обґрунтуємо компактність множини $\mathcal{H}$. Виберемо послідовність точок

$$z^{(k)} = \left(y^{(k)}, s^{(k)}\right) \in \mathcal{H}, \qquad k = 1,2,\dots .$$

У силу компактності $[a, b]$ виділимо з послідовності $s^{(k)} \in [a,b]$ збіжну підпослідовність. Виберемо в послідовності $\{z^{(k)}\}$ ті члени, які відповідають членам послідовності $\{s^{(k)}\}$, що входять у збіжну підпослідовність і перепозначимо одержану підпослідовність знову як $\{z^{(k)}\}$. Тоді послідовність $\{z^{(k)}\}$ є такою, що $\lim_{k\to\infty} s^{(k)} = s^{(0)}$, $s^{(0)} \in [a,b]$. У силу побудови множини $\mathcal{H}$, можна вибрати функції $x^{(k)}(\cdot) \in \Psi$ такі, що

$$x^{(k)}\left(s^{(k)}\right) = y^{(k)}, \qquad \left(y^{(k)}, s^{(k)}\right) = z^{(k)}, \qquad k = 1,2,\dots .$$

Ми довели, що множина Ψ є компактом у $C([a,b],\mathbb{R}^n)$. Тому з послідовності $\{x^{(k)}(\cdot)\}$ можна виокремити збіжну до деякого елемента $x^{(0)}(\cdot) \in \Psi$ підпослідовність. Перепозначимо цю підпослідовність, а також відповідні їй члени послідовності $\{z^{(k)}\}$ знову як $\{x^{(k)}(\cdot)\}$, $\{z^{(k)}\}$ відповідно. Таким чином,

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[a,b]} \left\| x^{(k)}(t) - x^{(0)}(t) \right\| = 0.$$

Позначимо $y^{(0)} = x^{(0)}(s^{(0)})$. Тоді з

$$\left\| y^{(k)} - y^{(0)} \right\| = \left\| x^{(k)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(0)}) \right\| \le$$
$$\le \left\| x^{(k)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(k)}) \right\| + \left\| x^{(0)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(0)}) \right\| \le$$
$$\le \max_{t\in[a,b]} \left\| x^{(k)}(t) - x^{(0)}(t) \right\| + \left\| x^{(0)}(s^{(k)}) - x^{(0)}(s^{(0)}) \right\|$$

одержуємо $\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = y^{(0)}$. Звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} z^{(k)} = z^{(0)}, \qquad z^{(0)} = (y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{H}.$$

Отже, з послідовності $\{z^{(k)}\}$ ми виділили збіжну до точки $z^{(0)} \in \mathcal{H}$ підпослідовність. Це означає, що множина $\mathcal{H}$ є компактною в $\mathbb{R}^{n+1}$.

■

Означення 1.7. *Множину $\mathcal{H}$ у формулюванні теореми 1.17 називають відрізком інтегральної лійки. Перетин множини $\mathcal{H}$ гіперплощиною $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}: t = \tau\}$ називають перетином інтегральної лійки в момент* $\tau \in [a,b]$:

$$\mathcal{H}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: (x,\tau) \in \mathcal{H}\}.$$

Теорема 1.18. *Припустимо, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ – компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді перетин інтегральної лійки $\mathcal{H}(\tau)$ є компактом в $\mathbb{R}^n$. Якщо множина $\mathcal{A}$ є однозв'язною, то сукупність $\mathcal{H}(\tau)$ є однозв'язною.*

Доведення. Компактність $\mathcal{H}(\tau)$ є наслідком теореми 1.17 і замкнености Г. Покажемо однозв'язність $\mathcal{H}(\tau)$ за умови, що $\mathcal{A}$ є однозв'язною. Виберемо довільні точки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ з множини $\mathcal{H}(\tau)$. Тоді знайдуться точки $z^{(1)} = (y^{(1)}, s^{(1)})$, $z^{(2)} = (y^{(2)}, s^{(2)})$ з множини $\mathcal{A}$ такі, що $x^{(1)} = x(\tau, y^{(1)}, s^{(1)})$, $x^{(2)} = x(\tau, y^{(2)}, s^{(2)})$. Оскільки множина $\mathcal{A}$ – однозв'язна, то існує неперервна функція $\phi(p)$, $p \in [c,d]$ така, що $\phi(p) \in \mathcal{A}$, $p \in [c,d]$, $\phi(c) = z^{(1)}$, $\phi(d) = z^{(2)}$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків системи (1.70) від початкових умов функція $\psi(p) = x(\tau, \phi(p), t_0)$ є неперервною, $p \in [c,d]$, причому $\psi(p) \in \mathcal{H}(\tau)$, $p \in [c,d]$, $\psi(c) = x^{(1)}$, $\psi(d) = x^{(2)}$. Отже, $\mathcal{H}(\tau)$ є однозв'язною.

■

Наслідок 1.16. *Нехай множина $\mathcal{A}$ має вигляд $\mathcal{A} = \{(x,t_0): x \in \mathcal{A}_0\}$, де $\mathcal{A}_0$ є компактом в $\mathbb{R}^n$, $t_0 \in [a,b]$. Тоді $\mathcal{H}(\tau)$ є компактом.*

Теорема 1.19. *Припустимо, що $\mathcal{A}_0$ є компактом в $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{H}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n: x = x(\tau, x_0, t_0), x_0 \in \mathcal{A}_0\} = x(\tau, \mathcal{A}_0, t_0)$$

є перетином інтегральної лійки в момент $\tau \in [a,b]$, тоді

- *якщо $x_0 \in \partial\mathcal{A}_0$, то $x(\tau, x_0, t_0) \in \partial\mathcal{H}(\tau)$;*
- *якщо $x_0 \in int\, \mathcal{A}_0$, то $x(\tau, x_0, t_0) \in int\, \mathcal{H}(\tau)$.*

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial\mathcal{A}_0$, то знайдеться послідовність $x_0^k \notin \mathcal{A}_0$, $k = 1,2,...$, така, що $\lim_{k\to\infty} x_0^k = x_0$.
Тоді $x(\tau, x_0^k, t_0) \notin \mathcal{H}(\tau)$, $k = 1,2,...$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків системи (1.70) від початкових умов

$$\lim_{k\to\infty} x(\tau, x_0^k, t_0) = x(\tau, x_0, t_0).$$

Оскільки $x(\tau, x_0, t_0) \in \mathcal{H}(\tau)$, то це означає, що

$$x(\tau, x_0, t_0) \in \partial\mathcal{H}(\tau).$$

Нехай $x_0 \in int\,\mathcal{H}_0$. Припустимо, від супротивного, що $x(\tau, x_0, t_0) \in \partial\mathcal{H}(\tau)$. Тоді існує послідовність $y^k \notin \mathcal{H}(\tau)$, $k = 1,2, \ldots$, така, що

$$\lim_{k\to\infty} y^k = y = x(\tau, x_0, t_0).$$

Тоді, враховуючи, що виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, послідовність

$$x_0^k = x\big(t_0, y^k, \tau\big) \notin \mathcal{A}_0, \qquad k = 1,2, \ldots,$$

зазначимо, що

$$\lim_{k\to\infty} x_0^k = \lim_{k\to\infty} x(t_0, y^k, \tau) = x(t_0, y, \tau) = x_0.$$

Ми одержали протиріччя з припущенням $x_0 \in int\,\mathcal{A}_0$.

■

Припустимо, що права частина системи (1.70) є неперервно диференційованою за x функцією в області $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathbb{R}^n$ є компактною множиною,

$$\mathcal{H}(t) = \cup_{x_0 \in \mathcal{A}_0} x(t, x_0, t_0) = x(t, \mathcal{A}_0, t_0)$$

є перетином відрізка інтегральної лійки в момент $t \in [a, b]$, $\mathcal{H}(t_0) = \mathcal{A}_0$. Позначимо як

$$v(t) = \mu(\mathcal{H}(t))$$

об'єм перетину інтегральної лійки, де μ – міра Лебега, $t \in [a, b]$, $v(t_0) = \mu(\mathcal{A}_0)$. Тоді за теоремою про заміну змінних

$$v(t) = \int_{\mathcal{H}(t)} dx = \int_{\mathcal{A}_0} \det \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial x_0} dx_0.$$

Звідси

$$v(t) = \int_{\mathcal{A}_0} \det \frac{\partial x(t,x_0,t_0)}{\partial x_0} dx_0 = \int_{\mathcal{A}_0} \det U(t, x_0)\, dx_0, \qquad (1.71)$$

де $U(t) = U(t, x_0) = \frac{\partial x(t,x_0,t_0)}{\partial x_0}$ – матриця чутливості системи (1.70) за початковими умовами. Рівняння чутливості має вигляд

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(t_0) = E. \qquad (1.72)$$

Тут

$$A(t) = A(t, x_0) = \frac{\partial f(t, x(t, x_0, t_0))}{\partial x}. \qquad (1.73)$$

Враховуючи (1.72), (1.73), за формулою Остроградського – Ліувілля – Якобі

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds},$$

де $W(t) = \det U(t)$, $W(t_0) = \det U(t_0) = 1$.

Отже, $\det U(t, x_0) = e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$.

Але з (1.73) маємо

$$\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, x(t, x_0, t_0))}{\partial x_i} = \operatorname{div}_x f(t, x(t, x_0, t_0)).$$

Тому

$$\det U(t, x_0) = e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}_x f(s, x(s, x_0))ds}.$$

З (1.71) випливає

$$v(t) = \int_{A_0} e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}_x f(s, x(s, x_0, t_0))ds} dx_0. \qquad (1.74)$$

Диференціюємо останню рівність і одержуємо

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int_{A_0} e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}_x f(s, x(s, x_0, t_0))ds} \operatorname{div}_x f(t, x(t, x_0, t_0))dx_0. \qquad (1.75)$$

Виконується теорема.

Теорема 1.20 (Ліувілля). *Якщо*

$$\operatorname{div}_x f(t, x) = 0,$$

то міра перетину відрізка інтегральної лійки є сталою

$$v(t) = \mu(\mathcal{H}(t)) = \mu(\mathcal{A}_0), \qquad t \in [a, b].$$

Доведення. Якщо виконуються умови теореми, то з (1.74) доходимо висновку, що

$$v(t) = \int_{\mathcal{A}_0} e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}_x f(s, x(s, x_0, t_0))ds} dx_0 = \int_{\mathcal{A}_0} dx_0 = \mu(\mathcal{A}_0),$$
$$t \in [a, b].$$

■

Теорема 1.21. *Якщо*

$$\operatorname{div}_x f(t, x) \le 0,$$

то міра перетину відрізка інтегральної лійки

$$v(t) = \mu(\mathcal{H}(t))$$

не зростає, $t \in [a, b]$*. Якщо*

$$\operatorname{div}_x f(t, x) < 0,$$

то міра $v(t)$ *– спадає,* $t \in [a, b]$.

Доведення. За умови

$$\operatorname{div}_x f(t, x) \leq 0$$

з (1.75) одержимо

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq 0, \qquad t \in [a, b],$$

що означає, $v(t)$ не зростає, $t \in [a, b]$. Якщо

$$\operatorname{div}_x f(t, x) < 0,$$

то з (1.75) маємо

$$\frac{dv(t)}{dt} < 0, \qquad t \in [a, b],$$

і $v(t)$ спадає, $t \in [a, b]$.

■

Приклад 1.12. Розглянемо гамільтонову систему

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \end{cases}$$

де $p, q \in \mathbb{R}^n$, $H(p, q)$ – функція Гамільтона. Нехай $F(p, q)$ – права частина системи Гамільтона. Тоді

$$\operatorname{div} F(p, q) = -\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Отже, для гамільтонової системи виконується теорема Ліувілля.

Розглянемо властивості перетину інтегральної лійки лінійної системи диференціальних рівнянь. Розглянемо систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + g(t), \tag{1.76}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $C(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $g(t)$ – n-вимірна неперервна функція, $t \in [a, b]$.

Позначимо як $X(t,s)$ фундаментальну матрицю системи $\frac{dx}{dt} = C(t)x$, нормовану за моментом s, де $t,s \in [a,b]$. За формулою Коші

$$x(t,x_0,t_0) = X(t,t_0)x_0 + p(t), \qquad p(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,s)g(s)ds.$$

З формули Коші, наслідку 1.16 теореми 1.18 і означення 1.7 перетину інтегральної лійки випливає таке твердження.

Теорема 1.22. *Нехай $\mathcal{A}_0$ є опуклим компактом в $\mathbb{R}^n$. Тоді перетин інтегральної лійки лінійної системи* (1.76) *має вигляд*

$$\mathcal{H}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(\tau,x_0,t_0), x_0 \in \mathcal{A}_0\} = X(t,t_0)\mathcal{A}_0 + p(t)$$

і є опуклим компактом, $\tau \in [a,b]$.

З формули (1.74) випливає, що міра перетину інтегральної лійки лінійної системи (1.76)

$$v(t) = e^{\int_{t_0}^{t} tr\, C(s)ds} \mu(\mathcal{A}_0).$$

Теорема 1.23. *Нехай*

$$\mathcal{A}_0 = E(Q_0,x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Q_0^{-1}(x-x_0), x-x_0\rangle \le 1\}$$

є еліпсоїдом, точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – центр еліпсоїда, Q_0 – симетрична додатно визначена $n \times n$-матриця. Тоді перетин інтегральної лійки є еліпсоїдом

$$\mathcal{H}(\tau) = E(Q(\tau), z(\tau)),$$

де $z(t)$ – розв'язок указаної системи (1.76) *з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $Q(t)$ – симетрична додатно визначена $n \times n$-матриця, яка є розв'язком матричного диференціального рівняння Ляпунова*

$$\frac{dQ(t)}{dt} = C(t)Q(t) + Q(t)C^T(t), \quad Q(t_0) = Q_0, \qquad (1.77)$$

де $\tau \in [a,b]$.

Доведення. Враховуючи, що $E(Q_0,x_0) = E(Q_0,0) + x_0$, як наслідок теореми 1.22 одержуємо

$$\mathcal{H}(\tau) = X(\tau,t_0)E(Q_0,x_0) + p(\tau) =$$
$$= X(\tau,t_0)E(Q_0,0) + X(\tau,t_0)x_0 + p(\tau).$$

За формулою Коші $X(\tau, t_0)x_0 + p(\tau) = z(\tau)$. З урахуванням означень добутку матриці на множину й еліпсоїда, знаходимо

$$X(\tau, t_0)E(Q_0, 0) = E(Q(\tau), 0),$$

де $Q(\tau) = X(\tau, t_0)Q_0X^T(\tau, t_0)$. Оскільки фундаментальна матриця є невиродженою, а матриця Q_0 є додатно визначеною і симетричною, то $Q(\tau)$ є також додатно визначеною і симетричною. Це випливає з означення додатно визначеної і симетричної матриці. За означенням фундаментальної матриці

$$\frac{dX(t, t_0)}{dt} = C(t)X(t, t_0), \quad X(t_0, t_0) = E.$$

Звідси маємо

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dX(t, t_0)}{dt} Q_0X^T(t, t_0) + X(t, t_0)Q_0 \frac{dX^T(t, t_0)}{dt} =$$
$$= C(t)X(t, t_0)Q_0X^T(t, t_0) + X(t, t_0)Q_0X^T(t, t_0)C^T(t) =$$
$$= C(t)Q(t) + Q(t)C^T(t).$$

Тут $Q(t_0) = Q_0$. Отже, матриця $Q(t)$ задовольняє рівняння (1.77). ■

Приклад 1.13. Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad t \in [0, b], \qquad b > 0,$$

де $x(0) = x_0 \in [-1,1]$, $a \in \mathbb{R}$. Множина $A_0 = [-1,1]$. Знайдемо перетин відрізка інтегральної лійки

$$H(t) = [-e^{at}, e^{at}].$$

Довжина відрізка $H(t)$ така: $v(t) = 2e^{at}$. Переконаємося, що аналогічний результат дає формула (1.74). Позначимо $f(x) = ax$. Тоді $\operatorname{div} f(x) = a$ і з (1.74) одержуємо

$$v(t) = \int_{-1}^{1} e^{at} dx_0 = e^{at} \int_{-1}^{1} dx_0 = 2e^{at}.$$

1.8. Властивості розв'язків автономних систем

Автономною системою диференціальних рівнянь називають систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.78}$$

де $x \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – область фазового простору, $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Права частина автономної системи не залежить від незалежної змінної t. Припустимо, що функція $f(x)$ в області $\mathcal{D}$ задовольняє локальну умову Ліпшиця. Основною властивістю розв'язків автономної системи (1.78) є таке твердження.

Теорема 1.24. *Нехай $x(t)$ є розв'язком системи* (1.78)*, який визначений на відрізку $t \in [a, b]$. Тоді $y(t) = x(t+s)$ є розв'язком системи* (1.78)*, який існує на відрізку $t \in [a-s, b-s]$, де $s \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Підстановка функції $y(t)$ в систему (1.78) дає

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t+s)}{dt} = \frac{dx(t+s)}{d(t+s)} = f\big(x(t+s)\big) = f\big(y(t)\big),$$
$$t \in [a-s, b-s].$$

Це означає, що функція $y(t)$ є розв'язком (1.78), $t \in [a-s, b-s]$.

■

Наслідком із теореми 1.24 є така теорема.

Теорема 1.25. *Нехай $x(t, x_0, t_0)$ є розв'язком системи* (1.78)*, який відповідає умові Коші $x(t_0) = x_0$. Тоді*

$$x(t+s, x_0, t_0+s) = x(t, x_0, t_0), \tag{1.79}$$

де $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}^n$ – максимальний інтервал існування розв'язку $x(t, x_0, t_0)$, $s \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{D}$.

Доведення. Якщо $t = t_0$, то

$$x(t+s, x_0, t_0+s) = x(t, x_0, t_0) = x_0.$$

Функція $x(t, x_0, t_0)$ є повним розв'язком (1.78), $t \in I$. За теоремою 1.24 $x(t+s, x_0, t_0+s)$ є розв'язком системи (1.78). Оскільки в області $\mathcal{D}$ права частина (1.78) задовольняє локальну умову Ліпшиця, то повний розв'язок задачі Коші єдиний. Звідси випливає справедливість (1.79).

■

Покладемо в (1.79) $s = -t_0$. Тоді

$$x(t, x_0, t_0) = x(t - t_0, x_0, 0), \qquad t \in I.$$

Якщо позначити $x(t, x_0) = x(t, x_0, 0)$, то

$$x(t, x_0, t_0) = x(t - t_0, x_0). \tag{1.80}$$

Сукупність точок фазового простору

$$\Gamma = \bigcup_{t \in I} x(t, x_0)$$

називається *траєкторією* системи (1.78), яка відповідає розв'язку $x(t, x_0)$.

Теорема 1.26. *Якщо дві траєкторії системи* (1.78) *мають спільну точку, то вони збігаються.*

Доведення. Справді, нехай $x_0 \in \mathcal{D}$ є спільною точкою двох траєкторій. Цим траєкторіям відповідають два розв'язки системи (1.78):

$$x(t, x_0, t_0) = x(t - t_0, x_0),$$

$$x(t, x_0, t_1) = x(t - t_1, x_0), \qquad t \in I.$$

Розв'язки $x(t - t_0, x_0)$ та $x(t - t_1, x_0)$ визначають одну й ту саму траєкторію

$$\Gamma = \{x \in \mathcal{D} : x = x(t, x_0), \qquad t \in I\}.$$

Звідси випливає, що дві траєкторії автономної системи (1.78), які мають спільну точку, збігаються.

■

Отже, траєкторії автономної системи у фазовому просторі мають властивість неперетину, як і інтегральні криві для неавтономних систем у розширеному фазовому просторі за умови, що праві частини таких систем задовольняють умову єдиності розв'язку задачі Коші. Саме тому, досліджуючи автономні системи, доцільно розглядати саме траєкторії, тому що розмірність фазового простору на одиницю менша за розмірність розширеного фазового простору. Оскільки траєкторія автономної системи повністю визначається початковою точкою, то ми можемо вважати, що $t_0 = 0$ і записати розв'язок автономної системи у вигляді $x(t, x_0)$, де $x(t, x_0) = x(t, x_0, 0)$.

Теорема 1.27. *Нехай I є максимальним інтервалом існування розв'язку $x(t, x_0)$ системи* (1.78), $t \in I$, $\tau + t \in I$. *Тоді*

$$x\big(\tau, x(t, x_0)\big) = x(\tau + t, x_0).$$

Доведення. Позначимо $x_* = x(t, x_0)$. Тоді, враховуючи, що система (1.78) задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші,

$$x(\tau + t, x_0) = x(\tau + t, x_0, 0) = x(\tau + t, x_*, t).$$

З теореми 1.25 випливає

$$x(\tau + t, x_*, t) = x(\tau, x_*, 0) = x(\tau, x_*).$$

Тому $x\big(\tau, x(t, x_0)\big) = x(\tau + t, x_0)$.

■

Функцію $x(t, x_0)$, $x_0 \in \mathcal{D}$ можна розглядати як перетворення φ_t області $\mathcal{D}$ в саму себе з параметром $t \in I$, тобто

$$\varphi_t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \qquad \varphi_t(x_0) = x(t, x_0).$$

Якщо розв'язок $x(t, x_0)$ визначений на всій осі $t \in \mathbb{R}$, то за теоремою 1.27 маємо таке.

1. $\varphi_r \cdot \varphi_t = \varphi_{r+t}$, $r, t \in \mathbb{R}$.
2. φ_0 – тотожне перетворення.

Отже, параметричне відображення φ_t, $t \in \mathbb{R}$ утворює групу відносно операції композиції відображень.

Нехай $x_0 \in \mathcal{D}$ – положення рівноваги системи (1.78), тобто $x(t, x_0) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$. Щоб точка $x_0 \in \mathcal{D}$ була положенням рівноваги, необхідно і достатньо, щоб $f(x_0) = 0$.

Траєкторія системи (1.78) не може перетнути положення рівноваги, якщо ця траєкторія не збігається з положенням рівноваги. Справді, якщо $x(t)$ є розв'язком системи (1.78), $x_2(t) = x_0$ – положення рівноваги і якщо траєкторії розв'язків $x_1(t)$, $x_2(t)$ не збігаються, то за теоремою 1.26 вони не мають спільних точок. Отже, $x_1(t) \neq x_0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Розв'язок $x_1(t)$ може наближатися до точки x_0 лише, коли $t \to +\infty$ або коли $t \to -\infty$.

Теорема 1.28. *Якщо* $x(t)$ *є розв'язком системи* (1.78) *і відповідна йому траєкторія не є точкою рівноваги та* $x(t_1) = x(t_2)$, $t_2 > t_1$, *то розв'язок* $x(t)$ *є періодичним, у нього існує найменший період. Причому траєкторія такого розв'язку є замкненою кривою без самоперетинів.*

Доведення. За теоремою 1.24 функція

$$y(t) = x(t + t_2 - t_1)$$

є розв'язком системи (1.78), враховуючи, що $y(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$. Оскільки виконуються умови єдиності розв'язку задачі Коші для системи (1.78), то розв'язки $x(t)$ та $y(t)$ збігаються. Отже,

$$x(t) = x(t + T_0), \qquad T_0 = t_2 - t_1,$$

$T_0 > 0$ є періодом. Покажемо, що існує найменший період.

Оскільки розв'язок $x(t)$ не є положенням рівноваги, то знайдеться таке t_*, що

$$x(t_*) \neq x(t_1), \qquad \|x(t_*) - x(t_1)\| = r > 0.$$

Враховуючи, що розв'язок системи (1.78) є неперервною функцією, знайдеться $h > 0$, для якого

$$\|x(t) - x(t_1)\| < r$$

при $t \in (t_1 - h, t_1 + h)$. Це означає, що

$$x(t) \neq x(t_*), \qquad t \in (t_1 - h, t_1 + h).$$

Але якщо $\tilde{T}$ є періодом розв'язку $x(t)$, то для довільної точки $t_0 \in \mathbb{R}$ на проміжку $[t_0, t_0 + \tilde{T}]$ хоча б для одного значення t із цього проміжку має виконуватись рівність $x(t) = x(t_*)$. Це означає, що $\tilde{T} \geq 2h$. Оскільки $\tilde{T}$ – довільний період, то нижня грань періодів розв'язку $x(t)$ обмежена знизу.

Нехай T – нижня грань періодів розв'язку $x(t)$. Якщо T не є періодом, то існує послідовність $T_i > T$ періодів цього розв'язку:

$$\lim_{i\to\infty} T_i = T.$$

Тоді $x(t) = x(t + T_i)$, $i = 1,2, \ldots$, та, оскільки розв'язок $x(t)$ є неперервним при $i \to \infty$, маємо

$$x(t) = \lim_{i\to\infty} x(t + T_i) = x(t + T).$$

Отже, T – період, причому мінімальний. Траєкторія розв'язку $x(t)$ замкнена, оскільки $x(0) = x(T)$. Якщо вона має самоперетини, то існують $t_1, t_2 \in [0,\ T]$ такі, що $x(t_1) = x(t_2)$, $t_1 \neq t_2$.

Це означає, що $|t_1, -t_2|$ є періодом, причому меншим за мінімальний період T, а це неможливо.

■

Теорема 1.29. *Будь-яка траєкторія автономної системи* (1.78) *є:*

1) *точкою рівноваги, або*
2) *замкненою траєкторією без самоперетинів, якій відповідає періодичний розв'язок, або*
3) *траєкторією без самоперетинів, якій відповідає неперіодичний розв'язок.*

Доведення. Справді, якщо $x(t)$ є розв'язком системи (1.78) і $x(t) = C$, де $C \in \mathbb{R}^n$ – деякий вектор, $t \in \mathbb{R}$, то відповідна траєкторія є станом рівноваги. Якщо $x(t_1) \neq x(t_2)$ при t_1 і $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$, то траєкторія такого розв'язку є кривою без самоперетинів. Якщо ж розв'язок $x(t)$ не є сталим, та існують t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ такі, що $t_1 \neq t_2$, але $x(t_1) = x(t_2)$, то за теоремою 1.28 траєкторія такого розв'язку є замкненою кривою без самоперетинів.

■

1.9. Означення динамічної системи

Поняття динамічної системи виникло як узагальнення системи механічної природи. Однак динамічні системи можуть мати також фізичну, біологічну, фінансову й соціальну природу. Вони існують в обчислювальних процесах, процесах оброблення й перетворення інформації, які здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Нарешті, динамічною системою є процес розвитку людського суспільства в цілому.

Динамічна система вважається заданою, якщо введено координати системи, які дозволяють визначати її стан, і дано оператор, який описує еволюцію початкового стану в часі. Математичне представлення динамічних систем допускає велику різноманітність. Еволюція стану може описуватись за допомогою дискретних систем, систем диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, систем з імпульсним впливом, гібридних систем, марковських ланцюгів тощо. Відмітимо, що одній і тій самій динамічній системі, залежно від ступеня наближення, можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі. Наприклад, у процесі дослідження коливань маятника, залежно від міри врахування факторів, ми одержимо різні математичні моделі, які описують якісно відмінні динамічні процеси (коливання маятника з урахуванням і без урахування тертя).

Ще одним яскравим прикладом існування різних моделей є математичне моделювання однієї і тієї ж довільної коливальної системи з урахуванням і без урахування неідеальності збудження. За математичного моделювання виникають випадки, в яких під час дослідження реальної системи в межах певних припущень, створюється її наближена математична модель. Цю модель надалі використовують для опису процесу іншої природи. Різні математичні моделі, отримані у процесі моделювання маятникових систем, застосовують для дослідження оболонок, пластин, кілець, для опису коливань вільної поверхні рідини в баках, для моделювання роботи серцевого м'яза, для опису зміни чисельності біологічних популяцій тощо.

Означення 1.8. *Ми говоритимемо, що динамічна система визначена, якщо*

1) *вказано метричний простір $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, який називається фазовим простором. Фазовий простір може збігатися з усім n-вимірним евклідовим простором $\mathbb{R}^n$*;
2) *задано множину I, якій належить параметр t, що називається часом. Параметр t може бути неперервним – тоді $t \in I = \mathbb{R}$. Параметр t також може бути дискретним – тоді $t \in I = \mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел*;
3) *визначено закон (оператор) еволюції. Оператор еволюції є однозначним відображенням $\varphi: \mathcal{D} \times I \to \mathcal{D}$, що будь-якій точці $x \in \mathcal{D}$ і довільному значенню часової змінної $t \in I$ ставить у відповідність точку фазового простору $\varphi(t, x) \in \mathcal{D}$ та виконуються теоретико-групові властивості:*

   $\varphi(0, x) = x,\ x \in \mathcal{D}$;

   $\varphi\big(t_1, \varphi(t_2, x)\big) = \varphi(t_1 + t_2, x),\ x \in \mathcal{D}, t_1, t_2 \in I$;

   відображення $\varphi: \mathcal{D} \times I \to \mathcal{D}$ є неперервним.

Для кожного фіксованого $t \in I$ оператор φ задає взаємно однозначне неперервне відображення з $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$, тобто гомеоморфізм. Тому говорять, що динамічна система – це *однопараметрична група гомеоморфізмів* фазового простору $\mathcal{D}$.

У випадку, якщо відображення φ є лінійним відносно змінної стану, тобто

$$\varphi(t, x_1 + x_2) = \varphi(t, x_1) + \varphi(t, x_2),$$
$$\varphi(t, \lambda x) = \lambda\varphi(t, x),$$

де $\lambda \in \mathbb{R}, x_1, x_2, x \in \mathcal{D}$, то динамічну систему називають *лінійною*.

Якщо $I = \mathbb{Z}$, тобто часова змінна t є дискретною, то умови означення 1.8 визначають дискретну динамічну систему, яку називають *каскадом*.

Наведемо базову властивість каскаду. Для цього розглянемо гомеоморфізм $\varphi(1, x)$ і позначимо його через $\psi(x)$. Очевидно, що $\varphi(t, x) = \psi^{(t)}(x)$, де

$$\psi^{(t)}(x) = \psi\left(\psi^{(t-1)}(x)\right), \qquad t = 1,2, \dots , \qquad \psi^{(0)}\ (x) = x.$$

Отже, для означення каскаду досить вказати гомеоморфізм

$$\psi: \mathcal{D} \to \mathcal{D}.$$

Для дискретної динамічної системи послідовність

$$\{x_k, k \in \mathbb{Z}\},$$

де $x_{k+1} = \psi\ (x_k)$, називають *траєкторією* точки x_0.

Є три види траєкторій:

1) *точка* x_0. У цьому випадку x_0 є нерухомою точкою гомеоморфізму $\psi(x)$, тобто $\psi(x_0) = x_0$;
2) *цикл* $(x_0, \dots, x_{k-1})$, де $x_i = \psi^{(i)}\ (x_0)$, $i = 0,1, \dots, k-1$, $x_0 = \psi^{(k)}(x_0)$. Крім того, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $i, j = 0,1, \dots, k-1$. Число k називають *періодом циклу*, а кожну точку x_i – періодичною з періодом k. Зазначимо, що нерухома точка також є періодичною точкою довільного натурального періоду k, $k \in \mathbb{N}$;
3) *нескінченна в обидва боки траєкторія*, тобто послідовність $\{x_k: k \in \mathbb{Z}\}$, де $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Таку траєкторію називатимемо *незамкненою*.

Якщо $I = \mathbb{R}$, тобто часова змінна t є неперервною, то умови означення 1.8 визначають неперервну динамічну систему, яка називається *потоком*. Фіксуючи x та змінюючи t від $-\infty$ до $+\infty$, одержимо криву

$$\Gamma = \{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{D},$$

яка називається *фазовою траєкторією динамічної системи*.

Один із найрозповсюдженіших способів визначення неперервної динамічної системи полягає у тому, що у фазовому просторі $\mathcal{D}$ задається автономна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \qquad (1.81)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{D}$ – вектор фазових координат системи (1.81), $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ – n-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для системи (1.81). Наприклад, це можуть бути умови теореми Пікара.

Приклад 1.14. Математична модель "хижак–жертва" А. Лотка – В. Вольтерра. Нехай у замкненому ареалі є два види тварин. Перший вид – хижаки, які поїдають інший вид тварин, що називаються жертвами. Кількість хижаків у момент t описують змінною $M(t)$, а чисельність жертв – $N(t)$. Отримуємо математичну модель у формі автономної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dN}{dt} = (a - pM)N,$$

$$\frac{dM}{dt} = (-b + qN)M.$$

Тут a, b, p, q – додатні параметри математичної моделі.

Приклад 1.15. Нехай φ – кут, що задає положення точки на одиничному колі. Відображення подвоєння

$$(\varphi) = 2\varphi \pmod{2\pi}$$

задає динамічну систему з дискретним часом, фазовим простором якої є коло.

Приклад 1.16. Система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = v, \\ \dfrac{dv}{dt} & = -kx \end{cases}$$

задає динамічну систему з неперервним часом, що називається гармонійним осцилятором. Її фазовим простором є площина (x, v), де v – швидкість точки x. Гармонійний осцилятор моделює різноманітні коливні процеси, наприклад, поведінку ваги на пружині. Його фазовими кривими є еліпси із центром у нулі.

Системи (1.81) беруть свій початок у класичній механіці. Саме тому теорія динамічних систем використовує термінологію, прийняту при моделюванні динаміки механічних систем. Розв'язок $x(t, x_0)$ системи диференціальних рівнянь (1.81), який відповідає початковій умові $x(0) = x_0$, задає оператор еволюції, який кожній точці $x_0 \in \mathcal{D}$ і довільному $t \in \mathbb{R}$ ставить у відповідність точку $x(t, x_0) \in \mathcal{D}$, причому справджуються умови означення 1.8.

Оскільки виконуються умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші, то оператор еволюції є однозначним. Точка $x = x(t, x_0)$ є фазовою точкою, яка характеризує стан системи в момент t і називається також зображувальною точкою.

Рух зображувальної точки за зміни часової змінної утворює траєкторію системи (1.81). По суті, траєкторія системи є проекцією інтегральної кривої цієї системи на фазовий простір $\mathcal{D}$. Оскільки справедливі умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші, то кожному розв'язку системи (1.81) відповідає одна траєкторія і через кожну точку фазового простору проходить лише одна траєкторія. Тому перетин двох різних траєкторій неможливий.

У фазовому просторі права частина $f: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ системи рівнянь (1.81) породжує векторне поле швидкостей, яке ставить у відповідність кожній точці $x \in \mathcal{D}$ вектор

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T,$$

який виходить із неї. Вектор $f(x)$ у кожній точці x спрямований по дотичній до фазової траєкторії. Модуль цього вектора дорівнює швидкості руху зображувальної точки по траєкторії.

Прирівняємо праву частину системи (1.81) до нуля, відтак розглянемо алгебричну систему рівнянь

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \dots\ , x_n) = 0, i = 1,2, \dots, n. \qquad (1.82)$$

Нехай $x = a$ – деякий розв'язок системи (1.82). Очевидно, що $x(t) = a$ буде розв'язком системи диференціальних рівнянь (1.81). Такий розв'язок постійний при зміні часу t. Йому відповідає фазова траєкторія, яка складається з однієї точки, причому ця точка – нерухома у фазовому просторі. Таку точку називають *положенням рівноваги*, *станом рівноваги*, *нерухомою точкою*, або *точкою спокою* системи (1.81). Точки рівноваги відіграють важливу роль у дослідженні якісної поведінки динамічних систем.

Нехай

$$x = \varphi(t) \tag{1.83}$$

є деяким розв'язком системи (1.81), причому існує таке додатне число T, що для довільного $t \in \mathbb{R}$ виконуються рівності

$$\varphi(t + T) = \varphi(t),$$

однак при $\tau_1 - \tau_2 < T$ справедлива нерівність

$$\varphi(\tau_1) \neq \varphi(\tau_2).$$

У цьому випадку траєкторія, яка відповідає розв'язку (1.83), буде замкненою лінією у фазовому просторі. Таку траєкторію називають *циклом*. Сам розв'язок (1.83) називають *періодичним розв'язком*.

Цей розв'язок називають ізольованим періодичним розв'язком, а його траєкторію називають *граничним циклом*, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ фазового простору, яка перебуває від циклу на відстані, меншій ніж ε, розв'язок системи (1.81), який проходить через точку M, не є періодичним. Геометрично це означає, що у фазовому просторі поблизу замкненої траєкторії не проходять інші замкнені траєкторії.

За енергетичною ознакою динамічні системи є консервативні й дисипативні. Дисипативними називають динамічні системи, енергія яких зменшується із часом унаслідок тертя, розсіювання й інших факторів. З математичного погляду динамічну систему називають дисипативною, якщо існує обмежена множина у фазовому просторі, яка поглинає кожну точку фазового простору. Консервативні системи характеризуються незмінним у часі запасом енергії. У фізиці їх називають гамільтоновими.

Для консервативних систем з n ступенями вільності визначається гамільтоніан системи $H(p, q)$, де q – узагальнені координати, p – узагальнені імпульси системи. Гамільтоніан повністю характеризує динамічну природу системи і з фізичного погляду в більшості випадків характеризує повну енергію системи. Еволюцію в часі консервативних систем описують рівняннями Гамільтона

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p} \ . \tag{1.84}$$

Динамічні системи зі змінним у часі запасом енергії називають неконсервативними. Динамічні системи називають автономними, якщо вони не схильні до дії зовнішніх сил, змінних у часі. Рівняння автономних систем явної залежності від часу не містять. Більшість реальних коливальних систем у фізиці, радіофізиці, біології, хімії та інших галузях знань неконсервативні. Серед них виокремлюють особливий клас автоколивальних систем, які принципово неконсервативні і нелінійні. Автоколивальною називають динамічну систему, що перетворює енергію джерела на енергію незгасаючих коливань, причому основні характеристики коливань (амплітуда, частота, форма коливань тощо) визначаються параметрами системи і в певних межах не залежать від вибору початкового стану.

Приклад 1.17. Розглянемо механічну систему з одним степенем вільності, а саме, консервативну систему, яка описується диференціальним рівнянням Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x),$$

де $f(x)$ – диференційована на деякій області з $\mathbb{R}$ функція. Запишемо рівняння у вигляді системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = f(x)$$

і введемо позначення:

- $\Pi(x) = -\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ – потенціальна енергія;
- $T(y) = \frac{y^2}{2}$ – кінетична енергія;
- $E(x,y) = \Pi(x) + T(y)$ – повна механічна енергія.

Повна енергія $E(x,\ y) = C$ є першим інтегралом системи і тому кожна фазова крива цієї системи цілком розміщена на лінії рівня енергії, тобто на множині

$$\{(x,y) \colon \Pi(x) + T(y) = C\}$$

для певного значення C.

Щоб побудувати лінії рівня енергії, уявімо кульку, що перебуває у "потенціальній ямі" П. Зафіксуємо значення повної енергії E. Оскільки кінетична енергія невід'ємна, то потенціальна енергія не більша від повної енергії. Отже, лінія рівня енергії E проєктується на вісь $0x$, у результаті одержуємо множину

$$\{x \in I \colon \Pi(x) \leq E\}$$

(кулька не може піднятися вище рівня E в потенціальній ямі). Далі швидкість є тим більшою, чим менша потенціальна енергія:

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = |y| = \sqrt{2(E - \Pi(x))}$$

(скочуючись в яму, кулька набуває більшої швидкості, а піднімаючись – втрачає її).

У точках повороту, де $\Pi(x) = E$, швидкість дорівнює 0. З парності енергії відносно y випливає, що лінія рівня енергії симетрична відносно осі Ox (кулька проходить кожну точку у прямому і зворотному напрямку з однаковою швидкістю). Цих міркувань достатньо для того, щоб побудувати лінії рівня енергії систем із різними потенціалами $\Pi(x)$.

Розглянемо найпростіший випадок, власне, нескінченно глибоку потенціальну яму з одним притягувальним центром x_0. Це означає, що функція $f(x)$ монотонно спадає, $f(x_0) = 0$.

Якщо значення повної енергії E_1 менше ніж мінімум потенціальної енергії E_2, то множина рівня енергії $E(x, y) = E_1$ порожня, тобто рух кульки фізично неможливий. Множина рівня $E(x, y) = E_2$ складається з однієї точки $(x_0, 0)$, тобто кулька перебуває у спокої на дні ями.

Якщо значення E_3 повної енергії більше від критичного $E_3 = \Pi(x_0)$, то множина рівня $E(x, y) = E_3$ – гладка замкнена симетрична крива, що охоплює положення рівноваги $(x_0, 0)$ на фазовій площині. Тобто кулька рухається в ямі вперед і назад, піднімається до висоти E_3. У цей момент її швидкість перетворюється на нуль і вона скочується назад в яму, проходить точку x_0. У вказаний момент її швидкість максимальна. Далі кулька піднімається з іншого боку і т. д.

Досліджуючи складніші випадки, треба аналогічно попередньому послідовно збільшувати значення повної енергії E, віднімаючи значення E, що дорівнюють критичним значенням потенціальної енергії, де $\Pi'(x) = 0$, і розглядати криві, що відповідають околам критичних значень E.

Наприклад, у системі, близькій до системи малих коливань маятника

$$\frac{dx}{dt} = y + \varepsilon f_1(x; y), \qquad \frac{dy}{dt} = y + \varepsilon f_2(x; y), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

достатньою умовою існування граничного циклу є існування додатних розв'язків $a = a_0 > 0$ рівняння $F(a) = 0$, де

$$F(a) = -a \int_0^{2\pi} (f_1(a\cos\varphi \;\; - a\sin\varphi \;\;)\cos\varphi -$$

$$-f_2\big((a\cos\varphi - a\sin\varphi)\sin\varphi\big)d\varphi.$$

Цей цикл є асимптотично стійким, якщо $F'(a_0) < 0$, і нестійким у випадку $F'(a_0) > 0$.

На практиці часто використовують таку достатню умову існування граничного циклу для диференціального рівняння Ньютона, яку називають принципом кільця: *якщо на фазовій площині можна знайти таке кільце*

$$r_1^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r_2^2,$$

що всі траєкторії системи диференціальних рівнянь Ньютона, які починаються на границі цього кільця, входять всередину кільця або одночасно всі виходять із кільця, то всередині кільця є граничний цикл даної системи.

Запитання, тести для самоконтролю

1. Наведіть основні етапи доведення теореми Пеано.
2. Наведіть приклад функції, яка є неперервною, але для якої не виконується локальна умова Ліпшиця.
3. Наведіть приклад задачі Коші, для якої існує щонайменше два розв'язки.
4. У чому полягає зміст леми Гронуола – Белмана?
5. У який спосіб застосовується лема Гронуола – Белмана для аналізу властивостей розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь?

6. Сформулюйте лему про диференціальну нерівність. Яка ідея доведення цієї леми?
7. Наведіть означення продовження розв'язку.
8. У чому полягає ідея доведення теореми про продовження розв'язку системи диференціальних рівнянь до границі компакта?
9. Які наслідки з теореми про продовження розв'язку до границі компакта вам відомі?
10. Дайте означення повного розв'язку.
11. У який спосіб використовують лему Цорна для обґрунтування існування головного розв'язку задачі Коші?
12. Наведіть приклад задачі Коші, повний розв'язок якої є обмеженим і визначеним на обмеженій множині.
13. Наведіть приклад задачі Коші, повний розв'язок якої визначений на обмеженій множині і є необмеженим.
14. Наведіть умови на праву частину системи диференціальних рівнянь, які дозволяють продовжити розв'язок задачі Коші праворуч на нескінченний проміжок.
15. Сформулюйте теорему про єдиність розв'язку задачі Коші.
16. Наведіть формулювання теорем Пеано.
17. Порівняйте теорему Пікара і теорему Пеано. Чому умова Ліпшиця є критичною для забезпечення єдиності розв'язку задачі Коші?
18. Які підходи до обґрунтування теореми Пікара вам відомі?
19. Сформулюйте лему Адамара.
20. Покажіть, що лінійна система задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку на довільний інтервал.
21. У чому полягає метод послідовних наближень для розв'язування задачі Коші?
22. Сформулюйте принцип Банаха про нерухому точку.
23. Як застосовують теорему Банаха про нерухому точку для обґрунтування теореми Пікара?
24. Сформулюйте теореми про неперервну залежність розв'язку системи від правої частини, початкових умов, параметрів.
25. Порівняйте формулювання теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов з означенням стійкості розв'язку за Ляпуновим. Чи можна зробити вис-

новок, що якщо виконується умова теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов, то відповідний розв'язок є стійким за Ляпуновим? Наведіть приклади, які обґрунтовують відповідь.

26. Наведіть основні етапи обґрунтування теореми про неперервну диференційованість розв'язку задачі Коші від початкових умов.
27. Який прийом дозволяє звести обґрунтування теореми про неперервну диференційованість розв'язку задачі Коші за параметром до теореми про неперервну диференційованість розв'язку задачі Коші за початковими умовами.
28. Наведіть означення матриці чутливості за початковими умовами (за параметром).
29. Який зміст закладено у понятті матриці чутливості?
30. Яку ідею закладено в обґрунтуванні рівнянь чутливості?
31. У який спосіб застосовують принцип Арцела для обґрунтування компактності сукупності розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь?
32. Наведіть означення відрізка інтегральної лійки, перетину інтегральної лійки.
33. Наведіть властивості границі внутрішнього перетину інтегральної лійки.
34. У чому полягає теорема Ліувілля?
35. Як застосовують формулу Остроградського – Ліувілля – Якобі до знаходження міри перетину інтегральної лійки?
36. Сформулюйте властивості перетину інтегральної лійки лінійної системи диференціальних рівнянь.
37. Наведіть формулу для знаходження розв'язку задачі Коші матричного рівняння Ляпунова.
38. Наведіть основні властивості розв'язків автономних систем.
39. Чому у дослідженні автономних систем доцільно розглядати їхні траєкторії, а не інтегральні криві?
40. Які є види траєкторій автономних систем?
41. Який розв'язок автономної системи відповідає точці рівноваги?
42. Який розв'язок автономної системи відповідає замкненій траєкторії без самоперетинів?

43. Дайте означення динамічної системи.
44. Чим відрізняється каскад від потоку?
45. Що називається граничним циклом?
46. Що закладено в понятті дисипативної системи?
47. Чим автономні системи відрізняються від неавтономних?

Обов'язкові та додаткові задачі

1.1. Нехай функція $u(t) \geq 0$ – неперервна, $t \geq 0$ і
$$u(t) \leq 1 + \int_0^t u(\tau)d\tau, \qquad t \geq 0.$$
Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \geq 0$.

1.2. Нехай функція $u(t) \geq 0$ – неперервна, $t \geq 0$ і
$$u(t) \leq 1 + \int_0^t \tau^2 u(\tau)d\tau, \qquad t \geq 0.$$
Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \geq 0$.

1.3. Нехай $u(t) \geq 0$ – неперервно диференційована функція, $t \geq 0$ і
$$\dot{u}(t) \leq 2u(t) + 4, \qquad u(0) = 1, \qquad t \geq 0.$$
Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \geq 0$.

1.4. Нехай $u(t) \geq 0$ – неперервно диференційована функція, $t \geq 0$ і
$$\dot{u}(t) \leq u(t) + 2t, \qquad u(0) = 2, \qquad t \geq 0.$$
Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \geq 0$.

1.5. Нехай $u(t)$ – неперервно диференційована функція і
$$-2|u(t)| - 1 \leq \dot{u}(t) \leq 2|u(t)| + 1, \qquad u(0) = 1,$$
$t \in (-\infty, +\infty)$. Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.6. Нехай $u(t)$ – неперервно диференційована функція і
$$-3|u(t)| - 9 \leq \dot{u}(t) \leq 3|u(t)| + 9, \qquad u(0) = -2,$$
$t \in (-\infty, +\infty)$. Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

1.7. Нехай $u(t) \geq 0$ – неперервно диференційована функція, $t \geq 0$ і
$$\dot{u}(t) \leq a(t)u(t) + b(t)u^2(t), \qquad u(0) = u_0, \qquad t \geq 0.$$
Тут $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$ – неперервні функції, $t \geq 0$. Знайти оцінку функції $u(t)$, $t \geq 0$.

1.8. Знайти інтервал існування розв'язку задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = x^3 + t^2, \qquad x(0) = 2$$

на множині $\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \colon |t| \le 2,\ |x - 2| \le 1\}$.

1.9. Дослідити існування розв'язку задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}}, \qquad x(0) = 0.$$

Чи буде такий розв'язок єдиним?

У задачах 1.10–1.13 знайти інтервал існування розв'язку задачі Коші:

1.10. $\dot{x} = t + x^3,\ x(0) = 0.$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = x^2, \end{cases} x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

1.12. $\dot{x} = t + e^x,\ x(1) = 0.$

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = x + \sin y, \\ \dot{y} = y + \cos x, \end{cases} x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

1.14. Дослідити, чи будуть виконуватись умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння Ріккаті

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t),$$

де $x \in \mathbb{R}$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – неперервні функції, $t \in \mathbb{R}$.

1.15. Показати, що будь-який розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos x + x,$$

де $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ можна продовжити на нескінченний проміжок як ліворуч, так і праворуч.

Для задач 1.16–1.20 побудувати послідовні наближення для розв'язків:

1.16. $\dot{x} = x,\ x(0) = 1.$

1.17. $\dot{x} = t + e^x,\ x(1) = 0.$

1.18. $\dot{x} = x + e^{x-1},\ x(0) = 1.$

1.19. $\begin{cases} \dot{x} = 2t - y, \\ \dot{y} = x, \end{cases} \quad x(1) = 1,\ y(1) = 0.$

1.20. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

1.21. Знайти розв'язок задачі Коші й обґрунтувати неперервну залежність цього розв'язку від початкової умови (x_0, y_0)

$$\ddot{x} = 0, \qquad x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = y_0.$$

1.22. Знайти розв'язок задачі Коші й обґрунтувати неперервну залежність цього розв'язку від початкової умови (x_0, y_0)

$$\ddot{x} = x, \qquad x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = y_0.$$

1.23. Знайти розв'язок задачі Коші й обґрунтувати неперервну залежність цього розв'язку від початкової умови (t_0, x_0)

$$\dot{x} = tx, \qquad x(t_0) = x_0.$$

1.24. Знайти розв'язок задачі Коші й обґрунтувати неперервну залежність цього розв'язку від параметра p

$$\ddot{x} = px, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1.$$

1.25. Знайти розв'язок задачі Коші й обґрунтувати неперервну залежність цього розв'язку від параметра p

$$\dot{x} = x + pt, \qquad x(0) = p.$$

У задачах 1.26–1.31 знайти похідну $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ *за параметром* α, *якщо* $\alpha = 0$:

1.26. $\dot{x} = x + \alpha(t + x^2),\ \ x(0) = 1.$

1.27. $\dot{x} = 2t + \alpha x^2,\ \ x(0) = \alpha - 1.$

1.28. $\dot{x} = \frac{x}{t} + \alpha t e^{-x},\ \ \ x(1) = 1.$

1.29. $\dot{x} = x + x^2 + tx^3,\ \ x(2) = x_0.$

1.30. $\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = x^2, \end{cases} \ \ x(0) = 3,\ \ y(0) = y_0.$

1.31. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x + \alpha y^2, \end{cases} x(0) = 1 + \alpha, y(0) = -2.$

1.32. Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad t \in [0,1],$$

де $x(0) = x_0 \in [-1,1]$. Записати відрізок інтегральної лійки. Знайти перетин відрізка інтегральної лійки в момент $t \in [0,1]$ і його міру.

1.33. Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -x + t, \qquad t \in [0,1],$$

де $x(0) = x_0 \in [-1,1]$. Записати відрізок інтегральної лійки. Знайти перетин відрізка інтегральної лійки в момент $t \in [0,1]$ і його міру.

1.34. Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad t \in [0,b], \qquad b > 0,$$

де $x(0) = x_0 \in [a_0, b_0]$, a_0, b_0, $a \in \mathbb{R}$, $a_0 < b_0$. Записати відрізок інтегральної лійки. Знайти перетин відрізка інтегральної лійки в момент $t \in [0,1]$ і його міру.

1.35. Знайти перетин інтегральної лійки в момент $t > 0$ розв'язків системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

якщо $x^2(0) + y^2(0) \leq r^2$, $r > 0$.

1.36. Показати, що якщо сума власних чисел матриці лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами рівна нулеві, то міра перетину інтегральної лійки є сталою.

1.37. Показати, що якщо сума власних чисел матриці лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є від'ємною, то міра перетину інтегральної лійки спадає і прямує до нуля, якщо $t \to +\infty$.

1.38. Показати, що якщо сума власних чисел матриці лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами є додатною, то міра перетину інтегральної лійки зростає і прямує до нескінченності при $t \to +\infty$.

1.39. У доведенні теореми Пеано показати, що існує розв'язок задачі Коші (1.1) на інтервалі $[t_0 - h, t_0]$.

1.40. У доведенні теореми 1.2 побудувати розв'язок задачі Коші (1.23) ліворуч.

1.41. У доведенні теореми 1.10 показати, що якщо умови теореми 1.10 справджуються для всіх точок простору станів і будь-яких $t \in [t_0, T]$, то розв'язок задачі Коші існує і єдиний для всіх $t \in [t_0, T]$.

Додаткові задачі пропонуємо розглянути у роботах [5, 9, 12, 24, 27].

РОЗДІЛ 2
ПЕРШИЙ І ДРУГИЙ МЕТОДИ ЛЯПУНОВА

2.1. Основні означення

У дослідженні розв'язку системи на стійкість виникає питання, у який спосіб зміна початкового стану системи впливає на розв'язок системи. Якщо мала зміна (збурення) початкових умов призводить до несуттєвої зміни розв'язку, то відповідний розв'язок системи є стійким. Якщо мале збурення початкових умов веде до суттєвого збурення розв'язку, то такий розв'язок інтерпретують як нестійкий. Указане розуміння стійкого розв'язку є описовим.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \geq t_0, \tag{2.1}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.1), $f(t,x)$ – вектор-функція розмірності n, яка задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Позначатимемо як $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок задачі Коші (2.1), $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$.

Щоб дати математичне означення стійкості розв'язку системи (2.1), треба вказати розв'язок, який досліджується на стійкість. Такий розв'язок називають *незбуреним* (або в застосуваннях – розрахунковим). Змінимо початкові умови, що відповідають незбуреному розв'язку і знайдемо розв'язок системи (2.1), який відповідає зміненим (збуреним) початковим умовам. Одержаний розв'язок у теорії стійкості називають *збуреним*.

Без обмеження на загальність міркувань вважатимемо, що $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком. У іншому випадку можна заміною змінних перейти до системи диференціальних рівнянь, для якої незбурений розв'язок буде нульовим.

Справді, нехай $z(t)$ є незбуреним розв'язком. Зробимо заміну

$$x = y + z(t).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = f(t,x) - f(t,z(t)) =$$
$$= f(t, y + z(t)) - f(t, z(t)).$$

Позначимо

$$F(t,y) = f(t, y + z(t)) - f(t, z(t)).$$

Одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = F(t,y), \qquad t \geq t_0.$$

Між розв'язками одержаної щойно системи і розв'язками системи (2.1) існує взаємно однозначна відповідність, яка виражається перетворенням $x = y + z(t)$. Зокрема, розв'язку $y(t) = 0$, $t \geq t_0$, відповідає розв'язок $z(t)$, $t \geq t_0$, системи (2.1).

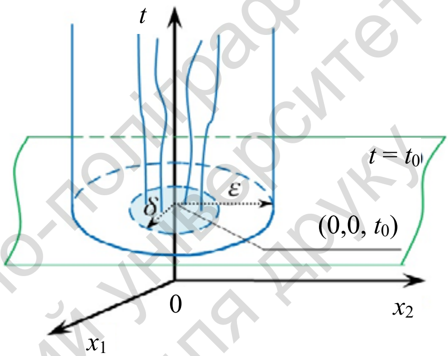


Рис. 2.1. Стійкість за Ляпуновим незбуреного розв'язку

Отже, вважаємо, що $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є розв'язком системи (2.1), який досліджується на стійкість, тобто є *незбуреним* (рис. 2.1). Інші розв'язки системи (2.1) називатимемо збуреними. Зазначимо, що $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є точкою рівноваги системи (2.1) і $f(t, 0) = 0$, $t \geq t_0$.

Означення 2.1. *Незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *системи диференціальних рівнянь* (2.1) *називають стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *таке, що*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon, \qquad t \geq t_0$$

як тільки $\|x_0\| < \delta$.

Зауважимо, що в означенні 2.1 справджується $0 < \delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon$. Якщо в означенні 2.1 $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$, то нульовий розв'язок системи (2.1) називають *рівномірно стійким за Ляпуновим*.

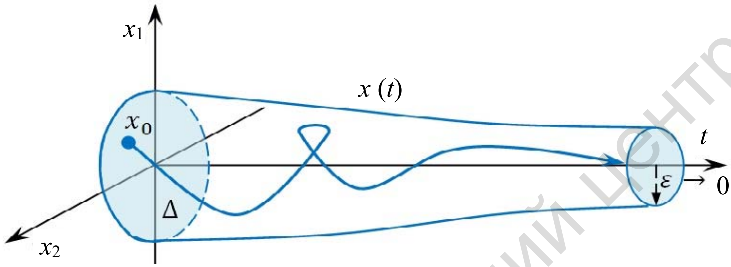


Рис. 2.2. Асимптотично стійкий за Ляпуновим розв'язок

Означення 2.2. *Незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *системи диференціальних рівнянь* (2.1) *називають асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він є стійким за Ляпуновим, тобто виконується означення 2.1 та існує* $\Delta > 0$, *для якого*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0, \qquad \| x_0 \| \leq \Delta.$$

Множину

$$\Omega(t_0) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0 \right\}$$

називають областю асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (2.1), рис. 2.2.

Якщо $\Omega(t_0) = \mathbb{R}^n$, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи диференціальних рівнянь (2.1) називають *асимптотично стійким у цілому, або глобально асимптотично стійким*. Якщо нульовий розв'язок системи (2.1) є глобально асимптотично стійким, то $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0$ для довільного $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Геометричну інтерпретацію асимптотичної стійкості за Ляпуновим ілюструє рис. 2.3.

Означення 2.3. *Якщо означення 2.1 не виконується, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *системи* (2.1) *називають нестійким за Ляпуновим.*

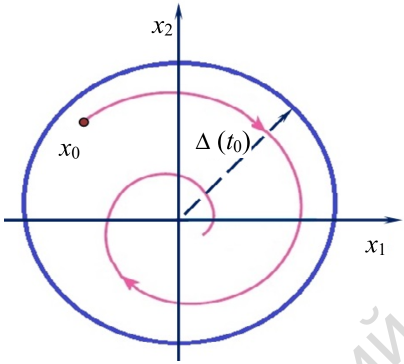


Рис. 2.3. Геометрична інтерпретація асимтотичної стійкості за Ляпуновим

Приклад 2.1. Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

залежно від параметра a. Загальний розв'язок цього рівняння запишемо у формі Коші

$$x(t) = x_0 e^{at}, \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Нехай $a \leq 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що можна підібрати $\delta > 0$ так, що виконується означення 2.2. Справді, вибравши $\delta = \varepsilon$, $|x_0| < \delta$, маємо

$$|x(t)| = |x_0| \cdot e^{at} \leq |x_0| < \delta = \varepsilon,$$

$t \geq 0$. Отже, виконується означення 2.1 і якщо $a \leq 0$, то нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим.

Оскільки для $a < 0$ і довільного $x(0) = x_0$ справджується

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \lim_{t\to\infty} |x_0| \cdot e^{at} = 0,$$

то виконується означення 2.2 і нульовий розвязок є асимптотично стійким за Ляпуновим, причому в цілому.

Якщо $a > 0$, то для $\varepsilon = 1$, яким би не було $\delta \in (0{,}1)$, існують $x_0 = \frac{\delta}{2}$, $t \geq \frac{1}{a} \ln \frac{2}{\delta}$ такі, що

$$|x(t)| = |x_0| \cdot e^{at} = \frac{\delta}{2} \cdot e^{at} \geq 1 = \varepsilon.$$

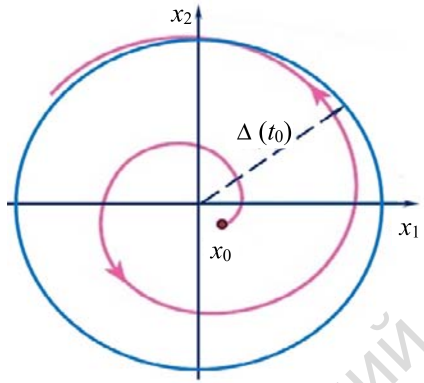


Рис. 2.4. Геометрична інтерпретація нестійкості за Ляпуновим

Отже, означення 2.1 не виконується і при $a > 0$ нульовий розв'язок нестійкий за Ляпуновим (рис. 2.4).

Для дослідження стійкості незбуреного розв'язку системи диференціальних рівнянь (2.1) застосовують *перший і другий методи Ляпунова*.

Суть ***першого методу Ляпунова*** така: аналіз стійкості незбуреного розв'язку системи диференціальних рівнянь ґрунтується на тому, що ми знаходимо структуру загального розв'язку (2.1), ураховуючи яку, доходимо висновку про стійкість незбуреного руху. Основна проблема першого методу Ляпунова полягає в тому, що конструювання загального розв'язку можливе для вузького класу систем, що обмежує область використання методу.

Другий метод Ляпунова базується на застосуванні спеціальних функцій до аналізу стійкості незбуреного руху. Такі функції називають функціями Ляпунова. Перевага другого методу Ляпунова порівняно з першим полягає в тому, що він не потребує додаткової інформації про загальний розв'язок системи (2.1). Недоліком цього методу є відсутність загальної методики конструювання функцій Ляпунова.

2.2. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.2}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.2), $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $t \geq t_0$. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (2.2) можна записати у формі Коші:

$$x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0, t \geq t_0, \tag{2.3}$$

де $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи (2.2), нормована за моментом t_0, $x(t_0) = x_0$. За означенням фундаментальної матриці

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt} = A(t)X(t, t_0), X(t_0, t_0) = E. \tag{2.4}$$

Тут E – одинична матриця розмірності $n \times n$.

Без обмеження загальності вважаємо, що $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком. В іншому разі, як і в попередньому підрозділі, виконаємо заміну змінних і прийдемо до лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь із матрицею $A(t)$. Справді, нехай $z(t)$ є незбуреним розв'язком. Виконаємо заміну

$$x = y + z(t).$$

Тоді

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dz(t)}{dt} = A(t)x - A(t)z(t) = A(t)y.$$

Одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

для якої $y(t) = 0$, $t \geq t_0$ є незбуреним розв'язком. Це означає, що характер стійкості будь-якого незбуреного розв'язку системи (2.2) визначається характером стійкості нульового розв'язку цієї системи.

Проблему дослідження стійкості незбуреного розв'язку системи (2.2) розв'язують шляхом аналізу властивостей фундаментальної матриці $X(t, t_0)$.

Теорема 2.1. *Щоб нульовий розв'язок системи* (2.2) *був стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця* $X(t, t_0)$ *цієї системи була обмеженою,* $t \geq t_0$.

Доведення. Необхідність. Доводимо від супротивного. Припустимо, що нульовий розв'язок системи (2.2) стійкий за Ляпуновим, але її фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ необмежена, $t \geq t_0$. Це означає, що серед усіх стовпців матриці $X(t, t_0)$ існує хоч би один j-й стовпець $x^{(j)}(t)$, а також послідовність $t_k \geq t_0$, $k = 1,2, \ldots$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \| x^{(j)}(t_k) \| = \infty.$$

Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Оскільки нульовий розв'язок системи (2.2) є стійким за Ляпуновим, то за означенням 2.1 існує $\delta > 0$ таке, що

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0, \tag{2.5}$$

як тільки $\|x_0\| < \delta$.

З умови $X(t_0, t_0) = E$ маємо, що j-й стовпець матриці $X(t_0, t_0)$ збігається з j-м ортом $e^{(j)}$, тобто $x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$. З (2.4) також слідує, що будь-який стовпець фундаментальної матриці є розв'язком системи (2.2). Отже, $x^{(j)}(t)$ є розв'язком системи (2.2) і за формулою Коші (2.3) маємо

$$x^{(j)}(t) = X(t, t_0)e^{(j)}.$$

Розглянемо $y(t) = \frac{\delta}{2} x^{(j)}(t)$. Оскільки система (2.2) – лінійна, то $y(t)$ є її розв'язком, причому $\| y(t_0) \| = \frac{\delta}{2} < \delta$. З (2.5) випливає $\| y(t) \| < \varepsilon$, $t \geq t_0$. Але

$$\lim_{k\to\infty} \| y(t_k) \| = \frac{\delta}{2} \lim_{k\to\infty} \| x^{(j)}(t_k) \| = \infty.$$

Одержали протиріччя.

Достатність. Якщо фундаментальна матриця $X(t, t_0)$ є обмеженою, $t \geq t_0$, то знайдеться константа $C > 0$, така, що $\| X(t, t_0) \| \leq C$, $t \geq t_0$. Тоді з формули Коші (2.3) випливає

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \|X(t, t_0)\| \|x_0\| \leq C\|x_0\|, t \geq t_0. \tag{2.6}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Тоді з (2.3) для $\|x_0\| < \delta$ одержуємо

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \le C\|x_0\| < C\delta = \varepsilon, t \ge t_0.$$

З означення 2.1 випливає, що нульовий розв'язок системи (2.2) є стійким за Ляпуновим.

■

Приклад 2.2. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Фундаментальна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Норма фундаментальної матриці є обмеженою, оскільки

$$\|X(t, 0)\| = \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2}.$$

За теоремою 2.1 нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь є стійким за Ляпуновим.

Теорема 2.2. *Щоб нульовий розв'язок системи* (2.2) *був нестійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця* $X(t, t_0)$ *цієї системи була необмеженою,* $t \ge t_0$.

Доведення теореми випливає з означення 2.3 нестійкого незбуреного розв'язку та з теореми 2.1.

Теорема 2.3. *Щоб нульовий розв'язок системи* (2.2) *був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб* $\lim_{t\to+\infty}\|X(t, t_0)\| = 0$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, від супротивного, що нульовий розв'язок системи (2.2) є асимптотично стійким за Ляпуновим, але умова $\lim_{t\to+\infty}\|X(t, t_0)\| = 0$ не виконується. Тоді знайдеться j-й стовпець $x^{(j)}(t)$ матриці $X(t, t_0)$ такий, що $\lim_{t\to+\infty}\left\|x^{(j)}(t)\right\| \ne 0$. З умови $X(t_0, t_0) = E$ маємо $x^{(j)}(t_0) =$ $= e^{(j)}$, де $e^{(j)}$ – j-й орт.

Зафіксуємо довільне $\Delta > 0$ і розглянемо $y(t) = \frac{\Delta}{2}x^{(j)}(t)$. Оскільки $x^{(j)}(t)$ є розв'язком системи (2.2) і система (2.2) – лінійна, то $y(t)$ є розв'язком цієї системи, причому $\| y(t_0) \| = \frac{\Delta}{2} < \Delta$.

Отже,

$$\lim_{t\to+\infty}\|y(t)\| = \frac{\Delta}{2}\lim_{t\to+\infty}\left\|x^{(j)}(t)\right\| \neq 0.$$

Одержали протиріччя з означенням асимптотичної стійкості розв'язку.

Достатність. Якщо $\lim_{t\to+\infty}\|X(t,t_0)\| = 0$, то фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ є обмеженою для $t \geq t_0$. За теоремою 2.1 нульовий розв'язок системи (2.2) стійкий за Ляпуновим. З формули Коші (2.3) випливає

$$\|x(t,x_0,t_0)\| \leq \|X(t,t_0)\|\|x_0\|, t \geq t_0. \qquad (2.7)$$

Для довільного $\Delta > 0$ і початкових умов, що задовольняють умову $\|x_0\| < \Delta$, з нерівності (2.7) одержуємо $\lim_{t\to+\infty}\|x(t,x_0,t_0)\| = 0$.

■

Зазначимо, що в умовах теореми 2.3 область асимптотичної стійкості збігається з $\mathbb{R}^n$. Це означає, що вказана теорема дає умови асимптотичної стійкості в цілому.

Наслідок 2.1. *Щоб нульовий розв'язок системи* (2.2) *був стійким (нестійким) за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця* $X(t)$ *цієї системи* (*не обов'язково нормована за моментом* t_0) *була обмеженою* (*необмеженою*), $t \geq t_0$. *Щоб нульовий розв'язок системи* (2.2) *був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця* $X(t)$ *цієї системи мала властивість* $\lim_{t\to+\infty}\|X(t)\| = 0$.

Доведення наслідку випливає з того, що $X(t,t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$.

Наслідок 2.2. *Нульовий розв'язок системи* (2.2) *є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли її фундаментальна система розв'язків складається з обмежених для* $t \geq t_0$ *функцій.*

Нульовий розв'язок системи (2.2) *є асимптотично стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли її фундаментальна система розв'язків складається з функцій, які прямують до нуля при* $t \to +\infty$.

Нульовий розв'язок системи (2.2) *є нестійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли серед функцій, які складають фунда-*

ментальну систему розв'язків, знайдеться хоча б одна, яка є необмеженою при $t \geq t_0$.

Приклад 2.3. Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Фундаментальна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Норма фундаментальної матриці $\|X(t)\| = \sqrt{2(e^{2t} + e^{-2t})}$ є необмеженою при $t \geq 0$. Отже, нульовий розв'язок системи нестійкий.

Приклад 2.4. Проаналізуємо стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Фундаментальну матрицю можна записати так:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Норма фундаментальної матриці $\|X(t)\| = \sqrt{2e^{-2t} + 5e^{-4t}}$. Отже, $\lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = 0$, і нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким.

2.3. Стійкість розв'язків систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Припустимо, що в системі (2.2) матриця A цієї системи має сталі елементи. Отже, система має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2.8}$$

Загальний розв'язок системи (2.8) і її фундаментальну матрицю $X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ одержують на основі фундаментальної системи роз'язків. Фундаментальна система розв'язків складається з n лінійно незалежних вектор-функцій $x^{(j)}(t)$, $j = 1,2,\dots,n$, які знаходять з урахуванням власних значень і відповідних власних векторів матриці A. Тоді загальний розв'язок системи (2.8) визначається як

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^{(j)}(t), \qquad t \geq t_0,$$

де c_j, $j = 1,2,\dots,n$ – довільні константи. Тому умови стійкості лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (2.8) аналізують, з урахуванням власних значень матриці A та структури її жорданового базису.

Розглянемо метод знаходження фундаментальної системи розв'язків лінійної стаціонарної системи (2.8). Для цього визначаємо власні числа матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |A - \lambda E| = \\ &= p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Тут $p_0, p_1, \dots, p_n$ – дійсні числа, $p_0 \neq 0$.

Кожному кореню характеристичного рівняння відповідає один член фундаментальної системи розв'язків, лінійна комбінація яких складає загальний розв'язок системи (2.8). Розрізняють такі випадки.

1. Корінь λ рівняння (2.9) дійсний, кратності 1. Тоді відповідний йому член фундаментальної системи розв'язків записується так:

$$x(t) = he^{\lambda t},$$

де h – власний вектор матриці A, який відповідає λ, тобто

$$(A - \lambda E)h = 0, h \neq 0.$$

Якщо корені λ_i, $i = 1,2,\dots,n$, характеристичного рівняння (2.9) є дійсними і різними, то загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь записується як

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j h^{(j)} e^{\lambda_j t}, \qquad t \geq t_0,$$

де c_j – довільні константи, $h^{(j)}$ – власні вектори матриці A, тобто

$$\left(A-\lambda_j E\right)h^{(j)}=0, \qquad h^{(j)}\neq 0, \qquad j=1,2,\dots,n.$$

2. Корінь λ характеристичного рівняння (2.9) дійсний і має кратність k. У цьому випадку аналізують ранг матриці $A-\lambda E$. Якщо $\operatorname{rang}(A-\lambda E)=r$ і $r=n-k$, то існує k лінійно незалежних власних векторів матриці A, що відповідають власному числу λ. Отже, рівняння $(A-\lambda E)h=0$ має k лінійно незалежних розв'язків $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, ..., $h^{(k)}$. У такий спосіб одержуємо k членів фундаментальної системи розв'язків системи (2.8):

$$x^{(j)}(t)=h^{(j)}e^{\lambda t}, \qquad j=1,2,\dots,k.$$

Якщо $\operatorname{rang}(A-\lambda E)=r$ і $r>n-k$, то існує $n-r$ лінійно незалежних власних векторів

$$h^{(1)}, \qquad h^{(2)},\dots, \qquad h^{(n-r)}$$

матриці A, що відповідають власному числу λ. Тоді вказаний власний базис слід доповнити, додаючи $s=k-(n-r)$ векторів, які шукають за правилом

$$Ag^{(0)}=\lambda g^{(0)}, \qquad Ag^{(j)}=\lambda g^{(j)}+g^{(j-1)}, \qquad j=1,2,\dots,s,$$

де $g^{(0)}$ – один із власних векторів матриці A, що відповідає власному числу λ. Для визначеності покладемо $g^{(0)}=h^{(n-r)}$. Тоді система векторів

$$\left\{h^{(1)},h^{(2)},\dots,h^{(n-r)},g^{(1)},g^{(2)},\dots,g^{(s)}\right\}$$

утворює базис Жордана, який відповідає власному числу λ. У цьому випадку члени фундаментальної системи розв'язків системи (2.9) такі:

$$x^{(j)}(t)=h^{(j)}e^{\lambda t}, \quad j=1,2,\dots,n-r,$$

$$x^{(n-r+1)}(t)=\left(g^{(0)}t+g^{(1)}\right)e^{\lambda t},$$

$$x^{(n-r+2)}(t)=\left(\frac{g^{(0)}}{2!}t^2+g^{(1)}t+g^{(2)}\right)e^{\lambda t},$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)}(t) = \left(\frac{g^{(0)}}{s!}t^s + \frac{g^{(1)}}{(s-1)!}t^{s-1} + \dots + g^{(s-1)}t + g^{(s)}\right)e^{\lambda t},$$

де $g^{(0)} = h^{(n-r)}$.

3. Корінь λ характеристичного рівняння (2.9) – комплексний кратності 1. Тобто $\lambda = a + ib$, де a, b – дійсні числа, $i^2 = -1$ – комплексна одиниця. Тоді $\overline{\lambda} = a - ib$ – також корінь характеристичного рівняння (2.9). У цьому випадку маємо два члени фундаментальної системи розв'язків. Кореню λ відповідає комплексний власний вектор $h = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Два лінійно незалежні розв'язки будують таким способом:

$$x^{(1)}(t) = Re\left[he^{\lambda t}\right] = Re[(u + iv)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)] =$$
$$= e^{at}[u\cos bt - v\sin bt],$$
$$x^{(2)}(t) = Im\left[he^{\lambda t}\right] = Im[(u + iv)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)] =$$
$$= e^{at}[u\cos bt + v\sin bt].$$

Випадок кратних комплексних коренів є комбінацією другого і третього випадків. Аналіз структури фундаментальної системи розв'язків і наслідки теорем 2.1–2.3 приводять до такої теореми.

Теорема 2.4. *Щоб незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, *системи* (2.8) *був асимптотично стійким за Ляпуновим, необхідно і достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння* (2.9) *мали від'ємні дійсні частини* $Re\lambda_j < 0$, $j = 1,2,\dots,n$.

Якщо серед коренів характеристичного рівняння λ_1, λ_2,..., λ_n *є хоча б один із додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.8) *є нестійким.*

Нехай корені характеристичного рівняння (2.9) *задовольняють умови:* $Re\lambda_i = 0$, $i = 1,2,\dots,m$, $Re\lambda_i < 0$, $i = m+1,\dots,n$. *Якщо корені* λ_1, λ_2,..., λ_m *мають кратність* 1, *то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *системи* (2.8) *є стійким. Якщо серед* λ_1, λ_2,..., λ_m *є кратні, але вони задовольняють умову* $r = n - k$, $r = \mathrm{rang}(A - \lambda E)$, k *– кратність кореня, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *системи* (2.8) *є стійким. В іншому випадку розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *нестійкий.*

Отже, аналіз фундаментальної системи розв'язків показує, що

$$\| x^{(j)}(t) \| \leq P_j(t)e^{\alpha t}, \qquad j = 1,2,\dots,n, \qquad \alpha = \max_{k=1,2,\dots,n} Re\,\lambda_k,$$

де $P_j(t)$ – поліном із додатними коефіцієнтами. Помітимо, що для довільного $\sigma > 0$ справджується

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{P_j(t)}{e^{\sigma t}} = 0.$$

Це означає, що для $\varepsilon = 1$ знайдеться $\delta > 0$, для якого

$$\left|\frac{P_j(t)}{e^{\sigma t}}\right| \leq 1, \qquad t > \delta.$$

Визначимо

$$\max_{t\in[0,\delta]} \frac{P_j(t)}{e^{\sigma t}} = M_* > 0, \qquad M_\sigma^{(j)} = \max\{1, M_*\} > 0,$$

а також

$$M_\sigma = \max_{j=1,2,\dots,k} M_\sigma^{(j)} > 0.$$

Тоді

$$\frac{P_j(t)}{e^{\sigma t}} \leq M_\sigma, \qquad t \geq 0,$$

звідки

$$P_j(t) \leq M_\sigma e^{\sigma t}, \qquad t \geq 0.$$

У такий спосіб одержуємо оцінку

$$\| x^{(j)}(t) \| \leq P_j(t)e^{\sigma t} \leq M_\sigma e^{(\alpha+\sigma)t}, \qquad j = 1,2,\dots,n, \qquad t \geq 0.$$

Доходимо висновку, що для кожного із членів фундаментальної системи розв'язків для довільного $\sigma > 0$ існує константа $M_\sigma > 0$, для якої

$$\| x^{(j)}(t) \| \leq M_\sigma e^{(\alpha+\sigma)t}, \qquad j = 1,2,\dots,n, \qquad t \geq 0.$$

Оскільки фундаментальна матриця

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t)\; x^{(2)}(t)\; \dots\; x^{(n)}(t)\right),$$

то

$$\| X(t) \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \| x^{(j)}(t) \|^2} \leq M_0(\sigma)e^{(\alpha+\sigma)t}, \qquad t \geq 0,$$

де $M_0(\sigma) = \sqrt{n}M_\sigma > 0$. Оскільки $X(t, 0) = e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$, то $\| X(t, 0) \| = \| e^{At} \| \leq \| X(t) \| \| X^{-1}(0) \| \leq M(\sigma)e^{(\alpha+\sigma)t}, \qquad t \geq 0,$ де $M(\sigma) = M_0(\sigma) \| X^{-1}(0) \| > 0$. Отже, ми обґрунтували таку теорему.

Теорема 2.5. *Для довільного*

$$\gamma > \alpha = \max_{j=1,2,\ldots,n} Re\lambda_j$$

існує константа $M(\gamma) > 0$, *для якої*

$$\| e^{At} \| \leq M(\gamma)e^{\gamma t}, \qquad t \geq 0.$$

Приклад 2.5. Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Запишемо характеристичний поліном

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Коренями характеристичного рівняння є $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. За теоремою 2.4 нульовий розв'язок системи є стійким. Утім умова асимптотичної стійкості не виконується.

Приклад 2.6. Здійснимо аналіз стійкості нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Характеристичний поліном має вигляд

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Коренями характеристичного рівняння є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Оскільки є корінь з додатною дійсною частиною, то за теоремою 2.4 нульовий розв'язок системи нестійкий.

Якщо порядок системи (2.8) перевищує 2, то застосування теореми 2.4 в загальному випадку ускладнюється. Тоді доцільно застосовувати *критерій Гурвіца*. Критерій Гурвіца не використовують для знаходження коренів характеристичного рівняння системи, але він дозволяє аналізувати знак дійсної частини цих коренів. Це, у свою чергу, дає змогу ефективно застосовувати теорему 2.4.

Вважаємо, що в характеристичному рівнянні (2.9) справджується умова $p_0 > 0$. За коефіцієнтами характеристичного полінома формуємо матрицю Гурвіца. Вона має вигляд

$$\Gamma = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

де $p_i = 0,\ i > n$. Позначимо як Δ_i – головні мінори матриці Г, $i = 1,2,\dots,n$.

Теорема 2.6 (критерій Гурвіца). *Щоб усі корені характеристичного рівняння* (2.9) *мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори матриці Гурвіца були додатними.*

Разом із теоремою 2.4 критерій Гурвіца дає необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (2.8), а саме, *нульовий розв'язок системи* (2.8) *є асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли головні мінори матриці Гурвіца характеристичного полінома* (2.9) *додатні*: $\Delta_i > 0,\ i = 1,2,\dots,n$.

Приклад 2.7. За допомогою критерію Гурвіца визначимо, за яких значень параметрів a і b нульовий розв'язок

$$x''' + ax'' + bx' + 4x = 0$$

буде асимптотично стійким.

Знайдемо характеристичний поліном рівняння. Він має вигляд

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 4.$$

За виглядом характеристичного полінома формуємо матрицю Гурвіца

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 4 & b & a \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо головні мінори матриці Г:

$$\Delta_1 = a,\ \ \Delta_2 = ab - 4,\ \ \Delta_3 = 4(ab - 4).$$

Застосовуючи критерій Гурвіца, одержуємо, що для всіх a і b таких, що $a > 0$, $ab > 4$, нульовий розв'язок запропонованого рівняння є асимптотично стійким.

Приклад 2.8. Дослідимо на стійкість лінійну однорідну систему другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases}$$

Зауважимо, що детальний аналіз поведінки фазових траєкторій цієї системи та класифікація фазових портретів (вузол, сідло, фокус, центр) буде розглянуто далі. Зробимо попередній аналіз на основі теореми 2.4. Матриця системи має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

а її характеристичний поліном записується так:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - cb = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A.$$

Тут $\mathrm{tr}A = a + d$ – слід матриці A, $\det A = ad - bc$ – її визначник. Згідно з критерієм Гурвіца система є асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{tr}A < 0, \qquad \begin{vmatrix} -\mathrm{tr}A & 1 \\ 0 & \det A \end{vmatrix} > 0,$$

тобто якщо

$$\mathrm{tr}A < 0,\ \ \det A > 0. \tag{2.10}$$

Якщо виконується (2.10) і

$$\mathrm{tr}^2 A > 4\det A,$$

то маємо пару дійсних від'ємних власних чисел матриці A

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}A \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2 A - 4\det A}\right).$$

Фазовий портрет – стійкий вузол.

Якщо виконуються нерівності (2.10) і

$$\mathrm{tr}^2 A < 4\det A,$$

то маємо пару комплексно-спряжених власних чисел із від'ємною дійсною частиною

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}A \pm i\sqrt{|\mathrm{tr}^2 A - 4\det A|}\right), \qquad i^2 = -1.$$

У цьому випадку фазовий портрет – стійкий фокус. Зауважимо: якщо $\mathrm{tr}A > 0$, то одержимо фазовий портрет – нестійкий фокус.

Стійкий вироджений вузол з'являється, коли (2.10) виконується разом з умовами:

- $\mathrm{tr}^2 A = 4\det A$ (кратний корінь);
- $|b| + |c| \neq 0$ (матриця A – не діагональна).

Стійкому дикритичному вузлу відповідає випадок

$$a = d < 0, \qquad c = b = 0.$$

Система є стійкою, але не асимптотично, у таких випадках:

1. Матриця A має пару суто уявних власних чисел. У цьому випадку

$$\mathrm{tr}A = 0, \qquad \det A > 0.$$

Фазовий портрет – центр;

2. Одне власне число матриці A дорівнює нулю, інше – від'ємне:

$$\mathrm{tr}A < 0, \qquad \det A = 0;$$

3. A – нульова матриця.

2.4. Аналіз стійкості лінійних систем на площині

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.11}$$

Якщо $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) задовольняє умови теореми Пікара, то через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива диференціального рівняння (2.11).

Припустимо, що функція $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) не є неперервною. Тоді можливі випадки:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = P$ (P – деяке число);

б) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\infty$;

в) $f(x,y)$ – невизначена в точці (x_0,y_0) (таку точку називають особливою точкою).

Перші два зводяться до випадку, який розглядає теорема Пікара:

а) $f(x,y)$ можна довизначити у такий спосіб: $f(x_0,y_0)=P$;

б) замість диференціального рівняння (2.11) розглядати рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f(x,y)} \tag{2.12}$$

і, покладаючи $\frac{1}{f(x,y)}=0$, знайти єдиний розв′язок $x=\varphi(y)$ із вертикальною дотичною в точці (x_0,y_0).

Дослідження особливих точок проведемо для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}, \tag{2.13}$$

де a,b,c,d – дійсні числа, $ad-bc\neq 0$, оскільки у протилежному випадку диференціальне рівняння (2.13) зводиться до рівняння $\frac{dy}{dx}=\text{const}$.

Нас цікавить поведінка інтегральних кривих в околі точки (0,0). Перепишемо диференціальне рівняння (2.13) у вигляді

$$\frac{dx}{cx+dy}=\frac{dy}{ax+by}$$

і перейдемо до системи

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=cx+dy,\\ \frac{dy}{dt}=ax+by.\end{cases} \tag{2.14}$$

Матрицю системи (2.14) запишемо так:

$$A=\begin{pmatrix}c & d\\ a & b\end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що геометричне зображення поведінки траєкторій системи диференціальних рівнянь називають фазовим портретом. Прийнято стрілками на траєкторіях зображувати напрямок руху рухомої точки при $t \to +\infty$.

Запишемо характеристичне рівняння системи (2.14)

$$\det(A - \lambda E) \begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Нехай λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння. Розглянемо такі випадки.

А. Корені дійсні, різні й відмінні від нуля, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2$. У базисі з власних векторів h_1, h_2 матриця системи є діагональною. Загальний розв'язок системи (2.14) має вигляд

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = q_1(t)h_1 + q_2(t)h_2,$$

де

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Загальний розв'язок системи (2.15) виразимо співвідношенням

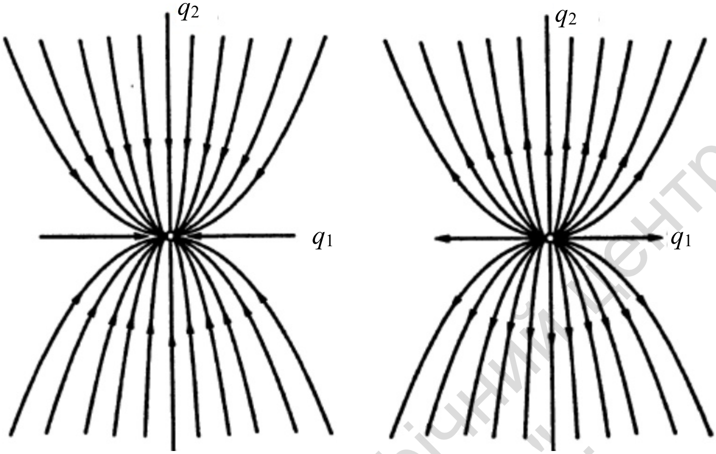
$$q_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad q_2 = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

де c_1 та c_2 – довільні сталі. Виключаючи t , отримаємо рівняння траєкторій

$$q_2 = c_1 \left(\frac{q_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \text{(для } c_1 \neq 0\text{) та } q_1 = 0 \text{ (для } c_1 = 0\text{)}. \tag{2.16}$$

Якщо λ_1 та λ_2 – одного знака, то траєкторії подібні до дуг парабол, які дотикаються до осі Oq_1 в точці (0,0) (якщо $|\lambda_2| > |\lambda_1|$), чи до осі Oq_2 (якщо $|\lambda_2| < |\lambda_1|$). Координатні півосі також є траєкторіями. Таку особливу точку називають *вузлом* (рис. 2.5).

По всіх траєкторіях відбувається рух до точки (0,0), якщо $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ – *стійкий вузол* (рис 2.5, а), і від неї, якщо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ – *нестійкий вузол* (рис. 2.5, б). Напрямок руху вказують стрілки на траєкторіях.



а ***б***

Рис. 2.5. Точка рівноваги: стійкий вузол (***а***); нестійкий вузол (***б***)

Б. Якщо ж λ_1, λ_2 мають різні знаки, то траєкторії (крім тих, що рухаються по координатних півосях) схожі на гіперболи, оскільки в силу (2.16) $|q_2| \to \infty$ при $q_1 \to 0$ і $q_2 \to 0$ при $|q_1| \to \infty$ (рис. 2.6). Особливу точку називають *сідлом*. Сідло завжди нестійке, оскільки одне з власних чисел матриці – додатне.

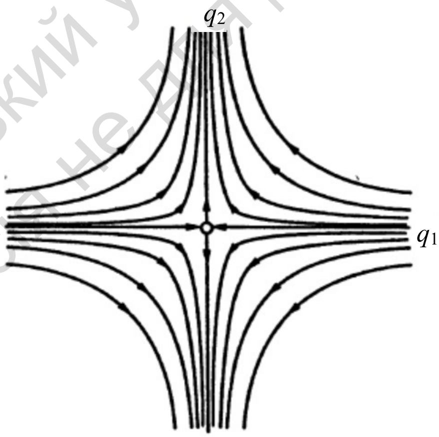


Рис. 2.6. Точка рівноваги – сідло

Якщо $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$, то по обох половинах осі Oq_1 рух напрямлений до точки O, оскільки $q_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \to 0\ (t \to \infty)$. Водночас по обох половинах осі Oq_2 рух відбувається від точки O, оскільки $q_2 = c_2 e^{\lambda_2 t},\ |q_2| \to \infty\ (t \to \infty)$.

В. Якщо $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, то жорданова форма матриці системи може бути або діагональною, або ні.

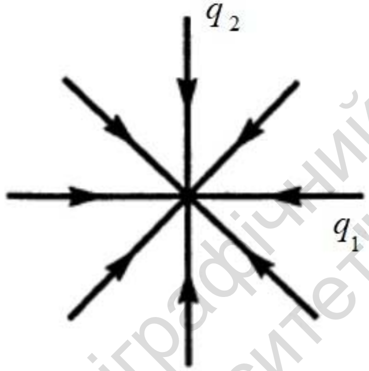


Рис. 2.7. Точка рівноваги – дикритичний вузол

а) У першому випадку ранг $A - \lambda E$ рівний нулеві, система має вигляд (2.15) з $\lambda_1 = \lambda_2$ і траєкторії (2.16) – півпрямі з кінцем у точці (0,0). Особливу точку називають *дикритичним вузлом*. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, то маємо *стійкий дикритичний вузол* (рис. 2.7). Рух по траєкторії відбувається в напрямку до точки рівноваги.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, то стрілки напрямлені у протилежному напрямку – ідеться про *нестійкий дикритичний вузол*.

б) В іншому випадку $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = 1$. Жорданова форма матриці A має вигляд

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (2.14) записують так:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = q_1(t) h_1 + q_2(t) h_2,$$

де h_1 – власний вектор матриці A, який відповідає власному числу λ_1, h_2 – приєднаний вектор.

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} = \lambda q_2. \end{cases} \qquad (2.17)$$

Загальний розв'язок системи (2.17)

$$q_2 = c_2 e^{\lambda t}, \quad q_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}. \qquad (2.18)$$

Рівняння траєкторій

$$q_1 = \frac{c_1}{c_2} q_2 + \frac{1}{\lambda} q_2 \ln \frac{q_2}{c_2} \ \ (c_2 \neq 0) \text{ та } q_2 = 0 \ (c_2 = 0). \qquad (2.19)$$

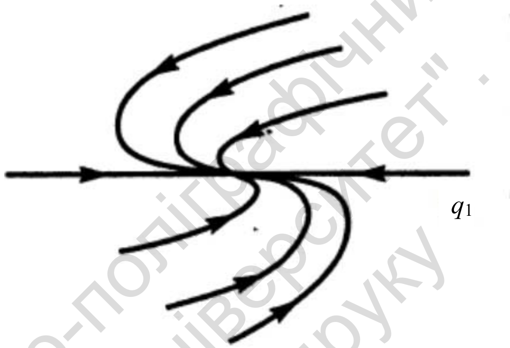


Рис. 2.8. Точка рівноваги – вироджений вузол

Особливу точку називають *виродженим вузлом* (рис. 2.8 у випадку $\lambda < 0$).

Вузли двох останніх типів є *стійкими*, якщо $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, і *нестійкими,* якщо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Г. Якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ – комплексні корені, то власні вектори – комплексні, лінійно незалежні (оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Нехай w – власний вектор для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, тобто

$$Aw = (\alpha + i\beta)w.$$

Замінюючи власні числа λ_1 і власний вектор w на спряжені, отримуємо

$$A\overline{w} = (\alpha - i\beta)\overline{w}.$$

Тобто $\overline{w}$ – власний вектор для $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Нехай $w = u + iv$, де вектори u та v – дійсні. Тоді $\overline{w} = u - iv$. Вектори

$$u = \frac{w+\overline{w}}{2} \quad \text{та} \quad v = \frac{w-\overline{w}}{2i}$$

є лінійно незалежними, оскільки отримуються з w та $\overline{w}$ невиродженим лінійним перетворенням.

Вектор-функція $x = ce^{(\alpha+i\beta)t}w$, де c – будь-яке число, є розв'язком системи (2.14). Підставляючи $c = \rho e^{i\theta}$, $w = u + iv$, отримуємо

$$x = \rho e^{\alpha t + i(\beta t+\theta)}(u + iv) = \big(q_1(t) + iq_2(t)\big)(u + iv),$$
$$q_1(t) = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta), \quad q_2(t) = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta)\,. \qquad (2.20)$$

Перейдемо до полярних координат r, φ, поклавши

$$q_1 = r\cos\varphi, \quad q_2 = r\sin\varphi.$$

Отримуємо

$$r = \rho e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta t + \theta, \qquad (2.21)$$

де $\rho \geq 0$ та θ – довільні сталі. Формула (2.21) дає всі дійсні розв'язки, оскільки початкова точка розв'язку

$$q_1(0) = r\cos\varphi, \quad q_2(0) = r\sin\varphi$$

є довільною точкою площини q_1, q_2.

У випадку $\alpha = 0$, тобто $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ траєкторії (2.21) – кола із центром у початку координат і з радіусом $r = \text{const}$ (рис. 2.9).

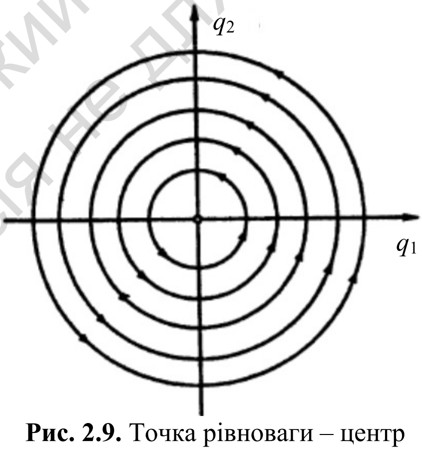


Рис. 2.9. Точка рівноваги – центр

Особливу точку називають *центром.* Причому зазначимо, що центр є стійким, але не асимптотично.

Виключаючи змінну t у (2.21), доходимо висновку, що у випадку $\alpha \neq 0$ траєкторії (2.21) – логарифмічні спіралі:

$$\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho} + \theta \quad (0 < r < \infty),$$

які виконують нескінченно багато обертів навколо початку координат (рис. 2.10). Особливу точку називають *фокусом*. Фокус – *стійкий*, як на рис. 2.10, якщо $\alpha < 0$, і *нестійкий*, якщо $\alpha > 0$.

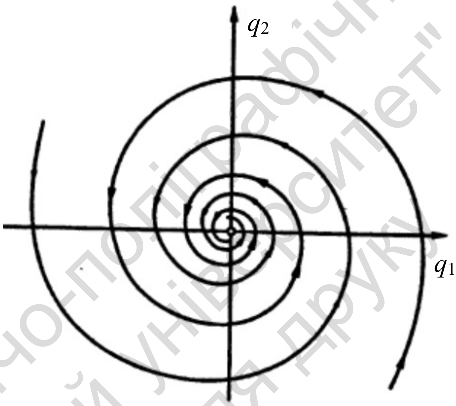


Рис. 2.10. Точка рівноваги – фокус

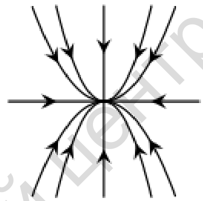
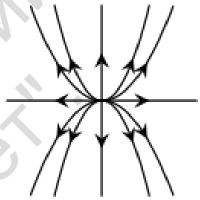
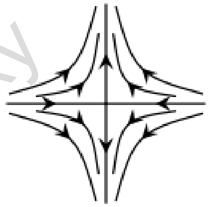
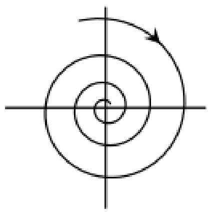
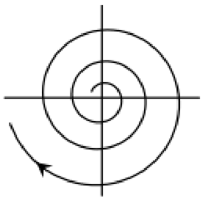
Д. Якщо матриця системи A має одне чи два власні значення, що рівні нулю, то її жорданова форма набуває одного з трьох виглядів:

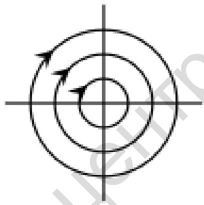
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det A = 0$, то система $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ має нескінченно багато розв'язків, а відтак особливих точок у системи (2.14) нескінченно багато.

Класифікацію особливих точок системи (2.14) зручно зобразити в таблиці.

Таблиця

Власні значення	**Тип точки рівноваги**	**Графічна інтерпретація**
1. Дійсні корені рівняння одного знака: а) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Стійкий вузол	
б) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Нестійкий вузол	
2. Дійсні корені різного знака: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Сідло	
3. Комплексні корені: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ а) $\alpha < 0$	Стійкий фокус	
б) $\alpha > 0$	Нестійкий фокус	

Власні значення	Тип точки рівноваги	Графічна інтерпретація
в) $\alpha = 0$	Центр	

Особливі точки, що притягують до себе фазові траєкторії, наприклад, стійкий вузол і стійкий фокус, є атракторами. Але атракторами в дисипативних системах можуть бути не лише стійкі стаціонарні точки, а й замкнені фазові криві, що відповідають періодичному руху, та більш складні множини. У розд. 4 ці питання розглянуто детальніше.

Приклад 2.9. Побудуємо фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - \lambda + 6 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{23}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{23}\right), \qquad i^2 = -1.$$

Отже, точка $(0,0)$ – нестійкий фокус. Фазовий портрет зображено на рис. 2.11. Його отримано за допомогою інструментарію системи комп'ютерної алгебри Mathematica [14].

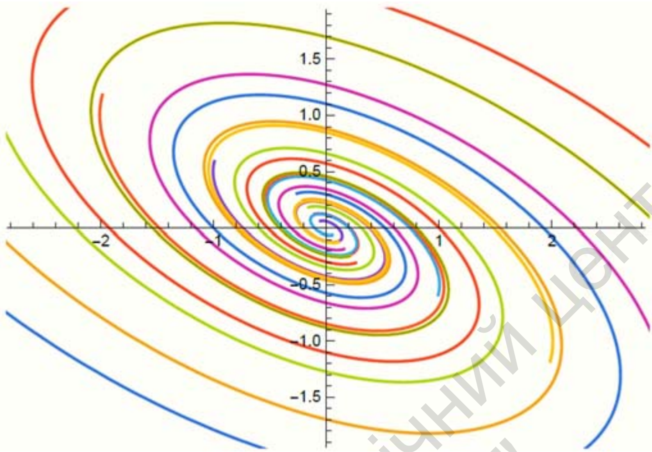


Рис. 2.11. Фазовий портрет системи з прикладу 2.9

2.5. Векторне поле і топологічна еквівалентність

Векторним полем f в області $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ називають відображення, яке кожній точці $x \in \mathcal{D}$ ставить у відповідність вектор $f(x) \in \mathbb{R}^n$. Векторне поле f задає систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad (2.22)$$

де $x \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}$. У цьому випадку область $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ називають фазовим простором, а $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$ – розширеним фазовим простором системи диференціальних рівнянь (2.22).

Дифеоморфізмом називають взаємно однозначне відображення, яке є неперервно диференційованим разом з оберненим до нього. *Однопараметричною групою дифеоморфізмів* $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$ області $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ називають відображення $g : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ таке, що $g(t, x) = g^t x, x \in \mathcal{D}, t \in \mathbb{R}$, і виконуються такі умови.

1. Відображення g є неперервно диференційованим.
2. $\{g^t : t \in \mathbb{R}^1\}$ є однопараметричною групою перетворень:

$$g^{t+s} = g^t \cdot g^s, \qquad t, s \in \mathbb{R};$$

$$(g^t)^{-1} = g^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

З означення однопараметричної групи дифеоморфізмів випливає, що $g^t: \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ є дифеоморфізмом для кожного $t \in \mathbb{R}$. Крім того, g^0 – тотожне перетворення [20].

Приклад 2.10. Відображення

1) $g^t x = x + t, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$;
2) $g^t x = e^t x, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

задають однопараметричну групу дифеоморфізмів. Відображення

$$g^t x = x + \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

не задає однопараметричну групу дифеоморфізмів, оскільки не виконуються аксіоми групи.

Приклад 2.11. Розглянемо відображення g^t з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, яке кожному вектору $x = (x_1, x_2)^T$ ставить у відповідність вектор

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Таке відображення описує поворот вектора $x = (x_1, x_2)^T$ на кут $t \in \mathbb{R}$ відносно початку координат. Відображення задає однопараметричну групу дифеоморфізмів. Справді, умова гладкості виконується. Групові аксіоми також справджуються, оскільки

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+s) & \sin(t+s) \\ -\sin(t+s) & \cos(t+s) \end{pmatrix},$$

де $t, s \in \mathbb{R}$. Крім того, обернене перетворення задається матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

яка визначає відображення $g^{-t}, t \in \mathbb{R}$.

Однопараметричну групу дифеоморфізмів, яка задана в області $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, називають фазовим потоком. Фазовий потік у свою чергу визначає поле

$$f(x) = \left.\frac{d(g^t x)}{dt}\right|_{t=0}, \qquad (2.23)$$

яке називають *полем фазової швидкості.*

Приклад 2.12. Відображення $g^t x = x + t$, $t \in \mathbb{R}$ задає фазовий потік в $\mathbb{R}$, відповідним йому полем фазової швидкості є $f(x) = 1$.

Приклад 2.13. Відображення $g^t x = e^t x$, $t \in \mathbb{R}$ задає фазовий потік в $\mathbb{R}$, відповідним йому полем фазової швидкості є $f(x) = x$.

Приклад 2.14. Відображення g^t з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, яке кожному вектору $x = (x_1, x_2)^T$ ставить у відповідність

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

задає фазовий потік в $\mathbb{R}^2$. Відповідне поле фазової швидкості задається вектором

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.7. *Рух точки під дією фазового потоку* $x(t) = g^t x_0$, $x_0 \in D$, $t \in \mathbb{R}$, *є розв'язком задачі Коші:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(0) = x_0.$$

Доведення. За груповою властивістю

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(g^t x_0)}{dt} = \left.\frac{d(g^{t+\tau} x_0)}{d\tau}\right|_{\tau=0} =$$

$$= \left.\frac{d\big(g^{\tau}(g^t x_0)\big)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = f(g^t x_0) = f(x(t)), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тому $x(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Крім того, $x(0) = g^0 x_0 = x_0$. Отже, виконується умова Коші.

■

У такий спосіб ми показали, що з будь-якою однопараметричною групою дифеоморфізмів пов'язана автономна система диференціальних рівнянь, права частина якої задається полем фазової швидкості відповідного фазового потоку. Розв'язки цієї системи диференціальних рівнянь описують рух точки під дією фазового потоку.

Зауважимо, що не обов'язково будь-яке гладке векторне поле визначає поле фазової швидкості потоку.

Приклад 2.15. Припустимо, що поле задано відображенням $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Щоб знайти відповідний фазовий потік, необхідно розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad x(0) = x_0.$$

Розв'язуємо рівняння і одержуємо

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

Отже,

$$g^t x = \frac{x}{1 - tx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Таке відображення не є дифеоморфізмом, воно навіть не визначено для всіх $x \in \mathbb{R}$. Утім, для вказаного відображення справджується групова властивість

$$g^{t+s} = g^t \cdot g^s, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

У тих випадках, коли всі розв'язки системи диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = f(x)$ можна продовжити на всю вісь $t \in \mathbb{R}$, можна побудувати за векторним полем $f(x)$ фазовий потік і відповідну фазову швидкість потоку, яка збігається з $f(x)$. В іншому випадку з векторним полем у кожній точці $x \in \mathcal{D}$ пов'язаний локальний фазовий потік, тобто однопараметрична сім'я дифеоморфізмів, визначена в деякому околі точки $x \in \mathcal{D}$. Поле фазових швидкостей локального фазового потоку збігається в цьому околі точки $x \in \mathcal{D}$ з векторним полем f. Локальні фазові потоки $\{g^t : t \in \mathbb{R}\}$, $\{h^t : t \in \mathbb{R}\}$ двох векторних полів називають топологічно еквівалентними в точках x і y, якщо існує гомеоморфізм w такий, що $y = w(x)$ і

$$g^t = w^{-1} \cdot h^t \cdot w, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Точку $x \in \mathcal{D}$ називають точкою рівноваги векторного поля f, якщо $f(x) = 0$. Нехай векторне поле f належить класу C^1, тобто відображення $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ є неперервно диференційованим. Якщо $x_0 \in \mathcal{D}$ є точкою рівноваги векторного поля f, то відображення

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} x, \qquad x \in \mathcal{D}$$

задає лінійну частину векторного поля f у точці x_0. Точку рівноваги векторного поля f називають гіперболічною, якщо жодне власне значення матриці лінійної частини цього векторного поля не є суто уявним.

Теорема 2.8 (Гробмана – Хартмана). *Векторне поле з класу C^1 із гіперболічною точкою рівноваги в деякому околі цієї точки топологічно еквівалентне своїй лінійній частині*.

Теорема Гробмана – Хартмана говорить про те, що якісна поведінка траєкторій нелінійної автономної системи в околі точки рівноваги близька до поведінки траєкторій системи першого наближення в околі цієї точки за умови, що матриця системи першого наближення не має суто уявних власних чисел. Зокрема, на площині це означає, що система першого наближення в околі точки рівноваги відтворює фазовий портрет нелінійної системи за винятком фазового портрета типу центр.

2.6. Дослідження стійкості за першим наближенням

Розглянемо методику дослідження стійкості нелінійної системи за допомогою системи першого наближення.

2.6.1. Аналіз стійкості розв'язків автономної системи

Дослідимо автономну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad t \geq 0. \tag{2.24}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.24), $f(x)$ – вектор-функція розмірності n, яка є неперервно диференційованою в деякому околі початку координат $U_H(0)$, $f(0) = 0$. Застосуємо до правої частини системи (2.24) лему Адамара

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{\partial f(sx)}{\partial x} dsx = \int_0^1 \frac{\partial f(sx)}{\partial x} dsx =$$

$$= \frac{\partial f(0)}{\partial x} x - \frac{\partial f(0)}{\partial x} x \int_0^1 ds +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial f(sx)}{\partial x} dsx = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x + \int_0^1 \left(\frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right) dsx.$$

Позначимо

$$R(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right) dsx = G(x)x,$$

$$G(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right) ds.$$

Тоді

$$f(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x} x + R(x),$$

зауважимо, що

$$\| R(x) \| \leq \|G(x)\| \| x \|, \qquad \frac{\| R(x) \|}{\| x \|} \leq \|G(x)\|.$$

Оскільки

$$\|G(x)\| \leq \left\| \int_0^1 \left(\frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right) ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right\| ds \leq$$

$$\leq \max_{s \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x} \right\|,$$

то

$$\lim_{x \to 0} \|G(x)\| = 0.$$

Зокрема, звідси маємо

$$\lim_{r \to +0} \mu(r) = 0, \qquad \mu(r) = \max_{\|x\| \leq r} \|G(x)\|.$$

Отже, систему (2.24) можемо подати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), \;\; t \geq 0, \tag{2.25}$$

де $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$.

Означення 2.4. *Систему*

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \geq 0 \tag{2.26}$$

називають системою першого наближення системи (2.24).

Справджується така теорема.

Теорема 2.9 (про асимптотичну стійкість). *Якщо всі власні числа* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *матриці* A *мають від'ємні дійсні частини*

$$Re\lambda_j < 0, \qquad j = 1,2, \dots, n,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, *системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.24) *– асимптотично стійкий за Ляпуновим*.

Доведення. З теореми 2.5 слідує, що для довільного

$$\gamma > \alpha = \max_{j=1,2,\dots,n} Re\lambda_j$$

існує константа $M = M(\gamma) > 0$, для якої

$$\| e^{At} \| \leq M(\gamma) e^{\gamma t}, \qquad t \geq 0.$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $M = M(\gamma) \geq 1$. Усі власні числа λ_1, λ_2, ..., λ_n матриці A системи (2.26) мають від'ємні дійсні частини

$$Re\lambda_j < 0, \qquad j = 1,2, \dots, n.$$

Тому

$$\alpha = \max_{j=1,2,\dots,n} Re\lambda_j < 0$$

і можна вибрати γ від'ємним. Позначимо $p = -\gamma > 0$. Тоді

$$\| e^{At} \| \leq Me^{-pt}, \qquad t \geq 0.$$

Виберемо $r > 0$ так, щоб

$$\mu(r) = \max_{\|x\| \leq r} \|G(x)\| < \frac{p}{M}.$$

Для x_0 таких, що $\| x_0 \| < \frac{r}{M} \leq r$, $x(t) = x(t, x_0)$, можемо визначити

$$T = \sup\{t > 0 : \| x(t) \| < r\}.$$

Подамо розв'язок $x(t) = x(t, x_0)$ системи (2.25) у вигляді

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} R(x(\tau))d\tau =$$

$$= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} G(x(\tau))x(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,T).$$

Тоді

$$\| x(t) \| \le \| e^{At} \| \| x_0 \| + \int_0^t \| e^{A(t-\tau)} \| \| G\big(x(\tau)\big) \| \| x(\tau) \| \, d\tau \le$$

$$\le Me^{-pt} \| x_0 \| + M\mu(r) \int_0^t \| e^{-p(t-\tau)} \| \| x(\tau) \| \, d\tau, \qquad t \in [0,T).$$

Отже,

$$\| x(t) \| e^{pt} \le M \| x_0 \| + M\mu(r) \int_0^t e^{p\tau} \| x(\tau) \| \, d\tau, \qquad t \in [0,T).$$

За лемою Гронуола – Белмана

$$\| x(t) \| e^{pt} \le M \| x_0 \| e^{M\mu(r)t}, \qquad t \in [0,T).$$

Звідси маємо оцінку

$$\| x(t) \| \le M \| x_0 \| e^{(M\mu(r)-p)t}, \qquad t \in [0,T).$$

Оскільки $\| x_0 \| < \frac{r}{M}$, $\mu(r) < \frac{p}{M}$, то $M\mu(r) - p < 0$ і

$$\| x(t) \| < re^{(M\mu(r)-p)t} < r, \qquad t \in [0,T).$$

Це означає, що розв'язок $x(t)$ може бути продовжений на всю додатну піввісь $t > 0$, тому що

$$\| x(t) \| < r, \qquad t \in [0,T)$$

для будь-якого $T > 0$. Оскільки

$$\| x(t) \| \le M \| x_0 \| e^{(M\mu(r)-p)t}, \qquad t \ge 0,$$

$M\mu(r) - p < 0$, то за означенням нульовий розв'язок системи (2.24) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

■

У подальшому покажемо (див. підрозд. 2.10), що виконується така теорема.

Теорема 2.10 (про нестійкість). *Якщо серед власних чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *матриці A знайдеться хоча б одне власне число з додатною дійсною частиною, тобто*

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} Re\lambda_j > 0,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0,\ t \geq 0$ *системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.24) *є нестійким за Ляпуновим*.

Зауважимо: якщо серед власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A знайдеться хоча б одне, дійсна частина якого рівна нулеві, причому решта власних чисел мають або від'ємну, або нульову дійсну частину, то наявність стійкості або нестійкості незбуреного розв'язку $x(t) = 0,\ t \geq 0$ системи (2.24) залежить не тільки від матриці A, але й від функції $R(x)$. Цей випадок називають *критичним*.

Приклад 2.16. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок скалярного рівняння

$$\dot{x} = g(x), \quad g \in C^1(-r, r), \quad g(0) = 0.$$

Згідно з теоремою 2.8 маємо.

1. $x(t) = 0$ – асимптотично стійкий, якщо $g'(0) < 0$.
2. $x(t) = 0$ – нестійкий, якщо $g'(0) > 0$.
3. Якщо $g'(0) = 0$, то про характер стійкості $x(t) = 0$ за першим наближенням нічого сказати не можна.

Наприклад, для рівняння

$$\dot{x} = x^3 - ax$$

маємо $g'(0) = -a$. Отже, якщо $a > 0$, то розв'язок $x(t) = 0$ асимптотично стійкий, якщо $a < 0$, то розв'язок $x(t) = 0$ – нестійкий. Якщо $a = 0$, то справджується $g'(0) = 0$ і перше наближення відповіді не дає. За допомогою другого методу Ляпунова (приклад 2.30) можна довести, що $x(t) = 0$ – нестійкий. Натомість для рівняння

$$\dot{x} = x^5 - x^3,$$

у якого також $g'(0) = 0$, другий метод Ляпунова показує, що $x(t) = 0$ – асимптотично стійкий (приклад 2.27).

Приклад 2.17. Дослідимо, за яких значень параметра a справджується асимптотична стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - 5x_2 + x_1^4, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2x_1x_2. \end{cases} \tag{2.27}$$

Система першого наближення для системи (2.27) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Знайдемо характеристичний поліном системи першого наближення. Він має вигляд

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -5 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (1+a)\lambda + a + 5.$$

Застосовуючи критерій Гурвіца, одержуємо, що якщо $1 + a < 0$, $a + 5 > 0$, то корені характеристичного полінома мають від'ємні дійсні частини. Тому для $a \in (-5, -1)$ за теоремою 2.9 нульовий розв'язок системи (2.27) є асимптотично стійким за Ляпуновим.

Приклад 2.18. Дослідимо на стійкість положення рівноваги $x = 0$, $y = 0$ математичного маятника

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a\sin x - by, \end{cases}$$

де $a > 0$, $b > 0$ (наявне тертя), або $b = 0$ (без тертя).

Матриця першого наближення при $x = 0$, $y = 0$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

Її характеристичний поліном записують так:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda b + a.$$

Якщо λ_1, λ_2 – власні числа матриці A, то за критерієм Гурвіца при $a > 0$, $b > 0$ маємо $Re\lambda_1 < 0$, $Re\lambda_2 < 0$. У цьому випадку положення рівноваги $x = 0$, $y = 0$ є асимптотично стійким. Натомість при $a > 0$, $b = 0$ виконується $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$ і за першим наближенням нічого сказати не можна.

2.6.2. Теорема про стійкість розв'язків неавтономної системи за першим наближенням

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \geq t_0, \tag{2.28}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.28), $f(t,x)$ – вектор-функція розмірності n, яка є неперервною за t і неперервно диференційованою за x, $f(t,0) = 0$, $t \geq t_0$. Застосуємо лему Адамара до правої частини системи (2.28):

$$f(t,x) = f(t,0) + \int_0^1 \frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} dsx = \int_0^1 \frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} dsx =$$

$$= \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} x - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} x \int_0^1 ds + \int_0^1 \frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} dsx =$$

$$= \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} x + \int_0^1 \left(\frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} \right) dsx.$$

Позначимо

$$R(t,x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} \right) dsx = G(t,x)x,$$

$$G(t,x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} \right) ds.$$

Тоді

$$f(t,x) = \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} x + R(t,x).$$

Справедлива оцінка

$$\| R(t,x) \| \leq \|G(t,x)\| \, \| x \|, \qquad \frac{\| R(t,x) \|}{\| x \|} \leq \|G(t,x)\|.$$

Оскільки

$$\|G(t,x)\| \leq \left\| \int_0^1 \left(\frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} \right) ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} \right\| ds \leq \max_{s \in [0,1]} \left\| \frac{\partial f(t,sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,0)}{\partial x} \right\|,$$

то
$$\lim_{x\to 0}\|G(t,x)\| = 0.$$
Позначимо
$$A(t) = \frac{\partial f(t,0)}{\partial x}.$$
Тоді $f(t,x) = A(t)x + R(t,x)$ і систему (2.28) можемо подати у вигляді
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(t,x), \qquad t \geq t_0. \tag{2.29}$$
Означення 2.5. *Систему*
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad t \geq t_0, \tag{2.30}$$
називають системою першого наближення системи (2.28).

Позначимо $X(t,\tau)$ фундаментальну матрицю системи першого наближення (2.30), нормовану за моментом $\tau \geq t_0$. Припустимо
$$\max_{\|x\|\leq\delta}\|G(t,x)\| \leq \alpha\ , \qquad t \geq t_0, \tag{2.31}$$
$\alpha = \alpha(\delta) > 0$. Виконується така теорема.

Теорема 2.11. *Нехай існують незалежні від* t, t_0 *константи* $k > 0$ *і* $\rho > 0$ *такі, що для будь-яких* $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$
$$\|X(t,\tau)\| \leq ke^{-\rho(t-\tau)} \tag{2.32}$$
та виконується (2.31), $\alpha < \frac{\rho}{k}$. *Тоді нульовий розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, *системи* (2.28) *є асимптотично стійким за Ляпуновим. Причому для будь-якого розв'язку* $x(t,x_0,t_0)$ *системи* (2.28), *для якого* $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$, *справджується нерівність*
$$\|x(t,x_0,t_0)\| \leq e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}\delta,\ t \geq t_0. \tag{2.33}$$
Доведення. Використовуючи формулу Коші, подамо розв'язок $x(t) = x(t,x_0,t_0)$ системи (2.29) у вигляді
$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)R(\tau,x(\tau))d\tau, \qquad t \geq t_0.$$
Враховуючи (2.31), (2.32), одержуємо
$$\|x(t)\| \leq ke^{-\rho(t-t_0)}\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau,\ \ t \geq t_0.$$

Звідси

$$\|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)} \le k\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\rho(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|d\tau, \qquad t \ge t_0.$$

Позначимо

$$u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}, \qquad c = k\|x(t_0)\|, \qquad v = k\alpha.$$

Тоді з леми Гронуола – Белмана слідує

$$u(t) \le k\|x(t_0)\|e^{k\alpha(t-t_0)}, \qquad t \ge t_0.$$

Оскільки $u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}$, то

$$\|x(t)\| \le e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}k\|x(t_0)\|, \qquad t \ge t_0.$$

Якщо $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$, то маємо

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \le \delta e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}, \qquad t \ge t_0.$$

Згідно з умовами теореми $\rho - k\alpha > 0$, тому виконується означення стійкості за Ляпуновим і $\lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0, t_0)\| = 0$.

■

2.7. Спектр ляпуновських характеристичних показників

Аналіз стійкості лінійної системи базується на дослідженні поведінки членів її фундаментальної системи розв'язків. Один із можливих підходів базується на порівнюванні якості асимптотичної поведінки розв'язків при $t \to +\infty$ з функцією $F(t, \lambda) = e^{\lambda t}$, яка залежить від параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Поведінка функції $F(t, \lambda)$ при $t \to +\infty$ є відомою: якщо дійсна частина $Re(\lambda) < 0$, то функція прямує до нуля при $t \to +\infty$; якщо $Re(\lambda) > 0$, то функція прямує до нескінченності. Здійснити ідею такого порівняння дозволяє поняття характеристичного показника.

Означення 2.6. *Характеристичним показником Ляпунова функції* $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, *яка визначена при* $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, *називають число*

$$\lambda(\varphi) = \overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{\ln\|\varphi(t)\|}{t}.$$

Приклад 2.19. Знайдемо характеристичний показник функції
$$\varphi(t) = t^k h, \qquad t \geq 0,$$
де $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $k = 1,2,\ldots,r$. За означенням
$$\lambda(\varphi) = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln \| t^k h \|}{t} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t^k}{t} + \frac{\ln \| h \|}{t} \right) =$$
$$= \overline{\lim}_{t\to\infty} \left(k\frac{\ln t}{t} + \frac{\ln \| h \|}{t} \right) = 0.$$

Лема 2.1. *Справджуються такі властивості.*

1. *Під час множення функції* $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *на константу* $C \neq 0$ *ляпуновський характеристичний показник не змінюється:*
$$\lambda(C\varphi) = \lambda(\varphi). \tag{2.34}$$
2. *Якщо для функцій* $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *справедлива умова мононтонності* $\| \varphi(t) \| \leq \| \psi(t) \|$, $t \geq t_0 > 0$, *то* $\lambda(\varphi) \leq \lambda(\psi)$.

Лема обґрунтовується безпосередньо за означенням 2.6.

Лема 2.2. *Нехай* $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, *ляпуновський характеристичний показник* $\lambda(\varphi)$ *є скінченним. Тоді для того, щоб* $\lambda = \lambda(\varphi)$, *необхідно і достатньо для довільного* $\varepsilon > 0$:
$$\lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\lambda-\varepsilon)t} = 0, \tag{2.35}$$
$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\lambda+\varepsilon)t} = \infty. \tag{2.36}$$

Доведення. Необхідність. За означенням 2.6 для довільної послідовності $t_k \to \infty$, $k \to \infty$,
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \| \varphi(t_k) \|}{t_k} \leq \lambda$$
і знайдеться k_0 таке, що для $k > k_0$
$$\frac{\ln \| \varphi(t_k) \|}{t_k} \leq \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Звідси
$$\| \varphi(t_k) \| \leq e^{\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)t_k}, \qquad k > k_0.$$
Тому
$$\| \varphi(t_k) \| e^{-(\lambda+\varepsilon)t_k} \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2}t_k}, \qquad k > k_0.$$

Якщо $k \to \infty$, то маємо

$$\lim_{k\to\infty} \| \varphi(t_k) \| e^{-(\lambda+\varepsilon)t_k} = 0.$$

Отже, справджується (2.35). Обґрунтуємо (2.36). За означенням 2.6 знайдеться послідовність $t_k \to \infty$, $k \to \infty$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \| \varphi(t_k) \|}{t_k} = \lambda.$$

Звідси випливає, що існує номер k_0 такий, що для $k > k_0$

$$\frac{\ln \| \varphi(t_k) \|}{t_k} \ge \lambda - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Маємо

$$\| \varphi(t_k) \| \ge e^{\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)t_k}, \qquad k > k_0.$$

Подальші перетворення приводять до нерівності

$$\| \varphi(t_k) \| e^{-(\lambda-\varepsilon)t_k} \ge e^{\frac{\varepsilon}{2}t_k}, \qquad k > k_0.$$

За означенням верхньої границі

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\lambda+\varepsilon)t} \ge \lim_{t\to\infty} e^{\frac{\varepsilon}{2}t} = \infty.$$

Достатність. З (2.35) випливає, що для будь-якої послідовності $s_k \to \infty$, $k \to \infty$, для довільного $M > 0$ знайдеться номер k_1 такий, що справджується оцінка

$$\| \varphi(s_k) \| e^{-(\lambda+\varepsilon)s_k} \le M, \qquad k > k_1.$$

Звідси

$$\| \varphi(s_k) \| \le M e^{(\lambda+\varepsilon)s_k}, \qquad k > k_1.$$

Логарифмуючи ліву і праву частину останньої нерівності, матимемо

$$\ln \| \varphi(s_k) \| \le \ln M + (\lambda+\varepsilon)s_k, \qquad k > k_1.$$

Ділимо ліву і праву частину останньої нерівності на $s_k > 0$ і одержуємо

$$\frac{\ln \| \varphi(s_k) \|}{s_k} \le \frac{\ln M}{s_k} + \lambda + \varepsilon, \qquad k > k_1.$$

Оскільки $s_k \to \infty$, $k \to \infty$, то за означенням верхньої границі

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln \| \varphi(t) \|}{t} \le \lambda + \varepsilon.$$

Через те, що $\varepsilon > 0$ є довільним, то

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln\|\varphi(t)\|}{t} \leq \lambda. \qquad (2.37)$$

З (2.36) слідує, що існує послідовність $t_k \to \infty$, $k \to \infty$, така, що для довільного $M > 0$ знайдеться номер k_2 такий, що справджується оцінка

$$\| \varphi(t_k) \| \, e^{(-\lambda+\varepsilon)t_k} \geq M, \qquad k > k_2.$$

Логарифмуємо ліву і праву частину останньої нерівності, ділимо на $t_k > 0$ й одержуємо

$$\frac{\ln \| \varphi(t_k) \|}{t_k} \geq \frac{\ln M}{t_k} + \lambda - \varepsilon, \qquad k > k_2.$$

За означенням верхньої границі

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln \| \varphi(t) \|}{t} \geq \lambda - \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, то

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln\|\varphi(t)\|}{t} \geq \lambda. \qquad (2.38)$$

Тоді з означення 2.6 і оцінок (2.37), (2.38) випливає, що $\lambda = \lambda(\varphi)$.

■

Лема показує, що $\| \varphi(t) \|$ росте повільніше, ніж $e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ при $t \to \infty$, де $\varepsilon > 0$, $\lambda = \lambda(\varphi)$. Разом із тим існує послідовність $\{t_k\}$, на якій функція $\| \varphi(t) \|$ росте швидше, ніж $e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ при $t_k \to \infty$, $k \to \infty$. Це означає, що ляпуновський характеристичний показник $\lambda = \lambda(\varphi)$ дозволяє порівнювати асимптотичну поведінку $\| \varphi(t) \|$ з асимптотичною поведінкою експоненціальної функції. З доведення леми 2.2, а саме з (2.37), (2.38), випливають такі наслідки.

Наслідок 2.3. *Нехай* $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *і знайдеться таке* λ, *що для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконується умова* (2.35). *Тоді*

$$\lambda(\varphi) \leq \lambda.$$

Нехай $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *і знайдеться таке* λ, *що для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконується умова* (2.36). *Тоді*

$$\lambda(\varphi) \geq \lambda.$$

Справедлива така лема.

Лема 2.3. *Ляпуновський характеристичний показник суми двох функцій* $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $\psi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *не перевищує більшого з показників цих функцій*:

$$\lambda(\varphi + \psi) \le \max\big(\lambda(\varphi), \lambda(\psi)\big). \tag{2.39}$$

Причому, якщо $\lambda(\varphi) \ne \lambda(\psi)$, *то*

$$\lambda(\varphi + \psi) = \max\big(\lambda(\varphi), \lambda(\psi)\big).$$

Доведення. Нехай

$$\alpha = \max\big(\lambda(\varphi), \lambda(\psi)\big).$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ з леми 2.2 випливає

$$\lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} \le \lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\lambda(\varphi)-\varepsilon)t} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \| \psi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} \le \lim_{t\to\infty} \| \psi(t) \| e^{(-\lambda(\psi)-\varepsilon)t} = 0.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} = \lim_{t\to\infty} \| \psi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} = 0.$$

З нерівності трикутника

$$\lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) + \psi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} \le$$

$$\le \lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} + \lim_{t\to\infty} \| \psi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} = 0.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \| \varphi(t) + \psi(t) \| e^{(-\alpha-\varepsilon)t} = 0.$$

За наслідком 2.3 леми 2.2 маємо (2.39).

Нехай $\lambda(\varphi) \ne \lambda(\psi)$ і, для визначеності,

$$\lambda(\varphi) < \lambda(\psi) = \alpha.$$

Припустимо, від супротивного, що $\lambda(\varphi + \psi) < \alpha$. Тоді

$$\alpha = \lambda(\psi) = \lambda(\varphi + \psi - \varphi) \le \max\big(\lambda(\varphi + \psi), \lambda(-\varphi)\big) \le$$

$$\le \max\big(\lambda(\varphi + \psi), \lambda(\varphi)\big) < \alpha.$$

Одержали протиріччя, яке показує, що $\lambda(\varphi + \psi) = \alpha$.

■

Приклад 2.20. Знайдемо характеристичний показник функції

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} h, \qquad t \ge 0,$$

де $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \ne 0$.

За означенням 2.6 отримуємо

$$\lambda(\varphi) = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln \| e^{\lambda t} h \|}{t} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln(e^{at} \| h \|)}{t} =$$

$$= \overline{\lim}_{t\to\infty} \left(\frac{\ln e^{at}}{t} + \frac{\ln \| h \|}{t} \right) = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{at}{t} = a.$$

Приклад 2.21. Знайдемо характеристичний показник функції

$$\varphi(t) = t^k e^{\lambda t} h, \qquad t \geq 0,$$

де $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $k = 1,2, \dots, r$.

За означенням 2.4

$$\lambda(\varphi) = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\ln \| t^k e^{\lambda t} h \|}{t} =$$

$$= \overline{\lim}_{t\to\infty} \left(\frac{\ln t^k}{t} + \frac{\ln e^{at}}{t} + \frac{\ln \| h \|}{t} \right) =$$

$$= \overline{\lim}_{t\to\infty} \left(k \frac{\ln t}{t} + a + \frac{\ln \| h \|}{t} \right) = a.$$

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.40}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n-вимірний вектор стану системи (2.40), $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $t \in \mathbb{R}$. Справедлива теорема.

Теорема 2.12 (Ляпунова). *Нехай існує константа $M > 0$ така, що для довільного $t > 0$ справджується умова*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|A(s)\| ds \leq M.$$

Тоді для будь-якого ненульового розв'язку $x(t)$, $t \geq t_0$, системи (2.40) *існує обмежений ляпуновський характеристичний показник*

$$\lambda(x) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\|x(t)\|.$$

Доведення. Будь-який розв'язок $x(t)$ системи (2.40) може бути представлений як розв'язок інтегрального рівняння

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds,$$

де $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\| x(t) \| \leq \| x(t_0) \| + \left| \int_{t_0}^{t} \| A(s) \| \| x(s) \| \, ds \right|, \qquad t, t_0 \in \mathbb{R}^1.$$

За узагальненою лемою Гронуола – Белмана

$$\| x(t_0) \| \, e^{-\int_{t_0}^{t} \| A(s) \| ds} \leq \| x(t) \| \leq \| x(t_0) \| \, e^{\int_{t_0}^{t} \| A(s) \| ds}, \quad t \geq t_0.$$

Оскільки $x(t_0) \neq 0$, то

$$e^{-\int_{t_0}^{t} \| A(s) \| ds} \leq \frac{\| x(t) \|}{\| x(t_0) \|} \leq e^{\int_{t_0}^{t} \| A(s) \| ds}, \qquad t \geq t_0.$$

Звідси

$$-\int_{t_0}^{t} \| A(s) \| \, ds \leq \ln \frac{\| x(t) \|}{\| x(t_0) \|} \leq \int_{t_0}^{t} \| A(s) \| \, ds, \qquad t \geq t_0.$$

Враховуючи адитивність інтеграла, одержуємо

$$-\int_{t_0}^{0} \| A(s) \| \, ds - \int_{0}^{t} \| A(s) \| \, ds \leq \ln \frac{\| x(t) \|}{\| x(t_0) \|} \leq$$

$$\leq \int_{0}^{t} \| A(s) \| \, ds + \int_{t_0}^{0} \| A(s) \| \, ds, \qquad t \geq t_0.$$

Ділимо кожну частину останньої нерівності на $t > 0$

$$-\frac{1}{t}\int_{t_0}^{0} \| A(s) \| \, ds - \frac{1}{t}\int_{0}^{t} \| A(s) \| \, ds \leq \frac{1}{t} \ln \frac{\| x(t) \|}{\| x(t_0) \|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{t}\int_{0}^{t} \| A(s) \| \, ds + \frac{1}{t}\int_{t_0}^{0} \| A(s) \| \, ds, \qquad t \geq t_0, \qquad t > 0.$$

За умовами теореми

$$-\frac{1}{t}\int_{t_0}^{0} \| A(s) \| \, ds - M \leq$$

$$\leq \frac{1}{t} \ln \frac{\| x(t) \|}{\| x(t_0) \|} \leq M + \frac{1}{t}\int_{t_0}^{0} \| A(s) \| \, ds, \qquad t \geq t_0, \qquad t > 0.$$

Переходимо до границі й одержимо

$$-M \le \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\| x(t) \|}{\| x(t_0) \|} \le M,$$

звідки

$$-M \le \lambda\left(\frac{x}{\| x(t_0) \|}\right) \le M.$$

Оскільки за лемою 2.1 $\lambda\left(\frac{x}{\|x(t_0)\|}\right) = \lambda(x)$, то

$$-M \le \lambda(x) \le M. \qquad \blacksquare$$

Наслідок 2.4. *Нехай існує константа* $M > 0$ *така, що для довільного* $t \ge t_0$ *справджується умова*

$$\|A(t)\| \le M.$$

Тоді для будь-якого ненульового розв'язку $x(t)$ *системи* (2.40) *існує обмежений ляпуновський характеристичний показник* $\lambda(x)$.

За теоремою про фундаментальну систему розв'язків існує n лінійно незалежних розв'язків $x^{(i)}(t)$ системи (2.40), $i = 1,2,\dots,n$. Якщо виконуються умови теореми 2.12, то фундаментальній системі розв'язків системи (2.40) відповідає n ляпуновських характеристичних показників, які є обмеженими і можуть бути впорядкованими в порядку спадання:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Якщо матриця системи (2.20) є сталою, то, як наслідок із прикладів 2.18–2.20, ляпуновські характеристичні показники збігаються з дійсними частинами власних значень матриці системи.

Ляпуновські характеристичні показники фундаментальної системи розв'язків лінійної системи не обов'язково різні. Наприклад, члени фундаментальної системи розв'язків лінійної системи зі сталими коефіцієнтами, які відповідають кратному кореню характеристичного рівняння, мають рівні ляпуновські характеристичні показники.

Означення 2.7. *Множину ляпуновських характеристичних показників*

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

фундаментальної системи розв'язків системи (2.40) *називають спектром ляпуновських характеристичних показників цієї системи. Причому найбільше із цих чисел* $\lambda_* = \lambda_1$ *називають старшим ляпуновським показником.*

Спектр ляпуновських характеристичних показників слід розглядати як характеристику лінійної системи рівнянь (2.40) у цілому.

Оскільки будь-який розв'язок $\tilde{x}(t)$ системи (2.40) є лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{(i)}(t),$$

де c_i – деякі константи, то з лем 2.1, 2.3 випливає

$$\lambda(\tilde{x}) \leq \max_{i=1,2,\ldots n} \lambda\left(c_i x^{(i)}\right) = \max_{i=1,2,\ldots n} \lambda\left(x^{(i)}\right) = \lambda_*.$$

Це означає, що ляпуновський характеристичний показник $\lambda(\tilde{x})$ розв'язку $\tilde{x}(t)$ не перевищує старший ляпуновський показник λ_*. З властивостей спектра ляпуновських характеристичних показників випливає така теорема.

Теорема 2.13. *Якщо старший ляпуновський показник* λ_* *системи диференціальних рівнянь* (2.40) *є від'ємним, то така система асимптотично стійка. Якщо старший ляпуновський показник системи диференціальних рівнянь* (2.40) *є додатним, то така система нестійка*.

Доведення. Припустимо, що $\lambda_* < 0$ і $x(t)$ – довільний розв'язок системи (2.40). Тоді ляпуновський показник $\lambda(x)$ цього розв'язку не перевищує λ_* і тому $\lambda(x) < 0$. За лемою 2.2 для довільного $\varepsilon \in (0, |\lambda(x)|)$

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t) \| e^{(-\lambda(x)-\varepsilon)t} = 0.$$

Це означає, що для довільної послідовності $t_k \to \infty$, $k \to \infty$, і для будь-якого $\sigma > 0$ знайдеться номер k_0 такий, що

$$\| x(t_k) \| e^{(-\lambda(x)-\varepsilon)t_k} < \sigma, \qquad k > k_0.$$

Звідси

$$\| x(t_k) \| < \sigma e^{(\lambda(x)+\varepsilon)t_k}, \qquad k > k_0.$$

Оскільки $\varepsilon \in (0, |\lambda(x)|)$, то з останньої оцінки випливає

$$\lim_{t\to\infty} \| x(t) \| = 0,$$

і нульовий розв'язок системи (2.40) є асимптотично стійким.

Припустимо далі, що $\lambda_* > 0$. Старшому характеристичному показнику $\lambda_* > 0$ відповідає один із членів фундаментальної системи розв'язків системи (2.40), який ми позначимо $x(t)$. За лемою 2.2 для довільного $\varepsilon \in (0, \lambda_*)$

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \parallel \varphi(t) \parallel e^{(-\lambda_*+\varepsilon)t} = \infty.$$

Це означає, що знайдеться послідовність $t_k \to \infty$, $k \to \infty$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \parallel x(t_k) \parallel e^{(-\lambda_*+\varepsilon)t_k} = \infty.$$

Отже, для $M > 0$ знайдеться номер k_0 такий, що

$$\parallel x(t_k) \parallel e^{(-\lambda_*+\varepsilon)t_k} > M, \qquad k > k_0.$$

Звідси

$$\parallel x(t_k) \parallel > M e^{(\lambda_*-\varepsilon)t_k}, \qquad k > k_0.$$

Враховуючи, що $\varepsilon \in (0, \lambda_*)$, з останньої нерівності доходимо висновку, що розв'язок $x(t)$ є необмеженим для $t > t_0$, і тому нульовий розв'язок системи (2.40) нестійкий.

■

Теорема 2.14. *Нехай для довільного* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(t) \parallel x \parallel^2 \le \langle A(t)x, x \rangle \le \gamma(t) \parallel x \parallel^2,\ t \ge t_0, \qquad (2.41)$$

де $\mu(t)$, $\gamma(t)$ *– інтегровані функції*, $t \ge t_0$, $A(t)$ *– матриця системи диференціальних рівнянь* (2.40). *Тоді для довільного розв'язку* $x(t)$ *системи* (2.40)

$$\parallel x(t_0) \parallel e^{M(t)} \le \parallel x(t) \parallel \le \parallel x(t_0) \parallel e^{\Gamma(t)},\ t \ge t_0, \qquad (2.42)$$

де

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} \mu(s)ds, \qquad \Gamma(t) = \int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds.$$

Доведення. Розглянемо

$$\frac{d}{dt} \parallel x(t) \parallel^2 = \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle = 2\left\langle \frac{dx(t)}{dt}, x(t) \right\rangle =$$

$$= 2\langle A(t)x(t), x(t)\rangle,\ t \ge t_0. \qquad (2.43)$$

З (2.41), (2.43) випливає

$$2\mu(t) \parallel x(t) \parallel^2 \leq \frac{d}{dt} \parallel x(t) \parallel^2 \leq 2\gamma(t) \parallel x(t) \parallel^2, \quad t \geq t_0. \qquad (2.44)$$

З (2.44) маємо

$$\frac{d}{dt} \parallel x(t) \parallel^2 - 2\mu(t) \parallel x(t) \parallel^2 \geq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Домножимо останню нерівність на додатну функцію $e^{-2M(t)}$ й одержимо

$$\frac{d \parallel x(t) \parallel^2}{dt} e^{-2M(t)} - 2\mu(t) \parallel x(t) \parallel^2 e^{-2M(t)} \geq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Враховуючи, що $M'(t) = \mu(t)$, нерівність може бути записана у такий спосіб:

$$\frac{d}{dt}\left(\parallel x(t) \parallel^2 e^{-2M(t)}\right) \geq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Отже, функція

$$G(t) = \parallel x(t) \parallel^2 e^{-2M(t)}$$

є неспадною, $t \geq t_0$, тому $G(t_0) \leq G(t)$, $t \geq t_0$. Звідси, враховуючи, що $M(t_0) = 0$, одержуємо

$$\parallel x(t_0) \parallel^2 \leq \parallel x(t) \parallel^2 e^{-2M(t)}, \qquad t \geq t_0.$$

Дістаємо

$$\parallel x(t_0) \parallel e^{M(t)} \leq \parallel x(t) \parallel, \quad t \geq t_0. \qquad (2.45)$$

Ми довели першу частину нерівності (2.41). Аналогічно обґрунтовуємо другу частину нерівності. З (2.44) маємо

$$\frac{d}{dt} \parallel x(t) \parallel^2 - 2\gamma(t) \parallel x(t) \parallel^2 \leq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Домножимо останню нерівність на додатну функцію $e^{-2\Gamma(t)}$ і одержимо

$$\frac{d \parallel x(t) \parallel^2}{dt} e^{-2\Gamma(t)} - 2\gamma(t) \parallel x(t) \parallel^2 e^{-2\Gamma(t)} \leq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Враховуючи, що $\Gamma'(t) = \gamma(t)$, остання нерівність може бути записана у такий спосіб:

$$\frac{d}{dt}\left(\parallel x(t) \parallel^2 e^{-2\Gamma(t)}\right) \leq 0, \qquad t \geq t_0.$$

Отже, функція

$$F(t) = \| x(t) \|^2 \, e^{-2\Gamma(t)}$$

є незростаючою, $t \geq t_0$, тому $F(t) \leq F(t_0)$, $t \geq t_0$. Звідси, враховуючи, що $\Gamma(t_0) = 0$, одержуємо

$$\| x(t) \|^2 \, e^{-2\Gamma(t)} \leq \| x(t_0) \|^2, \qquad t \geq t_0.$$

Далі маємо

$$\| x(t) \| \leq \| x(t_0) \| \, e^{\Gamma(t)}, \; t \geq t_0. \qquad (2.46)$$

З (2.45), (2.46) випливає (2.41).

■

Обґрунтування оцінки області обмежень характеристичних показників базується на такому твердженні.

Лема 2.4 (співвідношення Релея). *Нехай B – $n \times n$-симетрична матриця. Тоді*

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{x^T B x}{x^T x} \leq \lambda_{\max}(B),$$

де $\lambda_{\min}(B)$, $\lambda_{\max}(B)$ – мінімальні й максимальні власні значення матриці B, $x \neq 0$.

Доведення. Оскільки матриця B – симетрична, то

$$B = U^T \Lambda U,$$

де U – ортогональна матриця розмірності $n \times n$,

$$U^T U = E,$$

Λ – діагональна матриця розмірності $n \times n$, причому діагональними елементами цієї матриці є власні значення $\lambda_k, = 1,2, \dots, n$, матриці B. Тоді

$$x^T B x = x^T U^T \Lambda U x = z^T \Lambda z.$$

Тут $z = Ux = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$. Помітимо, що

$$z^T \Lambda z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2 \leq$$

$$\leq \lambda_{\max}(B) \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \lambda_{\max}(B) \, \| z \|^2.$$

Крім того,

$$\| z \|^2 = z^T z = x^T U^T U x = x^T x = \| x \|^2.$$

Тому

$$x^T Bx = z^T \Lambda z \le \lambda_{\max}(B) \parallel z \parallel^2 = \lambda_{\max}(B) \parallel x \parallel^2.$$

Зауважимо: якщо $h_{\max} \in \mathbb{R}^n$ – власний вектор матриці B, який відповідає власному числу $\lambda_{\max}(B)$, то

$$h_{\max}^T B h_{\max} = \lambda_{\max}(B) \parallel h_{\max} \parallel^2.$$

Перша частина леми, а саме, оцінка зверху для функції $x^T Bx$, обґрунтована.

Обґрунтуємо оцінку знизу для цієї функції. Розглянемо

$$z^T \Lambda z = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2 \ge$$

$$\ge \lambda_{\min}(B) \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \lambda_{\min}(B) \parallel z \parallel^2.$$

Оскільки $\parallel z \parallel^2 = \parallel x \parallel^2$, то

$$x^T Bx = z^T \Lambda z \ge \lambda_{\min}(B) \parallel z \parallel^2 = \lambda_{\min}(B) \parallel x \parallel^2.$$

Зауважимо: якщо $h_{\min} \in \mathbb{R}^n$ – власний вектор матриці B, який відповідає власному числу $\lambda_{\min}(B)$, то

$$h_{\min}^T B h_{\min} = \lambda_{\min}(B) \parallel h_{\min} \parallel^2.$$

Остаточно маємо

$$\lambda_{\min}(B) \parallel x \parallel^2 \le x^T Bx \le \lambda_{\max}(B) \parallel x \parallel^2.$$

■

Наслідок 2.5. *В умовах леми* 2.4

$$\lambda_{\min}(B) = \min_{\|x\|=1} x^T Bx, \qquad \lambda_{\max}(B) = \max_{\|x\|=1} x^T Bx.$$

Теорема 2.15 (нерівність Важевського). *Для довільного розв'язку* $x(t)$ *системи* (2.40)

$$\parallel x(t_0) \parallel e^{\Lambda_{\min}(t)} \le \parallel x(t) \parallel \le \parallel x(t_0) \parallel e^{\Lambda_{\max}(t)}, \ t \ge t_0, \qquad (2.47)$$

де

$$\Lambda_{\min}(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_{\min}(s) ds, \qquad \Lambda_{\max}(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_{\max}(s) ds,$$

$\lambda_{\min}(t), \lambda_{\max}(t)$ *– мінімальне і максимальне власні числа матриці*

$$\frac{1}{2}(A(t) + A^T(t)), \qquad t \ge t_0.$$

Доведення. Для довільного $x \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\langle A(t)x, x\rangle = \frac{1}{2}\langle (A(t) + A^T(t))x, x\rangle, \qquad t \geq t_0.$$

Матриця $\frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))$ є симетричною. Враховуючи співвідношення Релея

$$\lambda_{\min}(t) \parallel x \parallel^2 \leq \frac{1}{2}\langle (A(t) + A^T(t))x, x\rangle \leq \lambda_{\max}(t) \parallel x \parallel^2,$$
$$t \geq t_0.$$

Отже,

$$\lambda_{\min}(t) \parallel x \parallel^2 \leq \langle A(t)x, x\rangle \leq \lambda_{\max}(t) \parallel x \parallel^2, \qquad t \geq t_0.$$

З теореми 2.15 випливає (2.47).

■

Нерівність Важевського (2.47) дозволяє аналізувати стійкість нульового розв'язку системи (2.40).

Якщо

$$\int_0^t \lambda_{\max}(s)ds$$

є обмеженим зверху, $t \geq 0$, то з (2.47) випливає, що нульовий розв'язок системи (2.40) стійкий.

Якщо

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda_{\max}(s)ds = -\infty,$$

то нульовий розв'язок системи (2.40) є асимтотично стійким за Ляпуновим. У випадку, якщо

$$\int_0^t \lambda_{\min}(s)ds$$

є необмеженим зверху, $t \geq 0$, то, як наслідок нерівності (2.47), нульовий розв'язок системи (2.40) нестійкий.

Як приклад, розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -tx + y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

Матриця системи

$$A(t) = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

тому

$$\frac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right) = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже

$$\lambda_{\max}(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0,1], \\ -1, & t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Для $t > 1$ маємо

$$\int_0^t \lambda_{\max}(s)ds = \frac{1}{2} - t.$$

З нерівності (2.47) доходимо висновку, що нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким, оскільки

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda_{\max}(s)ds = -\infty.$$

Наслідок 2.6. *Спектр ляпуновських характеристичних показників системи диференціальних рівнянь* (2.40) *належить проміжку*

$$\left[\overline{\lim}_{t \to \infty} \frac{\Lambda_{\min}(t)}{t}, \ \ \underline{\lim}_{t \to \infty} \frac{\Lambda_{\max}(t)}{t}\right].$$

Ляпуновські характеристичні показники можна застосовувати для аналізу стійкості розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь. Ідея полягає у тому, що для розв'язку нелінійної системи відповідна йому система першого наближення має певний спектр ляпуновських характеристичних показників. Присутність у цьому спектрі показника λ означає, що існує таке збурення вихідної траєкторії, яке у лінійному наближенні еволюціонує в часі як $e^{\lambda t}$. Отже, присутність у спектрі хоча б одного додатного показника означає нестійкість відповідного розв'язку нелінійної системи. Якщо всі показники від'ємні, то це свідчить про його асимптотичну стійкість.

Ще одним важливим застосуванням ляпуновських характеристичних показників є аналіз поведінки фазових траєкторій на атракторі. Детальніше ми це розглянемо в розд. 4.

2.8. Другий метод Ляпунова

Метод дослідження стійкості за першим наближенням є потужним, але не універсальним. У деяких випадках він не може дати відповідь на питання про стійкість розв'язку. Часто ефективним є метод, що ґрунтується на побудові спеціальних функцій Ляпунова, які дозволяють отримати достатні умови стійкості. Такий підхід називають другим методом Ляпунова.

2.8.1. Функції Ляпунова

Функцією Ляпунова називають функцію, яка застосовується для аналізу стійкості розв'язків системи і задовольняє теореми, що належать до другого методу Ляпунова. Вона в певному сенсі характеризує відстань від збуреного розв'язку до незбуреного. Однією з основних властивостей таких функцій є знаковизначеність, або знакосталість.

Розглянемо неперервну функцію $V: \mathcal{D}_H \to \mathbb{R}$, де

$$\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < H\}, \qquad H > 0.$$

Означення 2.8. *Функцію $V(x)$ називають додатно визначеною в області $\mathcal{D}_H$, якщо $V(x) > 0$, $x \in \mathcal{D}_H$, $x \neq 0$ і $V(0) = 0$. Функцію $V(x)$ називають від'ємно визначеною, якщо $-V(x)$ – додатно визначена функція.*

Це означає, що від'ємно визначена функція $V(x) < 0$, $x \in \mathcal{D}_H$, $x \neq 0$ і $V(0) = 0$. Наприклад, функція $V(x_1, x_2, x_3) = -x_1^6 - x_2^2 - x_3^4$ є від'ємно визначеною, а функція $V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2$ є додатно визначеною. На рис. 2.12 зображено приклад додатно визначеної функції Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Означення 2.9. *Функцію $V(x)$ називають знакосталою на множині $\mathcal{D}_H$, якщо вона є або недодатною, або невід'ємною для всіх $x \in \mathcal{D}_H$. У першому випадку функцію називають від'ємно сталою, а в другому – додатно сталою. Функцію $V(x)$ називають знакозмінною в області $\mathcal{D}_H$, якщо вона набуває в цій області як додатних, так і від'ємних значень.*

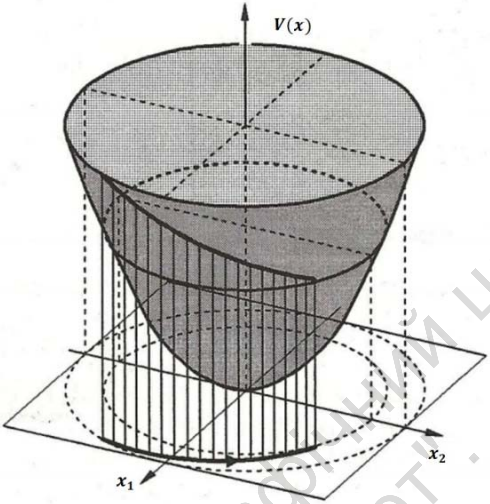


Рис. 2.12. Приклад додатно визначеної функції $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Наприклад, функція $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + x_3^2$ є додатно сталою, а функція $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ – знакозмінною в будь-якому околі нуля.

Додатно визначену функцію зручно вибирати як квадратичну форму

$$V(x) = x^T B x = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j. \tag{2.48}$$

Тут матриця $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ є симетричною, тобто $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. У цьому випадку для дослідження функції Ляпунова на додатну визначеність застосовують таке твердження.

Теорема 2.16 (критерій Сильвестра). *Щоб квадратична форма* (2.48) *була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори матриці B були додатними:*

$$\Delta_1 = b_{11} > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \\ \Delta_n = |B| > 0. \tag{2.49}$$

Для від'ємної визначеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб непарні головні мінори матриці B, починаючи з Δ_1, були від'ємними, а парні – додатними, тобто $\Delta_k < 0$, якщо k непарне, $\Delta_k > 0$, якщо k парне, $k = 1,2, \dots, n$.

Приклад 2.22. Розглянемо функцію

$$V(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1^2.$$

Матриця квадратичної форми

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до умови (2.40), головні мінори $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = |B| = 3 > 0$. За критерієм Сильвестра функція $V(x_1, x_2)$ є додатно визначеною.

Розглянемо неперервну додатно визначену функцію $V(x)$, визначену в області $\mathcal{D}_H$. Проаналізуємо властивості пов'язаної з нею лінії рівня

$$\gamma_c = \{x \in \mathcal{D}_H : V(x) = c\}, \tag{2.50}$$

де $c > 0$. Якщо $c = 0$, то співвідношення (2.50) задовольняє лише одна точка $x = 0$. Ми покажемо, що для достатньо малого $c > 0$ поверхня (2.50) є замкненою в певному розумінні.

Означення 2.10. *Поверхню γ_c називають замкненою відносно точки* 0*, якщо довільна неперервна крива, яка сполучає початок координат із точкою границі області $\mathcal{D}_H$, перетинає γ_c хоча б в одній точці.*

Отже, доведемо: якщо $V(x)$ є неперервною додатно визначеною функцією, то γ_c є замкненою відносно точки 0 для достатньо малих $c > 0$. Для цього виберемо довільне $r \in (0, H)$ і нехай ℓ – точна нижня грань функції $V(x)$ на множині $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$, тобто

$$\inf_{\|x\| = r} V(x) = \ell.$$

У такий спосіб

$$V(x) \geq \ell, \qquad x \in S_r.$$

Число ℓ – додатне, оскільки $V(x)$ – додатно визначена неперервна функція.

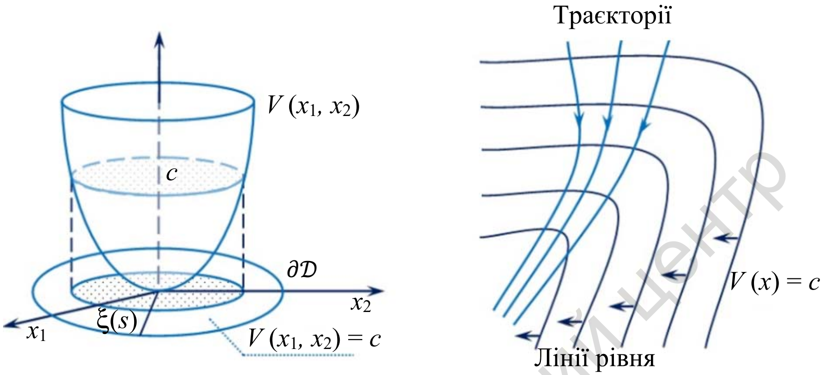


Рис. 2.13. Замкненість поверхні рівня додатно визначеної функції відносно точки 0

Візьмемо $c \in (0, \ell)$. Тоді

$$L_c = \{x \in \mathcal{K}_r(0) : V(x) \le c\} \subset int\, \mathcal{K}_r(0).$$

Покажемо це від супротивного. Припустимо, що існує точка $y \in L_c$ така, що $y \in S_r = \partial\mathcal{K}_r(0)$. Враховуючи, що $c \in (0, \ell)$, $y \in S_r$, у цій точці маємо

$$V(y) \ge \ell > c.$$

Одержали протиріччя з тим, що з $y \in L_c$ випливає $V(y) \le c$. Отже $y \notin L_c$.

Розглянемо довільну неперервну криву $\xi(s)$, $s \in [0,1]$, таку, що $\xi(0) = 0$, $\xi(1) \in \partial\mathcal{D}_H$ (рис. 2.13). Оскільки функція $g(s) = \|\xi(s)\|$ неперервна, $s \in [0,1]$, $g(0) = 0$, $g(1) = H > 0$, то існує $\tau_0 \in (0,1)$ таке, що $g(\tau_0) = r$. Це означає, що $\xi(\tau_0) \in S_r$. Враховуючи, що $V(\xi(\tau_0)) \ge \ell > c$ і функція $f(s) = \mathrm{V}(\xi(s))$ є неперервною, $s \in [0,1]$, $f(0) = 0$, $f(\tau_0) > c$, то існує $\tau \in (0, \tau_0)$ таке, що $f(\tau) = c$. Як наслідок $V\big(\xi(\tau)\big) = c$ і $\xi(\tau) \in \gamma_c$. Отже, γ_c є замкненою відносно точки 0 поверхнею при $c \in (0, \ell)$.

Властивість замкненості відносно точки 0 характерна тільки для знаковизначених функцій. Для знакосталих, знакозмінних функцій поверхні рівня можуть бути розімкнені в сенсі означення 2.10.

Приклад 2.23. Лінії рівня функції

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

не є замкненими відносно точки 0. Справді, якщо розглянути

$$\gamma_c = \{x_1, x_2 : x_1^2 - x_2^2 = c\},$$

то крива $\xi_1(s) = (0, sH)$, $s \in [0,1]$, $H > 0$, не перетинає γ_c при $c > 0$, а крива $\xi_2(s) = (sH, 0)$, $s \in [0,1]$, не перетинає γ_c при $c < 0$.

Розглянемо лінії рівня функції

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + 2x_1^2 + 2x_2^2}.$$

Співвідношення

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + 2x_1^2 + 2x_2^2} = c, \qquad c > 0,$$

можна записати так:

$$(1 - 2c)x_1^2 + (1 - 2c)x_2^2 = c.$$

Звідси випливає, що лінії рівня такої функції замкнені при $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, оскільки в цьому випадку одержана квадратична форма

$$(1 - 2c)x_1^2 + (1 - 2c)x_2^2$$

є додатно визначеною.

Обґрунтовуючи теорему 2.28, ми покажемо: якщо функція $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є додатно визначеною, неперервною і радіально необмеженою, тобто

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty,$$

то множина

$$\Psi(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le c\}$$

компактна для будь-якого $c > 0$.

Умова радіальної необмеженості є критичною для компактності $\Psi(c)$, де $c > 0$ – довільне. Наприклад, якщо

$$V(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

то функція $V(x)$ є неперервною, додатно визначеною, але не є радіально необмеженою. Для такої функції множина

$\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le c\}$ збігається з $\mathbb{R}$, якщо $c \ge 1$, тобто не є компактом.

Досліджуючи розв'язки неавтономних систем на стійкість, бачимо, що функція Ляпунова залежить від t. Наприклад, розглянемо функцію

$$V(t, x_1, x_2) = e^{-t}(x_1^2 + x_2^2). \qquad (2.51)$$

Функція (2.51) є додатно визначеною в сенсі означення 2.9. Але про близькість точки (x_1, x_2) до початку координат за допомогою (2.51) судити не можна, оскільки за довільних x_1, x_2 функцію (2.51) можна зробити малою завдяки належному вибору t і мализні експоненти e^{-t}. Тому у такому випадку означення додатної визначеності вводять в інший спосіб.

Означення 2.11. *Неперервну функцію $V(t, x)$ називають додатно визначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \ge t_0$, якщо знайдеться така неперервна додатно визначена функція $W(x)$, для якої*

$$V(t, x) \ge W(x), \qquad V(t, 0) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_H, \quad t \ge t_0.$$

Неперервну функцію $V(t, x)$ називають від'ємно визначеною, якщо $-V(t, x)$ є додатно визначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \ge t_0$.

Означення 2.12. *Функція $V(t, x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що*

$$|V(t, x)| < \varepsilon$$

для всіх $\|x\| < \delta$, $t \ge t_0$. Тобто в цьому разі для функції $V(t, x)$ рівномірно за t виконується співвідношення

$$\lim_{\|x\| \to 0} V(t, x) = 0.$$

Суть нескінченно малої вищої границі полягає в тому, що значення $|V(t, x)|$ можна зробити як завгодно малим для довільного $t \ge t_0$ завдяки зменшенню $\|x\|$. У силу неперервності, нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$ має будь-яка неперервна функція $V(x)$ така, що не залежить від t, і $V(0) = 0$. Але навіть для неперервних обмежених функцій, які залежні від t, нескінченно мала вища границя в точці $x = 0$ може не існувати.

Приклад 2.24. Розглянемо функцію

$$V(t, x) = \sin^2(\| x \|^2\, t).$$

Ця функція не допускає нескінченно малої вищої границі в точці $x = 0$, хоч вона є неперервною і обмеженою. Справді, виберемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Покажемо, що яке ми б не взяли $\delta > 0$, знайдеться $x \in \mathbb{R}^n$ таке, що $\|x\| < \delta$, і t, для якого $\sin^2(\|x\|^2 t) \geq$ $\geq \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо нерівність $\sin^2 y \geq \frac{1}{2}$. Одержуємо, що

$$y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\pi\left(\frac{1}{4} + k\right), \pi\left(\frac{3}{4} + k\right)\right]$$

є розв'язком цієї нерівності. Виберемо довільне $\delta > 0$ і накладемо умову $\|x\| < \delta$. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ таке, що $\|x\| = p$, де $p \in (0, \delta)$. Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і довільного $\delta > 0$, вибираючи $x \in \mathbb{R}^n$ так, щоб $\|x\| = p$, і для

$$t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{p^2}\left(\frac{1}{4} + k\right), \frac{\pi}{p^2}\left(\frac{3}{4} + k\right)\right],$$

одержуємо $\sin^2(\|x\|^2 t) \geq \frac{1}{2}$. Це показує, що функція $V(t, x) =$ $= \sin^2(\|x\|^2 t)$ не допускає в точці $x = 0$ нескінченно малої вищої границі.

2.8.2. Теореми Ляпунова про стійкість для автономних систем

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \ t \geq t_0, \qquad f(0) = 0. \tag{2.52}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$ – вектор-функція, яка задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші в області $\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < H\}$, $H > 0$, $f(0) = 0$. Припустимо, що $V(x)$ є неперервно диференційованою функцією, $x \in \mathcal{D}_H$.

Означення 2.13. *Повною похідною за змінною t від функції $V(x)$ у силу системи диференціальних рівнянь* (2.52) *називають функцію*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)} = \text{grad}^T V(x) f(x). \tag{2.53}$$

Зауважимо, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (2.52) справджується

$$\left(\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt}\right)_{(2.52)} = \frac{dV\big(x(t)\big)}{dt}.$$

Справді,

$$\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \text{grad}^T V\big(x(t)\big)\frac{dx(t)}{dt} =$$

$$= \text{grad}^T V\big(x(t)\big) f\big(x(t)\big) = \left(\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt}\right)_{(2.52)}.$$

Зазначимо, що якщо

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)}$$

є від'ємно сталою, то для довільного розв'язку $x(t)$ системи (2.52) функція $V\big(x(t)\big)$ не зростає при $t \geq t_0$. Справді, у цьому випадку

$$V\big(x(t_2)\big) - V\big(x(t_1)\big) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt}\right)_{(2.52)} dt \leq 0,$$

де $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Якщо

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)}$$

є додатно сталою функцією, то $V\big(x(t_2)\big) - V\big(x(t_1)\big) \geq 0$, $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. У цьому випадку функція $V\big(x(t)\big)$ не спадає, $t \geq t_0$.

Справджується така теорема.

Теорема 2.17 (Ляпунова про стійкість). *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.52) *знайдеться неперервно дифе-*

ренційована додатно визначена функція $V(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, повна похідна від якої за змінною t в силу системи (2.52) *є функцією від'ємно сталою, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, системи* (2.52) *є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$. Розглянемо сферу

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \varepsilon\}.$$

Оскільки функція $V(x)$ є неперервною, то за теоремою Веєрштраса знайдеться точка $x_* \in S_\varepsilon$ така, що

$$\min_{x \in S_\varepsilon} V(x) = V(x_*) = C.$$

Враховуючи, що функція $V(x)$ є додатно визначеною, то $V(x) > 0$, $x \in S_\varepsilon$, і тому $C > 0$ (рис. 2.14). З неперервності функції $V(x)$ і з умови $V(0) = 0$ випливає, що існує $\delta \in (0, \varepsilon)$ таке, що $V(x) < C$ при $\|x\| < \delta$. Отже, куля

$$U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$$

лежить у множині

$$\{x \in \mathcal{D}_H : V(x) < C\}.$$

Виберемо довільну точку $x_0 \in U_\delta$. Покажемо, що траєкторія системи (2.52), яка відповідає розв'язку $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, залишається всередині сфери S_ε для $t \geq t_0$. Тобто $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$.

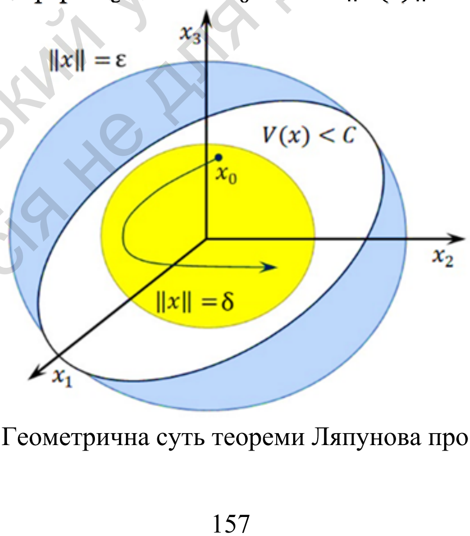


Рис. 2.14. Геометрична суть теореми Ляпунова про стійкість

Припустимо, від супротивного, що знайдеться точка $t_1 > t_0$ така, що $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1)$, але $\|x(t_1)\| = \varepsilon$. Оскільки $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)} \leq 0$, то

$$V\big(x(t_1)\big) - V\big(x(t_0)\big) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} d\tau \leq 0.$$

Звідси $V\big(x(t_1)\big) \leq V(x_0)$. Оскільки $x_0 \in U_\delta$, то $V(x_0) < C$, і тому $V\big(x(t_1)\big) < C$. Але $x(t_1) \in S_\varepsilon$. Отже, враховуючи, що

$$C = \min_{x \in S_\varepsilon} V(x),$$

маємо $V\big(x(t_1)\big) \geq C$. Отримуємо протиріччя, тому що

$$C \leq V\big(x(t_1)\big) < C.$$

Протиріччя свідчить про те, що будь-який розв'язок $x(t)$ системи (2.52), який у момент t_0 належить U_δ, залишається всередині кулі $K_\varepsilon(0)$ для $t \geq t_0$.

У такий спосіб для довільного $\varepsilon > 0$ ми вказали $\delta > 0$ таке, що $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, як тільки $\|x(t_0)\| < \delta$. Це означає, що нульовий розв'язок системи (2.52) стійкий за Ляпуновим.

■

Наслідок 2.7. *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.52) *знайдеться неперервно диференційована від'ємно визначена функція* $V(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, *повна похідна від якої за змінною* t *в силу системи* (2.52) *є функцією додатно сталою, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, *системи* (2.52) *є стійким за Ляпуновим.*

Справді, функція $V_1(x) = -V(x)$ задовольняє умови теореми 2.17 і нульовий розв'язок системи (2.52) є стійким за Ляпуновим.

Означення 2.14. *Функцією Ляпунова системи* (2.52) *називають функцію, яка застосовується для дослідження незбуреного розв'язку цієї системи на стійкість на основі тверджень, які належать до другого методу Ляпунова та до його узагальнень. Зокрема функцію* $V(x)$, *яка задовольняє умови теореми 2.15, називають функцією Ляпунова системи* (2.52).

Приклад 2.25. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1x_2 - x_2^3. \end{cases} \tag{2.54}$$

Застосуємо другий метод Ляпунова, вибираючи функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Маємо

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.54)} = x_1(-x_1 + 3x_2^2) + x_2(-x_1x_2 - x_2^3) =$$
$$= -(x_1 - x_2^2)^2 \le 0.$$

За теоремою 2.17 розв'язок $x_1(t) = x_2(t) = 0$ системи (2.54) є стійким, $t \ge 0$.

Приклад 2.26. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -x_1^3. \end{cases} \tag{2.55}$$

Виберемо функцію

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2.$$

Така функція є додатно визначеною. Тоді повна похідна в силу системи

$$\left(\frac{dV(x_1, x_2)}{dt}\right)_{(2.55)} = 4x_1^3x_2 + 4x_2(-x_1^3) = 0.$$

За теоремою Ляпунова про стійкість нульовий розв'язок системи є стійким.

Асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (2.55) не виконується, оскільки для будь-яких її розв'язків $x_1(t)$, $x_2(t)$ з умови рівності нулеві повної похідної функції $V(x_1, x_2)$ в силу системи (2.55) функція $V\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ є сталою, тому

$$x_1^4(t) + 2x_2^2(t) = x_1^4(0) + 2x_2^2(0).$$

Це означає, що умова

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right) = 0$$

не буде виконуватись за умови $x_1^2(0)+x_2^2(0)\neq 0$.

Теорема 2.18 (Ляпунова про асимптотичну стійкість). *Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.52) *існує неперервно диференційована додатно визначена функція* $V(x)$, $x\in\mathcal{D}_H$, *повна похідна від якої за змінною* t *в силу системи* (2.52) *є функцією від'ємно визначеною, то незбурений розв'язок* $x(t)=0$, $t\geq t_0$, *системи* (2.52) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Умови теореми 2.18 є сильніші за умови теореми 2.17. Тому незбурений розв'язок $x(t)=0,\ t\geq t_0$ є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для $\varepsilon\in(0,H)$ існує $\delta_0\in(0,\varepsilon)$ таке, що розв'язок $x(t)=x(t,x_0)$ системи (2.52) задовольняє умову $\|x(t)\|<\varepsilon$ для всіх $t\geq t_0$, як тільки $\|x_0\|<\delta_0$, де $x_0=x(t_0)$. Покажемо, що для такого розв'язку $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x(t)\|=0$.

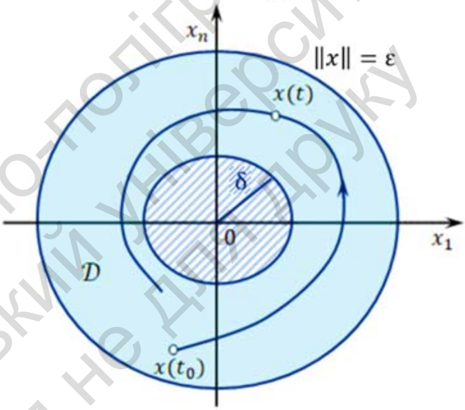


Рис. 2.15. Обґрунтування теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість

Припустимо, від супротивного, що існує послідовність $\{t_k\}\subset[t_0,+\infty)$ така, що $t_k\to+\infty$ і $\|x(t_k)\|\geq a,\ k=0,1,2,\ldots$, де $a>0$. Оскільки функція $V(x)$ є неперервною і додатно визначеною, то знайдеться $b>0$ таке, що

$$V(x)\geq b,\quad a\leq\|x\|\leq\varepsilon.$$

Тому $V(x(t_k)) \geq b,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Повна похідна в силу системи

$$W(x) = \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)}$$

є неперервною від'ємно визначеною функцією. Як наслідок, функція $V(x(t))$ не зростає, $t \geq t_0$. Звідси $V(x(t)) \geq b$ для всіх $t \geq t_0$. Справді, якщо $V(x(t)) < b$ при деякому $t \geq t_0$, то для всіх членів послідовності $\{t_k\}$, які більші за t, у силу того, що $V(x(t))$ не зростає, виконувалася б умова $V(x(t_k)) < b$. А це суперечить припущенню.

Враховуючи, що $V(0) = 0$ і $V(x)$ є додатно визначеною неперервною функцією, то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(x) < b$ для $\|x\| < \delta$. Тому розв'язок $x(t)$ системи (2.52) не задовольняє умову $\|x(t)\| < \delta$ (рис. 2.15). Отже,

$$x(t) \in \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}_H, \quad \delta \leq \|x\| \leq \varepsilon\}, \quad t \geq t_0.$$

Оскільки

$$W(x) = \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)}$$

є неперервною від'ємно визначеною функцією, то знайдеться константа $p > 0$ така, що $W(x) \leq -p,\ x \in \mathcal{D}$. Отже

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)} \leq -p,$$

і тому

$$V\big(x(t)\big) = V\big(x(t_0)\big) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV\big(x(s)\big)}{ds} ds \leq V(x_0) - p(t - t_0),$$

$$t \geq t_0.$$

Звідси випливає, що можна підібрати $t > t_0$, для якого $V(x(t)) < 0$. Якщо

$$t > t_0 + \frac{V(x_0)}{p},$$

то маємо

$$V(x_0) - p(t - t_0) < 0,$$

звідки $V(x(t)) < 0$. Одержали протиріччя з умовою додатної визначеності функції V. Протиріччя показує, що $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x(t)\| = 0$.

■

Наслідок 2.8. *Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.52) *існує неперервно диференційована від'ємно визначена функція* $V(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, *повна похідна від якої за змінною* t *в силу системи* (2.52) *є функцією додатно визначеною, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, *системи* (2.52) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Приклад 2.27. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок скалярного рівняння

$$\dot{x} = g(x), \quad g \in C^1(-r, r), \quad g(0) = 0.$$

За першим наближенням маємо, що $x(t) = 0$, $t \geq 0$ – асимптотично стійкий розв'язок, якщо $g'(0) < 0$ і $x(t) = 0$, $t \geq 0$, є нестійким, якщо $g'(0) > 0$. Коли $g'(0) = 0$, то маємо "критичний" випадок, тому, застосовуючи другий метод Ляпунова, розглянемо функцію

$$V(x) = \int\limits_0^x g(s)ds.$$

Якщо $g(x) \neq 0$ на $(-r, 0) \cup (0, r)$, то повна похідна в силу системи

$$\frac{dV(x)}{dt} = g^2(x) > 0, \qquad x \in (-r, 0) \cup (0, r)$$

є додатно визначеною. Тоді можливість застосування теорем Ляпунова визначають знаковими властивостями функції $V(x)$. Наприклад, для рівняння

$$\dot{x} = x^5 - x^3$$

маємо, що

$$V(x) = \int_0^x (s^5 - s^3)ds = \frac{x^4}{2}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Ця функція є від'ємно визначеною в області $|x| < \sqrt{3/2}$. Зазначимо, що в області $|x| < 1$

$$\frac{dV(x)}{dt} = (x^5 - x^3\,)^2 = x^6(x^2 - 1)^2 > 0, \qquad x \neq 0,$$

і функція $V(x)$ – від'ємно визначені. За наслідком теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість розв'язок $x(t) = 0$ є асимптотично стійким, $t \geq 0$.

Приклад 2.28. Проведемо аналіз стійкості незбуреного розв'язку $x_1(t) = x_2(t) = 0$ системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - 3x_2. \end{cases} \qquad (2.56)$$

Для цього використаємо додатно визначену функцію

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Похідна $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.56)} = -2x_1^2 - 3x_2^2$ є від'ємно визначеною в $\mathbb{R}^2$. Отже, незбурений розв'язок $x_1(t) = x_2(t) = 0$ – асимптотично стійкий, $t \geq 0$.

Приклад 2.29. Дослідимо на стійкість положення рівноваги $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$ математичного маятника без тертя:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1, \quad t \geq 0, \ a > 0. \end{cases}$$

Оскільки перше наближення в цьому випадку відповіді не дає, то застосуємо другий метод Ляпунова. Природним вибором функції Ляпунова є функція енергії

$$V(x_1, x_2) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Очевидно, що $V(0,0) = 0$ і $V(x_1, x_2)$ – додатно визначена функція в області $-2\pi < x_1 < 2\pi$. Похідна в силу системи має вигляд

$$\frac{dV(x)}{dt} = ax_2\sin x_1 - ax_2\sin x_1 \equiv 0.$$

Отже, умови теореми Ляпунова про стійкість виконуються і початок координат є стійким. Оскільки $\frac{dV(x)}{dt} = 0$, то ми можемо сказати, що початок координат не є асимптотично стійким. Траєкторії, що починаються на поверхні $V(x_1, x_2) = c$, залишаються на цій поверхні для всіх $t \geq 0$.

Означення 2.15. *Незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, *системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.52) *називатимемо експоненціально стійким, якщо існують додатні числа* a, c, H_0, $H_0 < H$ *такі, що*

$$\|x(t, x_0, t_0)\|^2 \leq ce^{-a(t-t_0)} \cdot \|x_0\|^2, \qquad \| x_0 \| \leq H_0, \qquad t \geq t_0.$$

Справджується таке твердження.

Теорема 2.19. *Нехай для системи* (2.52) *існує*

$$V(x) = x^T Bx,$$

похідна від якої за змінною t *в силу системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.52) *задовольняє нерівності*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)} \leq -x^T Dx, \tag{2.57}$$

де $\|x\| \leq H_0$, B *і* D – $n \times n$*-симетричні додатно визначені матриці. Тоді розв'язок* $x(t) = 0$ *системи* (2.52) *є експоненціально стійким*, $t \geq t_0$.

Доведення. Для доведення теореми застосовують співвідношення Релея (лема 2.4).

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{x^T Bx}{x^T x} \leq \lambda_{\max}(B), \tag{2.58}$$

$$\lambda_{\min}(D) \leq \frac{x^T Dx}{x^T x} \leq \lambda_{\max}(D), \tag{2.59}$$

де $\lambda_{\min}(B)$, $\lambda_{\max}(B)$, $\lambda_{\min}(D)$, $\lambda_{\max}(D)$ – мінімальні й максимальні власні значення матриць B і D відповідно, $x \neq 0$. Оскільки матриці B і D є додатно визначеними, то їхні власні значення є додатними. Використовуючи (2.59), нерівність (2.57) перепишемо так:

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)} \leq -x^T Dx \leq -\lambda_{\min}(D) x^T x. \tag{2.60}$$

■

З (2.58) отримаємо

$$-x^T x \leq -\frac{x^T Bx}{\lambda_{\max}(B)} = -\frac{V(x)}{\lambda_{\max}(B)}.$$

Беручи до уваги останню нерівність, (2.60) подамо у вигляді

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.52)} \leq -\frac{\lambda_{\min}(D)}{\lambda_{\max}(B)} \cdot V(x). \tag{2.61}$$

Позначимо

$$a = \frac{\lambda_{\min}(D)}{\lambda_{\max}(B)} > 0.$$

З (2.61) випливає

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + aV\big(x(t)\big) \le 0, \qquad t \ge t_0,$$

де $x(t) = x(t, x_0, t_0)$. Домножимо одержану нерівність на додатну функцію $e^{a(t-t_0)}$. Маємо

$$e^{a(t-t_0)}\frac{dV(x(t))}{dt} + ae^{a(t-t_0)}V\big(x(t)\big) \le 0, \qquad t \ge t_0.$$

Ліва частина останньої нерівності є похідною функції

$$F(t) = e^{a(t-t_0)}V\big(x(t)\big), \qquad t \ge t_0.$$

У такий спосіб $F'(t) \le 0$, функція $F(t)$ не зростає і тому $F(t) \le F(t_0),\ t \ge t_0$. Як наслідок

$$e^{a(t-t_0)}V\big(x(t)\big) \le V\big(x(t_0)\big).$$

Звідси одержуємо нерівність

$$V\big(x(t)\big) \le V\big(x(t_0)\big)e^{-a(t-t_0)}. \tag{2.62}$$

З (2.58), (2.62) випливає

$$\begin{aligned} x^T(t)x(t) = \| x(t) \|^2 &\le \frac{x^T(t)Bx(t)}{\lambda_{\min}(B)} = \frac{V(x(t))}{\lambda_{\min}(B)} \le \\ &\le \frac{V(x_0)}{\lambda_{\min}(B)} e^{-a(t-t_0)} = \\ &= \frac{x_0^T B x_0}{\lambda_{\min}(B)} e^{-a(t-t_0)} \le \\ &\le \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)} e^{-a(t-t_0)} \| x_0 \|^2. \end{aligned} \tag{2.63}$$

З (2.63) слідує, що при

$$a = \frac{\lambda_{\min}(D)}{\lambda_{\max}(B)}, \qquad c = \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)}$$

справджується

$$\|x(t)\|^2 \le ce^{-a(t-t_0)}\|x_0\|^2,$$

де $\|x_0\| \le H_0$, $t \ge t_0$. За означенням 2.15 незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \ge t_0$, системи (2.52) є експоненціально стійким. ■

2.9. Теореми Ляпунова про стійкість для неавтономних систем

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \ge t_0. \tag{2.64}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи (2.64), $f(t, x)$ – n-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші, $x \in \mathcal{D}_H$, причому $f(t, 0) = 0$, $t \ge t_0$. Припустимо, що $V(t, x)$ є неперервно диференційованою скалярною функцією, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \ge t_0$.

Означення 2.16. *Повною похідною за змінною* t *від функції* $V(t, x)$ *у силу системи диференціальних рівнянь* (2.64) *називають функцію*

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.64)} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V(t, x) f(t, x). \tag{2.65}$$

Зазначимо, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (2.65) виконується

$$\left(\frac{dV\big(t, x(t)\big)}{dt}\right)_{(2.64)} = \frac{dV\big(t, x(t)\big)}{dt}.$$

Справді

$$\frac{dV\big(t, x(t)\big)}{dt} = \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V\big(t, x(t)\big)\frac{dx(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \operatorname{grad}_x^T V\big(t, x(t)\big) f\big(t, x(t)\big) = \left(\frac{dV\big(t, x(t)\big)}{dt}\right)_{(2.64)}.$$

Слід зауважити таке: якщо похідна

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.64)}$$

є від'ємно сталою, то для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи (2.64) функція $V\big(t,x(t)\big)$ не зростає, $t \ge t_0$. Справді,

$$V\big(t_2,x(t_2)\big) - V\big(t_1,x(t_1)\big) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dV\big(t,x(t)\big)}{dt}\,dt \le 0,$$

$$t_0 \le t_1 \le t_2.$$

Якщо

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.64)}$$

є додатно сталою функцією, то $V\big(t,x(t)\big)$ не спадає, $t \ge t_0$.

Виконується теорема.

Теорема 2.20 (Ляпунова про стійкість). *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.64) *знайдеться неперервно диференційована додатно визначена функція* $V(t,x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \ge t_0$, *повна похідна від якої за змінною* t *в силу системи* (2.64) *є функцією від'ємно сталою, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \ge t_0$, *системи* (2.64) *є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Нехай $\varepsilon \in (0,H)$, $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = \varepsilon\}$. Функція $V(t,x)$ є додатно визначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \ge t_0$. Тому за означенням 2.11 знайдеться неперервна додатно визначена функція $W(x)$ така, що

$$V(t,x) \ge W(x), \quad x \in \mathcal{D}_H, \quad t \ge t_0. \tag{2.66}$$

За теоремою Веєрштраса існує точка $x_* \in S_\varepsilon$, для якої

$$\min_{x \in S_\varepsilon} W(x) = W(x_*) = C > 0. \tag{2.67}$$

З (2.66), (2.67) випливає

$$V(t,x) \ge W(x) \ge W(x_*) = C > 0, \quad x \in S_\varepsilon, \quad t \ge t_0. \tag{2.68}$$

З неперервності функції $V(t,x)$ та з умови $V(t,0)=0$, $t \geq t_0$, слідує, що знайдеться $\delta \in (0,\varepsilon)$ таке, що $V(t_0,x) < C$, як тільки $\|x\| < \delta$. Це означає, що множина

$$U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$$

розміщена у множині

$$\{x \in \mathcal{D}_H : V(t_0,x) < C\}.$$

Виберемо довільну точку $x_0 \in U_\delta$. Покажемо, що траєкторія системи (2.64), яка починається з точки x_0, не дійде до сфери S_ε і залишиться у множині:

$$U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}.$$

Припустимо, від супротивного, що знайдеться $t_1 > t_0$ таке, що $x(t_1) \in S_\varepsilon$, причому $x(t) \in U_\varepsilon$, $t \in [t_0,t_1)$, де $x(t) = x(t,x_0,t_0)$ – розв'язок задачі Коші (2.64), $x(t_0) = x_0$. Тоді з (2.68) випливає $V\big(t_1,x(t_1)\big) \geq C$.

Але з $x_0 \in U_\delta$ слідує, що $V(t_0,x_0) < C$. Повна похідна за змінною t від функції $V(t,x)$ у силу системи (2.64) є від'ємно сталою, тому

$$V\big(t_1,x(t_1)\big) - V(t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dV(s,x(s))}{ds}\,ds \leq 0.$$

Остаточно маємо

$$C \leq V\big(t_1,x(t_1)\big) \leq V(t_0,x_0) < C. \qquad (2.69)$$

Одержали протиріччя, яке показує, що з умови $x_0 \in U_\delta$ випливає $x(t) \in U_\varepsilon$, $t \geq t_0$. Це означає, що нульовий розв'язок системи (2.64) стійкий за Ляпуновим.

■

Наслідок 2.9. *Нехай для системи диференціальних рівнянь* (2.64) *знайдеться неперервно диференційована функція* $V(t,x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$, *така, що*

- $V(t,0) = 0$, $t \geq t_0$;
- *існує неперервна додатно визначена зростаюча функція* $a\colon [0,H] \to \mathbb{R}$ *така, що*

$$a(\|x\|) \leq V(t,x), \qquad x \in \mathcal{D}_H, \qquad t \geq t_0;$$

• $\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.64)} \le 0, x \in \mathcal{D}_H, t \ge t_0.$

Тоді розв'язок $x(t) = 0$, $t \ge t_0$ *системи* (2.64) *є стійким за Ляпуновим.*

Теорема 2.21 (Ляпунова про асимптотичну стійкість). *Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь* (2.64) *знайдеться неперервно диференційована додатно визначена функція* $V(t,x)$, *яка в точці* $x = 0$ *допускає нескінченно малу вищу границю, а повна похідна від* $V(t,x)$ *за змінною* t *в силу системи* (2.64) *є функцією від'ємно визначеною, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \ge t_0$, *системи* (2.64) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Умови теореми 2.20 є сильнішими за умови теореми 2.19. Тому нульовий розв'язок системи (2.64) є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для $\varepsilon \in (0, H)$ знайдеться $\delta_0 \in (0, \varepsilon)$ таке, що розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ системи (2.64) задовольняє умову $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всіх $t \ge t_0$, як тільки $\|x_0\| < \delta_0$, де $x_0 = x(t_0)$. Покажемо, що для такого розв'язку

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Припустимо, від супротивного, що знайдеться послідовність $\{t_k\} \subset [t_0, +\infty)$ така, що $t_k \to +\infty$ і $\|x(t_k)\| \ge a$, $k = 1, 2, \ldots$, де $a > 0$. Оскільки функція $V(t,x)$ є неперервною і додатно визначеною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \ge t_0$, то за означенням 2.15 знайдеться додатно визначена неперервна функція $V_0(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$ така, що

$$V(t,x) \ge V_0(x) \ge b, \quad a \le \|x\| \le \varepsilon,$$

де $b > 0$ – деяка константа. Звідси $V\big(t_k, x(t_k)\big) \ge b$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Повна похідна функції $V(t,x)$ у силу системи (2.64) є від'ємно визначеною неперервною функцією. Тому $V(t, x(t))$ не зростає і $V(t, x(t)) \ge b$ для всіх $t \ge t_0$. Справді, якщо $V(t, x(t)) < b$ при деякому $t \ge t_0$, то для всіх членів послідовності $\{t_k\}$, які більші за t, виконується умова $V\big(t_k, x(t_k)\big) < b$. Це суперечить припущенню.

Оскільки $V(t, 0) = 0$, $t \ge t_0$, функція $V(t,x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$ та є додатно визначеною, то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(t,x) < b$ при $\|x\| < \delta$ для всіх $t \geq t_0$. Оскільки $V(t, x(t)) \geq b$, $t \geq t_0$, то розв'язок $x(t)$ системи (2.64) не задовольняє умову $\|x(t)\| < \delta$, $t \geq t_0$. Отже,

$$x(t) \in \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D}_H, \quad \delta \leq \|x\| \leq \varepsilon\}, \quad t \geq t_0.$$

Повна похідна в силу системи

$$W(t, x) = \left(\frac{dV(t, x)}{dt}\right)_{(2.64)}, \quad x \in \mathcal{D}_H, \quad t \geq t_0,$$

є функцією від'ємно визначеною, тому за означенням 2.11 знайдеться додатно визначена функція $W_0(x)$, $x \in \mathcal{D}_H$ така, що

$$-W(t, x) \geq W_0(x) > p, \quad x \in \mathcal{D},$$

де $p > 0$ – деяка константа. Отже

$$W(t, x) \leq -p, \quad x \in \mathcal{D}, \quad t \geq t_0.$$

Оскільки $x(t) \in \mathcal{D}$ при $t \geq t_0$, то

$$\frac{dV\big(t, x(t)\big)}{dt} = \left(\frac{dV(t, x(t))}{dt}\right)_{(2.64)} \leq -p$$

і

$$V\big(t, x(t)\big) = V(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV(s, x(s))}{ds} ds \leq$$
$$\leq V(t_0, x_0) - p(t - t_0), \; t \geq t_0.$$

Звідси випливає, що існує $t \geq t_0$, за якого $V(t, x(t)) < 0$. Зокрема, якщо $t > t_0 + \frac{V(t_0, x_0)}{p}$, то маємо $V(t_0, x_0) - p(t - t_0) < 0$, звідки $V(t, x(t)) < 0$. Це суперечить додатній визначеності функції $V(t, x)$. Протиріччя показує, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$.

■

Зауважимо, що в умовах теорем 2.19, 2.20 функцію $V(t, x)$ можна вибрати від'ємнозначною, але тоді повна похідна від $V(t, x)$ за змінною t в силу системи (2.64) має бути додатно сталою (у теоремі 2.19) і додатно визначеною (у теоремі 2.20). Тоді $V_1(t, x) = -V(t, x)$ забезпечує виконання умов цих теорем.

Умову неперервної деференційованості функції $V(t, x)$ можна послабити. Для цього припускаємо, що функція $V(t, x)$ є неперервною, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$, і поняття похідної від функції $V(t,x)$ за змінною t в силу системи (2.1) вводимо так:

$$D_{(2.64)}V(t,x) = \limsup_{h \to +0} \frac{V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)}{h}.$$

Наслідок 2.10. *Нехай для системи диференціальних рівнянь* (2.64) *знайдеться неперервно диференційована функція* $V(t,x)$, $x \in \mathcal{D}_H$, $t \geq t_0$, *така, що*

- $V(t,0) = 0$, $t \geq t_0$;
- *існують неперервні додатні зростаючі функції* $a\colon [0,H] \to \mathbb{R}$, $b\colon [0,H] \to \mathbb{R}$ *такі, що*

$$a(\| x \|) \leq V(t,x),$$

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.64)} \leq -b(\|x\|), \qquad x \in \mathcal{D}_H,\ t \geq t_0.$$

Тоді розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

2.10. Теореми про нестійкість для автономних систем. Теорема Четаєва

Розглянемо автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.70}$$

де $x \in \mathcal{D}_H$, $f\colon \mathcal{D}_H \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші, $f(0) = 0$, $t \geq 0$, $\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| < H\}$.

Теорема 2.22 (Ляпунова про нестійкість). *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.70) *знайдеться неперервно диференційована в області* $\mathcal{D}_H$ *функція* $V(x)$, $V(0) = 0$,

- *повна похідна від якої в силу системи* (2.70) *є функцією знаковизначеною*;
- *в будь-якому околі* $U(0) \subset \mathcal{D}_H$ *нуля знайдеться точка* $x_0 \in U(0)$ *така, що*

$$\left(\frac{dV(x_0)}{dt}\right)_{(2.70)} V(x_0) > 0,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, *системи* (2.70) *є нестійким.*

Іншими словами, *якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.70) *знайдеться неперервно диференційована в області* $\mathcal{D}_H$ *функція* $V(x)$, $V(0) = 0$, *яка має знаковизначену похідну в силу системи* (2.70), *але в довільному околі початку координат вона не є знакосталою функцією, протилежного знака до похідної, то незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq 0$, *системи* (2.70) *є нестійким*.

Доведення. Нехай, для визначеності, $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)}$ є додатно визначеною. Тоді за умовами теореми в довільному околі початку координат знайдуться точки, в яких функція $V(x)$ є додатною.

Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $U_\varepsilon(0) \subset \mathcal{D}_H$. В околі $U_\varepsilon(0)$ виконуються умови теореми. Виберемо $\delta \in (0, \varepsilon)$. Покажемо, що в $U_\delta(0)$ існує точка x_0 така, що відповідний їй розв'язок $x(t, x_0)$ при деякому $t > 0$ вийде за $U_\varepsilon(0)$. Це означатиме, що нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, системи (2.70) є нестійким.

За умовами теореми зафіксуємо точку $x_0 \in U_\delta(0)$ таку, що

$$V(x_0) = V_0 > 0.$$

Оскільки функція $V(x)$ є неперервною, то знайдеться таке $\sigma > 0$, що $|V(x)| < V_0$, як тільки $\| x \| < \sigma$. Це означає, що

$$U_\sigma(0) \subseteq \{x \in U_\varepsilon(0) \colon |V(x)| < V_0\}.$$

Враховуючи, що $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)}$ є додатно визначеною, то

$$V(x(t, x_0)) \geq V_0, \qquad t \geq 0.$$

Тому $x(t, x_0) \notin U_\sigma(0)$, $t \geq 0$.

Припустимо, від супротивного, що $x(t, x_0) \in U_\varepsilon(0)$, $t \geq 0$. Тоді

$$x(t, x_0) \in \mathcal{C}, \qquad t \geq 0, \qquad \mathcal{C} = K_\varepsilon(0) \backslash U_\sigma(0).$$

Оскільки $\mathcal{C}$ – компакт, то функція $V(x)$ є обмеженою на компакті $\mathcal{C}$, зважаючи на те, що вона є неперервною. Тому $V(x(t, x_0))$ є обмеженою зверху, якщо $t \geq 0$. Тобто, існує константа $d > 0$ така, що

$$V(x(t, x_0)) \leq d$$

для всіх $t \geq 0$. Крім того, $0 \notin C$, $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)}$ є додатно визначеною і неперервною, отже, за теоремою Веєрштраса

$$\min_{x \in C} \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)} = \ell > 0.$$

Звідси

$$\left(\frac{dV(x(t, x_0))}{dt}\right)_{(2.70)} \geq \ell, \qquad t \geq 0.$$

Інтегруючи останню нерівність від 0 до t, одержуємо

$$V(x(t, x_0)) \geq V_0 + \ell t, \qquad t \geq 0.$$

Це означає, що існує $t \geq 0$, для якого $V(x(t, x_0)) > d$. Справді, якщо

$$t > \frac{d - V_0}{\ell},$$

то

$$V_0 + \ell t > d,$$

і $V\big(x(t, x_0)\big) > d$.

Отримали протиріччя, яке показує, що існує такий момент $t > 0$, для якого $x(t, x_0) \notin U_\varepsilon(0)$.

■

Приклад 2.30. Розглянемо скалярне рівняння

$$\dot{x} = x^3.$$

Як показано у прикладі 2.27, функція Ляпунова

$$V(x) = \int_0^x g(s) ds = \frac{x^4}{4},$$

де $g(x) = x^3$. Тоді

$$\frac{dV(x)}{dt} = V'(x) g(x) = g^2(x) = x^6.$$

За теоремою 2.22 нульовий розв'язок $\dot{x} = x^3$ є нестійким.

Теорема 2.23. *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.70) *знайдеться неперервно диференційована в області* $\mathcal{D}_H$ *функція* $V(x)$ *така, що*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)} = \lambda V(x) + W(x), \tag{2.71}$$

де $\lambda > 0$ *– деяка константа, функція* $W(x)$ *є неперервною в області* $\mathcal{D}_H$ *і знакосталою, причому в довільному околі* $U(0)$ *початку координат знайдеться точка* $x_0 \in U(0)$ *така, що* $W(x_0)V(x_0) > 0$, *то незбурений розв'язок* $x(t) = 0,\ t \geq 0$, *системи* (2.70) *є нестійким.*

Доведення. Нехай, для визначеності, $W(x)$ є додатно сталою. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $U_\varepsilon(0) \subset \mathcal{D}_H$. В околі $U_\varepsilon(0)$ виконуються умови теореми. Виберемо $\delta \in (0, \varepsilon)$. За умовами теореми існує точка $x_0 \in U_\delta(0)$ така, що

$$V(x_0) = V_0 > 0.$$

Покажемо, що відповідний їй розв'язок $x(t, x_0)$ за деякого $t > 0$ вийде за $U_\varepsilon(0)$. Це означатиме, що нульовий розв'язок $x(t) = 0, t \geq 0$ системи (2.70) нестійкий.

Оскільки функція $V(x)$ є неперервною, то знайдеться така константа $d > 0$, що

$$|V(x)| \leq d,\ x \in K_\varepsilon(0). \tag{2.72}$$

З умови (2.71) випливає

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \lambda V(x(t, x_0)) + W(x(t, x_0)), \qquad t \geq 0.$$

За формулою Коші

$$V(x(t, x_0)) = e^{\lambda t} V_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} W(x(s, x_0)) ds, \qquad t \geq 0.$$

Через те, що $W(x)$ є додатно сталою, то

$$V(x(t, x_0)) \geq e^{\lambda t} V_0, \qquad t \geq 0.$$

Оскільки $V_0 > 0$, то існує $t \geq 0$, для якого $V(x(t, x_0)) > d$. Такі значення $t \geq 0$ знайдемо як розв'язок нерівності

$$e^{\lambda t} V_0 > d.$$

Отже, $V(x(t, x_0)) > d$, якщо

$$t > t_* = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{d}{V_0}\right).$$

Одержали протиріччя. З (2.72) випливає, що $x(t, x_0) \notin U_\varepsilon(0)$, коли $t > t_*$.

■

У формулюванні теореми Ляпунова про нестійкість ми вимагаємо, щоб повна похідна в силу системи була знаковизначеною в деякому околі початку координат. Утім, щоб обґрунтувати нестійкість, достатньо довести існування хоча б однієї траєкторії, яка виходить з як завгодно малого околу початку координат і покидає фіксований окіл. Для цього достатньо вимагати додатності повної похідної в силу системи у відкритій підобласті, яка дотикається до початку координат.

Теорема 2.24 (Четаєва). *Нехай існує неперервно диференційована в області $\mathcal{D}_H$ функція $V(x)$, яка задовольняє такі умови*:

1) *знайдеться область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_H$, границя якої $\partial\mathcal{D}_0$ містить точку* 0, *причому*

$$V(x) > 0, \qquad x \in \mathcal{D}_0;$$

$$V(x) = 0, \qquad x \in \partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_H;$$

2) *повна похідна в силу системи* (2.70)

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)} > 0, \qquad x \in \mathcal{D}_0.$$

Тоді нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, системи (2.70) *є нестійким.*

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $K_\varepsilon(0) \subset \mathcal{D}_H$. Оскільки за умовами теореми точка 0 є граничною точкою області $\mathcal{D}_0$, то для довільного $\delta \in (0, \varepsilon)$ перетин $U_\delta(0) \cap \mathcal{D}_0$ є непорожнім. Зафіксуємо точку $x_0 \in U_\delta(0) \cap \mathcal{D}_0$. Зауважимо, що за умовами теореми $V(x_0) = V_0 > 0$. Покажемо, що траєкторія системи (2.70), яка виходить із точки x_0, перетинає границю S_ε кулі $K_\varepsilon(0)$ в деякий момент $t \geq 0$ (рис. 2.16). Це означатиме, що нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, системи (2.70) нестійкий.

Припустимо, від супротивного, що для всіх $t \geq 0$ виконується умова

$$x(t, x_0) \in U_\varepsilon(0). \qquad (2.73)$$

У цьому випадку функція $V(x(t, x_0))$ задовольняє нерівності

$$V(x(t, x_0)) \geq V(x_0) = V_0 > 0, \ t \geq 0. \qquad (2.74)$$

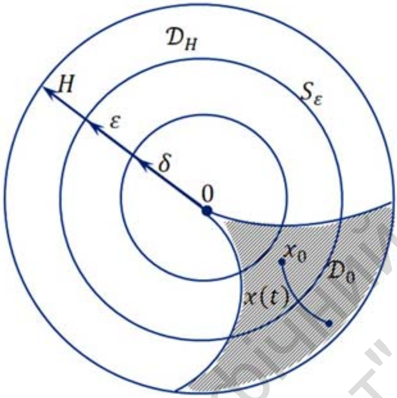


Рис. 2.16. Обґрунтування теореми Четаєва

Справді, поки $x(t, x_0) \in \mathcal{D}_0$, виконується нерівність

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \left(\frac{dV(x(t, x_0))}{dt}\right)_{(2.70)} > 0$$

і функція $V(x(t, x_0))$ зростає. Умова (2.74) може порушитися лише тоді, коли існує перший момент $t = T > 0$, для якого відповідний розв'язок $x(t, x_0)$ системи (2.70) потрапляє на $\partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}$. У цьому випадку знайдеться $T > 0$, для якого

$$x(t, x_0) \in \mathcal{D}_0, \qquad t \in [0, T), \qquad x(T, x_0) \in \partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_H.$$

Однак, якби таке значення T існувало, то, з одного боку,

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} > 0, \qquad t \in [0, T),$$

і, як наслідок

$$V(x(t, x_0)) \geq V_0 > 0, \qquad t \in [0, T),$$

а з іншого боку,

$$V(x(T, x_0)) = 0,$$

оскільки $x(T, x_0) \in \partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_H$. Але це суперечить тому, що функція $V(x(t, x_0))$ – неперервна.

Отже, з припущення (2.73) випливає нерівність (2.74). Більше того, доведено, що за кожного $t \geq 0$ точка $x(t, x_0)$ належить компакту

$$\mathcal{C} = \{x \in K_\varepsilon(0) \cap \overline{\mathcal{D}}_0 \colon V(x) \geq V_0\}.$$

Звідси доходимо висновку, що функція $V(x(t, x_0))$ є обмеженою і зростає при $t \geq 0$. З іншого боку, оскільки $V_0 > 0$, то за першою умовою теореми компакт $\mathcal{C}$ не містить точок множини $\partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_H$. У такому випадку з другої умови теореми

$$\min_{x \in C} \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.70)} = \ell > 0.$$

Як наслідок,

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \left(\frac{dV(x(t, x_0))}{dt}\right)_{(2.70)} \geq \ell, \qquad t \geq 0.$$

Отже,

$$V\big(x(t, x_0)\big) = V(x_0) + \int_0^t \frac{dV\big(x(s, x_0)\big)}{ds} ds \geq V_0 + \ell t, \qquad t \geq 0.$$

Остання нерівність означає, що функція $V(x(t, x_0))$ є необмеженою, $t \geq 0$. Отримали протиріччя. У такий спосіб ми показали, що припущення (2.73) неправильне і нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$ системи (2.70) нестійкий.

■

Приклад 2.31. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy - x^2, \end{cases} \tag{2.75}$$

де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ – константи.

Розглянемо функцію

$$V(x, y) = xy$$

і області

$$\mathcal{D}_H = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < H^2\},$$
$$\mathcal{D}_0 = \{(x, y) \colon x > 0, \;\; y > 0, \;\; x^2 + y^2 < H^2\},$$

де $H > 0$ – параметр, який ми підберемо залежно від значень a, b, c, d, а саме

$$H < \min(c, b).$$

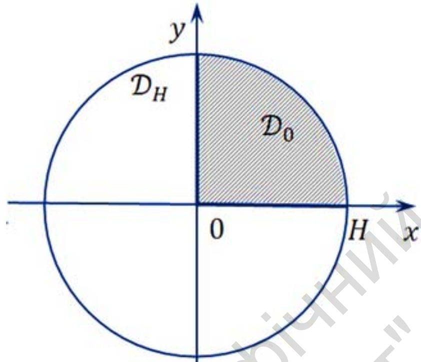


Рис. 2.17. Ілюстрація до прикладу 2.31

Функція $V(x, y) = xy$ є неперервно диференційованою, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_H$, $\partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_H$ містить початок координат. Крім того,

$$V(x, y) = xy > 0, \qquad (x, y) \in \mathcal{D}_0, \qquad V(x, y) = 0,$$
$$(x, y) \in \partial\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_H.$$

Знайдемо в області $\mathcal{D}_0$ повну похідну від функції $V(x, y) = xy$ в силу системи (2.75):

$$\left(\frac{dV(x, y)}{dt}\right)_{(2.75)} = y(ax + by - y^2) + x(cx + dy - x^2) =$$
$$= (a + d)xy + cx^2 + by^2 - (x^3 + y^3).$$

Виберемо $H > 0$ настільки малим, щоб

$$cx^2 + by^2 > x^3 + y^3, \qquad (x, y) \in \mathcal{D}_0.$$

Наприклад, візьмемо $H < \min(c, b)$. Тоді, оскільки $(x, y) \in \mathcal{D}_0$, то $x^2 + y^2 < H^2$, $x > 0$, $y > 0$, тому $x \in [0, H)$, $y \in [0, H)$ і

$$cx^2 + by^2 > Hx^2 + Hy^2 \geq x^3 + y^3, \qquad (x, y) \in \mathcal{D}_0.$$

Отже, за таких значень параметра H

$$\left(\frac{dV(x, y)}{dt}\right)_{(2.75)} > 0, \qquad (x, y) \in \mathcal{D}_0.$$

За теоремою Четаєва нульовий розв'язок системи (2.75) є нестійким (рис. 2.17).

Обґрунтуємо теорему про нестійкість за першим наближенням на основі теореми Четаєва.

Теорема 2.25. *Припустимо, що* $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$. *Якщо серед власних чисел матриці* $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$ *знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то нульовий розв'язок* $x(t) = 0, t \geq 0$ *системи* (2.70) *є нестійким*.

Доведення. Використовуючи лему Адамара, отримуємо

$$f(x) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f(sx)}{\partial x} ds\right) x = Ax + G(x)x,$$

де $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$,

$$G(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f(sx)}{\partial x} - \frac{\partial f(0)}{\partial x}\right) ds.$$

Оскільки $f \in C^1(\mathcal{D}_H, \mathbb{R}^n)$, то функція

$$d(r) = \max_{x \in K_r(0)} \| G(x) \|$$

задовольняє умову $\lim_{r \to +0} d(r) = 0$. Отже, система (2.70) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x)x, \tag{2.76}$$

причому нульовий розв'язок системи першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.77}$$

є нестійким. Потрібно довести нестійкість тривіального розв'язку системи (2.76).

Спочатку покажемо, що існує така симетрична матриця B розмірності $n \times n$, що породжена нею квадратична форма

$$V(x) = \langle Bx, x \rangle$$

має такі властивості:

1. $V(x)$ не є від'ємно визначеною функцією в $\mathbb{R}^n$.
2. Існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.77)} = \gamma V(x) + \| x \|^2. \tag{2.78}$$

Тут $\langle x, y\rangle = x^T y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Оскільки

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.77)} = \langle BAx, x\rangle + \langle Bx, Ax\rangle = \langle (BA + A^T B)x, x\rangle,$$

то друга властивість виконуватиметься, якщо

$$BA + A^T B = \gamma B + E. \tag{2.79}$$

Покажемо, що існує таке $\gamma_0 > 0$, що для всіх $\gamma \in (0, \gamma_0)$ рівняння (2.79) має розв'язок.

Сукупність дійсних симетричних матриць розмірності $n \times n$ утворює скінченновимірний лінійний простір $\mathbb{M}^n$. Лінійний оператор L такий, що

$$LB = BA + A^T B$$

відображає простір $\mathbb{M}^n$ у себе. Справді, якщо $B = B^T \in \mathbb{M}^n$, то

$$(LB)^T = (BA + A^T B)^T = A^T B^T + B^T A = A^T B + BA = LB.$$

Позначимо через I_0 тотожний оператор у $\mathbb{M}^n$, тобто

$$I_0 B = B, \qquad B \in \mathbb{M}^n.$$

Тоді рівняння (2.79) має вигляд

$$(L - \gamma I_0)B = E.$$

Якщо λ_1, λ_2, ..., λ_N – власні числа оператора L, то власними числами оператора $L - \gamma I_0$ є $\lambda_1 - \gamma$, $\lambda_2 - \gamma$, ..., $\lambda_N - \gamma$. Якщо серед цих власних чисел існує рівне нулеві, то оператор $L - \gamma I_0$ є виродженим. Для цього знайдемо $\gamma_0 > 0$ таке, щоб $\lambda_1 - \gamma$, $\lambda_2 - \gamma$, ..., $\lambda_N - \gamma$ не були рівні нулеві, $\gamma \in (0, \gamma_0)$. Якщо всі λ_1, λ_2, ..., λ_N або від'ємні, або комплексні, то $\gamma_0 > 0$ можна взяти довільним. Якщо серед λ_1, λ_2, ..., λ_N існують додатні власні числа, то γ_0 вибираємо як найменше серед додатних власних чисел. Тоді для всіх $\gamma \in (0, \gamma_0)$, де серед $\lambda_1 - \gamma$, $\lambda_2 - \gamma$, ..., $\lambda_N - \gamma$ немає нулів, оператор $L - \gamma I_0$ – невироджений та існує розв'язок рівняння (2.79).

Виберемо тепер $\gamma_1 > 0$ настільки малим, щоб $\gamma_1 \le \gamma_0$ і при $\gamma \in (0, \gamma_1)$ серед власних чисел матриці $A - \frac{\gamma}{2}E$ було хоча б одне власне число з додатною дійсною частиною. Знайдемо розв'язок B рівняння (2.79) і утворимо квадратичну форму

$$V(x) = \langle Bx, x\rangle.$$

Покажемо, що ця квадратична форма задовольняє властивість 1. Припустимо, від супротивного, навпаки, що $V(x)$ – від'ємно визначена. Враховуючи (2.83), знайдемо її похідну в силу системи

$$\frac{dx}{dt} = \left(A - \frac{\gamma}{2}E\right)x \qquad (2.80)$$

і отримаємо

$$\left\langle B\left(A - \frac{\gamma}{2}E\right)x, x\right\rangle + \left\langle Bx, \left(A - \frac{\gamma}{2}E\right)x\right\rangle = \| x \|^2.$$

Тому функція $-V(x)$ є додатно визначеною і повна похідна від цієї функції в силу системи (2.80) є від'ємно визначеною. Отже, нульовий розв'язок системи (2.80) асимптотично стійкий. Але це суперечить наявності додатного власного числа матриці $A - \frac{\gamma}{2}E$.

Обґрунтуємо твердження, що система (2.76) задовольняє умови другої теореми Ляпунова про нестійкість (теорема 2.23). Перш за все покажемо, що множина

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > 0\} \qquad (2.81)$$

є непорожня. Справді, виберемо точку $x_0 \neq 0$, яка задовольняє умову $V(x_0) \geq 0$. Тоді, оскільки виконується (2.78), то

$$\left(\frac{dV(x_0)}{dt}\right)_{(2.77)} \geq \| x_0 \|^2 > 0.$$

Тому існує $h > 0$, для якого

$$\frac{dV(x(t))}{dt} > 0, \qquad t \in (0, h),$$

де $x(t)$ – розв'язок системи (2.77), $x(0) = x_0$. Інтегруючи останню нерівність від 0 до $t \in (0, h)$, одержуємо

$$V\big(x(t)\big) > 0, \qquad t \in (0, h).$$

Отже, $x(t) \in \mathcal{P}$, $t \in (0, h)$ і множина (2.81) є непорожньою.

Якщо $x_0 \neq 0$, $V(x_0) = 0$, то $x_0 \in \partial\mathcal{P}$. Оскільки $V(x)$ – неперервна функція, то множина $\mathcal{P}$ – відкрита. Для довільного $s \in \mathbb{R}$ маємо

$$V(sx) = \langle sBx, sx \rangle = s^2 V(x).$$

Тому якщо $x_0 \in \mathcal{P}$, то

$$x^{(k)} = s_k x_0 \in \mathcal{P},$$

де $s_k \neq 0$, $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$, $k = 1,2,\dots$. У такий спосіб ми побудували послідовність $x^{(k)}$, $k = 1,2,\dots$, яка належить множині $\mathcal{P}$ і збігається до точки 0. Звідси випливає, що $0 \in \partial\mathcal{P}$ і в довільному околі $U(0) \subset \mathcal{D}_H$ початку координат існують точки $x_* \in U(0)$ такі, що $V(x_*) > 0$.

Знайдемо похідну функції $V(x)$ у силу системи (2.76)

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.76)} = \langle \mathrm{grad}V(x), Ax + G(x)x \rangle =$$

$$= \langle \mathrm{grad}V(x), Ax \rangle + \langle \mathrm{grad}V(x), G(x)x \rangle =$$

$$= \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.77)} + 2\langle Bx, G(x)x \rangle = \gamma V(x) + \| x \|^2 + 2\langle Bx, G(x)x \rangle.$$

З нерівності Коші – Шварца випливає

$$|\langle Bx, G(x)x \rangle| \leq \| Bx \| \| G(x)x \| \leq \| B \| \cdot \| G(x) \| \cdot \| x \|^2.$$

Позначимо

$$W(x) = \|x\|^2 + 2\langle BX, G(x)x \rangle.$$

Тоді

$$W(x) \geq \|x\|^2 - 2\|B\| \cdot \|G(x)\| \cdot \|x\|^2 =$$

$$= \|x\|^2(1 - 2\|B\| \cdot \|G(x)\|) \geq \|x\|^2(1 - 2d(r) \cdot \|B\|),$$

де

$$d(r) = \max_{x\in K_r(0)} \|G(x)\|.$$

Вибираємо $r \in (0, H)$ так, щоб $1 - 2d(r) \| B \| \geq 0$, тобто $2d(r) \| B \| \leq 1$. В околі $U_r(0)$ функція $W(x)$ є додатно сталою,

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.76)} = \gamma V(x) + W(x).$$

Отже, в околі $U_r(0)$ виконуються умови теореми 2.23 і розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, системи (2.70) є нестійким.

Зазначимо, що аналогічного висновку можемо дійти на основі теореми Четаєва (теореми 2.24). Для цього позначимо за $\mathcal{D}_0$ зв'язну компоненту перетину відкритого околу $U_r(0)$ з множиною $\mathcal{P}$. Тоді перша умова теореми Четаєва виконується.

Оскільки $W(x)$ є додатно сталою в $U_r(0)$, то

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.76)} \geq \gamma V(x) > 0, \qquad x \in \mathcal{D}_0.$$

Отже, виконуються умови теореми Четаєва (теореми 2.24) і нульовий розв'язок системи (2.70) є нестійким за Ляпуновим.

■

Наслідок 2.11. *Нехай $x_0 \in \mathcal{D}$ – положення рівноваги системи* (2.70). *Якщо серед власних чисел матриці $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ знайдеться хоча б одне з додатною дійсною частиною, то положення рівноваги x_0 – нестійке.*

Доведення. Зробимо заміну змінної $x = x_0 + y$, перейдемо до системи з нульовим положенням рівноваги і застосуємо теорему 2.25.

■

Приклад 2.32. Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_1 - 4x_2 + x_1^4, \\ \dot{x}_2 & = x_1 + x_2 + 2x_1x_2. \end{cases} \tag{2.82}$$

Матриця системи першого наближення має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система першого наближення записується так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_1 - 4x_2, \\ \dot{x}_2 & = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Знайдемо характеристичний поліном системи першого наближення:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4.$$

Коренями характеристичного полінома є $\lambda = 1 - 2i$, $\lambda = 1 + 2i$, $i^2 = -1$. Оскільки корені характеристичного полінома мають додатні дійсні частини, то нульовий розв'язок системи (2.82) є нестійким за Ляпуновим.

2.11. Теореми про нестійкість для неавтономних систем

Розглянемо неавтономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{2.83}$$

де $(t, x) \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші, $f(t, 0) = 0$, $t \geq t_0$. Припустимо, що $Z = [t_0, \infty) \times U_H(0) \subset \mathcal{D}$, $U_H(0)$ – відкрита куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса $H > 0$ із центром у початку координат.

Теорема 2.26 (Ляпунова про нестійкість). *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.83) *знайдеться неперервно диференційована в Z функція $V(t, x)$, $V(t, 0) = 0$, яка допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$,*

- *повна похідна від якої в силу системи* (2.83) *є функцією знаковизначеною;*
- *у будь-якому околі $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ нуля знайдеться точка $x_0 \in U(0)$ така, що*

$$\left(\frac{dV(t_0, x_0)}{dt}\right)_{(2.83)} V(t_0, x_0) > 0,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ системи (2.83) *є нестійким.*

Доведення. Нехай, для визначеності, $\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.83)}$ є додатно визначеною і

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.83)} \geq W(x),$$

якщо $t_0 \leq t < \infty$, де $W(x)$ – неперервна додатно визначена функція, $x \in U_H(0)$.

За умовами теореми функція $V(t, x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$. Тоді для $d > 0$ знайдеться $h \in (0, H)$ таке, що

$$|V(t, x)| < d$$

при $t_0 \leq t < \infty$, $\| x \| < h$. Це означає, що функція $V(t, x)$ є обмеженою на множині $t_0 \leq t < \infty$, $x \in U_h(0)$.

Зафіксуємо $\varepsilon \in (0, h)$. Виберемо $\delta \in (0, \varepsilon)$. Покажемо, що в $U_\delta(0)$ існує точка x_0 така, що відповідний їй розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ при деякому $t > t_0$ вийде за $U_\varepsilon(0)$. Це означатиме, що нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, системи (2.83) нестійкий.

За умовами теореми зафіксуємо точку $x_0 \in U_\delta(0)$ таку, що

$$V(t_0, x_0) = V_0 > 0.$$

Функція $V(t, x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$. Тоді для $V_0 > 0$ знайдеться $\sigma \in (0, H)$, для якої

$$|V(t, x)| < V_0,$$

якщо $t_0 \leq t < \infty$, $\| x \| < \sigma$. Це означає, що

$$U_\sigma(0) \subseteq \{x \in U_\varepsilon(0)\colon\ |V(t, x)| < V_0, \qquad t_0 \leq t < \infty\}.$$

Оскільки $\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.83)}$ є додатно визначеною, то

$$V(t, x(t, x_0, t_0)) \geq V_0, \qquad t \geq t_0.$$

Тому $x(t, x_0, t_0) \notin U_\sigma(0)$, $t \geq t_0$.

Припустимо, від супротивного, що $x(t, x_0, t_0) \in U_\varepsilon(0)$, $t \geq t_0$. Тоді

$$x(t, x_0, t_0) \in \mathcal{C}, \qquad t \geq t_0, \qquad \mathcal{C} = K_\varepsilon(0) \backslash U_\sigma(0).$$

Враховуючи, що $\mathcal{C} \subset U_h(0)$, то

$$|V(t, x)| < d,$$

якщо $t_0 \leq t < \infty$, $x \in \mathcal{C}$. Тобто,

$$|V(t, x(t, x_0, t_0))| < d \tag{2.84}$$

для всіх $t \geq t_0$. Оскільки $\mathcal{C}$ – компакт, функція $W(x)$ є неперервною, то за теоремою Веєрштраса

$$\min_{x \in \mathcal{C}} W(x) = \ell > 0.$$

Тоді, через те, що $0 \notin \mathcal{C}$ та

$$x(t, x_0, t_0) \in \mathcal{C}, \qquad t \geq t_0,$$

то

$$\left(\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt}\right)_{(2.83)} \geq W(x(t, x_0, t_0)) \geq \ell, \qquad t \geq t_0.$$

Інтегруючи останню нерівність від t_0 до t, одержуємо

$$V(t, x(t, x_0, t_0)) \geq V_0 + \ell(t - t_0), \qquad t \geq t_0.$$

Це означає, що існує $t \geq t_0$, для якого $V(t, x(t, x_0, t_0)) \geq d$. Зокрема, ця умова справедлива для

$$V_0 + \ell(t - t_0) \geq d,$$

звідки

$$t \geq t_0 + \frac{d - V_0}{\ell}.$$

Отримали протиріччя з (2.84), яке показує, що існує такий момент $t \geq t_0$, для якого $x(t, x_0, t_0) \notin U_\varepsilon(0)$.

■

Зауважимо, що в умовах теореми Ляпунова про нестійкість для неавтономних систем, функція $V(t, x)$ не обов'язково є знаковизначеною.

Теорема 2.27 (Четаєва). *Нехай на множині* $\mathcal{Z} = [t_0, \infty) \times U_H(0)$ *існує неперервно диференційована функція* $V(t, x)$, *яка задовольняє такі умови*:

1) *для кожного* $t \geq t_0$ *область*

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathcal{Z} : \ V(t, x) > 0\}$$

має непорожній перетин

$$\mathcal{D}_t = \{x \in U_H(0) : \ V(t, x) > 0\},$$

границя якого $\partial\mathcal{D}_t$ *містить точку* 0, *причому*

$$V(t, x) = 0, \qquad (x, t) \in \partial\Pi, \qquad t > t_0, \qquad x \in U_H(0);$$
$$V(t, 0) = 0, \qquad t \geq t_0;$$

2) *функція* $V(t, x)$ *обмежена в області* Π *і повна похідна в силу системи* (2.83)

$$\left(\frac{dV(t, x)}{dt}\right)_{(2.83)} > 0, \qquad (t, x) \in \Pi;$$

3) *у кожній підобласті*

$$\{(t, x) \in \mathcal{Z} : V(t, x) \geq \alpha > 0\} \subset \Pi$$

справджується

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.83)} \geq \beta,$$

де $\beta = \beta(\alpha) > 0$.

Тоді нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, *системи* (2.83) *є нестійким.*

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $K_\varepsilon(0) \subset U_H(0)$. Оскільки за умовами теореми точка 0 є граничною точкою $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_{t_0}$, то для довільного $\delta \in (0,\varepsilon)$ перетин $U_\delta(0) \cap \mathcal{D}_0$ є непорожнім. Зафіксуємо точку $x_0 \in U_\delta(0) \cap \mathcal{D}_0$ так, що $V(t_0, x_0) = \alpha > 0$. Покажемо, що траєкторія системи (2.83), яка виходить із точки x_0, перетинає границю S_ε кулі $K_\varepsilon(0)$ в деякий момент $t > t_0$. Це означатиме, що нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, системи (2.83) є нестійким (рис. 2.18).

Припустимо, від супротивного, що для всіх $t \geq t_0$ виконується умова

$$x(t, x_0, t_0) \in U_\varepsilon(0). \tag{2.85}$$

За другою умовою теореми

$$\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt} > 0, \quad \text{якщо } V(t, x(t, x_0, t_0)) > 0.$$

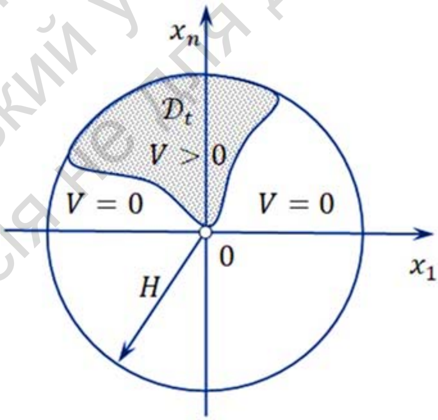


Рис. 2.18. Обґрунтування теореми Четаєва

Звідси, коли $t \geq t_0$, то маємо

$$V\big(t, x(t, x_0, t_0)\big) \geq V(t_0, x_0) = \alpha, \qquad (2.86)$$

якщо тільки $V(t, x(t, x_0, t_0)) > 0$. Тобто, якщо розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ залишається в області П, то (2.86) виконується. Розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ може покинути область П, перетинаючи при деякому $T > t_0$ границю області П, де $V(T, x(T)) = 0$. З (2.86) випливає, що

$$V(t, x(t)) \geq \alpha > 0, \qquad t \in [t_0, T).$$

Але це суперечить неперервності $V(t, x(t))$, оскільки $V(T-0, x(T-0)) \geq \alpha > V(T, x(T)) = 0$. Отже, для всіх $t \geq t_0$ розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ лежить у

$$\{(t, x) \in \mathcal{Z} : V(t, x) \geq \alpha > 0\} \subset П.$$

За третьою умовою теореми

$$\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt} \geq \beta > 0, \qquad t \geq t_0.$$

Інтегруючи останню нерівність від t_0 до t, одержуємо

$$V(t, x(t, x_0, t_0)) \geq V(t_0, x_0) + \beta(t - t_0), \qquad t \geq t_0.$$

Оскільки $V(t_0, x_0) + \beta(t - t_0)$ є необмеженою зверху, якщо $t \geq t_0$, то $V(t, x(t, x_0, t_0))$ також є необмеженою зверху, $t \geq t_0$. Це суперечить другій умові теореми, за якою функція $V(t, x)$ обмежена в області П. Протиріччя показує, що припущення (2.85) неправильне і нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, системи (2.83) є нестійким.

■

2.12. Глобальна асимптотична стійкість. Теорема Барбашина – Красовського

Розглянемо автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad (2.87)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші, $f(0) = 0$, $t \geq 0$, $x(t, x_0)$ – розв'язок (2.87), $x(0) = x_0$.

Означення 2.17. *Незбурений розв'язок* $x(t) = 0, t \geq 0$, *системи диференціальних рівнянь* (2.87) *називають глобально асимптотично стійким* (*асимптотично стійкий у цілому*), *якщо він є асимптотично стійким і область асимптотичної стійкості*

$$\Omega = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \to \infty} \| x(t, x_0) \| = 0 \right\}$$

збігається з усім простором $\mathbb{R}^n$.

Це означає, що для всіх $x_0 \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t, x_0) \| = 0.$$

Зауважимо: якщо $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ є асимптотично стійким у цілому положенням рівноваги системи (2.87), то $\bar{x}$ є єдиним положенням рівноваги цієї системи.

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість (теорема 2.17) вказує умови, які має забезпечувати функція Ляпунова для асимтотичної стійкості нульового розв'язку. Утім, для глобальної асимптотичної стійкості слід забезпечити додаткові умови.

Означення 2.18. *Функцію* $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *називають радіально необмеженою, якщо*

$$V(x) \to +\infty, \quad \text{коли } \| x \| \to +\infty.$$

Приклад 2.33. Функція

$$V_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

є радіально необмеженою. Функція

$$V_2(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

не є радіально необмеженою, оскільки при $x_1 = x_2$ функція $V_2(x_1, x_2) = 0$, зокрема і при $x_1^2 + x_2^2 \to +\infty$. Функція

$$V_3(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

не є радіально необмеженою, оскільки $0 \leq V_3(x_1, x_2) \leq 1$.

Теорема 2.28 (Барбашина – Красовського про глобальну асимптотичну стійкість). *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.87) *знайдеться неперервно диференційована додатно визначена функція* $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *повна похідна від якої за* *змінною t в силу системи* (2.87) *є функцією від'ємно визначеною,* $x \in \mathbb{R}^n$, *при цьому функція* $V(x)$ *є радіально необмеженою, тобто*

$$V(x) \to +\infty, \qquad \text{якщо} \quad \| x \| \to +\infty,$$

то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, *системи* (2.87) *є глобально асимптотично стійким.*

Доведення. Умови теореми 2.28 є сильнішими за умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Тому нульовий розв'язок системи (2.87) асимптотично стійкий за Ляпуновим. Покажемо, що виконується глобальна асимптотична стійкість.

Розглянемо множину

$$\Psi(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq r\}, \tag{2.88}$$

де $r > 0$ – деяке число.

Оскільки функція $V(x)$ є радіально необмеженою, то для довільного $r > 0$ множина $\Psi(r)$ є обмеженою. Справді, якби для деякого $r > 0$ множина $\Psi(r)$ була необмеженою, то існувала б послідовність точок $x^{(k)} \in \Psi(r)$, $k = 1,2, ...$, така, що $\| x^{(k)} \| \to +\infty$, коли $k \to +\infty$. Тоді з умови радіальної необмеженості випливає, що

$$V\left(x^{(k)}\right) \to +\infty, \qquad k \to +\infty.$$

Але, оскільки $x^{(k)} \in \Psi(r)$, $k = 1,2, ...$, то

$$V\left(x^{(k)}\right) \leq r, \qquad k \to +\infty.$$

Одержали протиріччя, яке показує обмеженість $\Psi(r)$ для будь-якого $r > 0$. Тому знайдеться таке $R > 0$, для якого

$$\Psi(r) \subset K_R(0).$$

Якщо $x_0 \in \Psi(r)$, $x_0 \neq 0$, то $x(t, x_0) \neq 0$, $t \geq 0$ і

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \left(\frac{dV(x(t, x_0))}{dt}\right)_{(2.87)} < 0,$$

$t \geq 0$. Це означає, що

$$V(x(t, x_0)) < V(x_0) \leq r, \qquad t \geq 0.$$

Тому

$$x(t, x_0) \in \Psi(r), \qquad t \geq 0.$$

Зокрема це означає, що $x(t, x_0) \in K_R(0)$, $t \geq 0$.

Виберемо $r > 0$ і $x_0 \in \Psi(r)$. Покажемо, що

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0.$$

Обґрунтування цього факту проведемо аналогічно доведенню теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість.

Припустимо, від супротивного, що існує послідовність $\{t_k\} \subset [0, +\infty)$ така, що $t_k \to +\infty$ і

$$\|x(t_k, x_0)\| \geq a, \qquad k = 1,2, \ldots,$$

де $a > 0$. Оскільки функція $V(x)$ є неперервною і додатно визначеною, то знайдеться $b > 0$ таке, що

$$V(x) \geq b, \qquad a \leq \|x\| \leq R.$$

Тому $V(x(t_k, x_0)) \geq b$, $k = 1,2, \ldots$.

Повна похідна в силу системи

$$W(x) = \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.87)}$$

є неперервною від'ємно визначеною функцією. Функція $V(x(t, x_0))$ не зростає, $t \geq 0$. Тому $V(x(t, x_0)) \geq b$ для всіх $t \geq 0$. Справді, якщо $V(x(t, x_0)) < b$ при деякому $t \geq 0$, то для всіх членів послідовності $\{t_k\}$, які більші за t, у силу того, що $V(x(t, x_0))$ не зростає, виконувалася б умова $V(x(t_k, x_0)) < b$. А це суперечить зробленому припущенню.

З урахуванням того, що $V(0) = 0$ і $V(x)$ є додатно визначеною неперервною функцією, то знайдеться $\delta > 0$ таке, що $V(x) < b$ для $\|x\| < \delta$. Тому розв'язок $x(t, x_0)$ системи (2.87) не задовольняє умову $\|x(t)\| < \delta$. Враховуючи, що існує $R > 0$, для якого $\Psi(r) \subset K_R(0)$, і те, що

$$x(t, x_0) \in \Psi(r), \qquad t \geq 0,$$

доходимо висновку, що

$$x(t, x_0) \in \{x \in \mathbb{R}^n, \qquad \delta \leq \|x\| \leq R\}, \qquad t \geq 0.$$

Оскільки

$$W(x) = \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.87)}$$

є неперервною від'ємно визначеною функцією, то знайдеться константа $p > 0$ така, що

$$W(x) \leq -p, \qquad x \in \{x \in \mathbb{R}^n, \qquad \delta \leq \|x\| \leq R\}.$$

Отже,

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.87)} \le -p$$

і тому

$$V\big(x(t,x_0)\big) = V(x_0) + \int_0^t \frac{dV\big(x(s,x_0)\big)}{ds}ds \le V(x_0) - pt,$$
$$t \ge 0.$$

Звідси випливає, що можна підібрати $t > 0$, для якого $V\big(x(t,x_0)\big) < 0$. Наприклад, $V\big(x(t,x_0)\big) < 0$, коли

$$V(x_0) - pt < 0,$$

звідки $t > \frac{V(x_0)}{p}$. Одержали протиріччя з умовою додатної визначеності функції $V(x)$. Протиріччя показує, що

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t,x_0)\| = 0.$$

Завершуючи доведення теореми, виберемо довільне $x_0 \in \mathbb{R}^n$ і покладемо

$$r = V(x_0).$$

Оскільки $x_0 \in \Psi(r)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t,x_0)\| = 0.$$

■

Приклад 2.34. Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x^5 + y^2, \\ \dot{y} &= -xy - y^3. \end{cases}$$

Розглянемо функцію

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Така функція є додатно визначеною. Знайдемо похідну цієї функції за t в силу системи

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = x(-x^5 + y^2) + y(-xy - y^3) =$$
$$= -x^6 + xy^2 - xy^2 - y^4 = -x^6 - y^4.$$

Отже, похідна є від'ємно визначеною. Оскільки функція $V(x, y)$ радіально необмежена, то за теоремою 2.26 розв'язок $x(t) = y(t) = 0$ системи є глобально асимптотично стійким.

Розглянемо неавтономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \ t \geq t_0. \tag{2.89}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи (2.89), $f(t, x)$ – n-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $x \in \mathbb{R}^n$, причому $f(0, t) = 0, \ \ t \geq t_0$. Припустимо, що $V(t, x)$ є неперервно диференційованою скалярною функцією, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$.

Означення 2.19. *Незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, *системи диференціальних рівнянь* (2.89) *називають глобально асимптотично стійким* (*асимптотично стійкий у цілому*), *якщо він є асимптотично стійким і область асимптотичної стійкості*

$$\Omega(t_0) = \left\{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0\right\}$$

збігається з усім простором $\mathbb{R}^n$.

Це означає, що для всіх $x_0 \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0.$$

Уведемо таке означення.

Означення 2.20. *Функція* $V(t, x)$ *допускає нескінченно малу вищу границю в сильному сенсі в точці* $x = 0$, *якщо існує неперервна функція* $W_0(x)$, $W_0(0) = 0$, *така, що*

$$|V(t, x)| \leq W_0(x)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$.

Якщо функція $V(t, x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в сильному сенсі в точці $x = 0$, то $V(t, x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$ в сенсі означення, яке застосовувалось у доведенні теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість для неавтономних систем (означення 2.12). З означення 2.20 випливає, що рівномірно за $t \geq t_0$ виконується

$$\lim_{\|x\| \to 0} V(t, x) = 0.$$

Означення 2.21. *Функція $V(t, x)$ є радіально необмеженою, якщо існує радіально необмежена функція $W(x)$ у сенсі означення 2.18 така, що*

$$V(t, x) \geq W(x)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2.29. *Якщо для системи диференціальних рівнянь* (2.89) *знайдеться неперервно диференційована додатно визначена функція $V(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, яка в точці $x = 0$ допускає нескінченно малу вищу границю в сильному сенсі, похідна від якої за змінною t в силу системи* (2.89) *є функцією від'ємно визначеною, причому функція $V(t, x)$ є радіально необмеженою, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, то незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, системи* (2.89) *є глобально асимптотично стійким.*

Доведення. З урахуванням теореми Ляпунова про асимтотичну стійкість, розв'язок

$$x(t) = 0, \qquad t \geq t_0,$$

системи (2.89) є асимптотично стійким за Ляпуновим. Покажемо, що для всіх $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справджується

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0.$$

Оскільки функція $V(t, x)$ є радіально необмеженою і допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$, то існують радіально необмежена функція $W(x)$ і неперервна функція $W_0(x)$, $W_0(0) = 0$ такі, що

$$W(x) \leq V(t, x) \leq W_0(x)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$. Тоді, якщо позначити

$$\Psi_0(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : W_0(x) \leq r\}, \qquad \Psi(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : W(x) \leq r\},$$
$$\Phi(r, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) \leq r\},$$

де $r > 0$ – деяке число, $t \geq t_0$, то

$$\Psi_0(r) \subset \Phi(r, t) \subset \Psi(r), \qquad t \geq t_0.$$

Множина $\Psi(r)$ є обмеженою, як показано в доведенні попередньої теореми. Тому множини $\Phi(r, t)$, $\Psi_0(r)$ також обмежені, $t \geq t_0$.

Зафіксуємо $r > 0$, виберемо $x_0 \in \Psi_0(r)$, $x_0 \neq 0$. Тоді $x(t, x_0, t_0) \neq 0$, $t \geq t_0$ і

$$\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt} = \left(\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt}\right)_{(2.89)} < 0,$$

$t \geq t_0$. Це означає, що

$$V(t, x(t, x_0, t_0)) < V(t_0, x_0) \leq W_0(x_0) \leq r, \qquad t \geq t_0.$$

Але функція $V(t, x)$ радіально необмежена, тому

$$W(x(t, x_0, t_0)) \leq V(t, x(t, x_0, t_0)) \leq r, \qquad t \geq t_0.$$

Отже,

$$x(t, x_0, t_0) \in \Psi(r), \qquad t \geq t_0.$$

Множина $\Psi(r)$ є обмеженою. А це означає, що існує таке $R > 0$, для якого

$$x(t, x_0, t_0) \in \Psi(r) \subset K_R(0), \qquad t \geq t_0.$$

Покажемо, що

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0.$$

Від супротивного. Припустимо, що знайдеться послідовність $\{t_k\} \subset [t_0, +\infty)$ така, що $t_k \to +\infty$ і

$$\|x(t_k, x_0, t_0)\| \geq a, \qquad k = 1,2, \ldots,$$

де $a > 0$. Оскільки функція $V(t, x)$ є неперервною і додатно визначеною, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, то існує додатно визначена неперервна функція $V_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ така, що

$$V(t, x) \geq V_0(x) \geq b, \qquad a \leq \|x\| \leq R.$$

де $b > 0$ – деяка константа. Тому

$$V(t_k, x(t_k, x_0, t_0)) \geq V_0\big(x(t_k, x_0, t_0)\big) \geq b, \qquad k = 1,2, \ldots .$$

Повна похідна функції $V(t, x)$ у силу системи (2.89) є від'ємно визначеною неперервною функцією. Тому $V(t, x(t, x_0, t_0))$ спадна і

$$V(t, x(t, x_0, t_0)) \geq b$$

для всіх $t \geq t_0$. Справді, якщо $V(t, x(t, x_0, t_0)) < b$ для деякого $t \geq t_0$, то для всіх членів послідовності $\{t_k\}$, які більші за t, виконується умова $V(t_k, x(t_k, x_0, t_0)) < b$. Це у свою чергу суперечить припущенню.

Оскільки $V(t,x)$ допускає нескінченно малу вищу границю в $x = 0$ в сильному сенсі, то

$$W_0(x(t, x_0, t_0)) \geq b, \quad t \geq t_0, \tag{2.90}$$

де, за означенням (2.90),

$$W_0(0) = 0, \qquad W_0(x) \geq V(t,x) > 0, \qquad x \neq 0,$$

і функція $W_0(x)$ є неперервною, $x \in \mathbb{R}^n$. Тому знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$W_0(x) < b, \qquad \|x\| < \delta.$$

Оскільки виконується (2.90), то розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ системи (2.89) при жодному $t \geq t_0$ не задовольняє умову $\|x(t, x_0, t_0)\| < \delta$. Це означає, що

$$x(t, x_0, t_0) \in L(\delta, R) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \delta \leq \|x\| \leq R\}, \qquad t \geq t_0.$$

Зважаючи на те, що похідна в силу системи

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.89)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \geq t_0,$$

є неперервною від'ємно визначеною функцією, то за означенням 2.11 знайдуться додатно визначена функція $W_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ і константа $p > 0$ такі, що

$$-\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.89)} \geq W_1(x) > p, \qquad x \in L(\delta, R), \qquad t \geq t_0.$$

Оскільки $x(t, x_0, t_0) \in L(\delta, R)$ при $t \geq t_0$, то

$$\left(\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt}\right)_{(2.89)} \leq -p.$$

Звідси випливає, що існує $t \geq t_0$, за якого $V(t, x(t, x_0, t_0)) < 0$. Якщо покласти $V(t_0, x_0) - p(t - t_0) < 0$, то знайдемо

$$t > t_0 + \frac{V(t_0, x_0)}{p},$$

для яких $V(t, x(t, x_0, t_0)) < 0$. Одержали протиріччя з додатною визначеністю функції $V(t,x)$. Протиріччя показує, що

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0.$$

Завершуючи обґрунтування теореми, виберемо довільне $x_0 \in \mathbb{R}^n$ і покладемо

$$r = W_0(x_0).$$

Через те, що $x_0 \in \Psi_0(r)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0.$$

■

2.13. Методи конструювання функцій Ляпунова

З урахуванням аналізу теорем Ляпунова, Четаєва, Барбашина – Красовського для дослідження якісної поведінки незбуреного розв'язку необхідно створити методику конструювання функцій Ляпунова, які мають відповідні властивості. Разом із тим навіть обґрунтування існування таких функцій є проблемою, яка розв'язується лише в окремих випадках. Одним із таких результатів є теорема Персидського, згідно з якою, якщо нульовий розв'язок системи (2.64) є стійким за Ляпуновим, то в деякому околі нуля існує функція Ляпунова в сенсі теореми 2.19.

Далі ми покажемо, що для лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами проблема знаходження функції Ляпунова розв'язується за допомогою теореми 2.30. Також для багатьох важливих із прикладного погляду систем існує методика конструювання функцій Ляпунова, розроблено наближені методи побудови таких функцій. Розглянемо основні методи конструювання функцій Ляпунова.

2.13.1. Методи побудови функцій Ляпунова для нелінійних систем

2.13.1.1. Метод змінного градієнта

Розглянемо нелінійну автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{2.91}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ – вектор-функція розмірності n, яка задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $f(0) = 0$. Нехай $V(x)$ – скалярна функція і

$$g(x) = \operatorname{grad} V(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))^T.$$

Зауважимо, що функція $V(x)$ належить до класу $C^2(\mathbb{R}^n)$, тобто є двічі неперервно диференційованою в $\mathbb{R}^n$. Похідна функції $V(x)$ за змінною t в силу системи (2.91) визначається рівністю

$$\frac{dV(x)}{dt} = g^T(x)f(x).$$

Суть методу змінного градієнта полягає в тому, що ми вибираємо вектор-функцію $g(x)$ так, щоб вона була градієнтом додатно визначеної функції $V(x)$ і водночас $\frac{dV(x)}{dt}$ була б від'ємно визначеною. За допомогою цього методу можна в окремих випадках обґрунтовувати асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги системи (2.91).

Відомо, що вектор-функція $g(x)$ є градієнтом деякої скалярної функції тоді і лише тоді, коли матриця Якобі

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}$$

є симетричною, тобто

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Це випливає із симетричності матриці других похідних (матриці Гессе). Вибираємо функцію $g(x)$ так, щоб скалярний добуток $g^T(x)f(x)$ був від'ємно визначеним. Тоді з урахуванням симетричності, функцію $V(x)$ можна обчислювати за формулою

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0)dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, \dots, 0)dy_2 + \cdots +$$

$$+ \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n)dy_n.$$

Залишаючи деякі параметри $g(x)$ невизначеними, можна спробувати вибрати інші таким чином, щоб функція $V(x)$ була додатно визначеною. Проілюструємо цей метод на такому прикладі. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2. \end{cases}$$

Щоб застосувати метод змінного градієнта, маємо знайти вектор-функцію $g(x)$ розмірності 2 таку, що

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1},$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = g_1(x)x_2 - g_2(x)(x_1^3 + x_2) < 0, \qquad x \neq 0,$$

$$V(x) = \int\limits_0^{x_1} g_1(y_1, 0)dy_1 + \int\limits_0^{x_2} g_2(x_1, y_2)dy_2 > 0, \quad x \neq 0.$$

Виберемо таку функцію:

$$g(x) = (a(x)x_1 + b(x)x_2, c(x)x_1 + d(x)x_2)^T,$$

де $a(x), b(x), c(x), d(x)$ – деякі скалярні функції, які підбиратимемо, щоб забезпечити умови методу. Умова симетричності дає рівність

$$b(x) + \frac{\partial a(x)}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial b(x)}{\partial x_2}x_2 = c(x) + \frac{\partial c(x)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial d(x)}{\partial x_1}x_2.$$

Вона виконується, якщо функції b, c, d є константами, причому $b = c$ і $a(x) = a(x_1)$. Далі

$$\frac{dV(x)}{dt} = (a(x_1)x_1 + bx_2)x_2 - (bx_1 + dx_2)(x_1^3 + x_2) =$$
$$= a(x_1)x_1x_2 + bx_2^2 - bx_1^4 - bx_1x_2 - dx_1^3x_2 - dx_2^2.$$

Щоб виключити доданки, які містять попарні добутки x_1x_2, виберемо $a(x_1)$ так, щоб

$$a(x_1)x_1 - bx_1 - dx_1^3 = 0,$$

тобто $a(x_1) = b + dx_1^2$. Тоді

$$\frac{dV(x)}{dt} = (b - d)x_2^2 - bx_1^4.$$

Для $V(x)$ маємо

$$V(x) = \int_0^{x_1} a(y_1)y_1 dy_1 + \int_0^{x_2} (bx_1 + dy_2)dy_2 =$$

$$= \frac{1}{2}bx_1^2 + \frac{1}{4}dx_1^4 + bx_1x_2 + \frac{1}{2}dx_2^2.$$

Бачимо, що за умови

$$b > 0, \qquad d > b$$

функція $V(x)$ – додатно визначена, функція $\frac{dV(x)}{dt}$ – від'ємно визначена. Отже, за теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість (теорема 2.17) розв'язок $x_1(t) = 0,\ x_2(t) = 0,\ t \geq 0,$ вихідної системи є асимптотично стійким.

2.13.1.2. Метод Красовського

Розглянемо нелінійну автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{2.92}$$

Тут $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ – неперервно диференційована вектор-функція розмірності n, $f(0) = 0$. Припустимо, що існує окіл $U(0)$ початку координат, в якому не існує жодної іншої точки рівноваги системи (2.92), окрім точки $x = 0$. Досліджуватимемо нульовий розв'язок системи (2.92) на стійкість у цьому околі. Функцію Ляпунова шукаємо у вигляді [3]

$$V(x) = f^T(x)Bf(x). \tag{2.93}$$

Симетричну матрицю B розмірності $n \times n$ вибираємо так, щоб

$$\frac{\partial f^T(x)}{\partial x}B + B\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -H, \quad x \in U(0), \tag{2.94}$$

де H – задана додатно визначена матриця розмірності $n \times n$. Якщо існує матриця B, яка задовольняє (2.94), то

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.62)} = f^T(x)B\frac{\partial f(x)}{\partial x}f(x) + f^T(x)\frac{\partial f^T(x)}{\partial x}Bf(x) =$$

$$= f^T(x)\left(B\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f^T(x)}{\partial x}B\right)f(x) = -f^T(x)Hf(x).$$

Функція Ляпунова (2.93) задовольняє в околі $U(0)$ теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість (теорема 2.17) за умови, що матриця B – додатно визначена. Якщо система (2.92) є лінійною, тобто $f(x) = Ax$, де A – матриця зі сталими елементами розмірності $n \times n$, то (2.94) є матричним рівнянням Ляпунова

$$A^T B + BA = -H.$$

2.13.1.3. Метод лінеаризації за системою базисних функцій

Розглянемо систему (2.92). Уведемо систему лінійно незалежних функцій

$$\{\varphi_i(x) \in C^1(\Gamma) : i = 1,2, \dots\}, \qquad (2.95)$$

які утворюють клас $\mathcal{L}$-визначених в області Γ функцій, де $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Gamma$ [3]. Припустимо, що

$$\mathrm{grad}\varphi_i^T(x)f(x) \in \mathcal{L}, \qquad i = 1,2, \dots .$$

Вважаємо, що функції (2.95) мають такі властивості.

1. $\varphi_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

2. $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1,2, \dots$.

3. Клас функцій $\mathcal{L}$ є повним, тобто для довільного $p \in \mathcal{L}$ справджується

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty.$$

4. $\sum_{i=M+1}^{\infty} \varphi_i^2(x) \le \varphi_M^2$, $\varphi_M \to 0$, якщо $M \to \infty$.

За зроблених припущень

$$\mathrm{grad}\varphi_i^T(x)f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ij}\varphi_j(x), i = 1,2, \dots.$$

Позначимо $y_i = \varphi_i(x),\ i = 1,2,\dots$. Тоді

$$\frac{dy_i}{dt} = \mathrm{grad}\varphi_i^T(x)f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}y_j, \qquad i = 1,2,\dots .$$

У такий спосіб одержуємо зліченну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\tfrac{dy_i}{dt} = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}y_j, \quad i = 1,2,\dots . \tag{2.96}$$

Виберемо досить велике $M > 0$ й із системи (2.96) утворимо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{M} a_{ij}y_j, \qquad i = 1,2,\dots,M,$$

яку можемо подати ще так:

$$\tfrac{dy}{dt} = Ay. \tag{2.97}$$

Тут $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)^T$, A – матриця зі сталими елементами розмірності $M \times M$, елементами якої є коефіцієнти a_{ij}, $i, j = 1,2,\dots,M$. Якщо матриця A є асимптотично стійкою, то функцію Ляпунова будуємо у квадратичній формі:

$$V(y) = y^T By,$$

де B є додатно визначеною симетричною матрицею розмірності $M \times M$, яку знаходимо згідно з матричним рівнянням Ляпунова

$$A^T B + BA = -H.$$

Тут H – додатно визначена симетрична матриця розмірності $M \times M$. Позначимо

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_M(x))^T.$$

Тоді функція Ляпунова має такий вигляд:

$$V(x) = \varphi^T(x)B\varphi(x), \qquad x \in \Gamma.$$

Перехід до системи вигляду (2.97) можна здійснити також за допомогою методу мінімізації середньоквадратичної похибки. Для цього знайдемо похідні від $\varphi(x)$ у силу системи (2.92):

$$\left(\frac{d\varphi(x)}{dt}\right)_{(2.92)} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right), \tag{2.98}$$

$$i, j = 1,2, \dots, M.$$

Тому систему (2.98) розглянемо у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi.$$

Матрицю A розмірності $M \times M$ знайдемо як розв'язок задачі мінімізації функціонала

$$\mathcal{J}(A) = \int_\Gamma \left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x) - A\varphi(x)\right\|^2 dx. \tag{2.99}$$

Позначатимемо як $\mathbb{R}^{n\times m}$ множину матриць розмірності $n \times m$ із дійсними компонентами, $\operatorname{tr} M = \sum_{j=1}^{n} m_{jj}$ – слід матриці $M = \left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$. Слід матриці має такі властивості:

1) $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$, $P \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
2) $x^T y = \operatorname{tr}(yx^T)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$;
3) $\frac{\partial}{\partial P}\operatorname{tr}(P^T Q) = Q$, $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$;
4) $\frac{\partial}{\partial P}\operatorname{tr}(PVP^T) = 2PV$, $P, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $V^T = V$.

Тоді функціонал (2.99) можна подати у такий спосіб:

$$\mathcal{J}(A) = \int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x) - A\varphi(x)\right)^T \left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x) - A\varphi(x)\right) dx =$$

$$= \int_\Gamma \left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\right\|^2 dx - 2\int_\Gamma \varphi^T(x) A^T \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x) dx +$$

$$+ \int_\Gamma \varphi^T(x) A^T A\varphi(x) dx =$$

$$= \int_\Gamma \left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\right\|^2 dx - 2\int_\Gamma \varphi^T(x) A^T \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x) dx +$$

$$+ \int_\Gamma \varphi^T(x) A^T A\varphi(x) dx =$$

$$= \int_\Gamma \left\|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\right\|^2 dx - 2\int_\Gamma \operatorname{tr}\left(A^T \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\varphi^T(x)\right) dx +$$

$$+\int_{\Gamma} \operatorname{tr}\left(A\varphi(x)\varphi^{T}(x)A^{T}\right)dx =$$

$$= \int_{\Gamma} \left\| \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x) \right\|^{2} dx - 2\operatorname{tr}\left(A^{T} \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\varphi^{T}(x)dx\right) +$$

$$+\operatorname{tr}\left(A \int_{\Gamma} \varphi(x)\varphi^{T}(x)dx A^{T}\right).$$

Щоб знайти мінімум функціонала (2.99), застосовуємо необхідну умову екстремуму:

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial A} = -2\int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\varphi^{T}(x)dx + 2A\int_{\Gamma} \varphi(x)\varphi^{T}(x)dx = 0. \tag{2.100}$$

Матриця $\int_{\Gamma} \varphi(x)\varphi^{T}(x)dx$ є невиродженою, оскільки вона є матрицею Грама за системою лінійно незалежних функцій φ_i, $i = 1,2,\dots,M$. З (2.100) випливає

$$A = \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} f(x)\varphi^{T}(x)dx \left(\int_{\Gamma} \varphi(x)\varphi^{T}(x)dx\right)^{-1}.$$

2.13.2. Числовий метод конструювання функції Ляпунова для нелінійних систем

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь [3]

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \geq t_0, \tag{2.101}$$

для якої розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq t_0$, є асимптотично стійким. Тут $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи, $f(t,x)$ – вектор-функція розмірності n, яка задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, $x(t, x_0, t_0)$ – розв'язок системи (2.101) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$.

Задамо додатно визначену функцію $W(t,x)$. Функцію Ляпунова $V(t,x)$ знаходимо з умови

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.101)} = -W(t,x). \tag{2.102}$$

Припустимо, що точка (x_0, t_0) належить області асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (2.101). Підставивши розв'язок $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ в (2.102), отримаємо

$$\frac{dV(t, x(t, x_0, t_0))}{dt} = -W(t, x(t, x_0, t_0)). \qquad (2.103)$$

Інтегруємо (2.103) від t_0 до t й отримуємо

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) = -\int_{t_0}^{t} W(s, x(s))ds. \qquad (2.104)$$

Оскільки нульовий розв'язок системи (2.101) є асимптотично стійким, то

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} V(t, x(t, x_0, t_0)) = 0. \qquad (2.105)$$

Перейшовши в (2.104) до границі при $t \to +\infty$ і врахувавши (2.105), одержимо

$$V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} W(t, x(t, x_0, t_0))dt. \qquad (2.106)$$

Замінивши x_0 на z, а t_0 на t, формулу (2.106) подамо у такий спосіб:

$$V(t, z) = \int_{t}^{\infty} W(s, x(s, z, t_0))ds. \qquad (2.107)$$

Розглянемо загальний підхід до створення числових методів знаходження функції Ляпунова $V(t, x)$ із використанням (2.107). Область асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (2.101) покриваємо достатньо щільною сіткою, що складається з точок (t_k, x_k), $k = 1,2, \dots, N$. Для кожної точки (t_k, x_k) з утвореної сітки шукаємо розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \ \ x(t_k) = x_k, \\ \frac{dV_k(t)}{dt} = W(t, x(t)), \ V_k(t_k) = 0, \ t \in [t_k, t_k + T], \end{cases} \qquad (2.108)$$

де $T > 0$ – достатньо велике число, $k = 1,2, \dots, N$. Згідно з (2.107), (2.108) значення $V(t_k, x_k)$ апроксимують співвідношенням

$$V_k(t_k + T) = \int_{t_k}^{t_k+T} W(s, x(t_k, x_k, s))ds, \qquad k = 1,2, \dots, N.$$

Використовуючи знайдені наближені значення $V(t_k, x_k)$ і методи інтерполяції функцій, знаходимо апроксимацію функції $V(t, x)$.

Припустимо, що система (2.101) є автономною, тобто має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \geq 0. \tag{2.109}$$

Тут $f(x)$ – вектор-функція розмірності n, яка задовольняє умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші. У цьому випадку розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (2.109) не залежить від початкового моменту t_0 і $x(t, x_0) = x(t, x_0, 0)$. Причому функцію Ляпунова можна вибрати незалежною від часової змінної t. Отже, вибираємо додатно визначену функцію $W(x)$, функцію Ляпунова $V(x)$ знаходимо з умови $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.109)} = -W(x)$. Аналогічно до (2.107) одержуємо

$$V(z) = \int_0^\infty W(x(s, z))ds. \tag{2.110}$$

Тоді метод (2.108) матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)),\ x(0) = x_k, \\ \frac{dV_k(t)}{dt} = W(x(t)), \\ V_k(0) = 0,\ k = 1,2, \dots, N,\ t \in [0, T]. \end{cases} \tag{2.111}$$

Таким чином одержуємо $V(x_k)$, яке апроксимується співвідношенням

$$V_k(T) = \int_0^T W(x(s, x_k))ds,\ k = 1,2, \dots, N. \tag{2.112}$$

За наближеними значеннями $V(x)$ у точках x_k, $k = 1,2, \dots, N$, застосовуємо методи інтерполяції і знаходимо апроксимацію функції Ляпунова $V(x)$.

2.13.3. Побудова функцій Ляпунова для лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну нестаціонарну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.113}$$

де $A(t)$ – матриця розмірності $n \times n$ з обмеженими і неперервними за t елементами. Припустимо, що нульовий розв'язок системи (2.113) асимптотично стійкий за Ляпуновим. Функцію Ляпунова $V(t,x)$ шукаємо у вигляді нестаціонарної квадратичної форми

$$V(t,x) = x^T B(t)x,$$

де $B(t)$ – симетрична матриця розмірності $n \times n$, яку потрібно визначити. Задамо додатно визначену квадратичну форму

$$W(t,x) = x^T C(t)x.$$

Тут $C(t)$ – симетрична додатно визначена матриця розмірності $n \times n$ з обмеженими і неперервними елементами. Тоді

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(2.113)} =$$

$$= x^T \frac{dB(t)}{dt} x + x^T B(t)A(t)x + x^T B^T(t)A(t)x =$$

$$= x^T \frac{dB(t)}{dt} x + x^T B(t)A(t)x + x^T A^T(t)B(t)x = -x^T C(t)x.$$

Звідси одержуємо матричне диференціальне рівняння Ляпунова

$$\frac{dB(t)}{dt} + A^T(t)B(t) + B(t)A(t) = -C(t). \qquad (2.114)$$

Нехай $X(t,\tau)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи (2.113), нормована за моментом τ, $X(\tau,\tau) = E$. Домножимо (2.114) праворуч на $X(t,\tau)$, ліворуч на $X^T(t,\tau)$. Одержуємо

$$X^T(t,\tau)\left[\frac{dB(t)}{dt} + A^T(t)B(t) + B(t)A(t)\right]X(t,\tau) =$$
$$= -X^T(t,\tau)C(t)X(t,\tau).$$

Останнє матричне співвідношення перепишемо як

$$\frac{d}{dt}[X^T(t,\tau)B(t)X(t,\tau)] = -X^T(t,\tau)C(t)X(t,\tau). \qquad (2.115)$$

Проінтегруємо (2.115) від τ до t й одержимо

$$X^T(t,\tau)B(t)X(t,\tau) = B(\tau) - \int_\tau^t X^T(s,\tau)C(s)X(s,\tau)ds.$$

Звідси

$$B(\tau) = X^T(t,\tau)B(t)X(t,\tau) + \int_\tau^t X^T(s,\tau)C(s)X(s,\tau)ds.$$

Оскільки нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (2.113) є асимптотично стійким, то за теоремою 2.3 маємо

$$\lim_{t\to\infty} X(t,\tau) = 0.$$

Тому

$$B(\tau) = \int_\tau^\infty X^T(s,\tau)C(s)X(s,\tau)ds. \qquad (2.116)$$

Формулу (2.116) доцільно використовувати для знаходження функції Ляпунова з використанням методів наближеного інтегрування. Крім того, матрицю $B(t)$ можна шукати на основі матричного рівняння Ляпунова (2.114) на інтервалі $t \in [0, T]$ з умовою $B(T) = 0$, де $T > 0$ – досить велике число.

2.13.4. Випадок лінійних стаціонарних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad (2.117)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи (2.117), A – матриця розмірності $n \times n$. Ідея дослідження нульового розв'язку системи (2.117) на асимптотичну стійкість полягає у тому, що функцію Ляпунова шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T Bx. \qquad (2.118)$$

Тут B – симетрична $n \times n$-матриця. Задамо симетричну $n \times n$-матрицю C. Знайдемо повну похідну функції (2.118) у силу системи

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.117)} = x^T(A^T B + BA)x = -x^T Cx.$$

У такий спосіб одержуємо матричне рівняння Ляпунова

$$A^T B + BA = -C.$$

Одержане матричне рівняння застосовують для знаходження матриці B, яка визначає функцію Ляпунова (2.118). Якщо матриця B є додатно визначеною і матриця C є додатно визначеною, тоді виконується теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (2.117). Маємо такий фундаментальний результат.

Теорема 2.30 (Ляпунова). *Нехай всі власні числа* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *матриці A системи* (2.117) *мають від'ємні дійсні частини*

$$Re\ \lambda_k < 0, \quad k = 1,2,\dots,n. \tag{2.119}$$

Тоді для довільної додатно визначеної симетричної матриці C *розмірності* $n \times n$ *існує єдиний розв'язок B матричного рівняння Ляпунова*

$$A^T B + BA = -C, \tag{2.120}$$

який є додатно визначеною симетричною матрицею. Причому

$$B = \int_0^\infty e^{A^T t} C e^{At} dt. \tag{2.121}$$

І навпаки, нехай знайдеться додатно визначена симетрична матриця C *розмірності* $n \times n$ *така, що існує єдиний розв'язок B матричного рівняння Ляпунова* (2.120), *який є симетричною додатно визначеною матрицею. Тоді матриця A – стійка, тобто справедлива умова* (2.119) *і нульовий розв'язок системи* (2.117) *є асимптотично стійким за Ляпуновим***.**

Доведення. Необхідність. Припустимо, що виконується умова (2.119). Розглянемо матрицю

$$B = \int_0^\infty e^{A^T t} C e^{At} dt.$$

З умови (2.119) за теоремою 2.5 знайдуться $p \in (\alpha, 0)$, $\alpha = \max_{k=1,2,\dots,n} Re\ \lambda_k$ та константа $M > 0$, для яких

$$\|e^{At}\| \le Me^{pt}, \qquad \left\|e^{A^T t}\right\| \le Me^{pt}.$$

Отже

$$\left\|e^{A^T t} C e^{At}\right\| \le M_0 e^{2pt}, \qquad M_0 = M^2\|C\| > 0.$$

І оскільки невласний інтеграл $\int_0^\infty e^{2pt} dt$ існує, то існує матриця (2.121), яка є симетричною і додатно визначеною. Додатна визначеність матриці (2.121) випливає з того факту, що для довільного $x \in \mathbb{R}^n$ виконується

$$x^T B x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} C e^{At} x dt = \int_0^\infty \left\|C^{\frac{1}{2}} e^{At} x\right\| dt \ge 0.$$

Зазначимо, що $x^T Bx = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$. Справді, припустимо, що існує вектор $x \neq 0$ такий, що $x^T Bx = 0$. Тоді

$$\int_0^{\infty} \left\| C^{\frac{1}{2}} e^{At} x \right\| dt = 0.$$

Це означає, що

$$\left\| C^{\frac{1}{2}} e^{At} x \right\| = 0, \qquad t \in [0, \infty).$$

Отже, $C^{\frac{1}{2}} e^{At} x = 0$, $t \in [0, \infty)$. Оскільки матриця $C^{\frac{1}{2}} e^{At}$ невироджена, то $x = 0$. Тому матриця (2.121) є додатно визначеною.

Підставимо матрицю (2.121) у матричне рівняння Ляпунова (2.120). Одержуємо

$$A^T B + BA = \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} C e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} A dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} C e^{At} \right) \mathrm{d}t = e^{A^T t} C e^{At} \Big|_0^{\infty} = -C.$$

Бачимо, що матриця (2.121) є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (2.120). Покажемо, що такий розв'язок єдиний. Припустимо, від супротивного, що існує ще одна матриця B_0, яка не збігається з матрицею B і така, що є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (2.120), тобто

$$A^T B_0 + B_0 A = -C.$$

Тоді

$$A^T (B - B_0) + (B - B_0) A = 0.$$

Домножуємо останню рівність ліворуч на $e^{A^T t}$, праворуч – на e^{At}. Маємо

$$e^{A^T t} (A^T (B - B_0) + (B - B_0) A) e^{At} =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} (B - B_0) e^{At} \right) dt = 0.$$

Отже, матриця $F(t) = e^{A^T t} (B - B_0) e^{At}$ є сталою, $t \geq 0$. Оскільки $F(0) = B - B_0$, то

$$F(t) = e^{A^T t} (B - B_0) e^{At} = B - B_0, \qquad t \geq 0.$$

З іншого боку, у зв'язку з тим, що виконується умова (2.113), за теоремою 2.5

$$\lim_{t\to+\infty}\|e^{At}\| = \lim_{t\to+\infty}\left\|e^{A^Tt}\right\| = 0.$$

Звідси $\lim_{t\to+\infty}F(t) = 0$. Але $F(t) = B - B_0,\ t \ge 0$. Доходимо висновку, що $B - B_0 = 0$.

Достатність випливає з теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість для автономних систем (теорема 2.17). Виберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(x) = x^TBx,$$

де B – симетрична додатно визначена $n\times n$-матриця, яка є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (2.120), де C – додатно визначена симетрична $n\times n$-матриця. Тоді

$$\mathrm{grad}V(x) = Bx + B^Tx$$

і похідна в силу системи така:

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.117)} = \mathrm{grad}^TV(x)Ax = (Bx + B^Tx)^TAx =$$
$$= x^TB^TAx + x^TBAx = x^TA^TBx + x^TBAx =$$
$$= x^T(A^TB + BA)x = -x^TCx.$$

Отже, повна похідна в силу системи $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(2.117)}$ є від'ємно визначеною функцією. За теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість нульовий розв'язок системи (2.117) є асимптотично стійким за Ляпуновим.

■

Приклад 2.35. Проілюструємо теорему 2.30 на прикладі дослідження на стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2.\end{cases}$$

Позначимо матрицю системи і матрицю, яка визначається з матричного рівняння Ляпунова:

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця B – симетрична, то $b_{12} = b_{21}$. Виберемо додатно визначену симетричну матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і запишемо матричне рівняння Ляпунова

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Розкриваючи добутки матриць, одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження компонент матриці B:

$$\begin{cases} -2b_{21} - 2b_{12} & = -4, \\ b_{11} - 2b_{22} - 3b_{12} & = 0, \\ b_{11} - 2b_{22} - 3b_{21} & = 0, \\ b_{21} + b_{12} - 6b_{22} & = -10. \end{cases}$$

Враховуючи умову $b_{12} = b_{21}$, дістаємо $b_{11} = 7$, $b_{12} = b_{21} = 1$, $b_{22} = 2$. Отже, розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

За критерієм Сильвестра матриця B є додатно визначеною. За теоремою 2.29 нульовий розв'язок запропонованої системи диференціальних рівнянь асимптотично стійкий. Причому функція Ляпунова має вигляд

$$V(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Розглянемо один із методів обчислення невласного інтеграла

$$B = \int_0^\infty e^{A^T t} C e^{At} dt$$

на основі методу прямокутників. За означенням матричної експоненти

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!}.$$

Задамо деяке $h > 0$ і знайдемо e^{Ah}. Для цього обчислюємо

$$A_0 = E, \qquad A_k = \frac{1}{k} hAA_{k-1}, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Звідси

$$e^{Ah} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Виберемо досить великі числа N, M. Знайдемо

$$Q = \sum_{i=0}^{N} A_i.$$

Для наближеного знаходження матриці B

$$B = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt$$

виконуємо обчислення на відрізку $[0, Mh]$ за співвідношенням

$$\int_0^{Mh} e^{A^T t} C e^{At} dt.$$

Згідно з формулою прямокутників апроксимуємо його сумою

$$\sum_{i=0}^{M-1} h e^{A_i^T h} C e^{A_i h} = h \sum_{i=0}^{M-1} Q_i,$$

де $Q_0 = C,\ \ Q_1 = Q^T Q_0 Q, \dots ,\ \ Q_{s+1} = Q^T Q_s Q, \dots$.

Розглянемо ще один підхід до знаходження функції Ляпунова у вигляді (2.111) на основі (2.110). Нехай $e^{(1)} = (1,0, \dots ,0)^T$, $e^{(2)} = (0,1, \dots ,0)^T$, ..., $e^{(n)} = (0,0, \dots ,1)^T$. З (2.111) одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \\ \dfrac{dV_{k,s}(t)}{dt} = x^T(t) C x(t), \\ x(0) = e^{(k)} + e^{(s)}, \qquad V_{k,s}(0) = 0, \\ k, s = 1,2, \dots n, \qquad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Тоді

$$V\left(e^{(k)} + e^{(s)}\right) = V_{k,s}(T), \qquad k, s = 1,2, \dots , n.$$

Зауважимо, що $V_{k,s}(T) = V_{s,k}(T)$, $k, s = 1,2, \dots, n$. Нехай b_{ks} – елементи матриці B, $k, s = 1,2, \dots, n$. Одержуємо

$$(e^{(k)} + e^{(s)})^T B (e^{(k)} + e^{(s)}) = e^{(k)T} B e^{(k)} +$$
$$+2e^{(s)T} B e^{(k)} + e^{(s)T} B e^{(s)} = b_{kk} + b_{ss} + 2b_{ks},$$
$$k, s = 1,2, \dots, n.$$

Звідси

$$b_{kk} = \frac{1}{4} V_{k,k}(T),$$

$$b_{ks} = b_{sk} = \frac{1}{2}\left(V_{k,s}(T) - b_{kk} - b_{ss}\right), \qquad k, s = 1,2, \dots, n.$$

У такий спосіб знаходимо матрицю B, на основі якої конструюється функція Ляпунова.

Запитання, тести для самоконтролю

1. Поясніть різницю між збуреним і незбуреним розв'язками системи диференціальних рівнянь.
2. Наведіть означення стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь у нормальній формі. Як ці означення зміняться, якщо незбурений розв'язок не є нульовим?
3. Дайте означення області асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь у нормальній формі.
4. Наведіть геометричну інтерпретацію означень стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості незбуреного за Ляпуновим розв'язку.
5. Сформулюйте умови стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості нульового розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь у нормальній формі. Проаналізуйте окремо випадок нестаціонарних і стаціонарних систем.
6. Поясніть, як впливає кратність кореня характеристичного рівняння лінійної системи диференціальних рівнянь зі ста-

лими коефіцієнтами на умови стійкості нульового розв'язку цієї системи.

7. У чому полягає критерій Гурвіца?
8. Наведіть класифікацію точок рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами на площині.
9. Поясніть, чому точка рівноваги типу сідло є завжди нестійкою.
10. У чому полягає теорема Гробмана – Хартмана?
11. Наведіть основні положення методу першого наближення для автономних систем.
12. Яка ідея обґрунтування теореми про стійкість за методом першого наближення для автономних систем?
13. Дайте означення ляпуновського характеристичного показника функції. У чому полягає зміст цього поняття?
14. Наведіть основні властивості ляпуновського характеристичного показника функції.
15. У чому полягає теорема Ляпунова про існування ляпуновського характеристичного показника розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь?
16. Яка роль старшого ляпуновського характеристичного показника у процесі дослідження умов стійкості нульового розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
17. Поясніть, як знайти спектр ляпуновських характеристичних показників лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
18. Сформулюйте лему про співвідношення Релея. Яка ідея обґрунтування цього твердження?
19. Сформулюйте теорему про нерівність Важевського. Який наслідок випливає із цієї нерівності?
20. У чому полягає відмінність між першим і другим методами Ляпунова? Яка функція називається функцією Ляпунова?
21. Наведіть означення додатно сталої (від'ємно сталої), додатно визначеної (від'ємно визначеної), знакозмінної функцій, що залежать лише від вектора стану, а також, що залежать від стану і часової змінної. Порівняйте ці означення і наведіть приклади таких функцій.

22. У чому полягає поняття замкненості поверхні відносно точки 0.
23. Наведіть означення функції, яка допускає нескінченно малу вищу границю в точці 0. У чому полягає зміст цього означення?
24. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість для автономних систем. Яка ідея доведення цієї теореми?
25. Сформулюйте теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість для автономних систем. Порівняйте її з теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість для неавтономних систем.
26. У чому полягає відмінність в обґрунтуванні теореми Ляпунова про стійкість для автономних і неавтономних систем?
27. Сформулюйте означення експоненціальної стійкості нульового розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь.
28. Наведіть умови теореми про експоненціальну стійкість нульового розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь.
29. Порівняйте першу і другу теореми Ляпунова про нестійкість.
30. Порівняйте теорему Ляпунова про стійкість і першу теорему Ляпунова про нестійкість.
31. Порівняйте першу теорему Ляпунова про нестійкість і теорему Четаєва.
32. Як застосовується друга теорема Ляпунова про нестійкість до обґрунутвання умов нестійкості у методі першого наближення.
33. Порівняйте обґрунтування першої теореми Ляпунова про нестійкість для автономних і неавтономних систем. У чому полягає відмінність?
34. Наведіть геометричну інтерпретацію теореми Четаєва.
35. Сформулюйте означення глобальної асимптотичної стійкості незбуреного розв'язку системи диференціальних рівнянь.
36. Яка функція називається радіально необмеженою? Наведіть приклади таких функцій і приклади функцій, для яких умова радіальної необмеженості порушується.

37. Сформулюйте теорему Барбашина – Красовського про глобальну асимптотичну сійкість.
38. Порівняйте доведення теореми Барбашина – Красовського про глобальну асимптотичну стійкість із доведенням теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість. Завдяки яким особливостям функції Ляпунова вдається досягнути асимптотичної стійкості в цілому?
39. У чому полягає ідея методу змінного градієнта?
40. У чому полягає метод Красовського?
41. Яка ідея методу лінеаризації за системою базисних функцій?
42. У чому полягає числовий підхід до побудови функції Ляпунова для лінійних систем?
43. Яка методика побудови функції Ляпунова для лінійних систем?
44. У чому полягає теорема Ляпунова про конструювання функції Ляпунова для лінійних систем зі сталими коефіцієнтами?

Обов'язкові та додаткові задачі

2.1. Дослідити стійкість розв'язку задачі Коші з указаними початковими умовами

$$\dot{x} = 4x - t^2 x, \qquad x(0) = 0.$$

2.2. Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи

$$x = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}.$$

2.3. Дослідити стійкість розв'язку задачі Коші з указаними початковими умовами

$$3(t-1)\dot{x} = x, \qquad x(2) = 0.$$

У задачах 2.4–2.7 дослідити точки рівноваги для системи. Побудувати фазовий портрет поведінки траєкторій на площині:

2.4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

2.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \quad = y, \\ \dfrac{dy}{dt} \quad = -y. \end{cases}$

У задачах 2.8–2.11 дослідити точки рівноваги для системи. Побудувати фазовий портрет поведінки інтегральних кривих на площині:

2.8. $y' = \dfrac{y}{x}.$

2.9. $y' = \dfrac{2y - x}{3x + 6}.$

2.10. $y' = \dfrac{2x + y}{3x + 4y}.$

2.11. $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}.$

У задачах 2.12–2.13 дослідити особливі точки рівноваги для системи. Побудувати фазовий портрет поведінки траєкторій на площині:

2.12. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

Для задач 2.14–2.17 дослідити особливі точки для рівняння. Побудувати фазовий портрет поведінки інтегральних кривих на площині:

2.14. $y' = \dfrac{x - 4y}{2y - 3x}.$

2.15. $y' = \dfrac{4y - 2x}{x + y}.$

2.16. $y' = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}$.

2.17. $y' = \dfrac{2x + y}{x - 2y - 5}$.

У задачах 2.18–2.19 дослідити точки рівноваги для системи. Побудувати фазовий портрет поведінки траєкторій на площині:

2.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2x - y)(x - 2), \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 2. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$

Для задач 2.20–2.21 дослідити особливі точки для рівняння. Побудувати фазовий портрет поведінки інтегральних кривих на площині:

2.20. $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$.

2.21. $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.

2.22. Застосовуючи критерій Гурвіца, дослідити на асимптотичну стійкість нульовий розв'язок систем:

а) $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$;
б) $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0$;
в) $y''' + y'' + y' + 2y = 0$;
г) $y^{IV} + 3{,}1y''' + 5{,}2y'' + 9{,}8y' + 5{,}8y = 0$;
д) $y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0$;
е) $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$.

2.23. Для яких значень параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0?$$

2.24. Для яких значень параметрів a і b нульовий розв'язок є асимптотично стійким

$$y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0?$$

2.25. Дослідити, за яких значень параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким для задачі 2.24.

2.26. Для яких значень параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x\,, \\ \dot{y} = ax + by? \end{cases}$$

2.27. Дослідити, за яких значень параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

2.28. Дослідити на стійкість за допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням систему

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x\,, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^{y}. \end{cases}$$

2.29. За яких значень параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^{y}, \\ \dot{y} = bx + \mathrm{tg} y? \end{cases}$$

2.30. Знайти стан рівноваги системи і дослідити його на асимптотичну стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

2.31. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на асимптотичну стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

2.32. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

2.33. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

2.34. Дослідити, за яких значень параметрів a і b буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + by + y^2. \end{cases}$$

2.35. Знайти стан рівноваги системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

2.36. За яких значень параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by? \end{cases}$$

2.37. Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$$

2.38. Які з функцій двох змінних є додатно визначеними, додатно сталими, знакозмінними, радіально необмеженими:

а) $\mathcal{V}(x, y) = x^2 + y^2$;

б) $\mathcal{V}(x, y) = -x + y^2$;

в) $\mathcal{V}(x, y) = -(x - y)^2$?

2.39. Які з функцій двох змінних є додатно визначеними, додатно сталими, знакозмінними, радіально необмеженими:

а) $\mathcal{V}(x, y) = 2x^2 + y^4$;

б) $\mathcal{V}(x, y) = x^2 + y^2 - 2y^3$;

в) $\mathcal{V}(x, y) = x^2 y + xy^2$;

г) $\mathcal{V}(x, y) = -\sin^2(x + y)$?

2.40. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок

$$\dot{x} = -x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

2.41. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок

$$\dot{x} = -x - x^3.$$

2.42. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + xy - x^3, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$$

Для цього підібрати функцію Ляпунова у вигляді

$$\mathcal{V}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

2.43. Побудувати функцію Ляпунова методом змінного градієнта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2. \end{cases}$$

2.44. Побудувати функцію Ляпунова методом змінного градієнта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_1^3. \end{cases}$$

2.45. Побудувати апроксимацію функції Ляпунова для нелінійного рівняння, використовуючи метод лінеаризації за системою базисних функцій

$$\frac{dx}{dt} = -\sin x.$$

2.46. Побудувати апроксимацію функції Ляпунова для нелінійного рівняння, використовуючи метод лінеаризації за системою базисних функцій

$$\dot{x} = x - 2x\cos x.$$

Додаткові задачі пропонуються у [5, 9, 12, 14, 16, 22, 24].

РОЗДІЛ 3
ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ

3.1. Основні означення

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану, $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – обмежена область. Вважаємо, що відображення f є неперервним за змінною t і локально ліпшицевим за x. Це дозволяє нам гарантувати існування і єдиність розв'язку задачі Коші для (3.1). Крім того, вважаємо, що $f(t, 0) = 0$. Ця умова говорить нам про те, що точка 0 є точкою рівноваги системи (3.1). Ми позначатимемо як $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок системи (3.1) з умовою Коші $x(t_0) = x_0, t \geq t_0$.

За означенням, нульовий розв'язок $x(t) = 0$ системи (3.1) називають стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $\| x(t, x_0, t_0) \| < \varepsilon$ для $t \geq t_0$, як тільки $\| x_0 \| < \delta$. Припустимо, що для (3.1) умови стійкості не виконуються, але для $A > 0$ і $\lambda \in (0, A)$ існує інтервал $t \in [t_0, T]$, для якого $\| x(t, x_0, t_0) \| < A$ при $\| x_0 \| < \lambda$ для довільного $t \in [t_0, T]$. Тобто, якщо $x_0 \in U_\lambda(0)$, то $x(t, x_0, t_0) \in U_A(0)$ для всіх $t \in [t_0, T]$.

Така якість поведінки розв'язків системи (3.1) була введена М. Г. Четаєвим і дістала назву $\{\lambda, A, t_0, T\}$-стійкості, або практичної стійкості. Практична стійкість характеризується наявністю обмежень на початкові умови і стан системи. В означенні $\{\lambda, A, t_0, T\}$-стійкості множину початкових умов вибирають у формі відкритої кулі $U_\lambda(0)$, а множину обмежень на фазові координати системи – у вигляді відкритої кулі $U_A(0)$. Таке означення можна узагальнити, якщо розглядати множини початкових умов і фазових обмежень у різних геометричних формах, не лише у формі куль. Справді, нехай $G_0 \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ – деякі множини, які містять початок координат (рис. 3.1).

Означення 3.1. *Нульовий розв'язок системи* (3.1) *називають* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким, якщо для довільного* $x_0 \in G_0$ *розв'язок* $x(t, x_0, t_0)$ *системи* (3.1) *належить множині* $\Phi(t)$ *для всіх* $t \in [t_0, T]$.

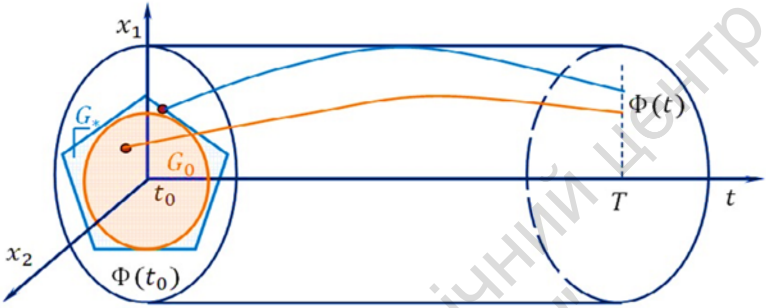


Рис. 3.1. Ілюстрація до означення практичної стійкості

З урахуванням означення 3.1 ми можемо сформулювати такі постановки задач.

Задача 3.1. Нехай множини $G_0, \Phi(t)$ та інтервал $[t_0, T]$ – задано. Перевірити, чи буде нульовий розв'язок системи (3.1) $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким.

Задача 3.2. Знайти множину $G_* \subset \Phi(t_0)$, яка складається з усіх початкових умов $x_0 \in \Phi(t_0)$, для яких відповідний розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ належить множині $\Phi(t)$ для довільного $t \in [t_0, T]$. Таку множину називатимемо *максимальною множиною практичної стійкості.*

Задача 3.3. Нехай задано параметричний клас множин $G_0(\alpha) \subset \Phi(t_0), \alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$. Знайти всі значення $\alpha \in \mathcal{A}$, для яких нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0(\alpha), \Phi(t), t_0, T\}$-стійким. Для окремих випадків така задача полягає у тому, щоб знайти α_*, яке є максимальним серед значень α, для яких справедлива $\{G_0(\alpha), \Phi(t), t_0, T\}$-стійкість нульового розв'язку системи (3.1). Тоді називатимемо α_* максимальною оцінкою практичної стійкості у класі $G_0(\alpha)$. Зокрема, якщо $G_0(\alpha) = K_\alpha(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq \alpha\}$, то α_* називають *максимальною оцінкою практичної стійкості у класі куль.*

Задача 3.4. Нехай G_0 є заданою і відомий клас фазових обмежень $\Phi(t,\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, T]$, $\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$. Задача полягає у тому, щоб визначити всі значення параметра $\alpha \in \mathcal{A}$, для яких нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0, \Phi(t,\alpha), t_0, T\}$-стійким. Як і в постановці задачі 3.3, для окремих випадків задача 3.4 зводиться до знаходження найменшого $\alpha_* \in \mathcal{A}$ такого, що для $\alpha \geq \alpha_*$ нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0, \Phi(t,\alpha), t_0, T\}$-стійким. Тоді α_* називають *мінімальною оцінкою фазових обмежень.*

Задача 3.5. Нехай задано G_0, $\Phi(t)$, $t_0 \leq T$. Знайти найменше T, для якого нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким. Таку задачу називають задачею *оцінки часу практичної стійкості.*

Зауважимо, що якість практичної стійкості, яка дається означенням 3.1, ще називають *внутрішньою*. Разом із внутрішньою стійкістю є зовнішня практична стійкість нульового розв'язку системи (3.1). Нехай $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{D}_0$ і множина $\mathcal{D}_0$ містить точки, які не належать $\Phi(t_0)$.

Означення 3.2. *Нульовий розв'язок системи* (3.1) *називають зовнішньо* $\{\mathcal{D}_0, \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким, якщо для будь-якого* $x_0 \in \mathcal{D}_0$ *знайдеться* $t \in [t_0, T]$ *таке, що* $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$.

Враховуючи означення 3.3 зовнішньої практичної стійкості, можна запропонувати постановки задач, аналогічні до задач 3.1–3.5.

Приклад 3.1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = x, \qquad t \in [0,3],$$

фазові обмеження є сталими

$$\Phi(t) = [-2,2], \qquad t \in [0,3].$$

Загальний розв'язок у формі Коші диференціального рівняння має вигляд

$$x(t) = e^t x_0, \qquad x_0 = x(0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи властивості функції e^t, можемо дійти висновку, що максимальна множина практичної стійкості має вигляд $G_* = [-a, a]$, де $e^3 a = 2$. Отже, $G_* = [-2e^{-3}, 2e^{-3}]$.

Приклад 3.2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{x} = -x, \qquad t \in [0,3],$$

фазові обмеження є сталими

$$\Phi(t) = [-2,2], \qquad t \in [0,3].$$

Загальний розв'язок у формі Коші диференціального рівняння має вигляд

$$x(t) = e^{-t}x_0, \qquad x_0 = x(0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Максимальна множина зовнішньої практичної стійкості має вигляд $\mathcal{D}_* = [-a, a]$, де $e^{-3}a = 2$. Звідси, $\mathcal{D}_* = [-2e^3, 2e^3]$. Для будь-якої точки $x_0 \in \mathcal{D}_*$ знайдеться $t \in [0,3]$, для якого $x(t) = e^{-t}x_0 \in \Phi(t)$.

Зазначимо, що фазові обмеження $\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, задають багатозначне відображення, тобто відображення, значення якого складається з більш ніж одного елемента хоч би в одній точці області визначення. Використовуючи позначення $comp(\mathbb{R}^n)$ як сукупності всіх непорожніх компактів з $\mathbb{R}^n$, відповідність між $t \in [t_0, T]$ і $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ записують як $\Phi\colon [t_0, T] \to comp(\mathbb{R}^n)$.

Графіком $graph\,\Phi$ *багатозначного відображення* Φ називають сукупність пар $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $x \in \Phi(t)$, якщо $t \in [t_0, T]$.

Трубкою багатозначного відображення Φ називають частину границі $\partial\, graph\,\Phi$ його графіка таку, що якщо точка $z = (x, t)$ належить трубці, то в будь-якому околі точки z існують елементи множини $I = \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$, які не належать графіку $graph\,\Phi$. Трубку багатозначного відображення Φ позначають $tube\,\Phi$.

Якщо $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n)$, то будемо позначати $\rho(x, \mathcal{A}) = \min_{y \in \mathcal{A}} \| x - y \|$ відстань від точки x до множини $\mathcal{A}$, $\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min_{y \in \mathcal{A}} \rho(y, \mathcal{B})$ – відхилення множини $\mathcal{A}$ від множини $\mathcal{B}$ (напівметрику Гаусдорфа), $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max\{\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \beta(\mathcal{B}, \mathcal{A})\}$ – метрику Гаусдорфа між множинами $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ з $comp(\mathbb{R}^n)$.

Відстань Гаусдорфа задовольняє аксіоми метрики, а саме:

I. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 0$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n)$;

II. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n)$;

III. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = h(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n)$;

IV. $h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq h(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + h(\mathcal{C}, \mathcal{B})$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Крім того, справджуються такі властивості:

$$h(\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{C} + \mathcal{D}) \leq h(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + h(\mathcal{B}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \in comp(\mathbb{R}^n);$$

$$h(\lambda\mathcal{A}, \lambda\mathcal{B}) \leq |\lambda| h(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{R};$$

$$h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = inf\{\varepsilon > 0,\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon(\mathcal{B}),\ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon(\mathcal{A})\},$$
$$\mathcal{A},\mathcal{B} \in comp(\mathbb{R}^n).$$

Тут $\mathcal{K}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathcal{A} + \mathcal{K}_\varepsilon(0)$ – ε-окіл множини $\mathcal{A}$.

Відображення Φ називають *напівнеперервним зверху* в точці $t \in [t_0, T]$, якщо

$$\lim_{s\to t} \beta(\Phi(s), \Phi(t)) = 0, s \in [t_0, T].$$

Відображення Φ називають *напівнеперервним знизу* в точці $t \in [t_0, T]$, якщо

$$\lim_{s\to t} \beta(\Phi(t), \Phi(s)) = 0, s \in [t_0, T].$$

Відображення Φ називають *неперервним у точці* $t \in [t_0, T]$, якщо воно в цій точці є напівнеперервним зверху і напівнеперервним знизу. Це означає, що

$$\lim_{s\to t} h(\Phi(s), \Phi(t)) = 0, s \in [t_0, T].$$

Напівнеперервне зверху (напівнеперервне знизу, неперервне) відображення Φ у кожній точці $s \in [t_0, T]$ називають таким на $[t_0, T]$.

Відображення Φ називають *квазівідкритим у точці* $t \in [t_0, T]$, якщо $int\, \Phi(t) \neq \emptyset$ і для довільного $x \in int\, \Phi(t)$ існує інтервал $I_\delta = (t - \delta, t + \delta) \cap [t_0, T]$ та окіл $K_\delta(x) \subset \Phi(t)$ такі, що $K_\delta(x) \subset \Phi(s)$, $s \in I_\delta$.

Напівнеперервне зверху багатозначне відображення Φ має замкнений графік і замкнену трубку.

Якщо багатозначне відображення Φ напівнеперервне знизу і має опуклі значення, тобто $\Phi: [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$, то таке *відображення є квазівідкритим*.

Якщо багатозначне відображення Φ є напівнеперервним знизу і квазівідкритим на $[t_0, T]$, то його трубка складається лише з точок, які лежать на границі значень багатозначного відображення Φ, тобто

$$tube\, \Phi = \{(x, t): x \in \partial\Phi(t), t \in [t_0, T]\} = graph\, \partial\Phi.$$

Тут $\partial\Phi: [t_0, T] \to comp(\mathbb{R}^n)$ є багатозначним відображенням, таким, що $(\partial\Phi)(t) = \partial\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Якщо фазові обмеження є опуклими компактами, то їх зручно задавати за допомогою опорних функцій. Нехай $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ – компакт.

Означення 3.3. *Опорною функцією множини* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ *називають функцію*

$$c(\mathcal{A}, \psi) = \max_{a \in \mathcal{A}} a^T \psi, \qquad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо основні властивості опорної функції. Нехай $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ – компакти, $\lambda \in \mathbb{R}$, M – матриця розмірності $n \times n$. Тоді для довільного $\psi \in \mathbb{R}^n$ маємо таке.

1. $c(\lambda\mathcal{A}, \psi) = c(\mathcal{A}, \lambda\psi)$.
2. $c(\lambda\mathcal{A}, \psi) = \lambda c(\mathcal{A}, \psi)$, де $\lambda > 0$ (додатна однорідність).
3. $c(\mathcal{A} + \mathcal{B}, \psi) = c(\mathcal{A}, \psi) + c(\mathcal{B}, \psi)$.
4. $c(M\mathcal{A}, \psi) = c(\mathcal{A}, M^T\psi)$.
5. $c\left(\mathcal{A}, \psi^{(1)} + \psi^{(2)}\right) \le c\left(\mathcal{A}, \psi^{(1)}\right) + c\left(\mathcal{A}, \psi^{(2)}\right)$, де $\psi^{(2)}$, $\psi^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ (напівадитивність).
6. $c(\mathcal{A}, \psi) = c(co\mathcal{A}, \psi)$.

Тут $co\ \mathcal{A}$ – опукла оболонка множини $\mathcal{A}$, тобто найменша опукла множина, що містить множину A. Основна теорема, яка характеризує опорну функцію, така.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathcal{A} \in comp(\mathbb{R}^n)$*. Тоді* $co\mathcal{A} = \cap_{\psi \in S} \mathcal{H}(\psi)$*, де*

$$\mathcal{H}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T\psi \le c(\mathcal{A}, \psi)\}, \qquad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $S = \partial\mathcal{K}_1(0)$ *– сфера одиничного радіуса із центром у точці* 0.

Зміст цієї теореми полягає в тому, що опорна функція повністю описує опуклу оболонку компакта як перетину півпросторів, що утворені опорними гіперплощинами.

Наслідки теореми 3.1 такі. Нехай $\mathcal{A} \in conv(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in conv(\mathbb{R}^n)$. Тоді

1) точка $x \in \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $x^T\psi \le c(\mathcal{A}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
2) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) \le c(\mathcal{B}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
3) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) = c(\mathcal{B}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;

4) якщо $x \notin \mathcal{A}$, то знайдеться $\psi \in S$ таке, що $x^T\psi > c(\mathcal{A}, \psi)$;
5) точка $x \in int\, \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $x^T\psi < c(\mathcal{A}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$;
6) $x \in \partial\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $x^T\psi \leq c(\mathcal{A}, \psi)$ для всіх $\psi \in S$ та знайдеться $\psi_0 \in S$, для якого $x^T\psi_0 = c(\mathcal{A}, \psi_0)$;
7) $0 \in \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) \geq 0$ для довільного $\psi \in S$;
8) $0 \in int\, \mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{A}, \psi) > 0$ для всіх $\psi \in S$.

Приклад 3.3. Опорна функція кулі $c(K_r(a), \psi) = a^T\psi + r\|\psi\|$, $\psi \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Опорна функція еліпсоїда

$$E(a, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - a)^T Q^{-1}(x - a) \leq 1\}$$

має вигляд

$$c(E(a, Q), \psi) = a^T\psi + \sqrt{\psi^T Q\psi}, \qquad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $a \in \mathbb{R}^n$ – центр еліпсоїда, Q – $n \times n$-симетрична додатно визначена матриця.

Нехай

$$\Pi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T : |x_i| \leq r_i,\\ i = 1,2, \dots, n\},$$

де $r_i > 0$, $i = 1,2, \dots, n$. Тоді

$$c(\Pi(r_1, r_2, \dots, r_n), \psi) = \sum_{i=1}^{n} r_i|\psi_i|, \qquad \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T.$$

Ще одним способом опису опуклих компактів є функція Мінковського й обернена функція Мінковського. Припустимо, що $\mathcal{A}$ – опукла множина в $\mathbb{R}^n$, $0 \in int\, \mathcal{A}$.

Означення 3.4. *Функцію*

$$m(x, \mathcal{A}) = inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{A}\}$$

називають функцією Мінковського множини $\mathcal{A}$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Функцію вигляду*

$$d(x, \mathcal{A}) = \sup\{t > 0 : tx \in \mathcal{A}\}$$

називають оберненою функцією Мінковського множини $\mathcal{A}$, *де* $x \in \mathbb{R}^n$.

Основні властивості функції Міньковського такі.

1. $m(x, \mathcal{A}) \geq 0, d(x, \mathcal{A}) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.
2. $m(\lambda x, \mathcal{A}) = \lambda m(x, \mathcal{A}), x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ (додатна однорідність).
3. $m(x + y, \mathcal{A}) \leq m(x, \mathcal{A}) + m(y, \mathcal{A}), x, y \in \mathbb{R}^n$ (напівадитивність).
4. Нехай $\mathcal{A}$ – обмежена, тоді $m(x, \mathcal{A}) > 0$, коли $x \neq 0$, $m(0, \mathcal{A}) = 0$.
5. Якщо $\mathcal{A} \in conv(\mathbb{R}^n)$, то
$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : m(x, \mathcal{A}) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathcal{A}) \geq 1\}.$$

Отже, функція Мінковського й обернена функція Мінковського повністю описують опуклий компакт, який містить початок координат. Функцію вигляду
$$k(x, \mathcal{A}) = d\left(\frac{x}{\| x \|}, \mathcal{A}\right), \qquad x \neq 0,$$
називають *функцією деформації* множини $\mathcal{A}$ в напрямку $x \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ – опуклий компакт, $0 \in \mathcal{A}$, то множину $\mathcal{A}$ можна представити у вигляді
$$\mathcal{A} = \bigcup_{e \in S} L(e),$$
де $L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ke, k \in [0, k(e, \mathcal{A})]\} = [0, k(e, \mathcal{A})]e, e \in S$.

Функція деформації показує, як змінюється множина $\mathcal{A}$ щодо одиничної сфери в напрямку вектора x.

Приклад 3.4. Нехай $\mathcal{A} = K_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n$. Тоді
$$m(x, \mathcal{A}) = \frac{\| x \|}{r}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad d(x, \mathcal{A}) = \frac{r}{\| x \|},$$
$$k(x, \mathcal{A}) = r, \qquad x \neq 0.$$

3.2. Властивості максимальної множини практичної стійкості

Припустимо, що $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ є компактами, $0 \in int\, \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Розглянемо властивості максимальної множини практичної стійкості, яку позначатимемо G_* [1, 2, 10].

Теорема 3.2. *Множина G_* є компактом.*

Доведення. Обмеженість G_* випливає з того, що $G_* \subset \Phi(t_0)$ і $\Phi(t_0)$ є компактом. Покажемо замкненість G_*. Нехай $\left\{x_0^{(k)}\right\} \subset G_*$ є послідовністю такою, що $\lim_{k\to\infty} x_0^{(k)} = x_0$. За означенням максимальної множини практичної стійкості $x(t, x_0^{(k)}, t_0) \in \Phi(t)$ для всіх $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, \dots$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків (3.1) від початкових умов (теорема 1.12)

$$x(t, x_0, t_0) = \lim_{k\to\infty} x\left(t, x_0^{(k)}, t_0\right), \qquad t \in [t_0, T].$$

Оскільки $\Phi(t)$ є компактом, то $x(t, x_0, t_0)$ належить $\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. А це означає, що $x_0 \in G_*$.

■

Справджується така теорема.

Теорема 3.3. *Нехай багатозначне відображення* $\Phi: [t_0, T] \to$ $\to comp(\mathbb{R}^n)$ *є напівнеперервним зверху. Тоді, якщо* $x_0 \in \partial G_*$, *то інтегральна крива системи* (3.1), *яка виходить з точки* (x_0, t_0), *перетинає трубку багатозначного відображення* Φ, *тобто*

$$graph\, x(\cdot, x_0, t_0) \cap tube\, \Phi \neq \emptyset.$$

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то $x_0 \in G_*$ і $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. За означенням границі множини знайдеться послідовність $x_0^{(k)} \notin G_*$, $k = 1, 2, \dots$, така, що $\lim_{k\to\infty} x_0^{(k)} = x_0$. Це означає, що існує $s_k \in [t_0, T]$, для якого

$$x^{(k)} = x(s_k, x_0^{(k)}, t_0) \notin \Phi(s_k), \quad k = 1,2,\dots .$$

Оскільки $[t_0, T]$ є компактом, то з послідовності s_k ми виділяємо збіжну до деякого $s_0 \in [t_0, T]$ підпослідовність, яку знову позначаємо як s_k. Отже, $\lim_{k\to\infty} s_k = s_0$. Точка $z^{(k)} = (x^{(k)}, s^{(k)})$, $k = 1,2, \dots$, не належить графіку багатозначного відображення Φ, але $z^{(k)} \in I$, де $I = \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків (3.1) від початкових умов (теорема 1.12)

$$\lim_{k\to\infty} x(s_k, x_0^{(k)}, t_0) = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x(s_0, x_0, t_0).$$

Крім того, $x(s_0, x_0, t_0) \in \Phi(s_0)$, оскільки $x_0 \in G_*$. Тому $\lim_{k\to\infty} z^{(k)} = z^{(0)}$, де

$$z^{(0)} = (x(s_0, x_0, t_0), s_0) \in graph\, \Phi.$$

Згідно з означенням трубки маємо $z^{(0)} \in tube\,\Phi$. Отже, $graph\,x(\cdot, x_0, t_0) \cap tube\,\Phi \neq \emptyset$.

■

Теорема 3.4. *Нехай багатозначне відображення* $\Phi: [t_0, T] \to$ $\to comp(\mathbb{R}^n)$ *є напівнеперервним зверху,* $x_0 \in G_*$ *та інтегральна крива системи* (3.1)*, яка виходить з точки* (x_0, t_0)*, перетинає трубку багатозначного відображення* Φ*, тобто*

$$x(\cdot, x_0, t_0) \cap tube\Phi \neq \emptyset.$$

Тоді $x_0 \in \partial G_*$.

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконуються, $x_0 \in G_*$. Оскільки

$$graph\,x(\cdot, x_0, t_0) \cap tube\,\Phi \neq 0,$$

то знайдеться $z^{(0)} = (y_0, s_0) \in tube\,\Phi$ таке, що $y_0 = x(s_0, x_0, t_0)$. Зважаючи на те, що $z^{(0)} \in tube\,\Phi$, то існує послідовність $z^{(k)} \in I$, $k = 1,2,\ldots$, така, що

$$\lim_{k \to \infty} z^{(k)} = z^{(0)}$$

і $z^{(k)} \notin graph\,\Phi, z^{(k)} = (x^{(k)}, s_k)$. Тоді $x_0^{(k)} = x(t_0, x^{(k)}, s_k) \notin G_*$. Це випливає з того, що $x(s_k, x_0^{(k)}, t_0) = x^{(k)} \notin \Phi(s_k), k = 1,2, \ldots$. У силу теореми про неперервну залежність розв'язків системи (3.1) від початкових умов (теорема 1.12)

$$\lim_{k \to \infty} x_0^{(k)} = \lim_{k \to \infty} x(t_0, x^{(k)}, s_k) = x(t_0, y_0, s_0) = x_0,$$

причому $x_0 \in G_*$. Отже, $x_0 \in \partial G_*$.

■

З теорем 3.3, 3.4 випливають такі наслідки.

Наслідок 3.1. *Нехай відображення* Φ *є напівнеперервним зверху, причому* $x_0 \in G_*$. *Точка* $x_0 \in int\,G_*$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$graph\,x(\cdot, x_0, t_0) \cap tube\,\Phi = \emptyset,$$

тобто інтегральна крива, яка виходить з точки (x_0, t_0)*, не перетинає трубку багатозначного відображення* Φ.

Наслідок 3.2. *Нехай відображення* Φ *є напівнеперервним зверху і квазівідкритим. Щоб точка* $x_0 \in G_*$ *належала границі множини* G_* *необхідно і достатньо, аби існував момент* $t_* \in [t_0, T]$ *такий, що*

$$x(t_*, x_0, t_0) \in \partial\Phi(t_*).$$

Це означає, що розв'язок системи (3.1), *який виходить із точки* $x(t_0) = x_0$, *перетинає границю фазових обмежень у точці* $t = t_*$ (*залишаючись водночас у фазових обмеженнях, що визначаються відображенням* Ф). *За вказаних умов точка* $x_0 \in int\, G_*$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$x(t, x_0, t_0) \in int\, \Phi(t)$$

для всіх $t \in [t_0, T]$.

3.3. Необхідні і достатні умови практичної стійкості на основі функції Ляпунова

Другий метод Ляпунова є потужним засобом дослідження якісної поведінки розв'язків динамічних систем. Його ідеї також відображено в теорії практичної стійкості.

Теорема 3.5. *Щоб нульовий розв'язок системи* (3.1) *був* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким, необхідно і достатньо, щоб існувала неперервна функція* $V(t, x)$, *для якої справджуються такі умови:*

1) $G_0 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : V(t_0, x) \leq 1\}$; (3.2)

2) $\{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) \leq 1\} \subseteq \Phi(t), \quad t \in [t_0, T]$; (3.3)

3) *функція* $V(t, x,)$ *не зростає на розв'язках системи* (3.1), *тобто функція* $V(t) = V(t, x(t))$ *не зростає, де* $x(t)$ *– розв'язок* (3.1), $t \in [t_0, T]$.

Доведення. Необхідність. Доведення необхідності є конструктивним. Це означає, що ми показуємо в який спосіб можна побудувати функцію $V(t, x)$, яка задовольняє умови 1) – 3) теореми. Нехай нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким. Розглянемо максимальну множину практичної стійкості G_*. Згідно з теоремою 3.2 ця множина є компактом.

Дослідимо функцію $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яка є неперервною і такою, що $\alpha(x) < 1$, якщо $x \in int\, G_*$; $\alpha(x) = 1$, коли $x \in \partial G_*$; $\alpha(x) > 1$, якщо $x \notin G_*$.

Указана функція може бути побудована різними способами. Один зі способів є таким. Розглянемо функцію відстані $\rho(x) = \rho(x, \partial G_*)$ від точки x до границі множини G_*. Тоді маємо:

$\alpha(x) = 1 - \rho(x)$, якщо $x \in G_*$;

$\alpha(x) = 1 + \rho(x)$, якщо $x \notin G_*$.

Така функція є неперервною. Це випливає з того, що $\rho(x)$ задовольняє умову Ліпшиця, а в $x_0 \in \partial G_*$

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 1.$$

Побудуємо функцію $V(t, x)$ таким способом:

$$V(t, x) = \alpha(x(t_0, x, t)).$$

Покажемо, що вказана функція задовольняє умови теореми. Справді, якщо $x_0 \in G_0$, то $x_0 \in G_*$, оскільки нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким. Тому $\alpha(x_0) = V(t_0, x_0) \leq 1$. Отже, умова (3.2) виконується.

Функція $V(t, x)$ не зростає на розв'язках системи (3.1). Це випливає з того, що

$$V(t, x(t, x_0, t_0)) = \alpha(x_0),$$

тобто $V(t, x)$ є сталою на розв'язках (3.1).

Включення (3.3) обґрунтуємо від супротивного. Нехай існує $t \in [t_0, T]$ і точка $y \notin \Phi(t)$ така, що $V(t, y) \leq 1$.

Розглянемо $y_0 = x(t_0, y, t)$. Точка $y_0 \notin G_*$, оскільки

$$x(t, y_0, t_0) = y \notin \Phi(t).$$

Тому $V(t_0, y_0) = \alpha(y_0) > 1$. Однак

$$\alpha(y_0) = V(t, x(t, y_0, t_0)) = V(t, y) > 1.$$

Одержали протиріччя, яке обґрунтовує співвідношення (3.3) і необхідність теореми.

Достатність. Припустимо, що виконуються умови 1) – 3) теореми. Покажемо, що нульовий розв'язок системи (3.1) є $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in G_0$. Згідно з (3.2) маємо, що $V(t_0, x_0)$ не перевищує 1. Оскільки функція $V(t) = V(t, x(t, x_0, t_0))$ не зростає, $t \in [t_0, T]$, то $V(t) \leq 1,\ t \in [t_0, T]$.

З умови (3.3) випливає $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t), t \in [t_0, T]$. Отже, справджується $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійкість нульового розв'язку системи (3.1).

■

Функцію $V(t, x)$, для якої справджуються умови теореми 3.5, називають *функцією Ляпунова*, як функцію, що застосовується для дослідження відповідної якості стійкості. Теорему 3.5 можна обґрунтувати, якщо в доведенні замість функції $\rho(x, \partial G_*)$ вибрати функцію $\rho(x, \partial G_0)$. У цьому випадку хід доведення залишається аналогічним. Якщо множина G_0 є опуклим компактом, то функцію Ляпунова можна побудувати у вигляді

$$V(t,x) = \max_{\psi \in S}\{x^T(t_0,x,t)\psi - c(G_0,\psi)\} + 1.$$

Тут $c(G_0,\psi) = \max_{x \in G_0} x^T\psi$ – опорна функція множини G_0, $\psi \in S$, S – сфера одиничного радіуса із центром у початку координат в $\mathbb{R}^n$. Зокрема, якщо $G_0 = K_r(0)$, то $\alpha(x) = \| x \| + 1 - r$,

$$V(t,x) = \| x(t_0,x,t) \| + 1 - r.$$

Якщо $G_0 = E_r(Q,0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q^{-1} x \le r^2\}$, де Q – додатно визначена симетрична $n \times n$-матриця, то

$$V(t,x) = \sqrt{x^T(t_0,x,t) Q^{-1} x(t_0,x,t)} + 1 - r.$$

З теореми 3.5 випливає такий наслідок.

Наслідок 3.3. *Нехай існує неперервно диференційована функція* $V(t,x)$ *така, що справджуються співвідношення* (3.2), (3.3) *і похідна функції* $V(t,x)$ *у силу системи* (3.1):

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(3.1)} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \mathrm{grad}_x^T V(t,x) f(t,x) \le 0.$$

Тоді нульовий розв'язок системи (3.1) *є* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким.*

Справедливість наслідку випливає з теореми 3.5, оскільки функція $V(t,x)$ не зростає на розв'язках системи (3.1) у випадку, якщо похідна функції $V(t,x)$ у силу системи (3.1) є додатно сталою.

Приклад 3.5. Дослідимо умови практичної стійкості нульового розв'язку рівняння

$$\dot{x} = x$$

за обмежень на початкові умови $G_0 = [-a, a]$, $a > 0$, і фазові координати

$$\Phi(t) = [-2{,}2], \qquad t \in [0{,}3].$$

Побудуємо функцію Ляпунова за методикою, описаною у доведенні теореми 3.5 з урахуванням зауважень до цієї теореми. Для цього знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$x(t_0,x,t) = x_0 e^{(t-t_0)}, \qquad x_0 = x(t_0).$$

Тоді $x(0,x,t) = xe^{-t}$, $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо

$$\alpha(x) = |x| - a + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ця функція менша 1 при $x \in (-a, a)$, рівна 1 для $|x| = a$ і більша 1, якщо $x \notin [-a, a]$. Тоді функція Ляпунова має вигляд

$$V(t, x) = e^{-t}|x| - a + 1, \qquad t \in [0,3], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ця функція не зростає на розв'язках рівняння тому, що

$$V\big(t, x(t, x, 0)\big) = x_0, \qquad t \in [0,3].$$

Умова (3.2) теореми 3.5 виконується, оскільки

$$G_0 = [-a, a] = \{x \in \mathbb{R}: V(0, x) \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}: |x| \le a\}.$$

Запишемо умову (3.3)

$$\{x \in \mathbb{R}: V(t, x) \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}: e^{-t}|x| \le a\} =$$
$$= [-ae^t, ae^t] \le [-2{,}2], \qquad t \in [0,3].$$

Умова виконується, якщо $a > 0$, $a \le 2e^{-3}$. Отже, за теоремою 3.5 при $a \in (0{,}2e^{-3}]$ нульовий розв'язок рівняння $\dot{x} = x$ є $\{[-a, a], [-2{,}2], 0{,}3\}$-стійким.

Зауважимо, що функцію Ляпунова можна вибрати в інший спосіб. Наприклад, можемо взяти

$$\alpha(x) = \frac{x^2}{a^2}$$

і

$$V(t, x) = \frac{e^{-2t}x^2}{a^2}, \qquad t \in [0,3], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Така функція є неперервно диференційованою. Умови (3.1), (3.2) теореми 3.5 перевіряємо так, як показано вище. Похідна

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = \frac{\partial V(t, x)}{dt} + \frac{\partial V(t, x)}{dx} x = 0.$$

Звертаючись до наслідку 3.3, доходимо висновку, що умови практичної стійкості нульового розв'язку рівняння $\dot{x} = x$ за заданих обмежень на початковий стан, фазові координати і час виконані.

3.4. Властивості оптимальної множини практичної стійкості лінійної системи

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{3.4}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$.

Фазові обмеження задають неперервним відображенням $\Phi\colon [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$, де $conv(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів з $\mathbb{R}^n$, $0 \in int\ \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Розглянемо властивості максимальної множини практичної стійкості.

Теорема 3.6. *Множина* G_* *є опуклим компактом,* $0 \in int\ G_*$.

Доведення. Нехай $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця системи (3.4), нормована за моментом t_0. Тоді за формулою Коші $x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0$. Візьмемо дві довільні точки $x_0^{(1)}$ і $x_0^{(2)}$ з множини G_*, а також будь-яке $\lambda \in [0,1]$. Тоді

$$x\left(t, x_0^{(1)}, t_0\right) \in \Phi(t), \qquad x\left(t, x_0^{(2)}, t_0\right) \in \Phi(t), \qquad t \in [t_0, T].$$

У силу опуклості $\Phi(t)$, маємо

$$x\left(t, \lambda x_0^{(1)} + (1-\lambda)x_0^{(2)}, t_0\right) =$$
$$= \lambda X(t, t_0) \cdot x_0^{(1)} + (1-\lambda)X(t, t_0) \cdot x_0^{(2)} \in \Phi(t)$$

для $t \in [t_0, T]$. За означенням максимальної множини практичної стійкості $\lambda x_0^{(1)} + (1-\lambda)x_0^{(2)} \in G_*$. Точка 0 належить $int\ G_*$ в силу наслідку 3.2 теореми 3.3, оскільки $0 \in int\ \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

■

Теорема 3.7. *Функція Мінковського множини* G_* *має вигляд*

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0) \cdot x_0}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon m_*(x_0) \le 1\},$$
$$\partial G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon m_*(x_0) = 1\},$$
$$int\ G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon m_*(x_0) < 1\}.$$

Доведення. За означенням функції Мінковського

$$m_*(x_0) = \inf\left\{\lambda > 0 \colon \frac{x_0}{\lambda} \in G_*\right\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, зі включення $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, $\lambda > 0$, випливає, що $X(t, t_0) \cdot \frac{x_0}{\lambda} \in$ $\in \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Враховуючи теорему 3.6 і властивості опорної функції,

$$\psi^T X(t, t_0)\frac{x_0}{\lambda} \le c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, \quad t \in [t_0, T], \qquad (3.6)$$

де S – одинична сфера із центром у нулі. Оскільки $0 \in int\, \Phi(t)$, то $c(\Phi(t), \psi) > 0$ для $\psi \in S$. Тому з (3.6) маємо

$$\lambda \ge \frac{\psi^T X(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad \psi \in S, \quad t \in [t_0, T].$$

Звідси

$$\lambda \ge \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi)}.$$

Враховуючи означення функції Мінковського й останню нерівність, одержуємо (3.5). За наслідком теореми 3.3 $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли при $\lambda = 1$ виконується (3.6) і знайдеться такий момент $s_0 \in [t_0, T]$, що $X(s_0, t_0)x_0 \in \partial\Phi(s_0)$, а тому існує вектор $\psi_0 \in S$ такий, що

$$\psi_0^T X(s_0, t_0) x_0 = c(\Phi(s_0), \psi_0).$$

А далі одержуємо

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi)} = 1.$$

■

Приклад 3.6. Нехай $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, де $r \colon [t_0, T] \to \mathbb{R}$ – неперервна додатна функція. Тоді $c(\Phi(t), \psi) = r(t)$, $\psi \in S$ *і*

$$m_*(x_0) = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T X(t, t_0) x_0}{r(t)}.$$

Розв'язуючи задачу

$$\max_{\psi \in S} \psi^T X(t, t_0) x_0 = \| X(t, t_0) x_0 \|,$$

одержуємо

$$m_*(x_0) = \max_{t\in[t_0,T]} \frac{\| X(t,t_0)x_0 \|}{r(t)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 3.8. *Обернена функція Мінковського множини* G_* *має вигляд*

$$d_*(x_0) = \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in P(t)} \frac{c(\Phi(t),\psi)}{\psi^T X(t,t_0)x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

де $P(t) = \{\psi \in S : \psi^T X(t,t_0)x_0 > 0\}$. *Тоді*

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : d_*(x_0) \geq 1\} = \cup_{e\in S} L(e),$$

де $L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ke, k \in [0, d_*(e)]\} = [0, d_*(e)]e$.

Доведення. За означенням оберненої функції Мінковського

$$d_*(x_0) = \sup\{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_*\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

З $\lambda x_0 \in G_*$ випливає $\lambda X(t,t_0)x_0 \in \Phi(t)$, $t \in [t_0,T]$, і як наслідок,

$$\lambda\psi^T X(t,t_0)x_0 \leq c(\Phi(t),\psi), \quad \psi \in S, t \in [t_0,T].$$

Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(t),\psi)}{\psi^T X(t,t_0)x_0}, \quad \psi \in P(t), t \in [t_0,T].$$

Тому

$$\lambda \leq \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in P(t)} \frac{c(\Phi(t),\psi)}{\psi^T X(t,t_0)x_0}.$$

З означення оберненої функції Мінковського та її властивостей випливає справедливість теореми.

■

Приклад 3.7. Якщо $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, де $r(t) > 0$, – неперервна на $[t_0,T]$ функція, то

$$d_*(x_0) = \min_{t\in[t_0,T]} \frac{r(t)}{\| X(t,t_0)x_0 \|}, \qquad x_0 \neq 0.$$

Нехай задано функцію $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Надграфіком функції* f *називають множину*

$$epi\, f = \{(x,y) : y \geq f(x), \; x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Якщо надграфік функції замкнений, то таку функцію називають замкненою. Замикання надграфіка позначають $\overline{epi}\, f$. *Надграфік опуклої функції є опуклим.* Якщо функція f не є опуклою, то можна знайти найбільшу серед опуклих функцій, що не перевищує в кожній точці функцію $f(x)$.

Опуклою оболонкою функції f називають таку функцію $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, що її надграфік збігається з опуклою оболонкою надграфіка функції f, тобто

$$epi\ g = co\ epi\ f.$$

Тут $co(\cdot)$ позначає опуклу оболонку множини. Опукла оболонка функції має аналогічне позначення, тобто $g = co\, f$. Якщо $epi\ g = \overline{co}\ epi\ f$, де $\overline{co}(\cdot)$ – замкнена опукла оболонка множини, то g називають опуклим замиканням функції f і позначають $\overline{co}\ f$.

Нехай задано опуклий компакт $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ у вигляді

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T\psi \le F(\psi), \psi \in S\},$$

де $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – додатно однорідна функція, тобто $F(\lambda\psi) = = \lambda F(\psi)$, $\psi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \ge 0$. Тоді

$$\overline{co}\ F(\psi) = c(\mathcal{A}, \psi).$$

Теорема 3.9. *Максимальну множину практичної стійкості G_* можна подати у вигляді*

$$G_* = \cap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n : x^T\psi \le F(\psi)\}, \tag{3.7}$$

де $F(\psi) = \min_{t\in[t_0,T]} c(\Phi(t), X^T(t_0, t)\psi)$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. *Опорна функція множини G_* має вигляд*

$$c(G_*, \psi) = \overline{co}\ F(\psi) = \overline{co} \min_{t\in[t_0,T]} c(\Phi(t), X^T(t_0, t)\psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення. Якщо $x_0 \in G_*$, то

$$x(t, x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0 \in \Phi(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Тоді для довільного $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T X(t, t_0)x_0 \le c(\Phi(t), \xi), \quad t \in [t_0, T]. \tag{3.8}$$

Звідси

$$x_0^T X^T(t, t_0)\xi \le c(\Phi(t), \xi), \quad t \in [t_0, T].$$

Оскільки фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ є невиродженою, то для будь-якого $\psi \in \mathbb{R}^n$ знайдеться $\xi \in \mathbb{R}^n$ таке, що $\psi = X^T(t,t_0)\xi$, $\xi = X^T(t_0,t)\psi$. Тому для довільного $\psi \in \mathbb{R}^n$

$$x_0^T\psi \le c(\Phi(t), X^T(t_0,t)\psi), \quad t \in [t_0,T]. \tag{3.9}$$

Отже,

$$x_0^T\psi \le \min_{t\in[t_0,T]} c(\Phi(t), X^T(t_0,t)\psi) = F(\psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

І навпаки, якщо справджується (3.10), то в силу неперервності відображення Φ виконується нерівність (3.9). Перейшовши до змінної ξ, одержуємо (3.8), звідки випливає $x_0 \in G_*$.

Функція $F(\psi)$ – додатно однорідна, тому

$$G_* = \cap_{\psi\in\mathbb{R}^n} \{x \in \mathbb{R}^n : x^T\psi \le F(\psi)\} = \cap_{\psi\in S} \{x \in \mathbb{R}^n : x^T\psi \le F(\psi)\}.$$

Звідси слідує, що $c(G_*,\psi) = \overline{co}\, F(\psi)$.

■

Наслідок 3.4. *Максимальну множину практичної стійкості можна подати у вигляді* (3.7), *де*

$$F(\psi) = \min_{t\in[t_0,T]} c\big(\Phi(t), z(t)\big),$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^T(t)\cdot z(t), z(t_0) = \psi,$$

$$\psi \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in [t_0,T].$$

Обґрунтування наслідку полягає у тому, що $X^T(t_0,t)$ є фундаментальною матрицею спряженої системи

$$\frac{dz}{dt} = -A^T(t)\cdot z.$$

Приклад 3.8. Якщо $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, то

$$F(\psi) = \min_{t\in[t_0,T]} r(t)\cdot\| z(t) \|,$$

де $z(t)$ – розв'язок спряженої системи, $z(t_0) = \psi$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

3.5. Оптимальні оцінки практичної стійкості лінійних систем

Розглянемо теореми, які обґрунтовують оцінки множини початкових умов у класах куль та еліпсоїдів для лінійних систем у випадку опуклих фазових обмежень.

Теорема 3.10. *Нехай множину початкових умов G_0 задано у формі кулі $K_r(0)$, множини фазових обмежень є компактними і мають вигляд*

$$\Phi(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \max_{k=1,2,\ldots,m} \ell_k^T(t)x \le 1\right\}, \tag{3.11}$$

де $\ell_k(t)$ – n-вимірні неперервні вектор-функції, $t \in [t_0, T]$, $k = 1,2,\ldots,m$. Тоді для всіх $r \le r_*$, $r > 0$, де

$$r_* = \min_{t \in [t_0,T]} \min_{s=1,2,\ldots,m} \frac{1}{\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\cdot \ell_s(t)}}, \tag{3.12}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = A(t)\cdot Q(t) + Q(t)\cdot A^T(t), \quad Q(t_0) = E, \tag{3.13}$$

нульовий розв'язок системи (3.4) *є* $\{K_r(0), \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким.*

Доведення. Обґрунтування теореми базується на необхідних і достатніх умовах практичної стійкості із застосуванням функції Ляпунова (теорема 3.5). Використовуючи схему побудови функції Ляпунова, застосовану у доведенні теореми 3.5, і враховуючи, що в умовах теореми $x(t_0, x, t) = X(t_0, t)\cdot x$, $\alpha(x) = 1 - r + \| x \|$, виберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(t, x) = 1 - r + \| X(t_0, t)\cdot x \|.$$

Визначимо параметр r так, щоб $\ell_s^T(t)x \le 1$, $s = 1,2,\ldots,m$ при $V(t,x) \le 1$. У такий спосіб ми забезпечуємо виконання умови (3.3) теореми 3.5. Для цього розглянемо задачу

$$\max_{x: V(t,x) \le 1} \ell_s^T(t)x = \max_{\| X(t_0,t)\cdot x \| \le r} \ell_s^T(t)x = c(E_r(Q(t),0), \ell_s(t)) \le 1.$$

Тут $E_r(Q(t),0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^T Q^{-1}(t)\cdot x \le r^2\}$ – еліпсоїд, $Q^{-1}(t) = X^T(t_0,t)\cdot X(t_0,t)$.

Справді,

$$\| X(t_0,t)\cdot x \|^2 = x^T X^T(t_0,t) X(t_0,t) x = \\ = x^T Q^{-1}(t) x \le r^2.$$

Опорна функція еліпсоїда

$$c\big(E_r(Q(t),0),\ell_s(t)\big) = r\cdot\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)} \le 1,$$

$$t\in[t_0,T],\qquad s=1,2,\dots,m.$$

З останньої нерівності одержуємо

$$r \le \frac{1}{\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)}},\qquad t\in[t_0,T], s=1,2,\dots,m.$$

Звідси

$$r \le \min_{t\in[t_0,T]}\min_{s=1,2,\dots,m}\frac{1}{\sqrt{\ell_s^T(t)Q(t)\ell_s(t)}} = r_*.$$

Матриця $Q(t)=X(t,t_0)\cdot X^T(t,t_0)$ – симетрична, додатно визначена, задовольняє матричне рівняння (3.13) і $Q(t_0)=E$. Запишемо

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{dX(t,t_0)}{dt}X^T(t,t_0) + X(t,t_0)\frac{dX^T(t,t_0)}{dt} =$$
$$= A(t)\cdot X(t,t_0)\cdot X^T(t,t_0) + X(t,t_0)\cdot X^T(t,t_0)\cdot A^T(t) =$$
$$= A(t)\cdot Q(t) + Q(t)\cdot A^T(t).$$

■

Приклад 3.9. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = -x_1.\end{cases}$$

Обмеження на фазові координати мають вигляд

$$\Phi(t) = \{(x_1,x_2)^T : |x_1|\le c_1, |x_2|\le c_2\},$$

де $t\in[0,T]$, $c_1>0$, $c_2>0$. Застосуємо теорему 3.10 до знаходження оптимальної оцінки практичної стійкості нульового розв'язку заданої системи у класі куль.

Фундаментальна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t,0) = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Тому матриця $Q(t)=X(t,0)\,X^T(t,0)=E$. Множину обмежень на фазові координати можна подати у вигляді

$$\Phi(t) = \left\{x=(x_1,x_2)^T : \max_{k=1,2,3,4}\ell_k^T(t)\,x \le 1\right\}, \text{де } t\in[0,T],$$

$$\ell_1(t) = (c_1^{-1}, 0)^T, \;\; \ell_2(t) = (-c_1^{-1}, 0)^T,$$

$$\ell_3(t) = (0, c_2^{-1})^T, \;\; \ell_4(t) = (0, -c_2^{-1})^T.$$

Тому

$$\ell_1^T(t)Q(t)\ell_1(t) = \ell_2^T(t)Q(t)\ell_2(t) = \frac{1}{c_1^2},$$

$$\ell_3^T(t)Q(t)\ell_3(t) = \ell_4^T(t)Q(t)\ell_4(t) = \frac{1}{c_2^2}.$$

За теоремою 3.10 оптимальна оцінка множини початкових умов у класі куль

$$r_* = \min\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right).$$

Теорема 3.11. *Нехай множина початкових умов* G_0 *має вигляд еліпсоїда*

$$G_0 = E_r(B, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T B^{-1} x \le r^2\}, \qquad (3.14)$$

фазові обмеження задано у вигляді (3.11). *Тоді для всіх* $r \le r_*$, $r > 0$ *нульовий розв'язок системи* (3.4) *є* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$-*стійким, де* r_* *обчислюється згідно з* (3.12), $Q(t)$ *задовольняє матричне рівняння Ляпунова* (3.13) *за умови* $Q(t_0) = B$. *Тут* B – $n \times n$-*симетрична додатно визначена матриця*.

Доведення. Проводиться аналогічно до обґрунтування теореми 3.10. Вибираємо функцію Ляпунова у вигляді

$$V(t, x) = 1 - r + \sqrt{x^T Q^{-1}(t) x}, \qquad (3.15)$$

де $Q^{-1}(t) = X^T(t_0, t) B^{-1} \cdot X(t_0, t)$. Розв'язуємо задачу

$$\max_{x: V(t,x) \le 1} \ell_s^T(t) x \le 1$$

й одержуємо співвідношення, аналогічне до (3.12).

■

Теорема 3.12. *Нехай множина початкових умов є еліпсоїдом* (3.14)*, фазові обмеження задано неперервним багатозначним відображенням* $\Phi: [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$, $0 \in int\, \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Тоді для всіх $r \le r_*$, $r > 0$, нульовий розв'язок системи (3.4) *є* $\{G_0, \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким, де*

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}. \tag{3.16}$$

Тут $Q(t)$ є розв'язком матричного рівняння Ляпунова (3.13), $Q(t_0) = B$.

Доведення. Оскільки $\Phi(t)$ – опуклий компакт в $\mathbb{R}^n$, то

$$\Phi(t) = \cap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n : x^T \psi \le c(\Phi(t), \psi)\}, \qquad t \in [t_0, T].$$

Зважаючи на те, що $0 \in int\, \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, то $c(\Phi(t), \psi) > 0$ для всіх $\psi \in S$. Тому

$$\Phi(t) = \cap_{\psi \in S} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{x^T \psi}{c(\Phi(t), \psi)} \le 1 \right\} =$$

$$= \cap_{\psi \in S} \{x \in \mathbb{R}^n : x^T \ell(\psi, t) \le 1\},$$

де

$$\ell(\psi, t) = \frac{\psi}{c(\Phi(t), \psi)}, \qquad \psi \in S.$$

Вибираємо функцію Ляпунова у вигляді (3.15) і приходимо до задачі

$$\max_{x : V(t, x) \le 1} x^T \ell(\psi, t) \le 1, \qquad \psi \in S, t \in [t_0, T].$$

Далі проводимо доведення аналогічно до доведення теорем 3.10, 3.11. У результаті маємо оцінку

$$r \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{1}{\sqrt{\ell^T(\psi, t) Q(t) \ell(\psi, t)}}. \tag{3.17}$$

Підставляючи $\ell(\psi, t) = \frac{\psi}{c(\Phi(t), \psi)}$ у нерівність (3.17), одержуємо (3.16).

■

У випадку $G_0 = K_r(0)$ у формулюванні теореми 3.12 слід покласти умову $Q(t_0) = E$.

Приклад 3.10. Якщо в умовах теореми 3.12 фазові обмеження $\Phi(t) = K_{r(t)}(0)$, де $r(t) > 0$ – неперервна на $[t_0, T]$ функція, то співвідношення (3.16) має вигляд

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\psi \in S} \frac{r(t)}{\sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}.$$

Оскільки за співвідношенням Релея

$$\max_{\psi \in S} \psi^T Q(t) \psi = \lambda_{\max}\big(Q(t)\big),$$

де $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальне власне число матриці, то

$$r_* = \min_{t \in [t_0, T]} \frac{r(t)}{\sqrt{\lambda_{\max}(Q(t))}}.$$

Співвідношення вигляду (3.12), (3.16) називають *оптимальними оцінками практичної стійкості*.

Теорема 3.13. *Припустимо, що множину початкових умов* G_0 *задано у формі еліпсоїда* (3.14)*, де* $r > 0$ *– задане число, фазові обмеження визначені параметричним класом багатозначних функцій* $\Phi(p): [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$*, які є неперервними для кожного* $p \geq 0$*, причому* $\Phi(t, p) = p \cdot \Phi(t)$*, де* $\Phi(t) \in conv(\mathbb{R}^n)$*,* $0 \in int\ \Phi(t, p)$*,* $t \in [t_0, T]$*,* $p > 0$*. Тоді для всіх* $p \geq p_*$*, де*

$$p_* = r \cdot \max_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}{c(\Phi(t), \psi)}, \tag{3.18}$$

нульовий розв'язок системи (3.4) *є* $\{G_0, \Phi(t, p), t_0, T\}$*-стійким. Тут* $Q(t)$ *є розв'язком матричного рівняння Ляпунова* (3.13) *для* $Q(t_0) = B$.

Доведення. Міркування повторюють обґрунтування попередньої теореми. Вибираємо функцію Ляпунова у вигляді (3.15) і приходимо до нерівності (3.17), де

$$\ell(\psi, t) = \frac{\psi}{c(\Phi(t, p), \psi)} = \frac{\psi}{p \cdot c(\Phi(t), \psi)}.$$

Тоді

$$\frac{r \cdot \sqrt{\psi^T Q(t) \psi}}{c(\Phi(t), \psi)} \leq p, \qquad \psi \in S, \qquad t \in [t_0, T].$$

Звідси випливає (3.18).

■

Співвідношення (3.18) визначає *оцінку фазових обмежень*, заданих у параметричному вигляді $\Phi(t, p) = p \cdot \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$, $p > 0$.

Запитання, тести для самоконтролю

1. Сформулюйте основні означення практичної стійкості незбуреного розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь.
2. Наведіть геометричну інтерпретацію означення практичної стійкості розв'язків динамічних систем.
3. Дайте означення максимальної множини практичної стійкості.
4. Сформулюйте основні властивості максимальної множини практичної стійкості.
5. Дайте означення напівметрики Гаусдорфа. Наведіть означення метрики Гаусдорфа.
6. Сформулюйте основні властивості метрики Гаусдорфа.
7. Наведіть приклади багатозначних відображень.
8. Дайте означення напівнеперервного зверху багатозначного відображення.
9. Сформулюйте означення неперервного багатозначного відображення.
10. Що називається графіком багатозначного відображення?
11. Дайте означення квазівідкритого багатозначного відображення.
12. Наведіть означення опорної функції множини.
13. Наведіть співвідношення для знаходження опорних функцій кулі, еліпсоїда та гіперкуба.
14. Сформулюйте основні властивості опорної функції.
15. Дайте означення функції Мінковського й оберненої функції Мінковського.
16. Сформулюйте необхідні і достатні умови практичної стійкості на основі функції Ляпунова.
17. Охарактеризуйте властивості оптимальної множини практичної стійкості лінійної системи.
18. Сформулюйте задачу знаходження оптимальної оцінки практичної стійкості.
19. Сформулюйте теореми про оптимальну оцінку практичної стійкості для лінійних систем.
20. Сформулюйте теорему про оптимальну оцінку фазових обмежень.

Обов'язкові та додаткові задачі

Знайти опорні функції для множин задач 3.1–3.4:

3.1. $\mathcal{A} = [0, r]$.

3.2. $\mathcal{A} = [-r, r]$.

3.3. $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2) \colon |x_1| \le 1, |x_2| \le 2\}$.

3.4. $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$.

Обґрунтувати неперервність багатозначних відображень у задачах 3.5, 3.6:

3.5. $F(x) = [0, x], x \in [0,1]$.

3.6. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \|y\| \le x\}, x \in [0,1]$.

3.7. Знайти функцію Мінковського множини

$$C \subset \mathbb{R}^2, \qquad C = \{(x, y) \colon y \ge x^2\}.$$

3.8. Доведіть, що якщо множина в $\mathbb{R}^n$ – опукла, то її замикання і внутрішність є опуклими.

3.9*. Знайти опорну функцію афінної множини в $\mathbb{R}^n$.

3.10*. Навести приклад замкненої множини на площині, опукла оболонка якої не є замкненою.

3.11. Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in conv(\mathbb{R}^n)$. Довести, що метрика Гаусдорфа

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} |c(\mathcal{A}, \psi) - c(\mathcal{B}, \psi)|.$$

Тут $conv(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів.

3.12. Довести: щоб багатозначне відображення $F \colon \mathcal{D} \to conv(\mathbb{R}^n)$ було неперервним, необхідно і достатньо, щоб його опорна функція $c(F(x), \psi)$ була неперервною за змінною $x \in \mathcal{D}$ для всіх $\psi \in \mathcal{S}$. Тут $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – деяка область.

У задачах 3.13–3.16 знайти відстань Гаусдорфа між множинами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, де:

3.13. $\mathcal{A} = [0,1], \quad \mathcal{B} = [3,5]$.

3.14. $\mathcal{A} = [0,2], \quad \mathcal{B} = [-2,1]$.

3.15. $\mathcal{A} = [-1,3], \quad \mathcal{B} = [0,2]$.

3.16. $\mathcal{A} = [0,1], \quad \mathcal{B} = [-2,4]$.

3.17. Знайти відстань Гаусдорфа між колом радіуса 1 із центром у точці 0 на площині та рівностороннім трикутником, вписаним у це коло.

3.18. Знайти відстань Гаусдорфа між еліпсоїдом

$$\mathcal{E}(0,Q) = \{x \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle Q^{-1}x, x\rangle \le 1\}$$

та початком координат. Тут Q – симетрична додатно визначена $n \times n$-матриця.

3.19. Нехай $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$. Нормою множини $\mathcal{A}$ називають $\sup\limits_{x\in\mathcal{A}}\|x\|$. Довести, що якщо $\mathcal{A} \in comp(\mathbb{R}^n)$, то $\|\mathcal{A}\| = h(\mathcal{A},\{0\})$. Причому, якщо $\mathcal{A} \in conv(\mathbb{R}^n)$, то $\|\mathcal{A}\| = \max\limits_{\psi\in\mathcal{S}}|c(\mathcal{A},\psi)|$.

3.20. Довести, що опукла оболонка компакта є компактною множиною.

3.21. Задано диференціальне рівняння

$$x' = x$$

разом з обмеженнями на стан

$$\Phi(t) = [-2{,}2], \qquad t \in [0{,}1].$$

Знайти максимальну множину початкових умов G_*. Якою буде максимальна множина зовнішньої практичної стійкості?

3.22. Задано диференціальне рівняння

$$x' = -x$$

разом з обмеженнями на стан

$$\Phi(t) = [-1{,}1], \qquad t \in [0{,}3].$$

Знайти максимальну множину початкових умов G_*. Якою буде максимальна множина зовнішньої практичної стійкості?

3.23. Задано диференціальне рівняння

$$x' = tx$$

разом з обмеженнями на стан

$$\Phi(t) = [-1{,}1], \qquad t \in [0{,}2].$$

Знайти максимальну множину початкових умов G_*. Якою буде максимальна множина зовнішньої практичної стійкості?

3.24. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases}$$

Обмеження на фазові координати мають вигляд

$$\Phi(t) = \{(x_1, x_2)^T : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1\},$$

де $t \in [0,2]$. Знайти оптимальну оцінку практичної стійкості нульового розв'язку заданої системи у класі куль.

3.25. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1. \end{cases}$$

Обмеження на фазові координати мають вигляд

$$\Phi(t) = \{(x_1, x_2)^T : |x_1| \le 2, |x_2| \le 3\},$$

де $t \in [0,1]$. Знайти оптимальну оцінку практичної стійкості нульового розв'язку заданої системи у класі куль.

3.26. Знайти оптимальну оцінку початкових умов у класі куль у задачі практичної стійкості нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

за фазових обмежень

$$\Phi(t) = \{(x_1, x_2): \quad |x_1| \le 4, \quad |x_2| \le 1\}, \qquad t \in [0,1].$$

3.27. Побудувати оптимальну оцінку практичної стійкості нульового розв'язку системи у класі куль

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

за фазових обмежень

$$\Phi(t) = \{(x_1, x_2): \ x_1^2 + x_2^2 \le 4\}, \qquad t \in [0,1].$$

РОЗДІЛ 4

ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ Й АТРАКТОРИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

4.1. Граничні множини траєкторій

Розглянемо автономну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{4.1}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $x \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – область, функція $f: \mathcal{D} \to \to \mathbb{R}^n$ в області $\mathcal{D}$ задовольняє локальній умові Ліпшиця. Як і в попередніх розділах, позначатимемо як $x(t, x_0)$ розв'язок системи (4.1), який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathcal{D}$.

Означення 4.1. *Точку $p \in \mathcal{D}$ називають* ω-*граничною точкою розв'язку $x(t, x_0)$ системи* (4.1), *який задовольняє умову Коші $x(0) = x_0$ і визначений при $t \geq 0$, якщо існує послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,*

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

така, що

$$p = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0).$$

Множину $\Omega(x_0)$ всіх ω-*граничних точок розв'язку $x(t, x_0)$ називають її* ω-*граничною множиною.*

З означення 4.1 випливає, що ω-гранична множина $\Omega(x_0)$ розв'язку $x(t, x_0)$ є перетином замикань усіх додатних півтраєкторій цього розв'язку

$$\Omega(x_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} x(t, x_0)}.$$

Справді, з того, що $p \in \Omega(x_0)$, слідує, що знайдеться послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty,$$

для якої

$$p = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0).$$

Виберемо довільне $T > 0$. Тоді, починаючи з деякого номера k_0, маємо $t_k \geq T$ і

$$x(t_k, x_0) \in \bigcup_{t \geq T} x(t, x_0), \qquad k \geq k_0.$$

Тому

$$p = \lim_{k \to \infty} x(t_k, x_0) \in \overline{\bigcup_{t \geq T} x(t, x_0)}.$$

Оскільки $T > 0$ є довільним, то

$$p \in \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} x(t, x_0)}.$$

З іншого боку, з умови

$$p \in \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} x(t, x_0)}$$

випливає, що для довільного $T = k$, $k = 1, 2, \dots$,

$$p \in \overline{\bigcup_{t \geq k} x(t, x_0)}.$$

Отже, знайдеться $t_k \geq k$ таке, що

$$\|p - x(t_k, x_0)\| \leq \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Звідси

$$\lim_{k \to \infty} t_k = +\infty, \qquad \lim_{k \to \infty} x(t_k, x_0) = p.$$

За означенням 4.1 маємо $p \in \Omega(x_0)$.

Зауважимо: якщо $x_0 \in \mathcal{D}$ є точкою рівноваги системи (4.1), то $\Omega(x_0) = \{x_0\}$.

Приклад 4.1. Розглянемо задачу Коші

$$x' = -x, \qquad x(0) = 1.$$

Розв'язком є функція $x(t) = e^{-t}$. Оскільки

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0,$$

то ω-гранична множина $\Omega(1)$ складається лише з нуля, тобто $\Omega(1) = \{0\}$.

Означення 4.2. *Точку* $y \in \mathcal{D}$ *називають* α*-граничною точкою розв'язку* $x(t, x_0)$ *системи* (4.1)*, визначеного при* $t \leq 0$*, якщо існує послідовність* $\{t_k\}$*,* $t_k < 0$*,* $k = 1,2, \dots$ *,*

$$\lim_{k\to\infty} t_k = -\infty$$

така, що

$$y = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0).$$

Множину $A(x_0)$ *всіх* α*-граничних точок розв'язку* $x(t, x_0)$ *системи* (4.1) *називають* α*-граничною множиною цього розв'язку.*

З означення 4.2 слідує, що α-гранична множина $A(x_0)$ розв'язку $x(t, x_0)$ є перетином замикань усіх його від'ємних півтраєкторій

$$\mathrm{A}(x_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\leq -T} x(t, x_0)}.$$

Якщо $x_0 \in \mathcal{D}$ є точкою рівноваги системи (4.1), то $A(x_0) = \{x_0\}$.

Приклад 4.2. Розглянемо задачу Коші

$$x' = 2x, \qquad x(0) = 1.$$

Розв'язком цієї задачі є функція $x(t) = e^{2t}$. Оскільки

$$\lim_{t\to-\infty} e^{2t} = 0,$$

то $A(1) = \{0\}$.

Граничні множини траєкторій мають ряд властивостей, серед яких – інваріантність.

Означення 4.3. *Множину* $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ *називають додатно інваріантною, якщо* $x(t, \mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$*. Якщо для будь-якого* $t \in \mathbb{R}$ *виконується* $x(t, \mathcal{W}) \supseteq \mathcal{W}$*, то множину* $\mathcal{W}$ *називають від'ємно інваріантною. Множину* $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ *називають інваріантною, якщо* $x(t, \mathcal{W}) = \mathcal{W}$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$*. Тут*

$$x(t, \mathcal{W}) = \bigcup_{x_0 \in \mathcal{W}} x(t, x_0).$$

Отже, множина $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ інваріантна, якщо вона є від'ємно інваріантною і додатно інваріантною одночасно. У випадку, якщо система (4.1) розглядається лише на додатній часовій півосі, поняття інваріантності вводиться аналогічно до означення 4.3.

Означення 4.4. *Множину $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ називають*:

– *додатно інваріантною, якщо $x(t, \mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$ при $t \geq 0$;*

– *від'ємно інваріантною, якщо $x(t, \mathcal{W}) \supseteq \mathcal{W}$ при $t \geq 0$;*

– *інваріантною, якщо $x(t, \mathcal{W}) = \mathcal{W}$ для всіх $t \geq 0$.*

Найпростішими прикладами інваріантних множин є точки рівноваги, траєкторії системи.

Означення 4.5. *Розв'язок $x(t, x_0)$ системи* (4.1) *називають додатно стійким за Лагранжем, якщо знайдеться компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ такий, що $x(t, x_0) \in \mathcal{K}$, $t \geq 0$, для тих $t \geq 0$, для яких розв'язок $x(t, x_0)$ існує.*

Якщо розв'язок $x(t, x_0)$ системи (4.1) є додатно стійким за Лагранжем, то його можна продовжити на всю додатну піввісь $t \in [0, +\infty)$.

Справді, нехай $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{D}$ – будь-який компакт, який у своїй внутрішності містить компакт $\mathcal{K}$ з означення 4.5. Наприклад,

$$\mathcal{K}_0 = \bigcup_{x_0 \in \mathcal{K}} \mathcal{K}_r(x_0),$$

де, $r > 0$. За теоремою 1.2 розв'язок $x(t, x_0)$ системи (4.1) можна продовжити праворуч до границі компакта

$$\mathcal{C} = \{(t, x) : t \in [-a, a],\ \ x \in \mathcal{K}_0\},$$

де $a > 0$. Оскільки $x(t, x_0) \in \mathcal{K}$, $t \geq 0$, то перетин границі множини $\mathcal{C}$ з інтегральною кривою розв'язку $x(t, x_0)$ для $t > 0$ можливий лише на поверхні $t = a$. Це означає, що розв'язок $x(t, x_0)$ системи (4.1) існує для всіх $t \in [0, a]$, де $a > 0$ можна вибрати довільним. Отже, розв'язок $x(t, x_0)$ можемо продовжити праворуч на всю додатну піввісь. Він є обмеженим при $t \in [0, +\infty)$ так, що

$$\|x(t, x_0)\| \leq \|\mathcal{K}\|, \qquad t \geq 0,$$

де

$$\|\mathcal{K}\| = \max_{y \in \mathcal{K}} \|y\|$$

– норма множини $\mathcal{K}$.

Означення 4.6. *Розв'язок* $x(t, x_0)$ *системи* (4.1) *називають від'ємно стійким за Лагранжем, якщо знайдеться компакт* $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ *такий, що*

$$x(t, x_0) \in \mathcal{K}, \qquad t \leq 0,$$

для тих $t \leq 0$, *для яких розв'язок* $x(t, x_0)$ *існує*.

Від'ємно стійкий за Лагранжем розв'язок системи (4.1) можна продовжити на всю від'ємну часову піввісь $t \in (-\infty, 0]$.

Теорема 4.1. *Додатно стійкий за Лагранжем розв'язок* $x(t, x_0)$ *системи* (4.1) *має непорожню, обмежену, замкнену* ω*-граничну множину* $\Omega(x_0)$, *яка є інваріантною, тобто*

$$x\big(t, \Omega(x_0)\big) = \Omega(x_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Нехай за означенням 4.5 існує компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ такий, що $x(t, x_0) \in \mathcal{K}$, $t \geq 0$. Причому розв'язок $x(t, x_0)$ існує для всіх $t \geq 0$. Виберемо довільну послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k \to \infty} t_k = +\infty.$$

Побудуємо послідовність $\{x_k\} \subset \mathcal{K}$ таку, що $x_k = x(t_k, x_0)$, $k = 1,2, \dots$. Оскільки $\mathcal{K}$ – компакт, то з послідовностей $\{t_k\}$, $\{x_k\}$ виберемо підпослідовності $\{\tau_k\}$, $\{y_k\}$ такі, що

$$\lim_{k \to \infty} y_k = p \in \mathcal{K},$$

де $y_k = x(\tau_k, x_0)$, $k = 1,2, \dots$. За означенням 4.1 точка $p \in \Omega(x_0)$ і $\Omega(x_0)$ не є порожньою множиною.

Вище ми показали, що

$$\Omega(x_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} x(t, x_0)}.$$

Оскільки $x(t, x_0) \in \mathcal{K}$, $t \geq 0$, $\mathcal{K}$ – компакт, то

$$\overline{\bigcup_{t \geq T} x(t, x_0)} \subset \mathcal{K}$$

є обмеженою замкненою множиною для всіх $T > 0$. Тому $\Omega(x_0) \subset \mathcal{K}$. Отже, множина $\Omega(x_0)$ є обмеженою. Оскільки перетин будь-якої системи замкнених множин є замкненим, то

$\Omega(x_0)$ – замкнена множина. Доходимо висновку, що за вказаних у теоремі умов $\Omega(x_0)$ є непорожнім компактом.

Обґрунтуємо інваріантність множини $\Omega(x_0)$. Зафіксуємо довільне $t \in \mathbb{R}$. Покажемо, що $x\big(t, \Omega(x_0)\big) = \Omega(x_0)$. Нехай $p \in \Omega(x_0)$. Доведемо, що $x(t, p) \in \Omega(x_0)$. За означенням 4.1 існує послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty,$$

така, що

$$p = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0).$$

Тоді знайдеться номер k_0, для якого при $k \geq k_0$ справджується $t + t_k \geq 0$, причому за властивостями розв'язків автономних систем (теорема 1.27) маємо

$$x(t + t_k, x_0) = x\big(t, x(t_k, x_0)\big).$$

За теоремою про неперервну залежність розв'язків від початкових умов (теорема 1.12) і за означенням 4.1

$$\lim_{k\to\infty} x(t + t_k, x_0) = \lim_{k\to\infty} x\big(t, x(t_k, x_0)\big) = x(t, p) \in \Omega(x_0).$$

Отже, для довільного $p \in \Omega(x_0)$ маємо $x(t, p) \in \Omega(x_0)$ і тому $x\big(t, \Omega(x_0)\big) \subseteq \Omega(x_0)$. У такий спосіб обґрунтували додатну інваріантність $\Omega(x_0)$.

Виберемо довільну точку $p \in \Omega(x_0)$. За означенням 1.4 знайдеться послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

така, що

$$p = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0).$$

Оскільки $t \in \mathbb{R}$ – довільна точка, то, ґрунтуючись на попередній частині доведення, маємо

$$p_0 = x(-t, p) \in \Omega(x_0).$$

Справді, вибираємо такий номер k_0, що при $k \geq k_0$ справджується $t_k - t \geq 0$ і за теоремою про неперервну залежність розв'язку від початкових умов (теорема 1.12)

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k - t, x_0) = \lim_{k\to\infty} x\big(-t, x(t_k, x_0)\big) = x(-t, p) = p_0 \in \Omega(x_0).$$

Продовжуючи обґрунтування теореми, за властивостями розв'язків автономних систем (теорема 1.27)

$$x(t, p_0) = x\big(t, x(-t, p)\big) = x(0, p) = p.$$

Оскільки, $p_0 \in \Omega(x_0)$, то $p \in x\big(t, \Omega(x_0)\big)$. Ми показали, що

$$\Omega(x_0) \subseteq x\big(t, \Omega(x_0)\big).$$

Вище ми обґрунтували додатну інваріантність $\Omega(x_0)$. Тому

$$x\big(t, \Omega(x_0)\big) = \Omega(x_0).$$

■

Використовуючи означення 4.2 і базуючись на ідеях доведення теореми 4.1, можна обґрунтувати таке твердження.

Наслідок 4.1. *Від'ємно стійкий за Лагранжем розв'язок* $x(t, x_0)$ *системи* (4.1) *має непорожню, обмежену, замкнену* α*-граничну множину* $\mathrm{A}(x_0)$*, яка є інваріантною*

$$x(t, \mathrm{A}(x_0)) = \mathrm{A}(x_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4.2. ω*-гранична множина додатно стійкого за Лагранжем розв'язку є зв'язною.* α*-гранична множина від'ємно стійкого за Лагранжем розв'язку є зв'язною.*

Доведення. Нехай $x(t, x_0)$ – додатно стійкий за Лагранжем розв'язок системи (4.1). Припустимо, від супротивного, що компактна множина $\Omega(x_0)$ є незв'язною. Тоді $\Omega(x_0)$ можна подати, як об'єднання двох непорожніх компактних множин $\Omega_1 \subset \mathcal{D}$, $\Omega_2 \subset \mathcal{D}$, які не перетинаються:

$$\Omega(x_0) = \Omega_1 \cup \Omega_2, \qquad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

Знайдемо

$$d = \min_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_2} \|x - y\| > 0.$$

За означенням ω-граничної множини існують послідовності $\{t_k^1\}$, $\{t_k^2\}$, $t_k^1 > 0$, $t_k^2 > 0$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k^1 = +\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k^2 = +\infty$$

такі, що

$$\rho\big(x(t_k^1, x_0), \Omega_1\big) < r, \qquad \rho\big(x(t_k^2, x_0), \Omega_2\big) < r,$$

$$k = 1,2,\dots, \;\; r = \frac{d}{2}.$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$t_1^1 < t_1^2 < t_2^1 < t_2^2 < \cdots < t_k^1 < t_k^2 < \cdots.$$

Позначимо

$$\Omega_0 = U_r(\Omega_1) \cup U_r(\Omega_2),$$

де $U_r(\Omega_1)$, $U_r(\Omega_2)$ – відкриті r-околи множини Ω_1 та Ω_2, відповідно. Множина Ω_0 є відкритою і незв'язною тому, що

$$U_r(\Omega_1) \cap U_r(\Omega_2) = \emptyset.$$

Оскільки

$$x\big(t_k^1, x_0\big) \in U_r(\Omega_1), \qquad x\big(t_k^2, x_0\big) \in U_r(\Omega_2), \qquad k = 1,2,\dots,$$

то знайдеться $t_k \in \big(t_k^1, t_k^2\big)$, для якого

$$x(t_k, x_0) \notin U_r(\Omega_1) \cup U_r(\Omega_2).$$

Тоді

$$\rho(x(t_k, x_0), \Omega_1) \geq r, \qquad \rho(x(t_k, x_0), \Omega_2) \geq r, \qquad k = 1,2,\dots .$$

Множина $\{x(t_k, x_0)\}$ має граничну точку

$$y \in \overline{\{x(t_k, x_0)\}},$$

яка за означенням ω-граничної множини належить $\Omega(x_0)$. Але це неможливо, оскільки

$$\rho(x(t_k, x_0), \Omega_1) \geq r, \qquad \rho(x(t_k, x_0), \Omega_2) \geq r, \qquad k = 1,2,\dots,$$

і тому

$$\rho(y, \Omega_1) \geq r, \qquad \rho(y, \Omega_2) \geq r.$$

Одержали протиріччя, яке показує, що $\Omega(x_0)$ – зв'язна множина. Зв'язність α-граничної множини від'ємно стійкого за Лагранжем розв'язку обґрунтовують аналогічно.

■

Означення 4.7. *Множину $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ називають атрактором розв'язку $x(t, x_0)$ системи* (4.1)*, якщо*

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), \mathcal{M}) = 0.$$

Теорема 4.3. ω-*гранична множина* $\Omega(x_0)$ *додано стійкого за Лагранжем розв'язку* $x(t, x_0)$ *системи* (4.1) *є атрактором цього розв'язку.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що $\Omega(x_0)$ не є атрактором розв'язку $x(t, x_0)$ системи (4.1). Тоді знайдуться $\varepsilon > 0$ і послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{t\to+\infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$\rho(x(t_k, x_0), \Omega(x_0)) \geq \varepsilon, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Звідси

$$x(t_k, x_0) \notin U_\varepsilon\big(\Omega(x_0)\big), \qquad k = 1,2, \dots ,$$

де $U_\varepsilon\big(\Omega(x_0)\big)$ – відкритий ε-окіл множини $\Omega(x_0)$. Водночас для довільного $T > 0$ маємо

$$\overline{\{x(t_k, x_0), t_k \geq T, k = 1,2, \dots\}} \subset \overline{\{x(t, x_0), t \geq T\}}.$$

Отже,

$$\bigcap_{T>0} \overline{\{x(t_k, x_0), t_k \geq T, k = 1,2, \dots\}} \subset \bigcap_{T>0} \overline{\{x(t, x_0), t \geq T\}} =$$
$$= \Omega(x_0).$$

Проте

$$\overline{\{x(t_k, x_0), k = 1,2, \dots\}} \cap U_\varepsilon\big(\Omega(x_0)\big) = \emptyset.$$

Це означає, що для будь-якого $T > 0$

$$\overline{\{x(t_k, x_0), t_k \geq T, k = 1,2, \dots\}} \cap U_\varepsilon\big(\Omega(x_0)\big) = \emptyset.$$

Тому

$$\bigcap_{T>0} \overline{\{x(t_k, x_0), t_k \geq T, k = 1,2, \dots\}} \cap U_\varepsilon\big(\Omega(x_0)\big) = \emptyset.$$

Разом із цим вище ми довели, що

$$\bigcap_{T>0} \overline{\{x(t_k, x_0), t_k \geq T, k = 1,2, \dots\}} \subset \Omega(x_0).$$

Одержали протиріччя, яке показує, що $\Omega(x_0)$ – атрактор розв'язку $x(t, x_0)$.

■

Нехай $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$. ω-граничною множиною $\Omega(\mathcal{B})$ для множини $\mathcal{B}$ називають сукупність точок $p \in \mathcal{D}$, для яких існують послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$p = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_k).$$

Для ω-граничної множини $\Omega(\mathcal{B})$ справджується рівність

$$\Omega(\mathcal{B}) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} x(t, \mathcal{B})}.$$

Сукупність точок $y \in \mathcal{D}$, для яких існують послідовності $\{x_k\}$, $\{t_k\}$, $t_k < 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = -\infty$$

такі, що

$$y = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_k)$$

називають α-граничною множиною $A(\mathcal{B})$ для множини $\mathcal{B}$.

Справедлива рівність

$$A(\mathcal{B}) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\leq -T} x(t, \mathcal{B})}.$$

Множини $\Omega(\mathcal{B})$, $A(\mathcal{B})$ є інваріантами.

4.2. Принцип інваріантності. Теореми Барбашина – Красовського

Припустимо, що початок координат є точкою рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь і існує додатно визначена, неперервно диференційована функція Ляпунова, похідна якої за часовою змінною в силу системи є від'ємно сталою. За теоремою Ляпунова про стійкість (теорема 2.17) нульовий розв'язок системи є стійким. Множина точок простору стану, в яких похідна функції Ляпунова за часовою змінною в силу системи дорівнює нулеві, містить нульовий розв'язок. Виявляється: якщо інші розв'язки, які проходять через точки такої множини, покидають її з плином часу, то у цьому випадку нульовий розв'язок системи набуває якості асимптотичної стійкості [25, 27]. Щоб обґрунтувати таке явище, слід звернутися до поняття інваріантної множини і до властивостей ω-граничних множин.

Теорема 4.4 (принцип інваріантності Ла Саля). *Нехай* $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ *– компактна, додатно інваріантна множина для системи* (4.1)*, функція* $V(x)$ *є неперервно диференційованою в області* $\mathcal{D}$ *і такою, що*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \leq 0, \qquad x \in \mathcal{W}.$$

Припустимо, що $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ *є найбільшою інваріантною множиною, яка міститься у множині*

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathcal{W}\colon \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} = 0\right\}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \rho\left(x(t, x_0), \mathcal{M}\right) = 0$$

для будь-якої точки $x_0 \in \mathcal{W}$.

Доведення. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \mathcal{W}$. Оскільки $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}$ є додатно інваріантною множиною, то $x(t, x_0) \in \mathcal{W}$ для всіх $t \geq 0$. Враховуючи, що

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \leq 0, \qquad x \in \mathcal{W},$$

то

$$\frac{dV\big(x(t, x_0)\big)}{dt} \leq 0, \qquad t \geq 0.$$

Це означає, що функція $V\big(x(t, x_0)\big)$ не зростає при $t \geq 0$.

Множина $\mathcal{W}$ є компактом. Тому за теоремою Веєрштраса існує

$$m = \min_{x\in\mathcal{W}} V(x).$$

Отже, $V\big(x(t,x_0)\big) \geq m$, $t \geq 0$, та існує

$$\lim_{t\to\infty} V\big(x(t,x_0)\big) = V_*.$$

Оскільки $x(t,x_0) \in \mathcal{W}$, $t \geq 0$, то

$$\Omega(x_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} x(t,x_0)} \subset \mathcal{W}.$$

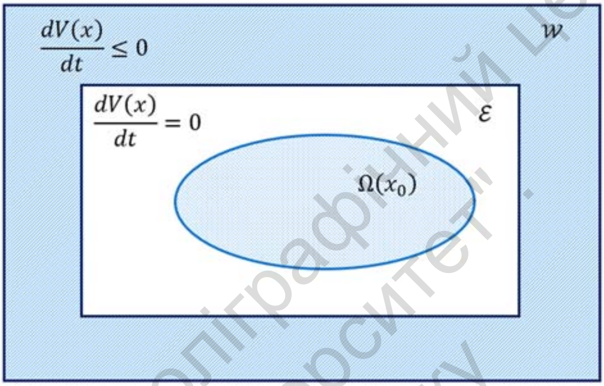


Рис. 4.1. Ілюстрація до принципу інваріантності

За теоремою 4.1 множина $\Omega(x_0)$ є непорожньою, компактною та інваріантною. З означення 4.1 випливає, що для довільної точки $p \in \Omega(x_0)$ знайдеться послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \ldots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

така, що

$$p = \lim_{k\to\infty} x(t_k, x_0).$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} V\big(x(t_k,x_0)\big) = V(p) = V_*.$$

У такий спосіб ми показали, що функція $V(x)$ є сталою на множині $\Omega(x_0)$ і $V(p) = V_*$ для всіх $p \in \Omega(x_0)$. Тому

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} = 0, \qquad x \in \Omega(x_0).$$

Отже $\Omega(x_0) \subseteq \mathcal{E}$ (рис. 4.1). За теоремою 4.1 множина $\Omega(x_0)$ є інваріантною. Оскільки за умовами теореми $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ – найбільша інваріантна множина, яка міститься в $\mathcal{E}$, то $\Omega(x_0) \subseteq \mathcal{M}$. Тому

$$\rho\big(x(t,x_0),\Omega(x_0)\big) \geq \rho(x(t,x_0),\mathcal{M}) \geq 0$$

для всіх $t \geq 0$. За теоремою 4.3 множина $\Omega(x_0)$ є атрактором розв'язку $x(t,x_0)$, що дає

$$\lim_{t\to+\infty} \rho\left(x(t,x_0),\Omega(x_0)\right) = 0.$$

Звідси

$$\lim_{t\to+\infty} \rho\left(x(t,x_0),\mathcal{M}\right) = 0.$$

■

Наслідок 4.2. *Нехай нуль є точкою рівноваги системи* (4.1),

$$\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < H\} \subset \mathcal{D}, \qquad H > 0,$$

в $\mathcal{D}_H$ існує неперервно диференційована функція $V(x)$, яка є додатно визначеною в $\mathcal{D}_H$ і

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \leq 0, \qquad x \in \mathcal{D}_H.$$

Припустимо, що не існує інших розв'язків системи (4.1), *крім $x(t) = 0$, $t \geq 0$, які цілком лежали б у множині*

$$\mathcal{E}_H = \left\{x \in \mathcal{D}_H : \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} = 0\right\}.$$

Тоді нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, системи (4.1) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Умови наслідку є такими, що охоплюють умови теореми Ляпунова про стійкість (теореми 2.17) . Отже, нульовий розв'язок системи (4.1) стійкий за Ляпуновим. Виберемо $r \in (0,H)$, знайдемо

$$m = \min_{x\in\mathcal{S}_r} V(x) > 0,$$

де

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$$

– сфера радіуса r із центром в нулі. Підберемо $c \in (0,m)$.

Множина

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathcal{K}_r(0): V(x) \le c\} \subset \mathcal{D}_H$$

є компактом. Покажемо, що $\mathcal{W}$ є додатно інваріантною множиною. Візьмемо $x_0 \in \mathcal{W}$. Оскільки

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \le 0,$$

то

$$V\big(x(t, x_0)\big) \le V(x_0) \le c, \qquad t \ge 0.$$

Крім того,

$$x(t, x_0) \in U_r(0), \qquad t \ge 0,$$

де $U_r = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < r\}$. Справді, від супротивного, припустимо, що існує $\tau \ge 0$ таке, що $x(\tau, x_0) \in \mathcal{S}_r$. Тоді

$$V\big(x(\tau, x_0)\big) \ge m > c.$$

Але, як зазначено вище, $V\big(x(t, x_0)\big) \le c$, $t \ge 0$. Одержали протиріччя, яке показує, що $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}_H$ – компактна додатно інваріантна множина. Оскільки за умовами наслідку лише нульовий розв'язок цілком належить множині $\mathcal{E}_H$, то $\mathcal{M} = \{0\}$ є найбільшою інваріантною множиною, яка міститься в $\mathcal{E}_H$. Тому за теоремою 4.4

$$\lim_{t \to +\infty} \rho\,(x(t, x_0), \mathcal{M}) = \lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0,$$

де $x_0 \in \mathcal{W}$. Отже, нульовий розв'язок системи (4.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим, і $\mathcal{W}$ є областю асимптотичної стійкості.

■

Наслідок 4.3. *Нехай нуль є точкою рівноваги системи* (4.1), $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ *та існує неперервно диференційована функція* $V(x)$, *яка є додатно визначеною, радіально необмеженою,*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \le 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Припустимо, що не існує інших розв'язків системи (4.1), *крім тривіального розв'язку* $x(t) = 0$, $t \geq 0$, *які цілком лежали б у множині*

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(4.1)} = 0 \right\}.$$

Тоді нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$ *системи* (4.1) *є глобально асимптотично стійким.*

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$, і таке $c > 0$, що $c = V(x_0)$. Оскільки $V(x)$ є радіально необмеженою, то множина

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$$

є компактом (теорема 2.28, доведення), $x_0 \in \mathcal{W}$. Враховуючи, що

$$\left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(4.1)} \leq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

то для довільної точки $y_0 \in \mathcal{W}$ маємо

$$V\big(x(t, y_0)\big) \leq V(y_0) \leq c, \qquad t \geq 0.$$

Отже,

$$x(t, y_0) \in \mathcal{W}, \qquad t \geq 0.$$

Це означає, що $\mathcal{W}$ є додатно інваріантною множиною. За умовами наслідку множина $\mathcal{M} = \{0\}$ є найбільшою інваріантною множиною, яка міститься в $\mathcal{E}$. З теореми 4.4 випливає

$$\lim_{t \to +\infty} \rho\,(x(t, x_0), \mathcal{M}) = \lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0.$$

У такий спосіб ми обґрунтували глобальну асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (4.1).

Наслідок доведено.

■

Приклад 4.3. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + a \sin x = 0,$$

де $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – локально ліпшицева функція, $g(0) = 0$, $s \cdot g(s) > 0$, $s \in (-b, 0) \cup (0, b)$, $a > 0$.

Запишемо еквівалентну рівнянню систему другого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a \sin x - g(y). \end{cases}$$

Виберемо функцію

$$V(x, y) = a\,(1 - \cos x) + \frac{1}{2}y^2.$$

Ця функція є додатно визначеною в області $\{(x, y): |x| < 2\pi, y \in \mathbb{R}\}$. Похідну функції $V(x, y)$ за t в силу системи запишемо як

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = (a \sin x)y + y\big(-a \sin x - g(y)\big) = -y \cdot g(y) \leq 0,$$

$$y \in (-b, b).$$

Отже, нульовий розв'язок $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $t \geq 0$, системи є стійким за Ляпуновим (теорема 2.17).

Оскільки $yg(y) > 0$, $y \in (-b, 0) \cup (0, b)$, то

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = 0$$

лише у випадку, коли $y = 0$. В області

$$\mathcal{D}_H = \{(x, y): x^2 + y^2 < H\},$$

де $H = \min\{b, 2\pi\}$, тільки тривіальний розв'язок $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $t \geq 0$, є таким, що

$$\frac{dV\big(x(t), y(t)\big)}{dt} = -y(t)g\big(y(t)\big) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Це перевіряється безпосередньо підстановкою $y(t) = 0$ в систему, у результаті одержуємо $x(t) = 0$ в $\mathcal{D}_H$. Отже множина

$$\mathcal{E}_H = \left\{x \in \mathcal{D}_H: \frac{dV(x, y)}{dt} = 0\right\}$$

містить цілком лише нульовий розв'язок системи. За наслідком із теореми 4.4 розв'язок $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $t \geq 0$, є асимптотично стійким за Ляпуновим.

Властивості компактності й інваріантності ω-граничних множин застосовують у дослідженні на асимптотичну стійкість і нестійкість нульового положення рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь у теоремах Барбашина – Красовського. Припустимо, що для правої частини системи (4.1) справджується умова $f(0) = 0$. Позначимо

$$\mathcal{D}_H = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| < H\} \subset \mathcal{D}, \qquad H > 0.$$

Теорема 4.5 (Барбашина – Красовського про асимптотичну стійкість). *Нехай знайдеться неперервно диференційована в* $\mathcal{D}_H$ *функція* $V(x)$, *яка додатно визначена, і повна похідна від якої в силу системи* (4.1) *має такі властивості:*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} < 0, \qquad x \in \mathcal{D}_H, \qquad x \notin \mathcal{M};$$

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \le 0, \qquad x \in \mathcal{M},$$

де множина $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}_H$ *не містить додатних півтраєкторій системи* (4.1), *крім точки* $x = 0$. *Тоді незбурений розв'язок* $x(t) = 0$, $t \ge 0$, *асимптотично стійкий за Ляпуновим.*

Доведення. В області $\mathcal{D}_H$ виконуються умови теореми Ляпунова про стійкість (теорема 2.17). Отже, розв'язок $x(t) = 0$, $t \ge 0$, системи (4.1) є стійким за Ляпуновим. Це означає, що для $\varepsilon \in (0, H)$ знайдеться $\delta \in (0, \varepsilon)$, для якого справджується $x(t, x_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(0)$ як тільки $x_0 \in \mathcal{K}_\delta(0)$, $t \ge 0$. З теореми 4.1 доходимо висновку, що яку ми точку $x_0 \in \mathcal{K}_\delta(0)$ не взяли б, відповідна їй ω-гранична множина $\Omega(x_0)$ розв'язку $x(t, x_0)$ системи (4.1) є непорожньою, компактною, інваріантною і міститься в $\mathcal{K}_\varepsilon(0)$.

Оскільки $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \le 0$, $x \in \mathcal{D}_H$, то функція $V\big(x(t, x_0)\big)$ не зростає при $t \ge 0$. Також ця функція обмежена знизу. Це слідує з того, що $x(t, x_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(0)$, $t \ge 0$, і неперервна функція $V(x)$ обмежена на компакті $\mathcal{K}_\varepsilon(0)$. Тому існує

$$\lim_{t \to +\infty} V\big(x(t, x_0)\big) = V_*.$$

Виберемо довільну точку $y_0 \in \Omega(x_0)$. За означенням 4.1 знайдеться послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$ така, що

$$\lim_{k \to \infty} x(t_k, x_0) = y_0.$$

Оскільки функція $V(x)$ є неперервною, то

$$\lim_{k \to \infty} V\big(x(t_k, x_0)\big) = V(y_0) = V_*.$$

Це означає, що для всіх $y_0 \in \Omega(x_0)$ маємо $V(y_0) = V_*$, тобто

$$\Omega(x_0) \subseteq \{x \in \mathcal{D}_H : V(x) = V_*\}.$$

Отже, функція $V(x)$ є сталою на множині $\Omega(x_0)$. Тоді $x(t, y_0) \in \Omega(x_0)$, $V\big(x(t, y_0)\big) = V_*$ і, як наслідок,

$$\frac{dV\big(x(t, y_0)\big)}{dt} = 0, \qquad t \geq 0.$$

Тому

$$x(t, y_0) \in \left\{ x \in \mathcal{D}_H : \left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(4.1)} = 0 \right\} \subset \mathcal{M}, \qquad t \geq 0.$$

З умов теореми випливає, що множина $\mathcal{M}$ не містить додатних півтраєкторій системи (4.1), крім точки $x = 0$. Робимо висновок, що $y_0 = 0$ і $x(t, y_0) = 0$, $t \geq 0$. Оскільки y_0 є довільною точкою множини $\Omega(x_0)$, то це означає, що $\Omega(x_0)$ складається лише з точки 0.

Врахуємо, що $\Omega(x_0)$ є атрактором розв'язку $x(t, x_0) = 0$, $t \geq 0$ (теорема 4.3), тоді

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), \Omega(x_0)) = \lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0$$

для всіх $x_0 \in \mathcal{K}_\delta(0)$. У такий спосіб ми показали, що нульовий розв'язок системи (4.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим.

■

Теорему 4.5 можна узагальнити на випадок глобальної асимптотичної стійкості. Для цього вважатимемо, що права частина системи (4.1) є локально ліпшицевою на всьому $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.6 (Барбашина – Красовського про глобальну асимптотичну стійкість). *Нехай існує неперервно диференційована в $\mathbb{R}^n$ додатно визначена функція $V(x)$, яка є радіально необмеженою і такою, що:*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(4.1)} < 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad x \notin \mathcal{M};$$

$$\left(\frac{dV(x)}{dt} \right)_{(4.1)} \leq 0, \qquad x \in \mathcal{M},$$

де множина $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ не містить додатних півтраєкторій системи (4.1), *крім точки $x = 0$. Тоді незбурений розв'язок $x(t) = 0$, $t \geq 0$, є глобально асимптотично стійким.*

Доведення. Умови теореми 4.6 є такими, що охоплюють умови теореми Ляпунова про стійкість (теорема 2.17). Тому можна стверджувати, що нульовий розв'язок системи (4.1) стійкий.

Виберемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$. З умов теореми 4.6 випливає, що $V\big(x(t, x_0)\big)$ не зростає, $t \geq 0$, тому

$$V\big(x(t, x_0)\big) \leq V(x_0) = V_0, \qquad t \geq 0.$$

Оскільки функція $V(x)$ радіально необмежена, то множина

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V_0\}$$

є компактом, який містить $x(t, x_0)$, $t \geq 0$ (теорема 2.28, доведення). За умовами теореми $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} \leq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, тому функція $V\big(x(t, x_0)\big)$ не зростає, $t \geq 0$. Неперервна функція $V(x)$ на компакті $\mathcal{C}$ є обмеженою знизу, $x(t, x_0) \in \mathcal{C}$, $t \geq 0$. Як наслідок, $V\big(x(t, x_0)\big)$ є обмеженою знизу, $t \geq 0$ й існує

$$\lim_{t \to +\infty} V\big(x(t, x_0)\big) = V_*.$$

З теореми 4.1 випливає, що ω-гранична множина $\Omega(x_0)$ розв'язку $x(t, x_0)$ є непорожньою, компактною, інваріантною і лежить в $\mathcal{C}$. Візьмемо довільну точку $y_0 \in \Omega(x_0)$. За означенням 4.1 знайдеться послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$, $\lim_{k \to \infty} t_k = +\infty$ така, що

$$\lim_{k \to \infty} x(t_k, x_0) = y_0.$$

Якщо врахувати, що функція $V(x)$ є неперервною, то

$$\lim_{k \to \infty} V\big(x(t_k, x_0)\big) = V(y_0) = V_*.$$

Отже, функція $V(x)$ є сталою на множині $\Omega(x_0)$, ще й більш того

$$\Omega(x_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n :\ V(x) = V_*\}.$$

Оскільки з теореми 4.1 слідує $x(t, y_0) \in \Omega(x_0)$, $t \geq 0$, то $V\big(x(t, y_0)\big) = V_*$ і

$$\frac{dV\big(x(t, y_0)\big)}{dt} = 0, \qquad t \geq 0.$$

Але за умовами теореми множина

$$\mathcal{M}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} = 0\right\}$$

належить множині $\mathcal{M}$, яка не містить додатних півтраєкторій системи (4.1), крім точки $x = 0$. З того, що $x(t, y_0) \in \mathcal{M}_0$, $t \geq 0$, доходимо висновку, що $x(t, y_0) = 0$, $t \geq 0$, $V_* = 0$, і множина $\Omega(x_0)$ складається лише з точки 0.

З огляду на те, що $\Omega(x_0)$ є атрактором розв'язку $x(t, x_0) = 0$, $t \geq 0$ (теорема 4.3), маємо

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(x(t, x_0), \Omega(x_0)) = \lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0.$$

Оскільки точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ є довільною, то це означає, що нульовий розв'язок системи (4.1) є глобально асимптотично стійким.

■

Приклад 4.4. Проведемо дослідження на стійкість нульового розв'язку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3. \end{cases}$$

Виберемо функцію

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2.$$

Така функція є додатно визначеною. Похідна за змінною t в силу системи

$$\frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = 4x_1^3 x_2 + 4x_2(-x_2 - x_1^3) = -4x_2^2 \leq 0.$$

Рівність нулеві $\frac{dV(x_1,x_2)}{dt}$ досягається на прямій

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2) \colon x_2 = 0\}.$$

На цій множині маємо $\dot{x}_2 = -x_1^3 \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Тому всі розв'язки, які проходять через точки множини $\mathcal{M}$, крім нульового розв'язку, покидають цю множину. Отже, ми знайшли додатно визначену функцію $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ таку, що

$$\frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = -4x_2^2 < 0, \qquad x \notin \mathcal{M}; \qquad \frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = 0, \qquad x \in \mathcal{M}.$$

Зауважимо, що множина $\mathcal{M}$ не містить додатних півтраєкторій, окрім початку координат. За теоремою 4.5 нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким за Ляпуновим. Оскільки функція $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ є радіально необмеженою, то, базуючись на теоремі 4.6, можна стверджувати, що нульовий розв'язок глобально асимптотично стійкий.

Теорема 4.7 (Барбашина – Красовського про нестійкість). *Нехай для системи диференціальних рівнянь* (4.1) *знайдеться неперервно диференційована в* $\mathcal{D}_H$ *функція* $V(x)$ *така, що* $V(0)=0$, *та в будь-якому околі* $\mathcal{U}(0)\subset\mathcal{D}_H$ *початку координат існує точка* $x_0\in\mathcal{U}(0)$ *така, що* $V(x_0)>0$, *і*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)}>0,\qquad x\in\mathcal{D}_H,\qquad x\notin\mathcal{M};$$

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)}\geq 0,\qquad x\in\mathcal{M}\subset\mathcal{D}_H,$$

де $\mathcal{M}\subset\mathcal{D}_H$ *– множина, яка не містить додатних півтраєкторій системи* (4.1), *крім точки* $x=0$. *Тоді незбурений розв'язок* $x(t)=0,\ t\geq 0$, *системи* (4.1) *є нестійким*.

Доведення. Виберемо $\varepsilon>0$ так, щоб $\mathcal{U}_\varepsilon(0)\subset\mathcal{D}_H$. В $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$ виконуються умови теореми 4.7. Візьмемо довільне $\delta\in(0,\varepsilon)$. Покажемо, що знайдеться така точка $x_0\in\mathcal{U}_\delta(0)$, що відповідний їй розв'язок $x(t,x_0)$ покине $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$. Тобто, знайдеться таке $t>0$, для якого $x(t,x_0)\notin\mathcal{U}_\varepsilon(0)$. Це означатиме, що розв'язок $x(t)=0,\ t\geq 0$, системи (4.1) є нестійким.

Зважаючи на умови теореми, виберемо точку $x_0\in\mathcal{U}_\delta(0)$ таку, що $V(x_0)=V_0>0$. Оскільки $V(x)$ є неперервною, $V(0)=0$, то знайдеться таке $\delta>0$, що $|V(x)|<V_0$ як тільки $\|x\|<\delta$. Це означає, що

$$\mathcal{U}_\delta(0)\subseteq\{x\in\mathcal{U}_\varepsilon(0):|V(x)|<V_0\}.$$

Через те, що $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)}$ є додатно сталою, $x\in\mathcal{D}_H$, то

$$V\big(x(t,x_0)\big)\geq V_0,\qquad t\geq 0.$$

Тому $x(t,x_0)\notin\mathcal{U}_\delta(0),\ t\geq 0$.

Припустимо, від супротивного, що

$$x(t,x_0)\in\mathcal{U}_\varepsilon(0),\qquad t\geq 0.$$

Тоді

$$x(t,x_0)\in\mathcal{C},\qquad t\geq 0,\qquad \mathcal{C}=\mathcal{K}_\varepsilon(0)\backslash\mathcal{U}_\delta(0).$$

Множина $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_H$ є компактом.

За умовами теореми $\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)}$ є додатно сталою, $x \in \mathcal{D}_H$. Як наслідок, функція $V\big(x(t, x_0)\big)$ не спадає, $t \geq 0$. Ця функція обмежена зверху числом

$$m = \max_{x \in \mathcal{C}} V(x).$$

Тому існує

$$\lim_{t \to +\infty} V\big(x(t, x_0)\big) = V_*.$$

Оскільки множина $\mathcal{C} = \mathcal{K}_\varepsilon(0) \backslash \mathcal{U}_\sigma(0)$ є компактом, $x(t, x_0) \in \mathcal{C}$, $t \geq 0$, то ω-гранична множина $\Omega(x_0) \subset \mathcal{C}$ є непорожньою, замкненою, обмеженою та інваріантною (теорема 4.1). Помітимо, що з $\Omega(x_0) \subset \mathcal{C}$ випливає $0 \notin \Omega(x_0)$.

Виберемо довільну точку $y_0 \in \Omega(x_0)$. Тоді $x(t, y_0) \in \Omega(x_0)$, $t \geq 0$. Оскільки $y_0 \in \Omega(x_0)$, то за означенням 4.1 знайдеться послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \ldots$, $\lim_{k \to \infty} t_k = +\infty$ така, що

$$\lim_{k \to \infty} x(t_k, x_0) = y_0.$$

Через те, що функція $V(x)$ є неперервною, то

$$\lim_{k \to \infty} V\big(x(t_k, x_0)\big) = V(y_0) = V_*.$$

Отже,

$$\Omega(x_0) \subseteq \{x \in \mathcal{D}_H : V(x) = V_*\}.$$

Тоді з $x(t, y_0) \in \Omega(x_0)$, $t \geq 0$, випливає $V\big(x(t, y_0)\big) = V_*$ і, як наслідок,

$$\frac{dV\big(x(t, y_0)\big)}{dt} = 0, \qquad t \geq 0.$$

Робимо висновок, що

$$x(t, y_0) \in \left\{x \in \mathcal{D}_H : \left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} = 0\right\} \subset \mathcal{M}, \qquad t \geq 0.$$

За умовами теореми множина $\mathcal{M}$ не містить додатних півтраєкторій системи (4.1), крім 0. Тому $x(t, y_0) = 0,\ t \geq 0$, $V_* = 0$ і множина $\Omega(x_0)$ складється лише з точки 0. Але $\Omega(x_0) \subset \mathcal{C}$, тому $0 \notin \Omega(x_0)$. Одержали протиріччя, яке показує, що умова

$$x(t, x_0) \in \mathcal{U}_\varepsilon(0), \qquad t \geq 0,$$

не справджується і знайдеться $t > 0$, для якого $x(t, x_0) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(0)$.

■

Приклад 4.5. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3. \end{cases}$$

Виберемо функцію

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2.$$

Така функція є додатно визначеною. Похідна за змінною t в силу системи

$$\frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = 4x_1^3 x_2 + 4x_2(x_2 - x_1^3) = 4x_2^2 \geq 0.$$

Рівність нулеві $\frac{dV(x_1,x_2)}{dt}$ справджується на прямій

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}.$$

На цій множині маємо $\dot{x}_2 = -x_1^3 \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Тому всі розв'язки, які проходять через точки множини $\mathcal{M}$, крім нульового розв'язку, покидають цю множину. Отже, ми знайшли функцію $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$ і множину $\mathcal{M}$, яка не містить додатних півтраєкторій системи, які забезпечують виконання умов теореми 4.7. Тому нульовий розв'язок системи є нестійким.

4.3. Граничні цикли. Теорема Пуанкаре – Бендіксона

Проаналізуємо структуру граничних множин на прямій і у площині. При $n = 1$ автономна система (4.1) є скалярним диференціальним рівнянням, фазовий простір якого становить дійсну вісь $\mathbb{R}$. Нулям правої частини диференціального рівняння відповідають положення рівноваги. Інші траєкторії є інтервалами в $\mathbb{R}$, скінченні межі яких є станами рівноваги. Граничних множин, які відмінні від положення рівноваги, немає.

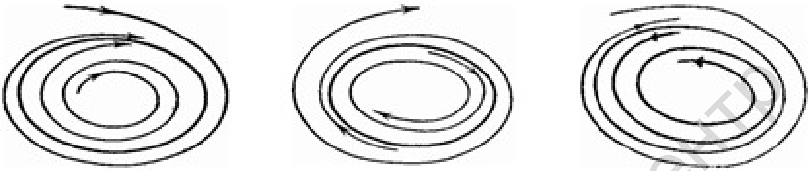


Рис. 4.2. Граничні цикли

На площині при $n = 2$ граничні множини можуть мати складнішу структуру, наприклад, бути замкненими траєкторіями, відмінними від положень рівноваги. Усі замкнені траєкторії, або *цикли*, можна розбити на два класи. Перший клас є множиною замкнених траєкторій, які вкладені одна в одну і заповнюють деяку область. Прикладом таких траєкторій є окіл точки рівноваги типу *центр*. Другий клас складається з окремої замкненої траєкторії, до якої всі близькі траєкторії наближаються, якщо $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$. Такі замкнені траєкторії називають *граничними циклами* (рис. 4.2, 4.3) [6, 7].

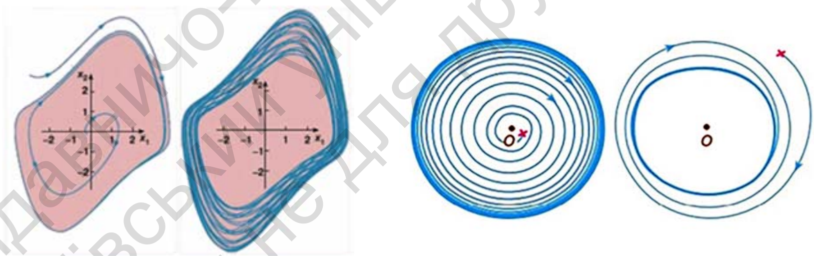


Рис. 4.3. Ілюстрація граничного циклу

Граничні цикли, до яких всі близькі траєкторії наближаються при $t \to +\infty$, називають *стійкими*. Якщо всі близькі траєкторії наближаються до граничного циклу при $t \to -\infty$, то граничний цикл називають *нестійким*.

Граничний цикл може бути *напівстійким*. У цьому випадку з одного боку близькі траєкторії наближаються до граничного циклу при $t \to +\infty$, а з іншого боку – при $t \to -\infty$.

Розглянемо на площині автономну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{4.2}$$

де $x = (x_1, x_2)^T$ – вектор стану, функції $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ визначені в області $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ і задовольняють у ній локальну умову Ліпшиця.

Теорема 4.8 (Пуанкаре – Бендіксона). *Нехай функції* $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ *мають в обмеженій області* $\mathcal{D}$ *неперервні частинні похідні першого порядку, всі точки рівноваги системи* (4.2) *є ізольованими, і додатна півтраєкторія системи* (4.2) *належить області* $\mathcal{D}$. *Тоді* ω-*гранична множина відповідного розв'язку системи* (4.2) *може мати один із трьох видів*:

1) *точка рівноваги*;

2) *цикл*;

3) *об'єднання точок рівноваги і траєкторій, кожна з яких прямує при* $t \to +\infty$ *до однієї точки рівноваги, а при* $t \to -\infty$ *– до іншої або тієї самої точки рівноваги*.

У п. 3 теореми 4.8 ідеться про представлення ω-граничної множини розв'язку $x(t, x_0)$ системи (4.2) у вигляді зв'язного об'єднання точок рівноваги, *гомоклінічних* і *гетероклінічних* траєкторій до цих точок рівноваги (рис. 4.4) [6]. Траєкторію

$$\Gamma(x_0) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} x(t, x_0)$$

системи (4.2) називають *гетероклінічною* до точок рівноваги $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ цієї системи, якщо $x^{(1)} \neq x^{(2)}$,

$$\lim_{t \to -\infty} x(t, x_0) = x^{(1)}, \qquad \lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = x^{(2)}.$$

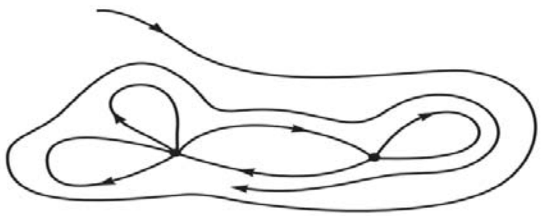


Рис. 4.4. Ілюстрація поведінки траєкторій згідно з п. 3 теореми 4.8

Траєкторію $\Gamma(x_0)$ системи (4.2) називають *гомоклінічною* до точки рівноваги $x^{(1)}$ цієї системи, якщо

$$\lim_{t\to-\infty} x(t,x_0) = x^{(1)}, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t,x_0) = x^{(1)}.$$

Приклад 4.6. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' &= x\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)-y,\\ y' &= y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)+x. \end{cases}$$

Проаналізуємо цю систему в полярній системі координат. Для цього виконаємо перетворення

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r \geq 0,$$
$$\varphi \in [\pi m, \pi(m+1)], \qquad m = 0,1,\ldots.$$

Тоді

$$\begin{cases} x' &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi',\\ y' &= r'\sin\varphi - r\cos\varphi\cdot\varphi'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi' &= r\cos\varphi(r-1)(r-2) - r\sin\varphi,\\ r'\sin\varphi - r\cos\varphi\cdot\varphi' &= \sin\varphi(r-1)(r-2) - r\cos\varphi. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно r', φ'. Для цього застосуємо метод Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} r\cos\varphi(r-1)(r-2) - r\sin\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi(r-1)(r-2) - r\cos\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$
$$= r^2(r-1)(r-2),$$

Якщо $r \in (0,1)$, то $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ і розв'язок $r(\varphi)$ монотонно зростає при $\varphi \to +\infty$. Якщо $r \in (1,2)$, то $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ і розв'язок $r(\varphi)$ монотонно спадає при $\varphi \to +\infty$. Оскільки $\varphi' = 1$, то $\varphi(t) = \varphi(0) + t$, і $\varphi \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли $t \to +\infty$.

Отже, коло $r = 1$ є стійким граничним циклом ($x^2 + y^2 = 1$ в системі координат xOy). Розглянемо ще одну замкнену траєкторію $r(\varphi) = 2$. При $r \in (1,2)$, маємо $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, а при $r > 0$ – одержуємо $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. Отже, в околі траєкторії $r(\varphi) = 2$ ($x^2 + y^2 = 2$ в системі координат xOy) траєкторії системи віддаляються від траєкторії $r(\varphi) = 2$, яка є нестійким граничним циклом.

Приклад 4.7. Нехай маємо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Запишемо матрицю системи першого наближення в точці рівноваги (0,0). Вона має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриці A. Для цього обчислимо корені характеристичного полінома

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^2 + 1 = 0.$$

Звідси

$$\lambda_1 = 1 - i, \;\; \lambda_2 = 1 + i$$

є власними числами матриці A, $i^2 = -1$. Оскільки $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 1 > 0$, то (0,0) є нестійким положенням рівноваги системи, яка розглядається в прикладі.

Перейдемо до полярних координат

$$x(t) = r\cos\varphi(t)\,,$$
$$y(t) = r\sin\varphi(t)\,,$$

$$r \geq 0, \qquad \varphi \in [\pi m, \pi(m+1)], \;\; m = 0, 1, \dots .$$

є власними числами матриці A, $i^2 = -1$. Оскільки $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 1 > 0$, то $(0{,}0)$ є нестійким положенням рівноваги системи, яка розглядається в прикладі.

Перейдемо до полярних координат

$$x(t) = r\cos\varphi(t),$$
$$y(t) = r\sin\varphi(t),$$
$$r \geq 0, \qquad \varphi \in [\pi m, \pi(m+1)], \;\; m = 0, 1, \ldots .$$

Зробимо відповідну підстановку в систему й одержимо

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -r\sin\varphi - r\cos\varphi\,(r^2-1), \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = r\cos\varphi - r\sin\varphi\,(r^2-1). \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему відносно $\dot{r}$ і $\dot{\varphi}$. Остаточно матимемо

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$r(t) = 1 - \left(\frac{r_0^2 - 1}{r_0^2 e^{2t}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + t,$$

де $r_0 = r(0)$, $\varphi_0 = \varphi(0)$. Якщо $r_0 = 1$, то $r(t) = 1$, $t \geq 0$.

Якщо $r_0 > 1$, $r_0 \neq 1$, то справджується картина, представлена на (рис. 4.5):

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = 1.$$

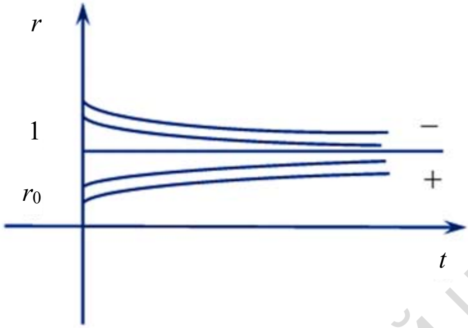


Рис. 4.5. Характеристика стійкості точки $r = 1$ прикладу 4.7

Отже, система має граничний цикл

$$\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\},$$

який відповідає періодичному розв'язку

$$x = \cos t\,, \qquad y = \sin t\,, \qquad t \geq 0.$$

Такий граничний цикл стійкий і є атрактором траєкторій системи (рис. 4.6).

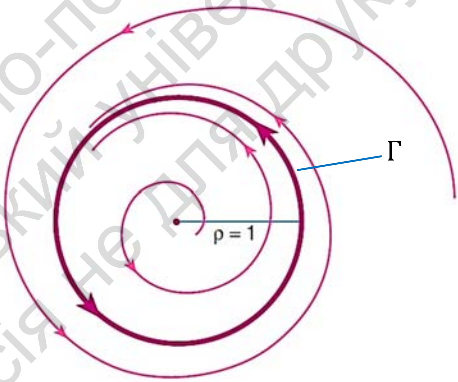


Рис. 4.6. Атрактор із прикладу 4.7

4.4. Система Лоренца

В $\mathbb{R}^3$ структура граничних множин може бути набагато складнішою, ніж на площині.

Розглянемо систему Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \tag{4.3}$$

де σ, r, b — додатні параметри, $\sigma > b + 1$. Лоренц досліджував систему (4.3) методами комп'ютерного моделювання при $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$. Він показав, що траєкторії системи (4.3) притягуються до деякої множини, структура якої суттєво відрізняється від структури граничних множин на площині. Така множина називається *атрактором Лоренца*.

Для системи (4.3) фазовим простором є $\mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)^T$ є вектором фазових координат. Система (4.3) автономна. За перетворення

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$$

система Лоренца (4.3) переходить сама в себе.

Дивергенція правої частини системи (4.3) є від'ємною

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\sigma x + \sigma y) + \frac{\partial}{\partial y}(rx - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-bz + xy) =$$
$$= -\sigma - 1 - b < 0.$$

З теореми 1.21 випливає, що в системі Лоренца міра фазового потоку зменшується, фазовий потік стискається.

Права частина системи (4.3) є квадратичною і тому локально ліпшицевою в $\mathbb{R}^3$ вектор-функцією. Отже, ми можемо дійти висновку, що система (4.3) задовольняє умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші (теорема 1.8). Тому для довільного $u_0 \in \mathbb{R}^3$ розв'язок $u(t, u_0)$ системи (4.3), який відповідає умові Коші $u(0) = u_0$, існує щонайменше на деякому відрізку $t \in [-d, d]$, $d > 0$. Покажемо, що цей розв'язок можна продовжити праворуч для всіх $t \geq 0$ при $b > 1$.

Виконаємо заміну змінних

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1 + r + \sigma, \qquad u_{(1)} = (x_1, y_1, z_1)^T.$$

Тоді з (4.3) маємо

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma y_1, \\ \dot{y}_1 = r x_1 - y_1 - x_1(z_1 + r + \sigma), \\ \dot{z}_1 = -b(z_1 - r - \sigma) + x_1 y_1. \end{cases}$$

Звідси випливає

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \sigma x_1 - \sigma y_1 = 0, \\ \dot{y}_1 + \sigma x_1 + y_1 + x_1 z_1 = 0, \\ \dot{z}_1 + b z_1 - x_1 y_1 = -b(r + \sigma). \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння останньої системи на x_1, друге рівняння – на y_1, третє рівняння – на z_1 і додамо. Як результат одержуємо

$$x_1\dot{x}_1 + \sigma x_1^2 - \sigma x_1 y_1 + y_1 \dot{y}_1 + \sigma x_1 y_1 + y_1^2 + x_1 y_1 z_1 + z_1 \dot{z}_1 +$$
$$+ b z_1^2 - x_1 y_1 z_1 = -b(r + \sigma) z_1.$$

Звідси

$$x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 + z_1\dot{z}_1 + \sigma x_1^2 + y_1^2 + b z_1^2 = -b(r + \sigma) z_1.$$

Помітимо, що

$$x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 + z_1\dot{z}_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2,$$
$$u_{(1)} = (x_1, y_1, z_1)^T.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2 + \sigma x_1^2 + y_1^2 + b z_1^2 = -b(r + \sigma) z_1.$$

Далі застосовуємо нерівність

$$pq \le c^2 p^2 + \frac{q^2}{4c^2}$$

для довільних дійсних p, q, $c \ne 0$. Нерівність справджується, тому що

$$\left(cp - \frac{q}{2c}\right)^2 = c^2 p^2 + \frac{q^2}{4c^2} - pq \ge 0.$$

Звідси

$$pq \le c^2 p^2 + \frac{q^2}{4c^2}.$$

Покладемо

$$c^2 = b - 1, \qquad p = z_1, \qquad q = -b(r + \sigma), \qquad b > 1.$$

Одержимо

$$-b(r+\sigma)z_1 \leq (b-1)z_1^2 + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2 + \sigma x_1^2 + y_1^2 + bz_1^2 \leq (b-1)z_1^2 + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}.$$

Звідси, зводячи доданки при z_1^2, маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2 + \sigma x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}.$$

Якщо вибрати $m = \min\{\sigma, 1\}$, то

$$\sigma x_1^2 \geq m x_1^2, \qquad y_1^2 \geq m y_1^2, \qquad z_1^2 \geq m z_1^2$$

і тому

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2 + m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \leq \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}.$$

Помножимо ліву і праву частину на $2e^{2mt}$. Одержимо

$$\frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2mt} + 2m\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2mt} \leq \frac{b^2(r+\sigma)^2}{2(b-1)} \cdot e^{2mt}.$$

Враховуємо, що

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2mt}\right) = \frac{d}{dt}\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2mt} + 2m\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2mt}.$$

Тоді

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2mt}\right) \leq \frac{b^2(r+\sigma)^2}{2(b-1)} \cdot e^{2mt}.$$

Інтегруємо останню нерівність

$$\left\|u_{(1)}(t)\right\|^2 \cdot e^{2mt} - \left\|u_{(1)}(0)\right\|^2 = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\left\|u_{(1)}\right\|^2 \cdot e^{2ms}\right) ds \le$$

$$\le \int_0^t \frac{b^2(r+\sigma)^2}{2(b-1)} \cdot e^{2ms} ds.$$

У такий спосіб ми показали, що

$$\left\|u_{(1)}(t)\right\|^2 \cdot e^{2mt} \le \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4m(b-1)}\left(e^{2mt}-1\right) + \left\|u_{(1)}(0)\right\|^2.$$

Помножимо ліву і праву частини нерівності на e^{-2mt}:

$$\left\|u_{(1)}(t)\right\|^2 \le e^{-2mt}\left\|u_{(1)}(0)\right\|^2 + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4m(b-1)}\left(1-e^{2mt}\right). \quad (4.4)$$

Оскільки $t \ge 0$, то

$$\left\|u_{(1)}(t)\right\|^2 \le \left\|u_{(1)}(0)\right\|^2 + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4m(b-1)}.$$

За теоремою 1.2 розв'язок $u_{(1)}(t)$ можна продовжити праворуч до границі компакта

$$\mathcal{K} = \left\{\left(t, u_{(1)}\right): t \in [-T, T], \left\|u_{(1)}\right\| \le R + 1\right\},$$

де

$$R = \left\|u_{(1)}(0)\right\|^2 + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4m(b-1)}, \qquad T > 0.$$

Враховуючи, що $\left\|u_{(1)}(t)\right\| \le R$, $t \ge 0$, розв'язок $u_{(1)}(t)$ існує на відрізку $[0, T]$ для довільного $T > 0$. Отже, розв'язок $u_{(1)}(t)$ можна продовжити праворуч на всю додатну піввісь $t \in [0, +\infty)$. З урахуванням заміни змінних це означає, що розв'язок $u(t, u_0)$ системи (4.3) можна продовжити праворуч на всю додатну піввісь для довільної початкової умови $u(0) = u_0$.

Проведемо аналіз стійкості положення рівноваги системи Лоренца (4.3). Для знаходження точок рівноваги запишемо систему

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0, \\ rx - y - xz = 0, \\ -bz + xy = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи одержуємо $x = y$. Якщо $x = 0$, то $y = 0$ і з третього рівняння системи маємо $z = 0$. Отже, точка $E_0 = (0,0,0)^T$ є положенням рівноваги системи Лоренца (4.3).

Нехай $x \neq 0$. Підставимо у третє рівняння $y = x$ і знайдемо $z = x^2/b$. Підставляючи $y = x$, $z = x^2/b$ у друге рівняння, одержуємо

$$x\left(r - 1 - \frac{x^2}{b}\right) = 0.$$

Звідси

$$x^2 = b(r-1).$$

Якщо $r \in (0,1]$, то маємо лише одну точку рівноваги $E_0 = (0,0,0)^T$. Якщо $r > 1$, то дістаємо три точки рівноваги

$$E_0 = (0,0,0)^T, \qquad E_1 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)^T,$$
$$E_2 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right).$$

Для дослідження точок рівноваги на стійкість застосовуємо метод першого наближення. Матриця Якобі системи Лоренца (4.3) має вигляд

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Для $r \in (0,1]$ маємо одне положення рівноваги $E_0 = (0,0,0)^T$. Матриця Якобі системи Лоренца, яка відповідає цьому положенню рівноваги, має вигляд

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння матриці $J(E_0)$:

$$P_0(\lambda) = (b + \lambda)\big((\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - r\sigma\big) = 0.$$

Перший корінь характеристичного рівняння $\lambda_1 = -b < 0$. Інші корені знаходимо з квадратного рівняння

$$(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - r\sigma = 0.$$

Подамо його як

$$\lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + \sigma(1-r) = 0.$$

За критерієм Гурвіца корені цього рівняння мають від'ємні дійсні частини за умови

$$1+\sigma > 0, \qquad \sigma(1-r) > 0.$$

Дійшли висновку, що при $r \in (0,1)$ нульове положення рівноваги E_0 є асимптотично стійким. У цьому випадку можна довести, що всі траєкторії системи Лоренца прямують до нуля при $t \to +\infty$, тобто виконується глобальна асимптотична стійкість нульового положення рівноваги системи (4.3). Це означає, що для довільної точки $u_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ її ω-гранична множина буде така:

$$\Omega(u_0) = \{(0,0,0)^T\}.$$

При $r = 1$ маємо критичний випадок, оскільки тоді один із коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю.

У випадку $r > 1$ маємо три точки рівноваги системи Лоренца:

$$E_0 = (0,0,0)^T, \qquad E_1 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)^T,$$
$$E_2 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right)^T.$$

Аналіз матриці Якобі системи (4.3) в точці E_0 показує, що її характеристичний поліном

$$P_0(\lambda) = (b+\lambda)\big((\sigma+\lambda)(1+\lambda) - r\sigma\big)$$

має дійсний додатний корінь

$$\lambda = -\sigma_0\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma(1-r)},$$

де

$$\sigma_0 = \frac{1+\sigma}{2}.$$

Це означає, що точка E_0 є нестійким положенням рівноваги.

У точці

$$E_1 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)^T$$

матриця Якобі має вигляд

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -c \\ c & c & -b \end{pmatrix},$$

де $c = -\sqrt{b(r-1)}$. Запишемо характеристичне рівняння цієї матриці

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + (b + \sigma + 1)\lambda^2 + (b + \sigma b + c^2)\lambda + 2\sigma c^2 = 0.$$

Оскільки $c^2 = b(r-1)$, характеристичне рівняння має вигляд

$$P_1(\lambda) = \lambda^3 + (b + \sigma + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0.$$

У цьому випадку матриця Гурвіца полінома $P_1(\lambda)$ записується так:

$$\begin{pmatrix} b+\sigma+1 & 1 & 0 \\ 2b\sigma(r-1) & b(\sigma+r) & b+\sigma+1 \\ 0 & 0 & 2b\sigma(r-1) \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами матриці Гурвіца є:

$$\Delta_1 = b + \sigma + 1, \qquad \Delta_2 = b\big((b + \sigma + 3)\sigma + r(b - \sigma + 1)\big),$$
$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot 2b\sigma(r-1).$$

Оскільки $b > 0$, $r > 1$, $\sigma > b + 1$, то за критерієм Гурвіца маємо умову асимптотичної стійкості точки рівноваги E_1:

$$1 < r < \frac{b + \sigma + 3}{\sigma - b - 1}\sigma.$$

Аналіз точки рівноваги

$$E_2 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r - 1\right)^T$$

проводять аналогічно. Для цього позначимо $c = \sqrt{b(r-1)}$. Оскільки $c^2 = b(r-1)$, то характеристичні рівняння у випадку точок E_1 і E_2 збігаються. Тому умова асимптотичної стійкості точки рівноваги E_2 є аналогічною до умови асимптотичної стійкості точки рівноваги E_1, а саме

$$r \in (1, r_0), \qquad r_0 = \frac{b + \sigma + 3}{\sigma - b - 1}\sigma.$$

Крім того, будь-який ненульовий розв'язок систем (4.3) прямує до однієї з точок E_1, E_2. Це означає, що при $r \in (1, r_0)$ для довільного $u_0 \in \mathbb{R}^3$, $u_0 \neq 0$. Тобто ω-гранична множина складається або з точки E_1 , або з точки E_2 і $\Omega(0) = \{(0,0,0)^T\}$.

При $r > r_0$ всі положення рівноваги системи Лоренца (4.3) нестійкі, причому, як показує комп'ютерне моделювання, гранична поведінка траєкторій системи (4.3) має складну структуру (рис. 4.7.). Виявляється, що всі траєкторії системи (4.3) є обмеженими на додатній часовій півосі і прагнуть до деякої компактної підмножини $\mathcal{A}$ фазового простору. Тобто, існує мінімальна компактна множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$ така, що для довільної початкової точки $u_0 \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(u(t, u_0), \mathcal{A}) = 0.$$

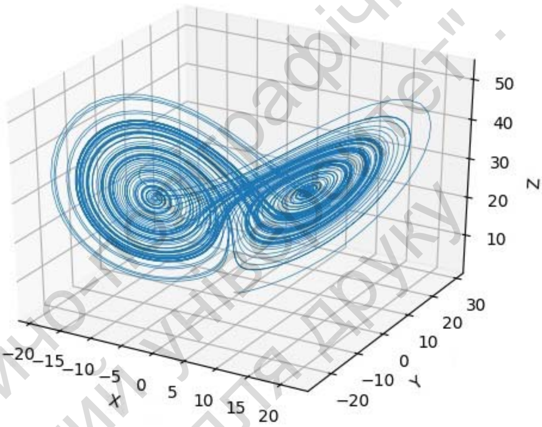


Рис. 4.7. Атрактор Лоренца для $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$

Множину $\mathcal{A}$ називають *атрактором*.

Проаналізуємо, які множини можуть відігравати роль атрактора траєкторії автономної системи (4.1). Першим кандидатом на цю роль є множина

$$\Lambda = \bigcup_{x\in\mathcal{D}} \Omega(x),$$

яку називають *точковим атрактором*. Ця множина справді охоплює всі граничні режими, наявні в системі. Проте така множина не є ні стійкою, ні зв'язною.

Означення 4.8. *Множину* $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ *називають стійкою щодо напівпотоку, породженого автономною системою* (4.1)*, якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що для довільної точки* $x_0 \in \mathcal{D}$ *такої, що* $\rho(x_0, \mathcal{A}) < \delta$, *маємо*

$$\rho(x(t, x_0), \mathcal{A}) < \varepsilon$$

для всіх $t \geq 0$.

Приклад 4.8. Точковий атрактор системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

є незв'язним і нестійким (приклад 4.7). Нульове положення рівноваги цієї системи нестійке. Тому

$$\Omega(0,0) = \{(0,0)\}.$$

У такій системі існує стійкий граничний цикл

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Це означає, що

$$\Omega(x_0, y_0) = \Gamma$$

для довільної ненульової точки (x_0, y_0). Отже, точковий атрактор системи має вигляд

$$\Lambda = \{(0,0)\} \cup \Gamma$$

і є незв'язним. Покажемо, що для Λ не справджується означення 4.8.

Зафіксуємо $\varepsilon = 1/4$ і виберемо довільне $\delta \in (0, \varepsilon)$, а також точку (x_0, y_0) такі, що

$$0 < x_0^2 + y_0^2 < \delta^2.$$

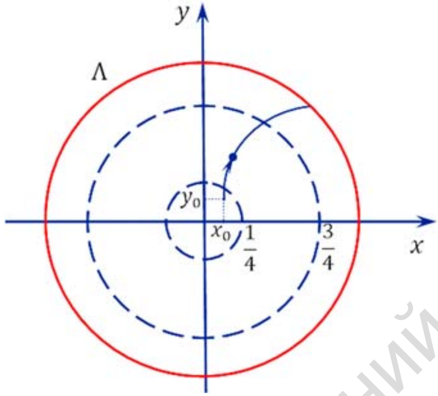


Рис. 4.8. Ілюстрація до прикладу 4.8

Оскільки Γ є стійким граничним циклом, то існує $t_1 > 0$, для якого розв'язок $x(t)$, $y(t)$ системи, який відповідає початковій умові $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ є таким, що

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 < x^2(t_1) + y^2(t_1) < \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Це означає, що

$$\rho\big((x_0, y_0), \Lambda\big) < \delta,$$

але при $t = t_1$ маємо

$$\rho\Big(\big(x(t_1), y(t_1)\big), \Lambda\Big) > \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Отже, точковий атрактор системи нестійкий (рис. 4.8).

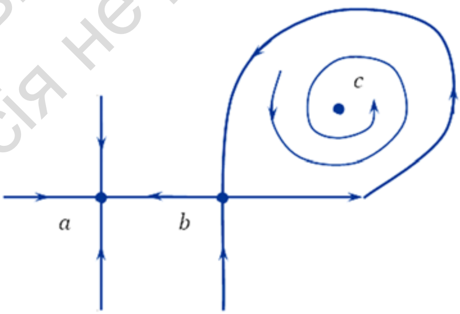


Рис. 4.9. Множина $\Lambda = \{a, b, c\}$

Можна показати, що множина Λ є нестійкою також щодо збурень параметрів системи. При малій зміні параметрів можливий сценарій народження періодичної орбіти з гомоклінічної траєкторії. Це явище може трактуватись як "вибух" множини Λ (рис. 4.8, 4.9).

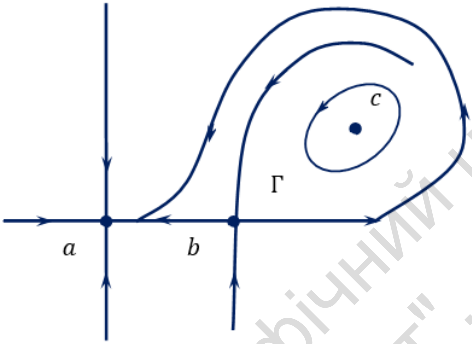


Рис. 4.10. Множина $\Lambda = \{a, b, c, \Gamma\}$

На рис. 4.9 зображено фазовий портрет автономної системи, на якому проілюстровано множину $\Lambda = \{a, b, c\}$. За малої зміни параметрів відбулась трансформація ("вибух") множини Λ. Це призвело до народження з гомоклінічної траєкторії періодичної орбіти Γ навколо точки c (рис. 4.10).

Для дисипативної системи, тобто, для системи, усі траєкторії якої в деякий момент часу потрапляють в обмежену множину $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}$ і залишаються в цій множині, точковий атрактор має вигляд

$$\Lambda = \bigcup_{x \in \mathcal{B}_0} \Omega(x).$$

Автономну систему (4.1) називають дисипативною, якщо знайдеться таке $R_0 > 0$, що для довільного $r_0 > 0$ існує момент часу $T = T(r_0) > 0$, що для всіх $x_0 \in \mathcal{D}$ таких, що $\|x_0\| \leq r_0$, справджується

$$\|x(t, x_0)\| \leq R_0$$

для всіх $t \geq T$. Роль множини, яка повністю характеризує граничну динаміку дисипативної системи, відіграє її ω-гранична множина

$$\Omega(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} x(t,\mathcal{B}_0)}$$

множини $\mathcal{B}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq R_0\}$.

Множина $\mathcal{A} = \Omega(\mathcal{B}_0)$ є компактною, інваріантною та рівномірно притягувальною, тобто для довільного $r > 0$ справджується

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{\|x_0\|<r} \rho(x(t,x_0),\mathcal{A}) = 0.$$

Множину $\mathcal{A} = \Omega(\mathcal{B}_0)$ називають *глобальним атрактором* системи (4.1). Глобальний атрактор дисипативної системи є зв'язним, стійким компактом.

Система диференціальних рівнянь, яка розглядалась у прикладах 4.7, 4.8, є дисипативною, її глобальний атрактор має вигляд

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Глобальний атрактор $\mathcal{A}$ є зв'язною, стійкою множиною, що не "вибухає" за малих збурень параметрів системи (рис. 4.11, 4.12).

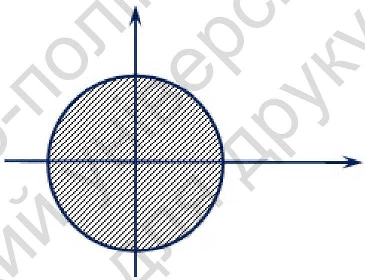


Рис. 4.11. Множина $\mathcal{A} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

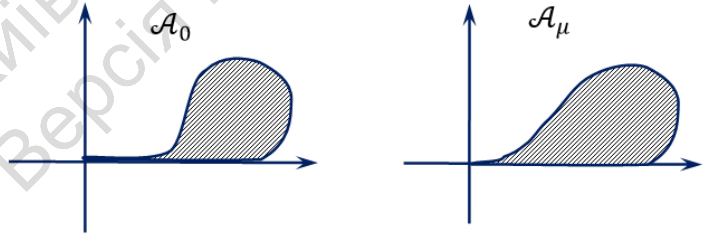


Рис. 4.12. Множина $\mathcal{A}$ при збуреннях

У випадку системи Лоренца (4.3) з формули (4.4) випливає, що для розв'язку $x(t), y(t), z(t)$ системи (4.3) справджується оцінка

$$x(t)^2 + y(t)^2 + (z(t) - r - \sigma)^2 \leq$$
$$\leq (x(0)^2 + y(0)^2 + (z(0) - r - \sigma)^2) \cdot e^{-2mt} +$$
$$+ \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4m(b-1)}(1 - e^{-2mt}), \qquad t \geq 0,$$

де $m = \min\{1, \sigma\}$, $b > 1$. Тоді для довільної початкової умови $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ такої, що

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leq r_0^2,$$

існує $T = T(r_0)$ таке, що при $t \geq T$ відповідний розв'язок системи (4.3) належить множині

$$\mathcal{B}_0 = \left\{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2 \leq 1 + \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4m(b-1)}\right\}.$$

Для цього $T > 0$ вибираємо з умови

$$\max_{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leq r_0^2} (x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - r - \sigma)^2) \cdot e^{-2mt} \leq 1.$$

Отже, система Лоренца є дисипативною і тому вона має глобальний атрактор.

Детальний аналіз глобальних атракторів виконано у підрозд. 4.5.

4.5. Глобальні атрактори дисипативних систем

Розглянемо автономну систему диференціальних рівнянь (4.1) із локально ліпшицевою правою частиною $f \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ – фазовий простір. Припустимо, що для будь-якої точки $x_0 \in \mathcal{X}$ на додатній півосі $[0, +\infty)$ існує розв'язок $x(t, x_0)$ системи (4.1). Тоді

$$x(t, x_0) = S(t)x_0, \qquad t \geq 0,$$

де $S(t) \colon \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$. Відображення $S(t)$ називають *розв'язуючим оператором*. Причому сім'я операторів

$$\{S(t)\}_{t \geq 0}$$

утворює неперервну напівгрупу. Це означає, що виконуються такі умови:

$$\begin{cases} 1. S(0) = I, \text{ де } I: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X} \text{ – тотожний оператор,} \\ 2. S(t+s) = S(t)S(s),\ t, s \geq 0 \text{ (властивість напівгрупи),} \\ 3. \text{відображення } (t, x) \to S(t)x \text{ є неперервним, } t \geq 0, x \in \mathcal{X}. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Наведені умови випливають з властивостей розв'язків автономної системи (теорема 1.27), зокрема остання умова – це наслідок теореми про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від початкових умов (теорема 1.12).

Слід зазначити, що вибір еволюційного об'єкта не відіграє визначної ролі. Основне полягає в тому, що система, яка описує динаміку об'єкта, є автономною, тобто розв'язок існує при $t \geq 0$ та справедлива неперервна залежність розв'язку системи від часової змінної і початкових умов.

Узагальнюючи наведені міркування, припустимо, що в ролі фазового простору виступає повний метричний простір $(\mathcal{X}, \rho)$, у цьому просторі задано сім'ю операторів

$$\{S(t): \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}\}_{t \geq 0},$$

для якої виконуються умови (4.5). У цьому випадку пару

$$(\mathcal{X}, \{S(t)\}_{t \geq 0})$$

називають *напівдинамічною системою*, сім'ю операторів

$$\{S(t): \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}\}_{t \geq 0}$$

називають *неперервною напівгрупою*. Далі неперервну напівгрупу позначатимемо $S(t)$.

Введемо кілька важливих понять і позначень, які ми використовуватимемо у цьому підрозділі:

- $\operatorname{dist}(x, \mathcal{A}) = \inf\limits_{y \in \mathcal{A}} \rho(x, y)$ – відстань від точки $x \in \mathcal{X}$ до множини $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$;
- $\operatorname{dist}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}) = \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} \inf\limits_{y \in \mathcal{A}} \rho(x, y)$ – відхилення множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ від $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$;

- $O_\delta(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{X} : \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}) < \delta\}$ – δ-окіл множини $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}, \delta > 0$;
- $S(t)\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} S(t)x.$

З властивості відхилення випливає, що $\mathrm{dist}\,(\mathcal{B}, \mathcal{A}) < \delta$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{B} \subset O_\delta(\mathcal{A})$. Причому для того, щоб $\mathrm{dist}\,(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$, необхідно і достатньо, щоб $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$.

Сукупність точок

$$\gamma^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)x$$

фазового простору $\mathcal{X}$ називають *траєкторією напівдинамічної системи* $(\mathcal{X}, \{S(t)\}_{t \geq 0})$, $x \in \mathcal{X}$.

Множину $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ називають *додатно інваріантною множиною*, якщо

$$S(t)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$$

для всіх $t \geq 0$. Якщо для довільного $t \geq 0$ справедлива рівність

$$S(t)\mathcal{K} = \mathcal{K},$$

то множину $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ називають *інваріантною*.

Точку $x_0 \in \mathcal{X}$ називають *нерухомою точкою* (*положенням рівноваги*) неперервної напівгрупи $S(t)$, якщо

$$S(t)x_0 = x_0$$

для всіх $t \geq 0$.

Для множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ її ω-*граничною множиною* називають сукупність $\Omega(\mathcal{B})$ точок $p \in \mathcal{X}$, для яких існують послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \ldots$,

$$\lim_{k \to \infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$p = \lim_{k \to \infty} S(t_k)x_k.$$

Справджується таке твердження.

Лема 4.1. *Для ω-граничної множини $\Omega(\mathcal{B})$ справджується рівність*

$$\Omega(\mathcal{B}) = \bigcap_{T > 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)\mathcal{B}}, \ \ \mathcal{B} \subset \mathcal{X}.$$

Доведення. Виберемо довільну точку $y \in \Omega(\mathcal{B})$. Тоді існують послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $t_k > 0$, $k = 1,2,\dots$, такі, що

$$y = \lim_{k\to\infty} S(t_k)x_k.$$

Помітимо, що для довільного $T > 0$ знайдеться такий номер k_0, що для всіх $k > k_0$

$$y_k = S(t_k)x_k \in \bigcup_{t\geq T} S(t)\mathcal{B}.$$

Тому для всіх $T > 0$

$$y = \lim y_k \in \overline{\bigcup_{t\geq T} S(t)\mathcal{B}}.$$

Отже

$$y \in \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} S(t)\mathcal{B}}.$$

І навпаки, якщо

$$y \in \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t\geq T} S(t)\mathcal{B}},$$

то точка

$$y \in \overline{\bigcup_{t\geq k} S(t)\mathcal{B}}$$

для довільного $k = 1,2,\dots$. Отже, для будь-якого $k = 1,2,\dots$ існує точка $y_k \in \mathcal{X}$ така, що

$$y_k \in \bigcup_{t\geq k} S(t)\mathcal{B}, \;\; \rho(y, y_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Звідси випливає, що знайдуться $x_k \in \mathcal{B}$, $t_k \geq k$ такі, що

$$y_k = S(t_k)x_k, \;\; k = 1,2,\dots .$$

Зазначимо, що

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty,$$

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} S(t_k)x_k.$$

За означенням $y \in \Omega(\mathcal{B})$, що доводить лему 4.1.

■

Лема 4.2. *Припустимо, що для обмеженої множини* $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ *існує компактна множина* $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{X}$ *така, що*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{K}) = 0. \tag{4.6}$$

Тоді $\Omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$. *Крім того,* $\Omega(\mathcal{B})$ *є компактною, інваріантною множиною, яка притягує* $\mathcal{B}$, *тобто*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\big(S(t)\mathcal{B}, \Omega(\mathcal{B})\big) = 0. \tag{4.7}$$

Доведення. Перш за все, покажемо, що умова (4.6) еквівалентна такому твердженню: для довільних послідовностей $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

послідовність $\{S(t_k)x_k\}$ є передкомпактною. Справді, якщо виконується (4.6), то для будь-яких послідовностей $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

існує послідовність $\{y_k\} \subset \mathcal{K}$ така, що

$$\lim_{t\to+\infty} \rho(S(t_k)x_k, y_k) = 0.$$

Оскільки $\mathcal{K}$ – компакт, то ми можемо з послідовностей $\{y_k\} \subset \mathcal{K}$, $\{S(t_k)x_k\}$ виокремити збіжні підпослідовності до однієї і тієї ж точки, яка належить $\mathcal{K}$. Це означає, що послідовність $\{S(t_k)x_k\}$ є передкомпактною.

І навпаки, якщо для довільних послідовностей $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

послідовність $\{S(t_k)x_k\}$ є передкомпактною, то можемо із цієї послідовності виокремити збіжну підпослідовність, яка за означенням ω-граничної множини збігається до точки $y \in \Omega(\mathcal{B})$, тому $\Omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

Доведемо, що $\Omega(\mathcal{B})$ є притягувальною множиною. Припустимо, від супротивного, що існує $\varepsilon > 0$, і послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$\operatorname{dist}\big(S(t_k)x_k, \Omega(\mathcal{B})\big) \geq \varepsilon, \;\; k = 1,2, \dots . \qquad (4.8)$$

Але з послідовності $\{S(t_k)x_k\}$ ми можемо виділити збіжну підпослідовність, яка збігається до точки $y \in \Omega(\mathcal{B})$. Одержали протиріччя з (4.8). Отже, справджується (4.7).

Покажемо, що $\Omega(\mathcal{B})$ є компактом. Справді, для послідовності $\{y_k\} \subset \Omega(\mathcal{B})$ знайдуться послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$\rho(S(t_k)x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}, \;\; k = 1,2, \dots .$$

Оскільки послідовність $\{S(t_k)x_k\}$ є передкомпактною, то з неї можна виокремити збіжну підпослідовність до точки $y \in \Omega(\mathcal{B})$. Зазначимо, що відповідна підпослідовність послідовності $\{y_k\}$ також збігається до точки $y \in \Omega(\mathcal{B})$. Це означає, що $\Omega(\mathcal{B})$ – компакт. Отже, ми довели, що умова (4.6) еквівалентна тому, що для довільних послідовностей $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

послідовність $\{S(t_k)x_k\}$ є передкомпактною, а також, що $\Omega(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, $\Omega(\mathcal{B})$ – компакт, який притягує $\mathcal{B}$.

Покажемо, що $\Omega(\mathcal{B})$ є інваріантною множиною. Виберемо довільну точку $y \in \Omega(\mathcal{B})$. За означенням ω-граничної множини існує послідовність $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, а також послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$y = \lim_{k\to\infty} S(t_k)x_k.$$

Тоді для довільного $t \geq 0$ маємо

$$S(t)y = \lim_{k\to\infty} S(t)S(t_k)x_k.$$

Але з властивостей напівгрупи

$$S(t)S(t_k) = S(t + t_k),$$

тому

$$\lim_{k\to\infty} S(t)S(t_k)x_k = \lim_{k\to\infty} S(t + t_k)x_k \in \Omega(\mathcal{B}).$$

Отже, $S(t)y \in \Omega(\mathcal{B})$, де $y \in \Omega(\mathcal{B})$ – довільна точка. Це означає, що

$$S(t)\Omega(\mathcal{B}) \subseteq \Omega(\mathcal{B})$$

для всіх $t \geq 0$

Обґрунтуємо рівність. Зауважимо, що для довільного $t \geq 0$ з послідовності $\{S(t_k - t)x_k\}$ можна виділити збіжну підпослідовність, яку ми знову позначимо $\{S(t_k - t)x_k\}$, так, щоб

$$p = \lim_{k\to\infty} S(t_k - t)x_k \in \Omega(\mathcal{B}).$$

Звідси

$$S(t)p = \lim_{k\to\infty} S(t)S(t_k - t)x_k.$$

Але $S(t)S(t_k - t) = S(t_k)$, тому

$$S(t)p = \lim_{k\to\infty} S(t_k)x_k = y.$$

Відтак для будь-якого $y \in \Omega(\mathcal{B})$ для довільного $t \geq 0$ існує $p \in \Omega(\mathcal{B})$ таке, що $y = S(t)p$. Тому

$$\Omega(\mathcal{B}) \subseteq S(t)\Omega(\mathcal{B}), \qquad t \geq 0.$$

Отже, справедлива інваріантність $\Omega(\mathcal{B})$.

■

Означення 4.9. *Неперервну напівгрупу $S(t)$ називають дисипативною, якщо існує обмежена множина $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ така, що для будь-якої обмеженої $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ знайдеться $T = T(\mathcal{B}) > 0$ таке, що*

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$$

для всіх $t \geq T$. Множину $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$, яка задовольняє таку умову, називають поглинальною.

Означення 4.10. *Неперервну напівгрупу $S(t)$ називають асимптотично компактною, якщо для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{X}$ і для довільної послідовності $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \ldots$,*

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$$

послідовність

$$\{S(t_k)x_k\}$$

є передкомпактною.

Зауважимо, що неперервна напівгрупа $S(t)$ є асимптотично компактною тоді і тільки тоді, коли для будь-якої обмеженої множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ існує компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ такий, що справджується

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{K}) = 0.$$

Означення 4.11. *Обмежену, замкнену множину* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ *називають глобальним атрактором неперервної напівгрупи* $\{S(t): \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}\}_{t\geq 0}$, *якщо*

1) *множина* $\mathcal{A}$ *є інваріантною, тобто* $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ *для всіх* $t \geq 0$;
2) *множина* $\mathcal{A}$ *є рівномірно притягувальною, тобто*
$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$$

для довільної обмеженої множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$.

Умова 2 означення 4.11 вказує, що яким не було б $\varepsilon > 0$, знайдеться $T_0 = T_0(\varepsilon, \mathcal{B})$ таке, що

$$S(t)\mathcal{B} \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}), \qquad t \geq T_0.$$

Лема 4.3. *Нехай для неперервної напівгрупи* $S(t)$ *існує непорожній глобальний атрактор. Тоді глобальний атрактор напівгрупи* $S(t)$ *є максимальною інваріантною множиною і мінімальною рівномірно притягувальною замкненою множиною.*

Доведення. Нехай $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ – обмежена інваріантна множина. Тоді

$$\mathcal{C} = S(t)\mathcal{C}$$

для всіх $t \geq 0$ і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $T > 0$ таке, що

$$S(t)\mathcal{C} \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}),$$

для всіх $t \geq T$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{C} \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}),$$

звідки одержуємо

$$\mathcal{C} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} O_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Це означає, що $\mathcal{A}$ є найбільшою інваріантною множиною.

Обґрунтуємо другу частину леми. Нехай $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ – рівномірно притягувальна множина. Тоді

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{A}, \mathcal{D}) = 0.$$

Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $T > 0$, що для всіх $t \geq T$ виконується включення

$$S(t)\mathcal{A} \subset O_\varepsilon(\mathcal{D}).$$

Оскільки $\mathcal{A}$ – інваріантна множина, тобто

$$\mathcal{A} = S(t)\mathcal{A}, \qquad t \geq 0,$$

то $\mathcal{A} \subset O_\varepsilon(\mathcal{D})$, для будь-якого $\varepsilon > 0$. Отже,

$$\mathcal{A} \subset \bigcap_{\varepsilon>0} O_\varepsilon(\mathcal{D}) = \overline{\mathcal{D}}.$$

■

Теорема 4.9 (існування глобального атрактора). *Припустимо, що неперервна напівгрупа $S(t)$ є дисипативною та асимптотично компактною. Тоді існує непорожній глобальний атрактор $\mathcal{A}$ неперервної напівгрупи $S(t)$, який є компактною зв'язною множиною.*

Доведення. Припустимо, що $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ – обмежена поглинальна множина. Доведемо, що

$$\mathcal{A} = \Omega(\mathcal{B}_0)$$

є глобальним атрактором неперервної напівгрупи $S(t)$.

За лемою 4.2 множина $\mathcal{A} = \Omega(\mathcal{B}_0)$ є непорожньою, компактною, інваріантною множиною, яка притягує множину $\mathcal{B}_0$. Покажемо, що множина $\mathcal{A}$ є рівномірно притягувальною.

Оскільки напівгрупа $S(t)$ дисипативна, то для довільної обмеженої множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ існує $T(\mathcal{B}) > 0$ таке, що для всіх $t \geq T(\mathcal{B})$ справджується

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0.$$

Через те, що множина $\mathcal{A}$ притягує множину $\mathcal{B}_0$, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $T_0 > 0$, що

$$S(\tau)\mathcal{B}_0 \subset O_\varepsilon(\mathcal{A})$$

для всіх $\tau \geq T_0$. Тоді для $t \geq T(\mathcal{B})$ та для $\tau \geq T_0$ маємо

$$S(\tau)S(t)\mathcal{B} = S(t+\tau)\mathcal{B} \subset S(\tau)\mathcal{B}_0 \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $T_1 = T(\mathcal{B}) + T_0$, що для всіх $t \geq T_1$ маємо

$$S(t)\mathcal{B} \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Робимо висновок, що множина $\mathcal{A}$ є рівномірно притягувальною.

З іншого боку, точка y не належить множині $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, оскільки вона є граничною точкою послідовності $\{S(t_k)x_k\}$, тому лежить у доповненні до $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Отримали суперечність, яка обґрунтовує зв'язність множини $\mathcal{A}$. Теорему доведено.

■

Наслідок 4.4. *Якщо неперервна напівгрупа породжується системою звичайних диференціальних рівнянь* (4.1) *і система є дисипативною, то для такої системи існує непорожній компактний глобальний атрактор. У цьому випадку умова асимптотичної компактності є наслідком дисипативності системи і скінченної вимірності фазового простору. Зокрема система Лоренца* (4.3) *має непорожній компактний глобальний атрактор.*

Для неперервної напівгрупи, визначеної у скінченновимірному фазовому просторі, умову дисипативності можна послабити.

Означення 4.12. *Неперервну напівгрупу $S(t)$ називають точково-дисипативною, якщо знайдеться обмежена множина $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{X}$ така, що для довільного $x \in \mathcal{X}$ існує $T = T(x) > 0$ таке, що*

$$S(t)x \in \mathcal{B}_1$$

для всіх $t \geq T$.

З дисипативності неперервної напівгрупи випливає точкова дисипативність. Виявляється, що у випадку $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ці властивості збігаються.

Лема 4.4. *Неперервна напівгрупа $\{S(t): \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n\}_{t\geq 0}$ є дисипативною тоді і тільки тоді, коли вона є точково-дисипативною.*

Доведення. Покажемо, що при $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ з означення 4.12 випливає означення 4.9.

Нехай $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{X}$ – обмежена множина, така, що для довільного $x \in \mathcal{X}$ знайдеться $T = T(x)$ таке, що

$$S(t)x \in \mathcal{B}_1, \;\; t \geq T,$$

де $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Покладемо

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{\tau \geq 0} S(\tau)\overline{O_1(\mathcal{B}_1)}. \tag{4.9}$$

Доведемо, що множина $\mathcal{B}_0$ є обмеженою. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. З неперервності напівгрупи $S(t)$ випливає, що для кожного $x \in \overline{O_1(\mathcal{B}_1)}$ існує $\delta(x) > 0$ таке, що якщо $y \in O_{\delta(x)}(x)$, то

$$S(t)y \in O_\varepsilon(S(t)x), \qquad t \in [0, T(x)],$$
$$S(t)y \in O_\varepsilon(\mathcal{B}_1), \qquad t > T(x).$$

З відкритого покриття

$$\bigcup_{x \in \overline{O_1(\mathcal{B}_1)}} O_{\delta(x)}(x)$$

компакта $\overline{O_1(\mathcal{B}_1)} \subset \mathbb{R}^n$ виділимо скінченне підпокриття

$$\bigcup_{i=1}^{N} O_{\delta_i}(x_i) \supset \overline{O_1(\mathcal{B}_1)},$$

$x_i \in \overline{O_1(\mathcal{B}_1)}$, $\delta_i = \delta(x_i)$, $i = 1,2, \dots, N$.

Позначимо $T_i = T(x_i)$, $i = 1,2, \dots, N$. Для будь-якої точки $y \in \overline{O_1(\mathcal{B}_1)}$ знайдеться $i = 1,2, \dots, N$ таке, що $y \in O_{\delta_i}(x_i)$,

$$S(t)y \in O_\varepsilon(S(t)x_i), \qquad t \in [0, T_i],$$
$$S(t)y \in O_\varepsilon(\mathcal{B}_1), \qquad t > T_i.$$

Множина

$$\mathcal{M}_i = \bigcup_{t \in [0, T_i]} O_\varepsilon(S(t)x_i),$$

є обмеженою, $i = 1,2, \dots, N$. Тому

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{M}_i \bigcup O_\varepsilon(\mathcal{B}_1)$$

також обмежена, причому для будь-якої точки $y \in \overline{O_1(\mathcal{B}_1)}$ додатна півтраєкторія

$$\gamma^+(y) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)y \subset \mathcal{M}.$$

Звідси випливає, що

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{y \in \overline{O_1(\mathcal{B}_1)}} \gamma^+(y) \subset \mathcal{M}$$

і тому є обмеженою множиною.

Помітимо, що $\mathcal{B}_0$ є додатно інваріантною множиною. Справді, з (4.9) маємо

$$S(t)S(\tau)\overline{O_1(\mathcal{B}_1)} = S(t+\tau)\overline{O_1(\mathcal{B}_1)} \subset \mathcal{B}_0$$

для будь-яких $t \geq 0$, $\tau \geq 0$, тому

$$S(t)\mathcal{B}_0 \bigcup_{\tau \geq 0} S(t)S(\tau)\overline{O_1(\mathcal{B}_1)} \subset \mathcal{B}_0, \qquad t \geq 0.$$

Отже, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ є додатно інваріантною множиною.

Візьмемо довільну обмежену замкнену множину $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$. За означенням 4.12 для будь-якого $x \in \mathcal{B}$ знайдеться $T(x) > 0$ таке, що для всіх $t \geq T(x)$ справедливе включення

$$S(t)x \in \mathcal{B}_1.$$

Оскільки напівгрупа $S(t)$ неперервна, то знайдеться $\delta(x) > 0$ таке, що

$$S(t)O_{\delta(x)}(x) \subset O_1(\mathcal{B}_1), \quad t \geq T(x). \tag{4.10}$$

Зважаючи на те, що

$$\mathcal{B} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{B}} O_{\delta(x)}(x)$$

і в скінченновимірному просторі $\mathcal{X}$ множина $\mathcal{B}$ є компактом, то, виділяючи відкрите підпокриття, одержуємо

$$\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^{N} O_{\delta_i}(x_i),$$

де $x_i \in \mathcal{B}$, $\delta_i = \delta(x_i)$, $i = 1,2,\dots,N$. Позначимо

$$T = T(\mathcal{B}) = \max_{i=1,2,\dots,N} T(x_i).$$

Для довільних $t \geq T$, $i = 1,2,\dots,N$, з урахуванням (4.9), (4.10), маємо

$$S(t)O_{\delta_i}(x_i) = S(t-T)S(T)O_{\delta_i}(x_i) \subset S(t-T)O_1(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_0.$$

Можемо зробити висновок, що

$$S(t)\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^{N} S(t)O_{\delta_i}(x_i) \subset \mathcal{B}_0, \qquad t \geq T.$$

Отже, справджується означення 4.9 і напівгрупа $S(t)$ – дисипативна. Лему доведено.

■

Якщо неперервна напівгрупа $\{S(t): \mathcal{X} \longmapsto \mathcal{X}\}_{t\geq 0}$ є дисипативною, то без обмеження загальності можемо вважати, що поглинальна множина $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ є додатно інваріантною. Справді, нехай виконується означення 4.9. Покладемо

$$\mathcal{P}_0 = \bigcup_{\tau\geq T(\mathcal{B}_0)} S(\tau)\mathcal{B}_0.$$

Тоді з означення 4.9 випливає, що

$$S(\tau)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0, \qquad \tau \geq T(\mathcal{B}_0),$$

і тому $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{B}_0$. Для довільного $t \geq 0$ маємо

$$S(t)S(\tau)\mathcal{B}_0 = S(t+\tau)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}_0, \qquad \tau \geq T(\mathcal{B}_0).$$

Тому

$$S(t)\mathcal{P}_0 = \bigcup_{\tau\geq T(\mathcal{B}_0)} S(t+\tau)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}_0, \qquad t \geq 0.$$

Звідси доходимо висновку, що $\mathcal{P}_0$ є обмеженою, додатно інваріантною множиною. Для довільної обмеженої множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ існує, за означенням 4.9, таке $T(\mathcal{B}) > 0$, що для будь-якого $t \geq T(\mathcal{B})$ маємо

$$S(\tau)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0.$$

Тоді для кожного $t \geq T(\mathcal{B}) + T(\mathcal{B}_0)$ виконується

$$S(t)\mathcal{B} = S\big(t - T(\mathcal{B})\big)S\big(T(\mathcal{B})\big)\mathcal{B} \subset S\big(t - T(\mathcal{B})\big)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}_0.$$

Отже, $\mathcal{P}_0$ є додатно інваріантною, поглинальною множиною.

Для неперервної напівгрупи, породженої розв'язками автономної системи (4.1), можна запропонувати умови дисипативності з використанням функції, подібної до функції Ляпунова.

Теорема 4.10. *Нехай для системи* (4.1) *існує неперервно диференційована в* $\mathbb{R}^n$ *функція* $V(x)$*, а також такі дійсні константи* $\alpha > 0$, $C \in \mathbb{R}$*, що*

$$\left(\frac{dV(x)}{dt}\right)_{(4.1)} = \langle \operatorname{grad} V(x), f(x)\rangle \leq C - \alpha V(x),$$

при цьому функція $V(x)$ є радіально необмеженою. Тоді неперервна напівгрупа $\{S(t): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$, породжена системою (4.1)*, є дисипативною і система* (4.1)*, як наслідок, також дисипативна*.

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тоді для довільного $t \geq 0$ одержуємо

$$\left(\frac{dV\big(x(t,x_0)\big)}{dt}\right)_{(4.1)} = \frac{dV\big(x(t,x_0)\big)}{dt} \leq C - \alpha V\big(x(t,x_0)\big).$$

Звідси

$$\frac{dV\big(x(t,x_0)\big)}{dt} + \alpha V\big(x(t,x_0)\big) \leq C, \quad t \geq 0.$$

Помножимо останню нерівність на $e^{\alpha t}$ і помітимо, що

$$\frac{d}{dt}\Big(V\big(x(t,x_0)\big)e^{\alpha t}\Big) = \frac{dV\big(x(t,x_0)\big)}{dt}e^{\alpha t} + \alpha V\big(x(t,x_0)\big)e^{\alpha t}.$$

У такий спосіб маємо

$$\frac{d}{dt}\Big(V\big(x(t,x_0)\big)e^{\alpha t}\Big) \leq Ce^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Інтегруємо останню нерівність від 0 до t і результат домножуємо на $e^{-\alpha t}$. Приходимо до нерівності

$$V\big(x(t,x_0)\big) \leq V(x_0)e^{-\alpha t} + \frac{C}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right), \qquad t \geq 0.$$

Її можна записати як

$$V\big(x(t,x_0)\big) \leq \left(V(x_0) - \frac{C}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} + \frac{C}{\alpha}, \qquad t \geq 0.$$

Враховуючи, що $\alpha > 0$, існує таке $T(x_0) \geq 0$, що

$$\left(V(x_0) - \frac{C}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} \leq 1, \qquad t \geq T(x_0).$$

Тоді

$$V\big(x(t,x_0)\big) \leq 1 + \frac{C}{\alpha}, \qquad t \geq T(x_0).$$

Позначимо

$$\mathcal{B}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \le 1 + \frac{C}{\alpha}\right\}.$$

Оскільки функція $V(x)$ є радіально необмеженою, то множина $\mathcal{B}_0$ є обмеженою (теорема 2.28, доведення). Це означає, що $x(t, x_0) \in \mathcal{B}_0$, $t \ge T(x_0)$, і (4.1) є точково-дисипативною. За лемою 4.4 система (4.1) дисипативна.

■

Приклад 4.9 (скінченновимірна апроксимація системи типу реакція – дифузія).

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -Lx - f(x) + g,$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, L – $n \times n$-матриця з додатно визначеною симетричною частиною

$$\frac{1}{2}(L + L^T) \ge \delta E, \qquad \delta > 0,$$

E – одинична $n \times n$-матриця, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева функція така, що

$$\langle f(x), x\rangle \ge -C, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

$g \in \mathbb{R}^n$,

$$C + \frac{\|g\|^2}{2\delta} > 0.$$

Покладемо

$$V(x) = \frac{\|x\|^2}{2}.$$

Така функція є радіально необмеженою. Похідна функції $V(x)$ за змінною t в силу системи записується так:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \langle \operatorname{grad} V(x), -Lx - f(x) + g\rangle = \langle x, -Lx - f(x) + g\rangle =$$
$$= -\langle Lx, x\rangle - \langle f(x), x\rangle + \langle g, x\rangle.$$

Оскільки

$$\langle Lx, x\rangle = \frac{1}{2}\langle (L + L^T)x, x\rangle \ge \delta\|x\|^2,$$
$$\langle f(x), x\rangle \ge -C,$$
$$\langle g, x\rangle \le \|g\|\|x\|,$$

то

$$\frac{dV(x)}{dt} \le -\delta\|x\|^2 + \|g\|\|x\| + C.$$

Квадратний тричлен

$$F(u) = -\frac{\delta}{2}u^2 + \|g\|u$$

досягає максимуму в точці

$$u_* = \frac{\|g\|}{\delta}.$$

Тому

$$F(u) \le F(u_*) = \frac{\|g\|^2}{2\delta}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Отримаємо таку оцінку:

$$\frac{dV(x)}{dt} = -\frac{\delta}{2}\|x\|^2 + F(\|x\|) + C \le -\frac{\delta}{2}\|x\|^2 + \frac{\|g\|^2}{2\delta} + C =$$
$$= -\delta V(x) + C_0,$$

де

$$C_0 = \frac{\|g\|^2}{2\delta} + C > 0.$$

За теоремою 4.10 система є дисипативною.

Приклад 4.10 (скінченновимірна апроксимація системи Нав'є – Стокса).

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -Lx - \mathcal{B}(x, x) + g,$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, L – $n \times n$-матриця така, що

$$\langle Lx, x\rangle \ge \delta\|x\|^2, \qquad \delta > 0,$$

$\mathcal{B}(x, x)$ – білінійна неперервна n-вимірна форма така, що

$$\langle \mathcal{B}(x, x), x\rangle = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

вектор $g \in \mathbb{R}^n$. Виберемо функцію

$$V(x) = \frac{\|x\|^2}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

яка є радіально необмеженою. Похідна функції $V(x)$ за змінною t в силу системи

$$\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dt} &= \langle \operatorname{grad} V(x), -Lx - \mathcal{B}(x,x) + g\rangle = \\ &= \langle x, -Lx - \mathcal{B}(x,x) + g\rangle = \\ &= -\langle Lx, x\rangle - \langle \mathcal{B}(x,x), x\rangle + \langle g, x\rangle \leq \\ &\leq -\delta\|x\|^2 + \|g\|\|x\| = -\frac{\delta}{2}\|x\|^2 + F(\|x\|),\end{aligned}$$

де

$$F(u) = -\frac{\delta}{2}u^2 + \|g\|u, \qquad u \in \mathbb{R}$$

(приклад 4.9). Оскільки

$$F(\|x\|) \leq \frac{\|g\|^2}{2\delta},$$

то

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -\delta V(x) + \frac{\|g\|^2}{2\delta}.$$

За теоремою 4.10 система Нав'є – Стокса є дисипативною.

Приклад 4.11. Розглянемо систему Лоренца (4.3). Виберемо функцію

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2).$$

Така функція є радіально необмеженою. Знайдемо похідну функції $V(x,y,z)$ за змінною t в силу системи (4.3)

$$\begin{aligned}\frac{dV(x,y,z)}{dt} &= x(-\sigma x + \sigma y) + y(rx - y - xz) + \\ &\quad +(z - r - \sigma)(-bz + xy) = \\ &= -\sigma x^2 - y^2 - b(z^2 - (r+\sigma)z).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2}\big(z - (r+\sigma)\big)^2 - \frac{1}{2}(r+\sigma)^2 = \frac{1}{2}z^2 - z(r+\sigma) \leq z^2 - z(r+\sigma)$$

та $b > 0$, то

$$\frac{dV(x,y,z)}{dt} \leq -\sigma x^2 - y^2 - \frac{b}{2}\big(z-(r+\sigma)\big)^2 + \frac{b(r+\sigma)^2}{2} \leq$$
$$\leq -\alpha\left(x^2 + y^2 + \big(z-(r+\sigma)\big)^2\right) + C.$$

Тут

$$\alpha = \min\left\{\sigma, 1, \frac{b}{2}\right\}, \qquad C = \frac{b(r+\sigma)^2}{2}.$$

Отже,

$$\frac{dV(x,y,z)}{dt} \leq -2\alpha V(x,y,z) + C.$$

За теоремою 4.10 система Лоренца є дисипативною.

Приклад 4.12. Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x) = 0.$$

Тут $\gamma > 0$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – локально ліпшицева функція така, що

$$f(x)\cdot x \geq \delta x^2 - C,$$

де $\delta > 0$, $C > 0$. До рівнянь, які задовольняють вказані умови, належить рівняння з функцією

$$f(x) = -\alpha x + \beta x^3$$

при

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0, \qquad (\alpha+\delta)^2 \leq 4\beta C.$$

Справді, у цьому випадку нерівність

$$f(x)\cdot x \geq \delta x^2 - C$$

еквівалентна

$$\beta x^4 - (\alpha+\delta)x^2 + C \geq 0,$$

яка виконується для довільних $x \in \mathbb{R}$ і додатних α, β, δ, C таких, що

$$(\alpha+\delta)^2 - 4\beta C \leq 0.$$

Покладемо $\dot{x} = y$ і перейдемо від диференціального рівняння другого порядку до системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x) - \gamma y. \end{cases}$$

Позначимо за $\mathcal{Z}$ множину точок рівноваги цієї системи. Вона складається з точок $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ таких, що $f(x) = 0$, $y = 0$. Множина $\mathcal{Z}$ є обмеженою, тому що у випадку $(x, y) \in \mathcal{Z}$ маємо

$$\delta x^2 - C \leq x \cdot f(x) = 0.$$

Тоді для всіх точок $(x, y) \in \mathcal{Z}$ виконується

$$x^2 \leq \frac{C}{\delta}, \qquad y = 0.$$

Розглянемо функцію

$$V(x, y) = \int_0^x f(s)ds + \frac{1}{2}y^2.$$

Для аналізу системи застосуємо принцип інваріантності (теорема 4.4). Для цього обґрунтуємо компактність і додатну інваріантність множини

$$\mathcal{D}_r = \{(x, y): V(x, y) \leq r\}, \qquad r > 0.$$

Помітимо: якщо $|x| > p$, де $p > 0$ – деяке число, то при $x > 0$ маємо

$$\int_0^x f(s)ds = \int_0^p f(s)ds + \int_p^x f(s)ds \geq \int_0^p f(s)ds + \int_p^x \left(\delta s - \frac{C}{s}\right) ds =$$

$$= \frac{\delta x^2}{2} - C \ln|x| + C_1,$$

де

$$C_1 = \int_0^p f(s)ds - \frac{\delta p^2}{2} + C \ln|p|.$$

Аналогічно, у випадку $|x| > p$, $x < 0$ одержуємо

$$\int_0^x f(s)ds = \int_0^{-p} f(s)ds + \int_{-p}^x f(s)ds \geq \int_0^{-p} f(s)ds - \int_x^{-p} f(s)ds =$$

$$= \frac{\delta x^2}{2} - C \ln|x| + C_2,$$

де

$$C_2 = \int_0^{-p} f(s)ds - \frac{\delta p^2}{2} + C\ln|p|.$$

У такий спосіб ми показали, що

$$\int_0^x f(s)ds \geq \frac{\delta x^2}{2} - C\ln|x| + C_0, \qquad |x| > p,$$

де $C_0 = \min\{C_1, C_2\}$. Помітимо, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\delta x^2}{2} - C\ln|x|\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\delta}{2} - C\frac{\ln|x|}{x^2}\right) = +\infty.$$

Це означає, що

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} V(x,y) = +\infty.$$

Отже, функція $V(x,y)$ є радіально необмеженою і множина

$$\mathcal{D}_r = \{(x,y)\colon V(x,y) \leq r\},$$

як наслідок, є компактом (доведення теореми 2.28).

Оскільки похідна функції $V(x,y)$ за змінною t в силу системи дорівнює

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = f(x)y - y\big(\gamma y + f(x)\big) = -\gamma y^2 \leq 0,$$

то множина $\mathcal{D}_r$ є додатно інваріантною.

Розглянемо множину

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y)\colon \frac{dV(x,y)}{dt} = 0\right\} = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}, y = 0\}.$$

Якщо розв'язок $x(t)$, $y(t)$, $t \geq 0$ системи цілком належить множині $\mathcal{E}$, то $y(t) = 0$, $t \geq 0$. Тому $f\big(x(t)\big) = 0$, $t \geq 0$. Робимо висновок, що такий розв'язок системи належить множині точок рівноваги $\mathcal{Z}$ для всіх $t \geq 0$. Отже, $\mathcal{Z}$ є найбільшою інваріантною множиною, яка належить $\mathcal{E}$. Для довільної точки (x_0, y_0) підберемо $r > 0$ так, що $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_r$. За принципом інваріантності (теорема 4.4)

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\Big(\big(x(t,x_0,y_0), y(t,x_0,y_0)\big), \mathcal{Z}\Big) = 0,$$

де $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ – розв'язок системи, який відповідає умові Коші $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Це означає, що для будь-якої початкової умови $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_r$ для $\varepsilon > 0$ знайдеться $T(x_0, y_0) > 0$, для якого $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0) \in O_\varepsilon(\mathcal{Z})$ для всіх $t \geq T(x_0, y_0)$. Доходимо висновку, що система є точково-дисипативною. За лемою 4.4 вона дисипативна.

Дослідження структури глобального атрактора неперервної напівгрупи є важливою теоретичною і прикладною проблемою. Оскільки структура атрактора може бути дуже складною, то немає універсальних методів конструювання атракторів. Однак можна вказати множини, які належать до атрактора. Наприклад, будь-яка стаціонарна точка неперервної напівгрупи належить атрактору цієї групи.

Розглянемо неперервну напівгрупу $\{S(t): \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}\}_{t \geq 0}$. Теорема 4.9 показує, що якщо $S(t)$ є дисипативною і асимптотично компактною, то для такої напівгрупи існує непорожній глобальний атрактор $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, який є зв'язним компактом. Крім того, якщо $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ – обмежена поглинальна множина, то глобальний атрактор

$$\mathcal{A} = \Omega(\mathcal{B}_0).$$

Виконується таке твердження.

Лема 4.5. *Припустимо, що неперервна напівгрупа* $S(t)$ *задовольняє умови теореми 4.9 так, що існує непорожній компактний глобальний атрактор* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. *Тоді*

$$\lim_{t \to +\infty} h(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) = 0,$$

де $h = \max\{\mathrm{dist}(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathrm{dist}(\mathcal{D}, \mathcal{C})\}$ *– метрика Гаусдорфа;* $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ *– обмежена поглинальна множина.*

Доведення. Умова

$$\lim_{t \to +\infty} h(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) = 0$$

означає

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(\mathcal{A}, S(t)\mathcal{B}_0) = 0.$$

Оскільки $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ – глобальний атрактор, то з означення 4.11 маємо

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) = 0.$$

Обґрунтуємо

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\mathcal{A}, S(t)\mathcal{B}_0) = 0.$$

Припустимо, від супротивного, що існують $\delta > 0$, а також послідовність $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty,$$

такі, що

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}, S(t_k)\mathcal{B}_0) \geq \delta,\ \ k = 1,2, \dots .$$

Оскільки

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}, S(t_k)\mathcal{B}_0) = \sup_{a\in\mathcal{A}} \operatorname{dist}(a, S(t_k)\mathcal{B}_0)$$

та $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ – компакт, то знайдеться послідовність $\{a_k\} \subset \mathcal{A}$ для якої

$$\operatorname{dist}(a_k, S(t_k)\mathcal{B}_0) \geq \delta,\ \ k = 1,2, \dots .$$

Враховуючи, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ – компакт, виділимо з послідовності $\{a_k\}$ збіжну підпослідовність, яку знову перепозначимо як $\{a_k\}$ (відповідну підпослідовність послідовності $\{t_k\}$ перепозначимо як $\{t_k\}$).

Отже

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \in \mathcal{A}.$$

Через те, що $\mathcal{A} = \Omega(\mathcal{B}_0)$, знайдуться послідовність $\{y_m\} \subset \mathcal{B}_0$ та послідовність $\{\tau_m\}$, $\tau_m > 0$, $m = 1,2, \dots$,

$$\lim_{m\to\infty} \tau_m = +\infty,$$

такі, що

$$a = \lim_{m\to\infty} S(\tau_m) y_m.$$

Оскільки $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ – поглинальна множина, то існує таке $T_0 > 0$, що

$$S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0, \qquad t \geq T_0.$$

З послідовностей $\{\tau_m\}$, $\{y_m\}$ виберемо підпослідовності $\{\tau_{m_k}\}$, $\{y_{m_k}\}$ так, щоб

$$\tau_{m_k} \geq t_k + T_0, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Тоді

$$z_k = S(\tau_{m_k} - t_k) y_{m_k} \in \mathcal{B}_0, \qquad k = 1,2,\dots .$$

З урахуванням, що

$$S(t_k) z_k = S(t_k) S(\tau_{m_k} - t_k) y_{m_k} = S(\tau_{m_k}) y_{m_k}, \qquad k = 1,2 \dots ,$$

то

$$\lim_{k\to\infty} S(t_k) z_k = \lim_{k\to\infty} S(\tau_{m_k}) y_{m_k} = a.$$

Але

$$\operatorname{dist}(a_k, S(t_k) z_k) \geq \operatorname{dist}(a_k, S(t_k)\mathcal{B}_0) \geq \delta, \ \ k = 1,2,\dots .$$

Одержали протиріччя, яке доводить лему.

■

Означення 4.13. *Множину*

$$\gamma = \gamma(x) = \{u(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\}$$

називають повною траєкторією (або орбітою) неперервної напівгрупи $S(t)$, яка проходить через точку $x \in \mathcal{X}$, якщо функція $u : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ є неперервною, $u(0) = x$ та

$$S(t) u(\tau) = u(t + \tau)$$

для будь-яких $t \geq 0, \tau \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.11 (про структуру атрактора). *Припустимо, що $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ – глобальний атрактор неперервної напівгрупи $S(t)$. Тоді для будь-якої точки $z \in \mathcal{A}$ існує повна траєкторія $\gamma = \gamma(z)$, яка проходить через точку z і лежить в $\mathcal{A}$.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $z \in \mathcal{A}$. За означенням 4.11 глобальний атрактор $\mathcal{A}$ є інваріантною множиною

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \qquad t \geq 0.$$

Тому існує послідовність $\{z^{(k)}\} \subset \mathcal{A}$ така, що $z^{(0)} = z$,

$$S(1) z^{(k)} = z^{(k-1)}, \qquad k = 1,2,\dots ,$$

зауважимо, що

$$S(t) z^{(k)} \in \mathcal{A}, \qquad t \geq 0, \ \ k = 1,2,\dots .$$

Розглянемо відображення $\psi : (-\infty, 0] \to \mathcal{A}$ таке, що

$$\psi(\tau) = S(\tau + k) z^{(k)}, \qquad \tau \in (-k, -k+1], \qquad k = 1,2,\dots .$$

Покажемо, що відображення

$$u(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau), & \tau \in (-\infty, 0), \\ S(\tau)z, & \tau \in [0, +\infty) \end{cases}$$

визначає повну траєкторію $\gamma = \gamma(z)$ відповідно до означення 4.13, тобто

$$\gamma = \gamma(x) = \{u(\tau) \colon \tau \in \mathbb{R}\}, \qquad u(0) = z.$$

Тут $\gamma \subset \mathcal{A}$.

Відображення $u \colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ є неперервним. У точках $\tau \in [0, +\infty)$ це випливає з означення неперервної напівгрупи $S(t)$. Розглянемо випадок $\tau \in (-\infty, 0)$. Відображення ψ є неперервним. Справді, у внутрішніх точках проміжку $(-k, -k+1]$, $k = 1,2, \ldots$, неперервність ψ є наслідком неперервності $S(t)$. У точці $\tau_k = -k+1$ маємо

$$\psi(\tau_k - 0) = \lim_{\tau \to \tau_k - 0} \psi(\tau) = S(1)z^{(k)} = z^{(k-1)},$$

$$\psi(\tau_k + 0) = \lim_{\tau \to \tau_k + 0} \psi(\tau) = \lim_{\tau \to \tau_k + 0} S(\tau + k - 1)z^{(k-1)} = z^{(k-1)}.$$

Отже $\psi(\tau_k - 0) = \psi(\tau_k + 0)$, $k = 2,3, \ldots$. У точці $\tau_1 = 0$ виконується

$$S(0)z = \psi(\tau_1 - 0) = z.$$

У такий спосіб ми показали, що $u \colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ – неперервне відображення. Доведемо, що

$$u(t + \tau) = S(t)u(\tau)$$

для всіх $t \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$. Для цього розглянемо кілька випадків. Якщо $t + \tau > 0$, $\tau \geq 0$, то

$$u(t + \tau) = S(t + \tau)z = S(t)S(\tau)z = S(t)u(\tau).$$

У випадку $t + \tau \leq 0$ маємо

$$u(t + \tau) = \psi(t + \tau).$$

Якщо $t \in [0,1]$, $\tau \in (-k, -k+1]$ і $t + k \in (-k, -k+1]$, $k = 1,2, \ldots$, то

$$u(t + \tau) = \psi(t + \tau) = S(t + \tau + k)z^{(k)} = S(t)S(\tau + k)z^{(k)} =$$
$$= S(t)\psi(\tau) = S(t)u(\tau).$$

Для $t \in [0,1]$, $\tau \in (-k, -k+1]$, $t + k \in (-(k-1), -(k-1)+1]$

$$u(t+\tau) = \psi(t+\tau) = S(t+\tau+k-1)z^{(k-1)} =$$
$$= S(t+\tau+k-1)S(1)z^{(k)} =$$
$$= S(t+\tau+k)z^{(k)} = S(t)S(\tau+k)z^{(k)} =$$
$$= S(t)\psi(\tau) = S(t)u(\tau).$$

У випадку $t \in (1,2]$, $\tau \in (-k, -k+1]$, $t+\tau \leq 0$ знаходимо $t_1 = t - 1$. Тоді $t + k \in (-k+1, -k+2]$ і

$$u(t+\tau) = u(t_1+1+\tau) = S(t_1)u(1+\tau) = S(t_1)\psi(1+\tau) =$$
$$= S(t_1)S(\tau+k)z^{(k-1)} = S(t_1)S(\tau+k)S(1)z^{(k)} =$$
$$= S(t_1+1)S(\tau+k)z^{(k)} = S(t)\psi(\tau) = S(t)u(\tau).$$

Аналогічно, якщо $t \in (m, m+1]$, $\tau \in (-k, -k+1]$, $t+\tau \leq 0$, $m = 1,2, \dots$, то знаходимо $t_m = t - m$.
Тоді $m + \tau \in (-k+m, -k+m+1]$,

$$u(t+\tau) = u(t_m+m+\tau) = S(t_m)u(m+\tau) =$$
$$= S(t_m)S(\tau+k)z^{(k-m)} =$$
$$= S(t_m)S(\tau+k)S(m)z^{(k)} =$$
$$= S(t_m+m)S(\tau+k)z^{(k)} =$$
$$= S(t)\psi(\tau) = S(t)u(\tau).$$

Останній випадок $t+\tau > 0$, $\tau < 0$, $\tau \in (-k, -k+1]$. Маємо

$$u(t+\tau) = S(t+\tau)z = S(t)S(\tau)z^{(0)} = S(t)S(\tau)S(k)z^{(k)} =$$
$$= S(t)S(\tau+k)z^{(k)} = S(t)\psi(\tau) = S(t)u(\tau).$$

Підкреслимо, що $\gamma \subset \mathcal{A}$ і справджується означення 4.13. Теорему доведено.

■

Наслідок 4.5. *З теореми 4.11 випливає, що елемент* z *належить глобальному атрактору* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ *неперервної напівгрупи* $S(t)$ *тоді і тільки тоді, коли існує обмежена повна траєкторія* $\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *така, що* $u(0) = z$.

Доведення. Необхідність випливає з теореми 4.11 та з включення $\gamma \subset \mathcal{A}$. Покажемо достатність. Нехай $z \in \mathcal{X}$ і γ є обмеженою повною траєкторією напівгрупи $S(t)$, $u(0) = z$. Оскільки $\gamma \subset \mathcal{X}$ є обмеженою, то за означенням 4.11

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\gamma, \mathcal{A}) = 0.$$

Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $T > 0$ таке, що для всіх $t \geq T$ маємо

$$S(t)\gamma \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

На множині γ лежить точка $z_T = u(-T)$. Тоді

$$S(t)z_T \in S(t)\gamma \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}), \ \ t \geq T.$$

Зокрема, при $t = T$

$$S(t)z_T = S(T)u(-T) = u(0) = z \in O_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Ми показали, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ справджується

$$z \in O_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Тому

$$z \in \bigcap_{\varepsilon>0} O_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

■

До атрактора неперервної напівгрупи також належать нестійкі множини.

Означення 4.14. *Нестійким многовидом точки* $z_0 \in \mathcal{X}$ *називають множину* $\mathcal{W}(z_0) \subset \mathcal{X}$, *яка складається з таких точок* $z \in \mathcal{X}$, *для яких існує повна траєкторія*

$$\gamma(z) = \{u(t): t \in \mathbb{R}\},$$

для якої $u(0) = z$,

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = z_0,$$

де $u: \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ *– неперервне відображення.*

Означення 4.15. *Нестійким многовидом точки* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ *називають множину* $\mathcal{W}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$, *яка складається з точок* $z \in \mathcal{X}$, *для яких існує повна траєкторія*

$$\gamma(z) = \{u(t): t \in \mathbb{R}\},$$

така, що $u(0) = z$,

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(u(t), \mathcal{Y}) = 0.$$

Тут $u: \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ *– неперервне відображення.*

Лема 4.6. *Припустимо, що* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ *– обмежена множина,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ *– глобальний атрактор неперервної напівгрупи* $S(t)$. *Тоді* $\mathcal{W}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{A}$.

Доведення. Нехай $z \in \mathcal{W}(\mathcal{Y})$. Тоді за означенням 4.15 існує траєкторія

$$\gamma(z) = \{u(\tau): \tau \in \mathbb{R}\}, \qquad u(0) = z,$$

$$\lim_{\tau \to -\infty} \operatorname{dist}(u(\tau), \mathcal{Y}) = 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ знайдеться $T > 0$ таке, що для всіх $t \leq -T$ справджується включення

$$u(t) \in O_\varepsilon(\mathcal{Y}).$$

Отже, множина

$$\mathcal{B}_T = \{u(t): t \leq -T\}$$

є обмеженою. Тому за означенням глобального атрактора (означення 4.11)

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}_T, \mathcal{A}) = 0.$$

Однак $z \in S(t)\mathcal{B}_T$ при $t \geq T$. Справді, якщо $t \geq T$, то $u(-t) \in \mathcal{B}_T$. Тому

$$\operatorname{dist}(z, \mathcal{A}) \leq \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}_T, \mathcal{A}), \qquad t \geq T.$$

З огляду на те, що

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}_T, \mathcal{A}) = 0,$$

то $\operatorname{dist}(z, \mathcal{A}) = 0$. Оскільки атрактор є замкненою множиною, то $z \in \mathcal{A}$.

■

Якщо $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}$ – множина стаціонарних точок неперервної напівгрупи $S(t)$

$$\mathcal{N} = \{z \in \mathcal{X}: S(t)z = z, t \geq 0\},$$

то $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. Отже, $\mathcal{N}$ є обмеженою множиною. Тому

$$\mathcal{W}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{A}.$$

Якщо $\mathcal{N} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, то

$$\mathcal{W}(\mathcal{N}) = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{W}(z_k).$$

Виявляється, що за певних умов атрактор не містить інших точок, крім тих, що належать $\mathcal{W}(\mathcal{N})$.

Означення 4.16. *Нехай $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ є додатно інваріантною множиною неперервної напівгрупи $S(t)$, тобто*

$$S(t)\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}, \qquad t \geq 0.$$

Неперервне відображення $\Phi: \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ називають функцією Ляпунова напівдинамічної системи $\big(\mathcal{X}, S(t)\big)$ на $\mathcal{Y}$, якщо справджуються такі умови:

1) *для будь-якої точки $x \in \mathcal{Y}$ відображення $t \mapsto \Phi(S(t)x)$ не зростає, $t \geq 0$;*
2) *якщо для $\tau > 0$, $x_0 \in \mathcal{X}$ виконується $\Phi(x_0) = \Phi(S(\tau)x_0)$, тоді $x_0 = S(t)x_0$, $t \geq 0$, тобто x_0 – нерухома точка напівгрупи $S(t)$.*

Напівдинамічну систему, для якої існує функція Ляпунова, називають *градієнтною*. Умова 2) в означенні 4.16 означає, що у градієнтних системах відсутні періодичні орбіти, які відмінні від положення рівноваги.

Теорема 4.12 (про структуру атрактора градієнтної системи). *Нехай неперервна напівгрупа $S(t)$ має компактний глобальний атрактор $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, а також функцію Ляпунова на $\mathcal{A}$. Тоді*

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}(\mathcal{N}).$$

Доведення. Нехай $z \in \mathcal{A}$. Тоді за теоремою 4.11 існує обмежена повна траєкторія

$$\gamma = \gamma(z) = \{u(\tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}$$

така, що $u(0) = z$, $u: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ – неперервне відображення. Визначимо α-граничну множину

$$\mathcal{A}_*(z) = \bigcap_{T<0} \overline{\bigcup_{t \leq T} u(t)}.$$

Множина $\mathcal{A}_*(z)$ складається з точок $p \in \mathcal{X}$, для яких існує послідовність $\{t_k\}$, $t_k < 0$, $k = 1,2, \dots$,

$$\lim_{k \to \infty} t_k = -\infty$$

така, що

$$p = \lim_{k \to \infty} u(t_k).$$

Оскільки $\gamma \subset \mathcal{A}$, то

$$\mathcal{B}_T = \overline{\bigcup_{t \le T} u(t)} \subset \mathcal{A}, \qquad T < 0.$$

З огляду на те, що $\mathcal{A}$ – компакт, $\mathcal{B}_T$ – замкнена множина, то $\mathcal{B}_T$ – компакт.

Сукупність компактів $\mathcal{B}_T$, $T < 0$ має непорожній перетин

$$\mathcal{A}_*(z) = \bigcap_{T<0} \mathcal{B}_T \subset \mathcal{A}.$$

Отже $\mathcal{A}_*(z)$ є непорожньою компактною множиною.

Множина $\mathcal{A}_*(z)$ – інваріантна:

$$S(t)\mathcal{A}_*(z) = \mathcal{A}_*(z), \qquad t \ge 0.$$

Крім того,

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{dist}\big(u(t), \mathcal{A}_*(z)\big) = 0.$$

Покажемо, що функція $\Phi(x)$ стала на $\mathcal{A}_*(z)$. Справді. Якщо $p \in \mathcal{A}_*(z)$, то існує послідовність $\{t_k\}$, $t_k < 0$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{k \to \infty} t_k = -\infty$$

така, що

$$p = \lim_{k \to \infty} u(t_k).$$

Оскільки $\Phi(x)$ є неперервним відображенням, то

$$\Phi(p) = \lim_{k \to \infty} \Phi\big(u(t_k)\big).$$

Але функція $\Phi(x)$ не зростає на траєкторії $\gamma \subset \mathcal{A}$, тобто

$$\Phi\big(u(t)\big) \ge \Phi\big(u(\tau)\big)$$

для будь-яких $\tau < 0$, $t < \tau$, є обмеженою на $\mathcal{A}$, тому

$$\Phi(p) = \sup\big\{\Phi\big(u(t)\big) : t < 0\big\} = \lim_{t \to -\infty} \Phi\big(u(t)\big) = a.$$

Це означає, що функція $\Phi(x)$ є сталою на $\mathcal{A}_*(z)$ і для довільної точки $p \in \mathcal{A}_*(z)$ маємо $\Phi(x) = a$. Оскільки $\mathcal{A}_*(z)$ – інваріантна множина, то

$$\Phi(S(t)p) = \Phi(p), \qquad p \in \mathcal{A}_*(z), \qquad t \ge 0.$$

А це свідчить, що $\mathcal{A}_*(z) \subset \mathcal{N}$.

Враховуючи, що

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}\big(u(t), \mathcal{A}_*(z)\big) = 0,$$

маємо

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(u(t), \mathcal{N}) = 0$$

і $z \in \mathcal{W}(\mathcal{N})$. Отже $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}(\mathcal{N})$. Як наслідок леми 4.6 отримаємо $\mathcal{A} = \mathcal{W}(\mathcal{N})$.

■

Якщо в умовах теореми 4.12 множина

$$\mathcal{N} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \mathcal{X},$$

то

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{W}(z_k).$$

Це випливає з того, що у вказаному випадку

$$\mathcal{W}(\mathcal{N}) = \bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{W}(z_k).$$

Справді, для будь-якого $z_k \in \mathcal{N}$ маємо $\mathcal{W}(z_k) = \mathcal{W}(\mathcal{N})$, тому що за означенням 4.14, якщо $z_k \in \mathcal{W}(z_k)$, то існує повна траєкторія

$$\gamma = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}, \qquad u(0) = z,$$

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = z_k, \qquad k = 1,2, \dots, m.$$

Оскільки

$$\operatorname{dist}(u(t), \mathcal{N}) \le \operatorname{dist}(u(t), z_k), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad k = 1,2, \dots, m,$$

то

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(u(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Отже, за означенням 4.15 точка $z \in \mathcal{W}(\mathcal{N})$. Звідси робимо висновок, що

$$\bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{W}(z_k) \subset \mathcal{W}(\mathcal{N}).$$

Враховуючи, що множина $\mathcal{N}$ складається зі скінченної кількості елементів, знаходимо

$$d = \min\big\{\operatorname{dist}\big(z_i, z_j\big) : i, j = 1,2, \dots, m, i \ne j\big\}.$$

Тоді $d > 0$,

$$\mathcal{N} \subset \bigcup_{k=1}^{m} O_{\frac{d}{3}}(z_k),$$

причому

$$O_{\frac{d}{3}}(z_i) \cap O_{\frac{d}{3}}(z_j) = \emptyset, \qquad i, j = 1,2, \dots, m, \qquad i \neq j.$$

Отже, множину $\mathcal{N}$ можна покрити скінченною кількістю відкритих околів, які містять лише одну точку множини $\mathcal{N}$ і не перетинаються.

Припустимо, що $z \in \mathcal{W}(\mathcal{N})$. За означенням 4.15 існує повна траєкторія

$$\gamma(z) = \{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

така, що $u(0) = z$,

$$\lim_{t \to -\infty} \operatorname{dist}(u(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Це означає, що для $\varepsilon \leq d/3$, $\varepsilon > 0$, існує $T > 0$ таке, що при $t \leq -T$ справджується

$$u(t) \in O_\varepsilon(\mathcal{N}) = \bigcup_{k=1}^{m} O_\varepsilon(z_k).$$

Оскільки

$$O_\varepsilon(z_i) \cap O_\varepsilon(z_j) = \emptyset, \qquad i, j = 1,2, \dots, m, \qquad i \neq j,$$

та відображення $u : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ неперервне, то існує лише одна точка $z_k \in \mathcal{N}$ така, що

$$u(t) \in O_\varepsilon(z_k)$$

для всіх $t \leq -T$. Якщо це не так, то знайдуться точки

$$t_2 < t_1 \leq -T$$

такі, що

$$u(t_1) \in O_\varepsilon(z_k), \qquad u(t_2) \in O_\varepsilon(z_k), \qquad j \neq k.$$

Множина

$$O_\varepsilon(\mathcal{N}) = \bigcup_{i=1}^{m} O_\varepsilon(z_i)$$

є m-зв'язною, відтак існує $\tau \in (t_1, t_2)$ таке, що

$$u(\tau) \notin \bigcup_{i=1}^{m} O_\varepsilon(z_i).$$

Проте це суперечить включенню $u(t) \in O_\varepsilon(\mathcal{N})$, $t \le -T$. Тому

$$u(t) \in O_\varepsilon(z_k), \qquad t \le -T.$$

Звідси випливає

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(u(t), z_k) = 0.$$

Отже, за означенням 4.14

$$z \in \mathcal{W}(z_k) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{W}(z_i).$$

Відтак отримаємо

$$\mathcal{W}(\mathcal{N}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{W}(z_i).$$

Наведемо такі означення.

Означення 4.17. *Стійкою множиною точки $z_0 \in \mathcal{X}$ називають сукупність $\mathcal{W}^s(z_0) \subset \mathcal{X}$ елементів $z \in \mathcal{X}$ таких, що*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)z, z_0) = 0.$$

Означення 4.18. *Стійкою множиною множини $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ називають сукупність $\mathcal{W}^s(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$ елементів $z \in \mathcal{X}$ таких, що*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)z, \mathcal{Y}) = 0.$$

Можна показати: якщо $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ є компактним глобальним атрактором неперервної напівгрупи $S(t)$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{X}$ – сукупність точок рівноваги $S(t)$, то

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}^s(\mathcal{N}).$$

Якщо $\mathcal{N}$ складається зі скінченної кількості точок

$$\mathcal{N} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\},$$

то

$$\mathcal{A} = \mathcal{W}^s(\mathcal{N}) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{W}^s(z_i).$$

У цьому випадку глобальний атрактор побудовано з таких точок $z \in \mathcal{X}$, що

$$\lim_{t \to -\infty} S(t)z = z_-, \quad \lim_{t \to +\infty} S(t)z = z_+,$$

де $z_-, z_+ \in \mathcal{N}$. Це означає, що атрактор складається з точок, які належать повним траєкторіям напівгрупи $S(t)$ таким, що їхні кінці асимптотично наближаються до нерухомих точок.

Наступна лема показує, що починаючи з достатньо великого моменту часу, будь-яка траєкторія неперервної напівгрупи подібна до траєкторії цієї напівгрупи на атракторі.

Лема 4.7. *Припустимо, що неперервна напівгрупа* $S(t)$ *має глобальний атрактор* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. *Тоді для* $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ *і* $T > 0$ *існує момент часу* $\tau = \tau(\varepsilon, T) > 0$, *а також точка* $v_0 \in \mathcal{A}$ *такі, що*

$$\operatorname{dist}(u(\tau + t), S(t)v_0) < \varepsilon, \qquad t \in [0, T].$$

Означення 4.19. *Додатно інваріантну множину* $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ *неперервної напівгрупи* $S(t)$ *називають стійкою за Ляпуновим, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться* $\delta > 0$, *для якого*

$$S(t)O_\delta(\mathcal{M}) \subset O_\varepsilon(\mathcal{M})$$

для всіх $t > 0$.

Теорема 4.13 (про стійкість атрактора). *Припустимо, що* $S(t)$ *має компактний глобальний атрактор* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. *Тоді* $\mathcal{A}$ *є стійким за Ляпуновим.*

Доведення. Від супротивного. Нехай існує $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого $k = 1,2,\ldots$ можна вибрати $t_k > 0$, для якого

$$S(t_k)O_{\frac{1}{k}}(\mathcal{A}) \not\subset O_\varepsilon(\mathcal{A}).$$

Це означає, що існують такі

$$x_k \in O_{\frac{1}{k}}(\mathcal{A}),$$

що

$$S(t_k)x_k \notin O_\varepsilon(\mathcal{A}), \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Виберемо точки $z_k \in \mathcal{A}$ з умови

$$\operatorname{dist}(x_k, z_k) = \operatorname{dist}(x_k, \mathcal{A}) < \frac{1}{k}, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Оскільки $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ – компакт, то з послідовностей

$$\{z_k\} \subset \mathcal{A}, \qquad \{x_k\}, \qquad \{t_k\}$$

виберемо підпослідовність

$$\left\{z_k^{(1)}\right\} \subset \mathcal{A}, \qquad \left\{x_k^{(1)}\right\}, \qquad \left\{t_k^{(1)}\right\}$$

такі, що послідовність $\left\{z_k^{(1)}\right\}$ збігається до деякої точки $x \in \mathcal{A}$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} z_k^{(1)} = x.$$

Тоді

$$\operatorname{dist}\left(x_k^{(1)}, x\right) \le \operatorname{dist}\left(x_k^{(1)}, z_k^{(1)}\right) + \operatorname{dist}\left(z_k^{(1)}, x\right) \le$$

$$\le \frac{1}{k} + \operatorname{dist}\left(z_k^{(1)}, x\right), \qquad k = 1,2,\dots .$$

Отже

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(1)} = x.$$

За означенням глобального атрактора (означення 4.11)

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)O_1(\mathcal{A}), \mathcal{A}) = 0.$$

Це означає, що для вибраного вище $\varepsilon > 0$ знайдеться $T > 0$ таке, що

$$S(t)O_1(\mathcal{A}) \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}), \qquad t > T.$$

З огляду на те, що

$$S(t)O_{\frac{1}{k}}(\mathcal{A}) \subset S(t)O_1(\mathcal{A}), \qquad t > T,$$

маємо

$$S(t)O_{\frac{1}{k}}(\mathcal{A}) \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}), \qquad t > T,\ \ k = 1,2,\dots .$$

Враховуючи спосіб конструювання послідовності $\left\{t_k^{(1)}\right\}$, робимо висновок, що

$$t_k^{(1)} \in [0, T], \qquad k = 1,2,\dots .$$

З послідовностей $\left\{x_k^{(1)}\right\}$, $\left\{t_k^{(1)}\right\}$ виокремлюємо підпослідовності $\left\{x_k^{(2)}\right\}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}$ такі, що

$$\lim_{k\to\infty} t_k^{(2)} = \tau,\ \ \tau \in [0, T].$$

Зауважимо,

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(2)} = x \in \mathcal{A}.$$

Оскільки напівгрупа $S(t)$ неперервна, то

$$\lim_{k\to\infty} S\left(t_k^{(2)}\right) x_k^{(2)} = S(\tau)x.$$

З огляду на те, що $x \in \mathcal{A}$ і $S(\tau)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, маємо

$$\lim_{k\to\infty} S\left(t_k^{(2)}\right) x_k^{(2)} \in \mathcal{A}.$$

Але, враховуючи припущення, яке ми зробили:

$$S\left(t_k^{(2)}\right) x_k^{(2)} \notin O_\varepsilon(\mathcal{A}), \qquad k = 1,2, \dots .$$

Одержали протиріччя, яке показує, що припущення неправильне і глобальний атрактор $\mathcal{A}$ стійкий за Ляпуновим.

■

Розглянемо проблему стійкості атрактора відносно збурень напівдинамічної системи. Припустимо, що неперервна напівгрупа $S_0(t)$ визначена на фазовому просторі $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{X}$ – глобальний атрактор цієї напівгрупи. На фазовому просторі $\mathcal{X}$ визначено сім'ю неперервних напівгруп $S_\mu(t)$, $\mu \in (0, \mu_0)$, яку ми назвемо *збуреною*, $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{X}$ – глобальний атрактор напівгрупи $S_\mu(t)$, $\mu \in (0, \mu_0)$. Справедлива така теорема.

Теорема 4.14. *Припустимо, що існує обмежена множина* $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ *така, що* $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{B}$ $\mu \in (0, \mu_0)$,

$$\lim_{\mu\to 0} \sup_{u\in\mathcal{B}} \operatorname{dist}\big(S_\mu(t)u, S_0(t)u\big) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{\mu\to 0} \operatorname{dist}\big(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_0\big) = 0.$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{X}$ є глобальним атрактором неперервної напівгрупи $S(t)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S_0(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}_0) = 0.$$

Це означає, що для $\varepsilon > 0$ знайдеться $T > 0$ таке, що для $t \geq T$ справджується включення

$$S_0(t)\mathcal{B} \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathcal{A}_0).$$

За умовами теореми існує таке $\mu(\varepsilon) \in (0, \mu_0)$, що для всіх $\mu \in \big(0, \mu(\varepsilon)\big)$

$$\sup_{u \in \mathcal{B}} \operatorname{dist}\big(S_\mu(T)u, S_0(T)u\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За означенням напівметрики Гаусдорфа

$$\operatorname{dist}\big(S_\mu(T)\mathcal{B}, S_0(T)\mathcal{B}\big) = \sup_{u \in \mathcal{B}} \operatorname{dist}\big(S_\mu(T)u, S_0(T)\mathcal{B}\big) \leq$$
$$\leq \sup_{u \in \mathcal{B}} \operatorname{dist}\big(S_\mu(T)u, S_0(T)u\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому

$$S_\mu(T)\mathcal{B} \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(S_0(T)\mathcal{B}),$$

де $\mu \in \big(0, \mu(\varepsilon)\big)$.

Враховуючи означення глобального атрактора (означення 4.11) і умови теореми, маємо

$$\mathcal{A}_\mu = S_\mu(T)\mathcal{A}_\mu \subset S_\mu(T)\mathcal{B}, \qquad \mu \in \big(0, \mu(\varepsilon)\big).$$

Але

$$S_\mu(T)\mathcal{B} \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(S_0(T)\mathcal{B}) \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}_0), \qquad \mu \in \big(0, \mu(\varepsilon)\big),$$

і, як наслідок,

$$\mathcal{A}_\mu \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}_0), \qquad \mu \in \big(0, \mu(\varepsilon)\big).$$

Це означає, що

$$\operatorname{dist}\big(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_0\big) < \varepsilon, \qquad \mu \in \big(0, \mu(\varepsilon)\big).$$

Теорему доведено.

■

Теорема 4.14 показує, що глобальний атрактор не може "вибухнути" за малих збурень.

Для градієнтних систем можна отримати неперервну залежність глобального атрактора від параметра в метриці Гаусдорфа. Наприклад, якщо справджуються умови теореми 4.14 і глобальний атрактор $\mathcal{A}_0$ є об'єднанням скінченної кількості нестійких многовидів нерухомих точок, причому многовиди неперервно (в метриці Гаусдорфа) залежать від параметра μ в околі нуля, то

$$\lim_{\mu \to 0} h\big(\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_0\big) = 0.$$

Теорема 4.14 дає можливість зменшувати розмірність фазового простору під час побудови глобального атрактора системи.

Теорема 4.15 (принцип редукції). *Припустимо, що для дисипативної неперервної напівгрупи*

$$\{S(t)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}\}_{t\geq 0}$$

існує додатно інваріантна локально компактна множина $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$, *яка є рівномірно притягувальною, тобто для будь-якої обмеженої множини* $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ *справджується*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{M}) = 0.$$

Якщо $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ *є глобальним атрактором напівгрупи* $\{S(t)\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}\}_{t\geq 0}$, *то* $\mathcal{A}$ *є глобальним атрактором напівгрупи* $\{S(t)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}\}_{t\geq 0}$.

Доведення. Покажемо, що

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = 0$$

для будь-якої обмеженої множини $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$. Від супротивного. Припустимо, що існують обмежена множина $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$, $\delta > 0$ і послідовності $\{x_k\} \subset \mathcal{B}$, $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1,2,\dots$,

$$\lim_{t\to+\infty} t_k = +\infty$$

такі, що

$$\operatorname{dist}(S(t_k)x_k, \mathcal{A}) \geq \delta, \qquad k = 1,2,\dots .$$

Напівгрупа $\{S(t)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}\}_{t\geq 0}$ дисипативна. Тому існує обмежена поглинальна множина $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ (означення 4.9). Оскільки $\mathcal{A}$ є глобальним атрактором напівгрупи $\{S(t)\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}\}_{t\geq 0}$, $\overline{\mathcal{B}}_0 \cap \mathcal{M}$ – обмежена множина, яка належить $\mathcal{M}$, то

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)(\overline{\mathcal{B}}_0 \cap \mathcal{M}), \mathcal{M}) = 0.$$

Це означає, що знайдеться момент часу $T_0 > 0$, для якого

$$\operatorname{dist}(S(t)(\overline{\mathcal{B}}_0 \cap \mathcal{M}), \mathcal{M}) \leq \frac{\delta}{2}, \qquad t \geq T_0.$$

З огляду на умови теореми

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{M}) = 0,$$

тому

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(S(t_k - T_0)x_k, \mathcal{M}) = 0.$$

З умов дисипативності напівгрупи $S(t)$ випливає, що знайдеться такий номер k_0, що

$$z_k = S(t_k - T_0)x_k \in \mathcal{B}_0 \subset O_R(0),$$

де $k \geq k_0$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$ – обмежена поглинальна множина (означення 4.9), $R > 1$.

Оскільки

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(z_k, \mathcal{M}) = 0,$$

то з послідовності $\{z_k\}$, можна виділити таку підпослідовність, яку ми знову позначимо як $\{z_k\}$, що

$$\operatorname{dist}(z_k, \mathcal{M}) < \frac{1}{k}, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Це означає, що існують точки $y_k \in \mathcal{M}$ такі, що

$$\operatorname{dist}(z_k, y_k) < \frac{1}{k} < R, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Отже, $y_k \in \mathcal{M}$ і

$$\operatorname{dist}(y_k, 0) \leq \operatorname{dist}(y_k, z_k) + \operatorname{dist}(z_k, 0) < 2R, \qquad k = 1,2, \dots .$$

У такий спосіб ми показали, що

$$y_k \in \overline{O_{2R}(0)} \cap \mathcal{M}, \qquad k = 1,2, \dots .$$

Знаємо, що $\mathcal{M}$ – локально компактна множина, тому її перетин із будь-яким замкненим околом є компактом. Тому з послідовностей $\{y_k\}$, $\{z_k\}$ можна виокремити підпослідовності $\{y_{k_m}\}$, $\{z_{k_m}\}$ такі, що

$$\lim_{m\to\infty} y_{k_m} = z \in \overline{O_{2R}(0)} \cap \mathcal{M}.$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{dist}(z_{k_m}, z) \leq \operatorname{dist}(y_{k_m}, z_k) + \operatorname{dist}(y_{k_m}, z_{k_m}),$$

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{dist}(y_{k_m}, z_k) = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \operatorname{dist}(y_{k_m}, z_{k_m}) = 0,$$

ми з послідовності $\{z_k\}$ виділили збіжну підпослідовність $\{z_{k_m}\}$, яка збігається до точки $z \in \mathcal{M}$.

З огляду на те, що $z_{k_m} \in \mathcal{B}_0$, $m = 1,2, \dots$, доходимо висновку:

$$z \in \overline{\mathcal{B}}_0 \cap \mathcal{M}.$$

Оскільки

$$z = \lim_{m\to\infty} z_{k_m} = \lim_{m\to\infty} S\big(t_{k_m} - T_0\big) x_{k_m},$$

то

$$S(T_0) = \lim_{m\to\infty} S\big(t_{k_m}\big) x_{k_m}.$$

Відтак маємо

$$\operatorname{dist}(S(T_0)z, \mathcal{A}) = \lim_{m\to\infty} \operatorname{dist}\big(S\big(t_{k_m}\big)x_{k_m}, \mathcal{A}\big) \geq \delta,$$

де $z \in \overline{\mathcal{B}}_0 \cap \mathcal{M}$.

Але вище ми довели, що

$$\operatorname{dist}(S(t)(\overline{\mathcal{B}}_0 \cap \mathcal{M}), \mathcal{M}) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Одержали протиріччя.

■

Приклад 4.13 (система Хопфа):

$$\begin{cases} \dot{u} + \mu u + v^2 + w^2 = 0, \\ \dot{v} + \upsilon v - v u - \beta w = 0, \\ \dot{w} + \upsilon w - w u + \beta v = 0. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Цю систему запропоновано Е. Хопфом для опису можливих механізмів появи турбулентності. Тут μ – додатний параметр, υ та β – дійсні параметри. Оскільки права частини системи є поліноміальною, а отже, локально ліпшицевою, то задача Коші для (4.11) має локальний розв'язок для будь-яких початкових умов. Проведемо якісний аналіз цієї системи, використовуючи наведені вище результати за схемою, запропонованою І. Д. Чуєшовим [18].

Покажемо, що динамічна система, породжена рівняннями (4.11), є дисипативною. Із цього також випливатиме її глобальна розв'язність. Уведемо нову невідому функцію $u^* = u + \mu/2 - \upsilon$. Тоді систему (4.11) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{u}^* + \mu u^* + v^2 + w^2 = \mu\left(\frac{\mu}{2} - \upsilon\right), \\ \dot{v} + \frac{1}{2}\mu v - v u^* - \beta w = 0, \\ \dot{w} + \frac{1}{2}\mu w - w u^* + \beta \upsilon = 0. \end{cases}$$

З отриманої системи слідує, що

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u^*|^2+|v|^2+|w|^2)+\mu|u^*|^2+\frac{\mu}{2}(|v|^2+|w|^2)=$$
$$=\mu\left(\frac{\mu}{2}-\upsilon\right)u^*$$

на будь-якому інтервалі існування розв'язків. Звідси

$$\frac{d}{dt}(|u^*|^2+|v|^2+|w|^2)+\mu(|u^*|^2+|v|^2+|w|^2)\le\mu\left(\frac{\mu}{2}-\upsilon\right)^2.$$

Розв'язуємо диференціальну нерівність і одержимо

$$|u^*(t)|^2+|v(t)|^2+|w(t)|^2\le$$
$$\le(|u^*(0)|^2+|v(0)|^2+|w(0)|^2)e^{-\mu t}+$$
$$+\left(\frac{\mu}{2}-\upsilon\right)^2(1-e^{-\mu t}).$$

По-перше, ця нерівність дозволяє нам довести глобальну розв'язність задачі (4.11) для будь-яких початкових умов. По-друге, це означає, що множина

$$\mathcal{B}_0=\left\{(u,v,w):\left(u+\frac{\mu}{2}-\upsilon\right)^2+v^2+w^2\le 1+\left(\frac{\mu}{2}-\upsilon\right)^2\right\}$$

є поглинальною для напівдинамічної системи $(S(t),\mathbb{R}^3)$, породженої системою (4.11). Таким чином, теорема 4.9 гарантує існування глобального атрактора $\mathcal{A}$, який є компактною, інваріантною, зв'язною множиною в $\mathbb{R}^3$.

Опишемо структуру глобального атрактора $\mathcal{A}$. Вводимо полярні координати

$$v(t)=r(t)\cos\varphi(t)\,,\qquad w(t)=r(t)\sin\varphi(t)$$

на площині змінних (v,w). У результаті система (4.11) перетворюється на систему вигляду

$$\begin{cases}\dot u+\mu u+r^2=0,\\ \dot r+\upsilon r-ur=0,\end{cases}\qquad(4.12)$$

причому, $\varphi(t)=-\beta t+\varphi_0$. Система (4.12) має нерухому точку $u=0, r=0$ для всіх $\mu>0$ і $\upsilon\in\mathbb{R}$. Якщо $\upsilon<0$, то система (4.12) має ще одну нерухому точку $u=\upsilon, r=\sqrt{-\mu\upsilon}$. Це відповідає періодичній траєкторії (граничному циклу) початкової задачі (4.11).

Застосовуючи апарат теорії стійкості, можна показати, що точка $(0{,}0)$ є стійким вузлом системи (4.12), коли $\upsilon > 0$, і сідлом, коли $\upsilon < 0$, а точка $u = \upsilon$, $r = \sqrt{-\mu\upsilon}$ є стійким вузлом, якщо $-\frac{\mu}{8} < \upsilon < 0$, та стійким фокусом, якщо $\upsilon < -\frac{\mu}{8}$.

Якщо $\upsilon > 0$, то із системи (4.12) випливає

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^2 + r^2) + \min(\mu, \upsilon)\,(u^2 + r^2) \le 0.$$

Розв'язуємо диференціальну нерівність

$$|u(t)|^2 + |r(t)|^2 \le |u(0)|^2 + |r(0)|^2 e^{-2\min(\mu,\upsilon)t}.$$

Отже, для $\upsilon > 0$ глобальний атрактор $\mathcal{A}$ системи $(S(t), \mathbb{R}^3)$ складається з єдиної стаціонарної експоненціально притягувальної точки

$$u = 0, v = 0, w = 0.$$

Для $\upsilon = 0$ глобальний атрактор залишається тривіальним, тобто складається з єдиної нерухомої точки $u = 0, v = 0, w = 0$, проте вже не є експоненціально притягувальним.

Розглянемо випадок, коли $\upsilon < 0$. Знову повернемося до задачі (4.12). Зрозуміло, що пряма $r = 0$ є стійким многовидом нерухомої точки $u = 0, r = 0$. Більше того, якщо $r(t_0) > 0$, тоді значення $r(t)$ залишаються додатними для всіх $t > t_0$. Тому функція

$$V(u, r) = \frac{1}{2}(u - \upsilon)^2 + \frac{1}{2}r^2 + \mu\upsilon \ln r \tag{4.13}$$

визначена на всіх траєкторіях, початкова точка яких не лежить на прямій $r = 0$. Справджуються співвідношення

$$\frac{d}{dt}\Big(V\big(u(t), r(t)\big)\Big) + \mu(u(t) - \upsilon)^2 = 0 \tag{4.14}$$

та

$$V(u, r) \ge V(\nu, \sqrt{-\mu\upsilon}) + \frac{1}{2}(|u - \upsilon|^2 + |r - \sqrt{-\mu\upsilon}|^2); \tag{4.15}$$

$$V\big(\nu, \sqrt{-\mu\upsilon}\big) = \frac{1}{2}\mu|\upsilon| \ln\left(\frac{e}{\mu|\upsilon|}\right).$$

З рівняння (4.14) випливає, що функція $V(u, r)$ не зростає вздовж траєкторій. Тому будь-яка півтраєкторія

$$\big\{\big(u(t), r(t)\big), t \in \mathbb{R}_+\big\},$$

що виходить з точки (u_0, r_0), $r_0 \neq 0$, має властивість $V\big(u(t), r(t)\big) \leq V(u_0, r_0)$ для $t \geq 0$. Із цього випливає, що вказана півтраєкторія не може наблизитися до прямої $r = 0$ на відстань меншу, ніж $\exp\{[1/(\mu\upsilon)] \cdot V(u_0, r_0)\}$. Отже, ця півтраєкторія прямує до $\bar{y}(u, r)$, де $u = \upsilon$, $r = \sqrt{-\mu\upsilon}$.

До того ж, для будь-якого $\xi \in \mathbb{R}$ множина

$$\mathcal{B}_\xi = \{y = (u, r) \colon V(u, r) \leq \xi\}$$

рівномірно притягується до $\bar{y}$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує момент $t_0 = t_0(\xi, \varepsilon)$ такий, що для всіх $t \geq t_0$

$$S(t)\mathcal{B}_\xi \subset \{y \colon |y - \bar{y}| \leq \varepsilon\}.$$

Справді, якщо це не так, то існують $\varepsilon_0 > 0$ і послідовності $t_k \to +\infty$, $z_k \in \mathcal{B}_\xi$ такі, що $|S(t_k)z_k - \bar{y}| > \varepsilon$. З монотонності та властивості (4.15) слідує, що

$$V(S(t)z_n) \geq V(S(t_k)z_k) \geq V\big(v, \sqrt{-\mu\upsilon}\big) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2$$

для всіх $0 \leq t \leq t_k$. Нехай z буде граничною точкою послідовності $\{z_k\}$. Тоді після переходу до границі знаходимо

$$V(S(t)z) \geq V\big(v, \sqrt{-\mu\upsilon}\big) + \frac{1}{2}\varepsilon_0^2, \qquad t \geq 0,$$

для z, які не належать множині $r = 0$. Звідси, остання нерівність не виконується з того моменту, як $S(t)z \to \bar{y}$. Отже

$$\lim_{t\to\infty} \sup\big\{\mathrm{dist}\,(S(t)y, \bar{y}) \colon y \in \mathcal{B}_\xi\big\} = 0. \tag{4.16}$$

Якісну поведінку розв'язків системи (4.12) зображено на рис. 4.13 [18].

Зокрема і наведені вище міркування показують, що точковий атрактор напівдинамічної системи $(S(t), \mathbb{R}^3)$, породженої системою (4.11), складається із сідлової точки $u = 0, v = 0, w = 0$ та стійкого граничного циклу

$$\mathcal{C}_\upsilon = \{(u, v, w) \colon u = \upsilon,\ v^2 + w^2 = -\mu\upsilon\} \tag{4.17}$$

для $\upsilon < 0$. Крім цього з (4.16) випливає, що цикл $\mathcal{C}_\upsilon$ рівномірно притягує всі обмежені множини $\mathcal{B}$ у $\mathbb{R}^3$, що мають таку властивість:

$$d = \inf\{v^2 + w^2 \colon (u, v, w) \in \mathcal{B}\} > 0, \tag{4.18}$$

тобто, які лежать на додатній відстані від прямої $v = 0, w = 0$.

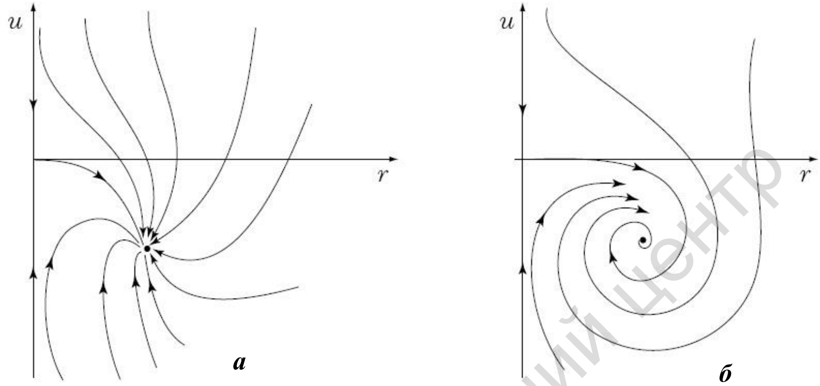


Рис. 4.13. Якісна поведінка розв'язків системи (4.12):
а $-\mu/8 < \upsilon < 0$, ***б*** – $\upsilon < -\mu/8$

Утім можна показати, що таке притягування буде експоненціальним, тобто

$$\operatorname{dist}\left(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{C}_\upsilon\right) \le Ce^{-\gamma(t-t_{\mathcal{B}})}$$

для $t \ge t_{\mathcal{B}}$, де γ – додатна стала.

Далі нехай $y_0 = (u_0, v_0, w_0)$ міститься у глобальному атракторі $\mathcal{A}$ системи $(S(t), \mathbb{R}^3)$. Припустимо, що $r_0 \ne 0$ і $r_0^2 = v_0^2 + w_0^2 \ne -\mu\upsilon$. Тоді за теоремою про структуру глобального атрактора (теорема 4.11) існує траєкторія

$$\gamma = \{y(t) = \left(u(t), v(t), w(t)\right): t \in \mathbb{R}\},$$

що лежить в $\mathcal{A}$, така, що $y(0) = y_0$. Проведений вище аналіз показує, що $y(t) \to \mathcal{C}_\upsilon$ при $t \to +\infty$. Покажемо, що $y(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Справді, бачимо, що функція $V\left(u(t), r(t)\right)$ монотонно не спадає при $t \to -\infty$. Міркуючи від супротивного, використовуємо той факт, що вказана траєкторія є обмеженою і пересвідчуємось, що

$$\lim_{t \to -\infty} V\left(u(t), r(t)\right) = \infty,$$

і тому

$$r(t) = (|v(t)|^2 + |w(t)|^2)^{1/2} \to 0 \text{ при } t \to -\infty. \qquad (4.19)$$

З першого рівняння системи (4.12) отримуємо

$$u(t) = e^{-\mu(t-\tau)}u(s) - \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)}[r(\tau)]^2 d\tau. \qquad (4.20)$$

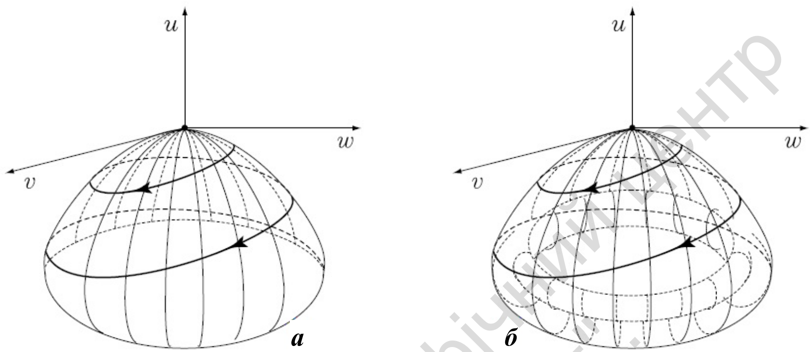


Рис. 4.14. Атрактор системи (4.11): ***а*** $-\mu/8 < \upsilon < 0$, ***б*** $-\upsilon < -\mu/8$

Оскільки $u(s)$ – обмежена для всіх $s \in \mathbb{R}$, ми можемо для $s \to -\infty$ отримати рівняння

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-\tau)}[r(\tau)]^2 d\tau.$$

Отже, в силу (4.19) одержуємо $u(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Це означає, що $y(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. Тому для $\upsilon < 0$ глобальний атрактор $\mathcal{A}$ системи $(S(t), \mathbb{R}^3)$ збігається з об'єднанням нестійкого многовиду $\mathcal{W}(0)$, що виходить з точки $u = 0,\ v = 0,\ w = 0$, та граничного циклу (4.17), рис. 4.14 [18].

4.6. Дивний атрактор

Чи можна прогнозувати хаотичний рух елементів будь-якої системи? Від чого залежить хаотична динаміка? Чи може, нарешті, помах крила метелика викликати торнадо? Важливі відповіді на ці та інші питання знайшов американський метеоролог Е. Лоренц, (мимовільний) автор терміна "ефект метелика" і творець "дивного атрактора". Коротко зупинимося на одному з визначних відкриттів у теорії диференціальних рівнянь.

1972 р. професор метеорології з Массачусетського технологічного інституту Лоренц збирався виступити на конференції, але в запалі роботи не встиг відправити тему своєї лекції. Організатор, який поспішав розіслати запрошення, вибрав заголовок за нього: "Передбачуваність: чи може помах крила метелика у Бразилії викликати торнадо в Техасі?" Так і з'явився термін "ефект метелика", відомий сьогодні всьому світу.

У своєму виступі Лоренц виокремив кілька ключових ідей:

- якщо помах крила метелика може викликати торнадо, то точно так само на це здатні всі попередні і майбутні помахи, так само як і помахи інших мільйонів метеликів, не кажучи вже про активність усієї популяції нашої планети;
- якщо помах крила метелика здатний викликати торнадо, то так само цей помах може йому запобігти.

Помах крила метелика в цьому контексті має сприйматися як маленька зміна початкових умов системи, що здатна як викликати торнадо, так і змінити його траєкторію, або взагалі стати причиною його загасання. На відміну від ефекту доміно, де конкретне (зазвичай незначне) збурення призводить до конкретного (зазвичай значного) результату, причому відбувається це однозначно, помах крила метелика може не мати жодного впливу на поведінку торнадо.

Лоренц вивчав конвекцію (теплообмін, що виникає завдяки руху молекул рідини або газу) в атмосфері Землі. Для опису подібних фізичних процесів часто користуються моделлю, яка включає рівняння Нав'є – Стокса, що описує рух в'язкої ньютонівської рідини. За винятком окремих випадків, його розв'язки в загальному вигляді нині невідомі. Модель містить такі складові:

- рівняння Нав'є – Стокса;
- рівняння теплопровідності, що описує розподіл температури у просторі з плином часу;
- рівняння неперервності, яке, за своєю суттю, описує принцип збереження маси.

Лоренцу вдалося побудувати спрощення цієї моделі у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \tag{4.20}$$

де σ, r, b – додатні параметри, $\sigma > b + 1$ (наприклад, $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$).

У (4.20) змінна x відповідає за інтенсивність конвекції, y відображає різницю між температурами висхідних і низхідних потоків, z характеризує відхилення вертикального температурного профілю від лінійної залежності, $\sigma > 1$ – число Прандтля (критерій подібності теплових процесів у рідинах і газах), $\rho > 0$ – число Релея (відображає поведінку рідини під впливом градієнта температури), $\beta > 0$ – число, що описує геометрію конвективної комірки (впорядкованості у вигляді конвективних комірок у формі циліндричних валів або правильних шестигранних структур, яка виникає під дією конвективних потоків).

За допомогою цієї системи рівнянь можна розрахувати, як буде вести себе плинне середовище, яке рівномірно розігрівають знизу й охолоджують зверху, наприклад, як це відбувається з повітряними потоками в атмосфері. Зокрема, вказана система дозволяє зрозуміти, до якого результату призведе навіть невелика зміна початкових параметрів.

Щоб перейти до безпосереднього аналізу отриманої системи, спочатку розглянемо деякі комбінації траєкторій. Для наочності, скористаємося тими ж значеннями параметрів, що і сам Лоренц: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.

Зобразимо рух двох точок $P_0 = (0; 1; 1)$, $P_1 = (0; 1; 1{,}01)$, відстань між якими спочатку невелика. Отримаємо досить цікавий результат! Спочатку траєкторії майже неможливо розрізнити, потім вони відхиляються зовсім ненабагато, після чого різниця стає вже значною (рис. 4.15).

Візьмемо точки $P_0 = (-25; 20; -15)$, $P_1 = (-15; 40; 15)$ на значній відстані одна від одної (рис. 4.16). Навіть незважаючи на таку різницю початкових умов, траєкторії потрапляють на фігуру, яку з плином часу не покидають. Спостерігається дивний ефект, їх ніби щось притягує. Цю фігуру так і називають – *дивним атрактором Лоренца*.

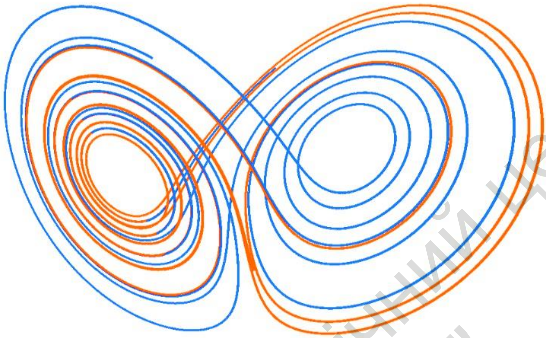


Рис. 4.15. Траєкторії системи Лоренца для точок $P_0 = (0{,}1{,}1)$, $P_1 = (0;1;1{,}01)$

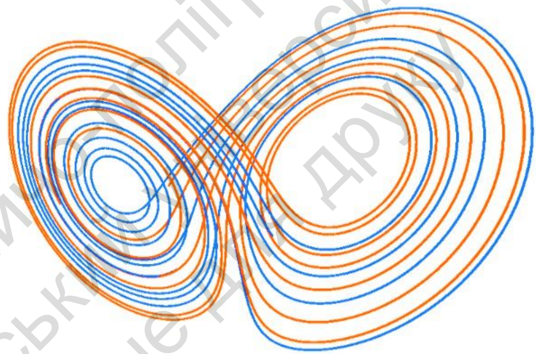


Рис. 4.16. Траєкторії системи Лоренца для точок $P_0 = (-25;20;-15)$, $P_1 = (-15;40;15)$

Слово "*дивний*" тут виступає в такому сенсі: *атрактор як множина не може бути представленим у вигляді кривої або поверхні, він має складнішу, фрактальну структуру*.

Варто зазначити, що *дві траєкторії, які виходять з близьких точок, із часом розбігаються досить далеко одна від одної*. Причому, щоб віддалити момент розбігання, наприклад, на одну секунду, потрібно зменшити відстань між початковими точками, скажімо, удвічі. А щоб на дві секунди – учетверо. А на три – у вісім разів, і т. д. Це означає, що навіть використовуючи потужний комп'ютер, ми не можемо розрахувати траєкторію, яка проходить поблизу атрактора, з розумною точністю упродовж тривалого проміжку часу. На кожному кроці обчислень неминуче вносяться помилки (через округлення чисел і похибки числових методів), які швидко накопичуються і призводять до того, що знайдена траєкторія значно відрізняється від справжньої.

Таке спотворення неможливо виправити, просто збільшуючи потужність комп'ютера. Подібне явище називають "*динамічним хаосом*".

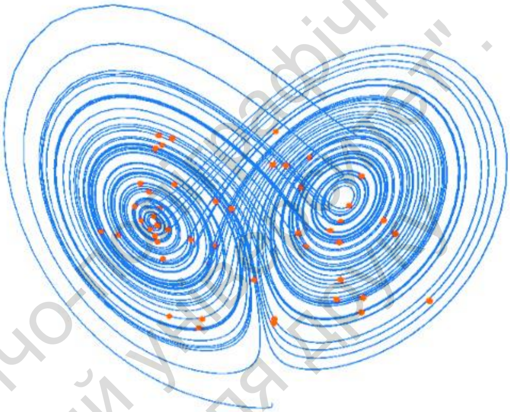


Рис. 4.17. Ілюстрація "динамічного хаосу", породженого системою Лоренца

На рис. 4.17 проілюстровано, як рухаючись фазовими траєкторіями, точки, що почали рух із досить близького околу, "розбігаються" фазовою площиною в деякий момент часу t_k.

Якщо $\rho < 1$, то існує один стан рівноваги системи Лоренца в початку координат, а коли $\rho \geq 1$, то маємо три стани рівноваги:

$$E_0: x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0;$$

$$E_1: x = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \qquad y = -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \qquad z = \rho - 1;$$

$$E_2: x = \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \qquad y = \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \qquad z = \rho - 1.$$

Точка $E_0 = (0,0,0)^T$ *при* $\rho < 1$ *– асимптотично стійке положення рівноваги; при* $\rho > 1$ *– нестійке. При* $\rho = 0$ *маємо критичний випадок, оскільки у характеристичного полінома системи першого наближення існує нульовий корінь.*

Розглянемо фізичну інтерпретацію одержаного результату. За малих значень параметра ρ передача теплоти відбувається за допомогою теплопровідності, а рідина нерухома. Якщо $\rho = 1$, стан $E_0 = (0,0,0)^T$ міститься *на межі стійкості* – теплопровідність віддає першість конвекції. Якщо $\rho > 1$, у рідині виникають конвекційні вали (комірки Релея – Бенара), стан системи стає нестійким.

Положення рівноваги E_1 та E_2 є одночасно стійкими або одночасно нестійкими. Причому асимптотична стійкість справджується у випадку

$$\sigma - \beta - 1 \leq 0$$

або

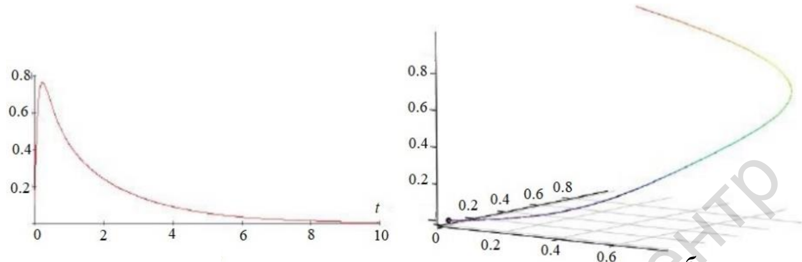
$$\sigma - \beta - 1 > 0, \qquad \rho < \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1}.$$

Якщо $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, то значення

$$\frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} = 24{,}74.$$

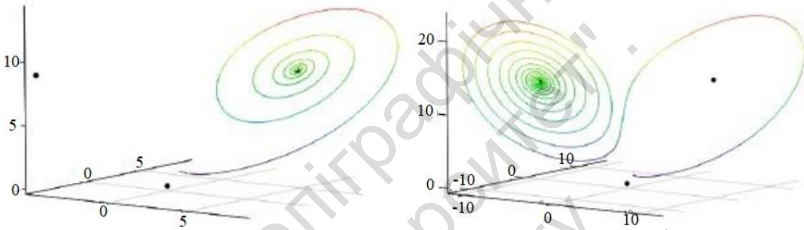
Спостерігатимемо, як зміниться динаміка системи Лоренца, якщо підтримувати значення параметрів $\sigma = 10$ та $\beta = 8/3$ сталими та збільшувати, починаючи з нуля, параметр ρ, який характеризує міру підігріву [11]. Якщо $0 < \rho < 1$, то точка $E_0 = (0,0,0)^T$ є єдиним асимптотично стійким станом рівноваги, що притягує до себе всі траєкторії у фазовому просторі.

На рис. 4.18, а показано залежність $x(t)$ при $\rho = 0{,}5$ і початковому стані системи $(x(0), y(0), z(0)) = (0{,}1;\ 1;\ 1)$. Початковий рух у рідині затухає, тобто відсутня конвекція і перенесення теплоти відбувається завдяки теплопровідності. На рис. 4.18, б показано відповідну фазову траєкторію. На рис. 4.19, а та 4.19, б зображено фазові траєкторії для $\rho = 10$ та $\rho = 15$, відповідно.



а ***б***

Рис. 4.18. Для $\rho = 0{,}5$: ***а*** – графік функції $x(t)$;
б – фазова траєкторія



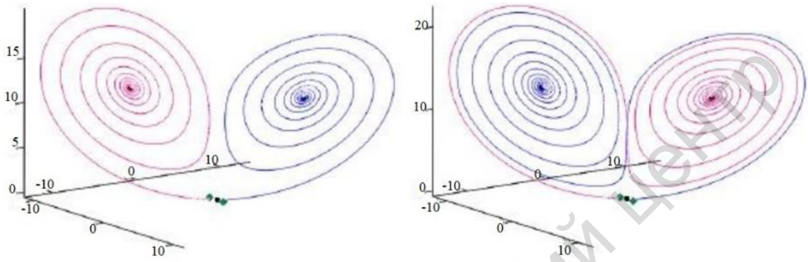
а ***б***

Рис. 4.19. Фазові траєкторії: якщо $\rho = 10$ (***а***); якщо $\rho = 15$ (***б***)

Під час проходження параметра ρ через значення $\rho = 1$ відбувається біфуркація типу виделка. При $\rho > 1$ особлива точка $E_0 = (0, 0, 0)^T$ втрачає стійкість і породжується пара стійких особливих точок E_1 та E_2, які відповідають стаціонарній конвекції у вигляді валів із протилежним напрямком обертання. Цей результат обумовлено властивостями симетрії потоку.

Отже, коли ρ переходить через одиницю, точка E_0 перестає притягувати траєкторії, натомість їх починають притягувати нерухомі точки E_1 та E_2. Ці два атрактори визначають рівномірне обертання рідини, відповідно, проти чи за напрямком руху годинникової стрілки. Причому швидкість руху зростає зі зростанням параметра ρ. Зазначимо, що такий рух буде стійким навіть для досить великих значень ρ.

Наявність двох атракторів означає наявність *бістабільності*, тобто залежно від початкових умов система проходить урештірешт в один із двох стабільних режимів. Отже, нерухомі точки E_1 та E_2 є асимптотично стійкими.



а ***б***

Рис. 4.20. Фазові траєкторії: якщо $\rho = 13$ (***а***); якщо $\rho = 14$ (***б***)

Фазові траєкторії наближаються до вказаних точок рівноваги по спіралі, що відповідає затухаючим осциляціям. Чим більший параметр ρ, тим більший початковий розмах осциляції. Однак, починаючи зі значення $\rho = 13{,}927$, у фазовому просторі системи Лоренца відбувається певна перебудова. Не заглиблюючись у деталі, зазначимо, що це не відображається на властивостях стаціонарних режимів, які відповідають атракторам E_1 та E_2. Фазові траєкторії для $\rho \in \{10, 13, 14, 15\}$ зображено на рис. 4.19 та рис. 4.20 і відповідно для $\rho \in \{19, 20, 24\}$ – на рис. 4.21.

Розглянемо перебудову, яка відбувається при $\rho = 24{,}06$ (рис. 4.22). Із цього моменту, водночас зі стійкими станами E_1 та E_2, виникає притягувальна множина складної структури, яка відповідає хаотичному режиму коливань. Особливі точки E_1 та E_2 залишаються стійкими до досягнення значення $\rho_\infty = 24{,}74$. Таким чином, в інтервалі ρ від $24{,}06$ до $24{,}74$ в системі існує три атрактори – дві нерухомі точки E_1 та E_2 і дивний атрактор. Зрештою, починаючи з $\rho_\infty = 24{,}74$, нерухомі точки E_1 та E_2 втрачають стійкість і дивний атрактор залишається єдиною притягувальною множиною. Саме цей дивний атрактор характерного вигляду, який утворюється при $\rho > \rho_\infty$, називають *атрактором Лоренца* [11].

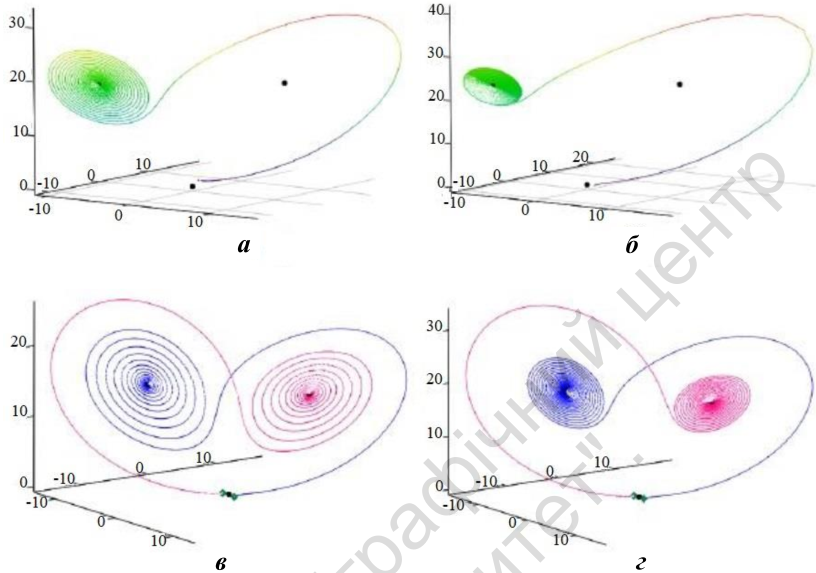


Рис. 4.21. Фазові траєкторії для: $\rho = 20$ (***а***), $\rho = 24$ (***б***),
$\rho = 19$ (***в***), $\rho = 24$ (*г*)

Характер поведінки системи, коли $\rho > \rho_\infty$, суттєво відрізняється: рух системи стає вкрай невпорядкованим. Це є наслідком того, що розв'язок, розкручуючись по спіралі в околі однієї з нерухомих точок E_1 чи E_2 протягом довільного відрізка часу, перестрибує в окіл іншої нерухомої точки і таким самим чином певний час розкручується по спіралі, після чого знову перестрибує назад. Цей рух і формує таку своєрідну структуру атрактора Лоренца.

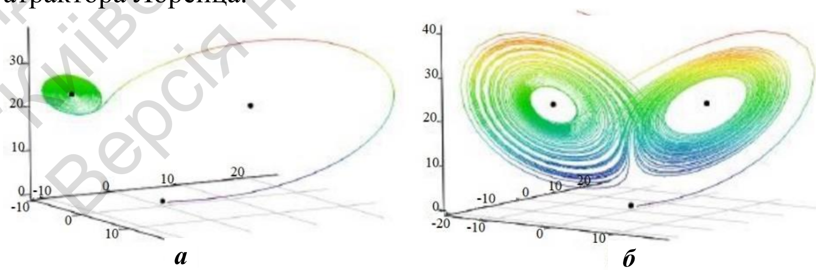
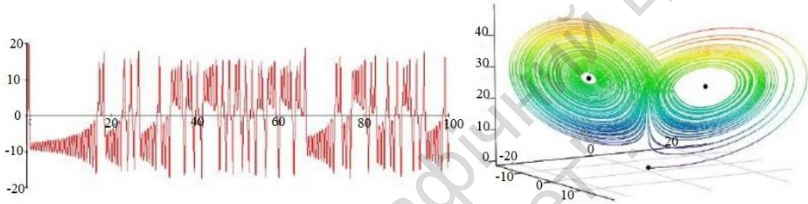


Рис. 4.22. Фазові траєкторії: якщо $\rho = 24{,}05$ (***а***); $\rho = 24{,}06$ (***б***)

Залишаючись в обмеженій області фазового простору, траєкторія окреслює певну структуру – фігуру, форма якої нагадує крила метелика. Під час проходу через цілком передбачувану петлю в полі одного з крил метелика, система здійснює перехід від одного крила до другого завжди несподівано та непередбачувано. За великих значень параметра траєкторія зазнає значних змін (рис. 4.23). За великих ρ система переходить у режим автоколивань, з'являється чергування хаотичної та періодичної поведінки.



а *б*

Рис. 4.23. Для $\rho = 28$: ***а*** – графік $x(t)$; ***б*** – фазова траєкторія

Детермінізм часто прирівнювався до передбачуваності, однак Лоренцу вдалося показати, що детермінізм здатний дати лише короткотерміновий прогноз поведінки системи, тоді як у довготерміновій перспективі наслідки можуть бути непередбачувані. Саме це й означає термін "хаос". Однак не варто плутати хаос із хаотичністю – атрактор Лоренца є яскравим тому прикладом.

Зупинимося на ролі ляпуновських показників під час вивчення атракторів [15]. Донині, розглядаючи спектр ляпуновських характеристичних показників, ми приписували його деякій фазовій траєкторії. Задамо тепер загальніше питання – про стійкість динамічної системи в усталеному режимі, що диктує необхідність визначення спектра ляпуновських характеристичних показників атрактора. Якщо атрактор є положенням рівноваги або граничним циклом, то він складається з однієї траєкторії і вже визначений нами спектр, природно, буде спектром ляпуновських характеристичних показників такого атрактора. Якщо ж атрактор складається з множини траєкторій, як наприклад, тор або дивний атрактор, то виникає далеко не очевидне питання, чи можливо приписати атрактору в цілому спектр якої-небудь траєкторії цього атрактора. Тут на допомогу приходить *мультиплікативна ергодична теорема* В. Оселедця, яка стверджує, що типова, взята навмання, траєкторія на атракторі з одиничною імовірністю матиме цілком визначений спектр ляпуновських характеристичних показників, який можна приписати атрактору в цілому.

Спектр ляпуновських характеристичних показників атрактора дисипативної динамічної системи має задовольняти такі вимоги:

1. *Сума всіх n показників має бути від'ємною:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0.$$

Завдяки цій умові атрактор є притягувальною множиною нульової міри у фазовому просторі.

2. *В атрактора, відмінного від положення рівноваги, обов'язково має бути хоча б один нульовий показник*.

Справді, розглянемо дві траєкторії на атракторі, які стартують відповідно з точок $x_0 = x(t_0)$ і $y_0 = x(t_0 + \Delta t)$, де часовий зсув Δt вважається малим. За припущенням, атрактор не є положенням рівноваги, тому y_0 не збігається з x_0. Обидві зображувальні точки слідують однією траєкторією, тобто відрізняються лише часовим зсувом, тому

$$y(t) - x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \approx \dot{x}\,(t)\Delta t = f(x(t))\Delta t.$$

Однак, якщо праві частини системи обмежені за нормою, $\|f(x(t))\| < M$, то $\|f(x(t))\Delta t\| < M\,|\Delta t|$. Отже, ляпуновський характеристичний показник для збурення типу зсуву траєкторій буде таким:

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln\|y(T) - x(T)\| = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln M|\Delta t| = 0.$$

Припустимо, що ляпуновські характеристичні показники упорядковані за спаданням.

Позначатимемо:

додатний показник як '+',
від'ємний показник як '–',
нульовий показник як '0'.

Тоді атрактору динамічної системи у фазовому просторі розмірності n відповідатиме набір з n знаків, який ми називатимемо сигнатурою спектра ляпуновських характеристичних показників. Вивчимо, якими можуть бути ці сигнатури у випадку різних розмірностей фазового простору.

Якщо $n = 1$, можливий лише один варіант сигнатури $\langle - \rangle$, що відповідає атрактору у вигляді нерухомої точки – асимптотично стійкому положенню рівноваги.

Якщо $n = 2$, можливі тільки два варіанти сигнатури:

$\langle -, - \rangle$ – стійке положення рівноваги;

$\langle 0, - \rangle$ – граничний цикл.

Покажемо, що при $n = 2$ всі інші варіанти сигнатур неможливі. Справді, сигнатури $\langle +, 0 \rangle$, $\langle 0, 0 \rangle$ неможливі, тому що такі сигнатури суперечать умові дисипативності (сума ляпуновських показників не буде від'ємною). Варіант $\langle +, - \rangle$ також виключений, тому що положення рівноваги з такою сигнатурою нестійке і не є атрактором. Якщо ж атрактор не є положенням рівноваги, то така сигнатура виключена в силу умови обов'язкової наявності, у цьому випадку, нульового показника.

Можливість виникнення атрактора з додатним ляпуновським характеристичним показником з'являється, починаючи з розмірності фазового простору $n = 3$. Тут можливі такі варіанти сигнатур:

$\langle -, -, - \rangle$ – стійке положення рівноваги;

$\langle 0, -, - \rangle$ – граничний цикл;

$\langle 0, 0, - \rangle$ – двовимірний тор;

$\langle +, 0, - \rangle$ – дивний атрактор.

Усі інші варіанти сигнатур суперечать або умові дисипативності, або необхідності наявності нульового показника для атракторів, які не є нерухомими точками, або – означенню атрактора.

У разі зростання розмірності фазового простору кількість можливих варіантів сигнатур суттєво зростає. Наприклад, якщо $n = 4$, то крім дивного атрактора з одним додатним ляпуновським показником $\langle +, 0, -, - \rangle$ може існувати дивний атрактор із двома додатними показниками $\langle +, +, 0, - \rangle$.

Дивні атрактори, що мають у спектрі ляпуновських характеристичних показників більше одного додатного показника, називають *гіперхаотичними*.

Таким чином, для динамічних систем, які описуються автономними диференціальними рівняннями, ми дійшли фундаментального висновку – *принципова можливість реалізації дивного атрактора починається з розмірності фазового простору* $n = 3$. *На фазовій площині існування дивних атракторів неможливе*.

Зазначимо, що неможливість існування дивного атрактора на площині може бути доведена такими простими міркуваннями. Будь-який атрактор, зокрема і дивний, має бути стійким за Лагранжем (розташовуватися в обмеженій області фазового простору) і за Пуассоном (зображувальна точка повинна нескінченну кількість разів повертатися в ε – окіл стартової точки траєкторій атрактора). На фазовій площині це обов'язково призведе до самоперетину траєкторії, що суперечить теоремі Коші – Пікара. Отже, дивний атрактор на фазовій площині не може існувати.

Наявність у спектрі ляпуновських характеристичних показників додатного показника є одним з основних критеріїв ідентифікації дивних атракторів у конкретних прикладних динамічних системах. Тому дуже важливо вміти обчислювати спектр ляпуновських характеристичних показників, або хоча б старший показник спектра. На жаль, для більшості практичних динамічних систем безпосереднє обчислення показника за формулою

$$\lambda = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln\|\tilde{x}(T)\|$$

неможливе, тому що траєкторія атрактора не може бути знайдена для довільної системи за допомогою квадратурних формул. Тому для обчислення ляпуновських характеристичних показників доводиться розробляти числові методи. Однією з найпоширеніших методик є алгоритм Бенеттіна.

Отже, знову розглянемо динамічну систему (4.1) за умови, що права частина системи є неперервно диференційованою. Процедура обчислення старшого ляпуновського показника починається з побудови числового розв'язку системи (4.1) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб траєкторії гарантовано потрапили на атрактор. Тобто методом перебору відкидаються фазові координати траєкторії, які не потраплять на шуканий атрактор, а є траєкторіями перехідного процесу, що прямують у нескінченість, чи до іншого положення рівноваги. Тривалість перехідного процесу не підкоряється яким-небудь загальним закономірностям і тому її доводиться визначати експериментально для кожної конкретної задачі.

Вибираємо навмання початковий стан системи (4.1) й одним із числових методів на тривалому інтервалі часу знаходимо її розв'язок. Кінцеву точку цього розв'язку позначимо через x_0 та візьмемо її за початкову точку траєкторії на атракторі. Потім розв'язуємо систему рівнянь першого наближення

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial f\left(x(t,x_0)\right)}{\partial x}\tilde{x} \tag{4.21}$$

разом із системою (4.1). Причому для системи рівнянь (4.1) за початкову точку беремо x_0, а для системи (4.21) – деяку точку $\tilde{x}_0$, для якої виконується співвідношення $\|\tilde{x}_0\| = 1$. Наприклад, за початковий вектор збурення можна вибрати $\tilde{x}_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Задамо деякий часовий інтервал T і розв'яжемо чисельно системи (4.1) та (4.21), знайшовши вектор стану і його збурення $x(T) = x_1$, $\tilde{x}(T) = \tilde{x}_1$ у момент часу T. Далі перевизначимо вектор збурення у такий спосіб: $\tilde{x}_1^0 = \frac{\tilde{x}_1}{||\tilde{x}_1||}$. Необхідність указаного перенормування пов'язана з тим, що у випадку, коли траєкторія нестійка (наприклад, належить дивному атрактору), збурена траєкторія прямує до нескінченності, що суттєво ускладнює процес обчислення.

Потім знову продовжимо процедуру числового розв'язування системи (4.1) з початковою точкою x_1 і системи (4.21) з початковою точкою $\tilde{x}_1^0$. Відшукавши вектор стану й вектор збурення $x(2T) = x_2$, $\tilde{x}(2T) = \tilde{x}_2$ в момент $2T$, перевизначаємо вектор збурення $\tilde{x}_2^0 = \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}_2\|}$. Потім багаторазово повторюємо аналогічну процедуру знаходження розв'язків і перенормування.

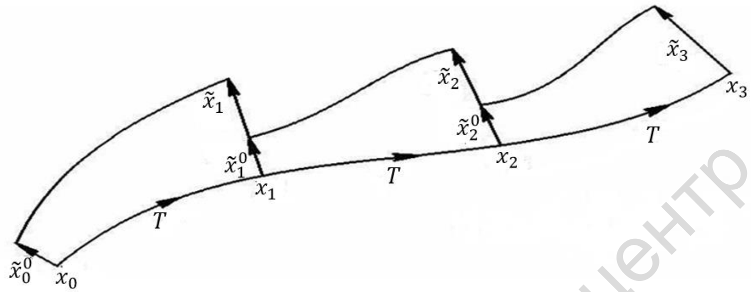


Рис. 4.24. Ілюстрація до алгоритму Бенеттіна

Алгоритм Бенеттіна проілюстровано на рис. 4.24. Якщо початкова точка x_0 належить типовій траєкторії атрактора, а початкове збурення $\tilde{x}_0$ взяте навмання, то еволюція амплітуди збурення визначатиметься старшим ляпуновським характеристичним показником. На підставі формули для визначення ляпуновського показника наближено одержимо

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{KT} \sum_{i=1}^{K} \ln \|\tilde{x}(T_i)\|, \qquad T_i \to +\infty.$$

Зазначимо, що кількість кроків K має бути досить великою. Практично ми закінчуємо обчислення, коли значення величини λ_1 задовольняє критерій наперед заданої точності. Далі описану процедуру бажано повторити кілька разів із різними початковими умовами для вектора стану й вектора збурення, а також обробити отримані результати. Довжину інтервалу перенормування T вибирають індивідуально для кожної конкретної задачі. У разі комп'ютерних обчислень ця величина, з одного боку, не має бути дуже великою, а з іншого боку, не повинна бути дуже малою.

Тепер перейдемо до процедури обчислення повного спектра ляпуновських характеристичних показників атрактора. Якщо проводити розрахунки за описаним вище алгоритмом Бенеттіна, то домінуватиме складова вектора збурення з максимальним ляпуновським показником. Тому для обчислення інших показників необхідно модифікувати алгоритм. Такий узагальнений алгоритм був запропонований Бенеттіном, в якому перенормування векторів збурення супроводжується їхньою ортогоналізацією за Грамом – Шмідтом.

Опишемо узагальнений алгоритм Бенеттіна на прикладі системи розмірності $n = 3$. У цьому випадку кількість ляпуновських характеристичних показників рівна трьом. Розв'язуємо систему рівнянь (4.1) на інтервалі часу, достатньому для того, щоб набути впевненості в завершенні перехідного процесу й виході траєкторії на атрактор. Потім обчислюємо розв'язки системи першого наближення (4.21) разом із системою рівнянь (4.1) із трьох різних початкових точок $\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0,\ \tilde{z}_0$, які утворюють ортонормовану систему векторів. Наприклад,

$$\tilde{x}_0^0 = (1,0,0)^T, \qquad \tilde{y}_0^0 = (0,1,0)^T, \qquad \tilde{z}_0^0 = (0,0,1)^T.$$

Через деякий час T траєкторія системи (4.1) прийде в точку x_1, вектори збурень відповідно будуть наближатися. Ортогоналізуємо їх за Грамом – Шмідтом:

$$\tilde{x}_1^0 = \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|},$$

$$\tilde{y}_1' = \tilde{y}_1 - \left(\tilde{y}_1{}^T\,\tilde{x}_1^0\right)\tilde{x}_1^0, \quad \tilde{y}_1^0 = \frac{\tilde{y}_1'}{\|\tilde{y}_1'\|},$$

$$\tilde{z}_1' = \tilde{z}_1 - \left(\tilde{z}_1{}^T\,\tilde{x}_1^0\right)\tilde{x}_1^0 - \left(\tilde{z}_1{}^T\tilde{y}_1^0\right)\tilde{y}_1^0, \quad \tilde{z}_1^0 = \frac{\tilde{z}_1'}{\|\tilde{z}_1'\|}.$$

Далі продовжуємо числові розрахунки, починаючи з точки x_1 і векторів збурень $\tilde{x}_1^0,\ \tilde{y}_1^0,\ \tilde{z}_1^0$. Потім через інтервал часу T одержимо набір векторів збурень $\tilde{x}_2,\ \tilde{y}_2,\ \tilde{z}_2$, який знову ортогоналізуємо і переформуємо відповідно до наведеної вище процедури. Описану послідовність дій повторюють велику кількість разів K. Знаходимо

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{K} \ln\ \|\,\tilde{x}(T_i)\|, \ \ \Lambda_2 = \sum_{i=1}^{K} \ln\|\tilde{y}(T_i)\|, \ \ \Lambda_3 = \sum_{i=1}^{K} \ln\|\tilde{z}(T_i)\|.$$

У цій формулі наявні вектори збурень до перенормування. Тоді ляпуновські характеристичні показники наближено будуть такими:

$$\lambda_i \approx \frac{\Lambda_1}{KT}, \qquad i = 1,2,3.$$

Аналогічно визначають спектр ляпуновських характеристичних показників у випадку довільної розмірності фазового простору.

Ще однією ознакою дивного атрактора є його дробова фрактальна розмірність.

Існують геометричні об'єкти, розмірність яких зрозуміла інтуїтивно. Для прикладу, скінченна множина точок – нульвимірний об'єкт, пряма – одновимірний об'єкт, внутрішність еліпса чи кола – двовимірні об'єкти, внутрішність куба і кулі – тривимірні об'єкти. Ці значення можна одержати строго математично різними способами. Ми розглянемо спосіб, який ґрунтується на оцінці кількості куль для покриття компактної множини. Позначимо через $N(Q,r)$ мінімальну кількість куль радіуса r, необхідних для покриття Q. Наприклад, нехай Q – відрізок $[-1,1]$. Нагадаємо, що відрізок є одновимірною множиною. Якщо радіус кулі $r = 1$, тоді очевидно, що кількість куль, які покривають Q, рівна 1. Якщо радіус кулі $r = \frac{1}{2}$, то кількість куль, які покривають Q, рівна 2, тобто $[-1,1] = [-1,0] \cup [0,1]$. Коли $r = \frac{1}{4}$, то кількість куль, які покривають Q, рівна 5. Отже, бачимо, що $rN(Q,r) = 1$, $r = \frac{1}{m}$, $m = 1,2, \dots$. Звідси

$$N(Q,r) = \frac{1}{r}, \quad r = \frac{1}{m}, \quad m = 1,2, \dots .$$

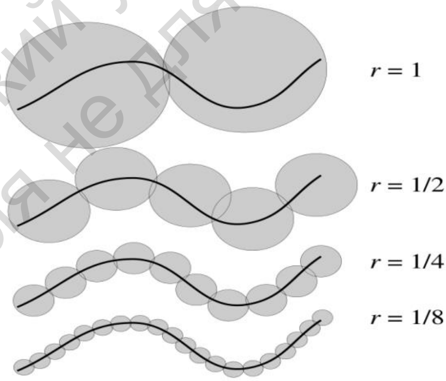


Рис. 4.25. Обчислення розмірності кривої

Якщо $r > 0$ не є раціональним числом вигляду $r = \frac{1}{m}$, $m = 1,2, \ldots$, то $N(Q, r) = \left[\frac{1}{r}\right] + 1$, де $\left[\frac{1}{r}\right]$ – найбільше ціле число, яке менше або рівне $\frac{1}{r}$. Цей факт записують так:

$$N(Q, r) \propto r^{-1}.$$

Розглянемо ще один приклад. Нехай Q є деякою кривою на рис. 4.25, де показано, що криву ми можемо покрити двома кулями радіуса 1, тобто $N(Q, 1) = 2$. Далі для покриття Q кулями радіуса $\frac{1}{2}$ необхідно 5 куль, тому $N\left(Q, \frac{1}{2}\right) = 5$. У той самий спосіб одержуємо $N\left(Q, \frac{1}{4}\right) = 10$, $N\left(Q, \frac{1}{8}\right) = 20$. Коли ми вдвічі зменшуємо радіус куль, потрібна нам кількість куль, які покривають множину, збільшується приблизно вдвічі. Тобто за досить малого значення радіуса, куля радіуса r охоплює приблизно $2r$ довжини кривої. Цей факт записують як

$$N(Q, r) \propto r^{-1}.$$

Чим менший радіус куль, тим більше куль потрібно для побудови покриття і тим точнішою є оцінка.

Розглянемо ще один приклад. Нехай Q – квадрат зі стороною 1 на площині. Куля радіуса r охоплює площу πr^2. Оскільки площа квадрата Q дорівнює 1, а площа покриття, яка рівна $\pi r^2 N(Q, r)$, більша за площу квадрата, то виконується нерівність $\pi r^2 N(Q, r) \geq 1$, причому $r^2 N(Q, r) \leq 1$. Звідси випливає, що

$$\frac{1}{\pi} r^{-2} \leq N(Q, r) \leq r^{-2}.$$

Тобто, використовуючи введене позначення, одержуємо

$$N(Q, r) \propto r^{-2}.$$

Нехай Q – скінченна множина точок. Тоді для достатньо малих r число $N(Q, r)$ є константою і дорівнює кількості точок Q. Подамо це як $N(Q, r) \propto 1$ і, формально записуючи 1 як r^{-0}, маємо $N(Q, r) \propto r^{-0}$.

Перейдемо до $\mathbb{R}^3$. Нехай Q – одиничний куб. Оскільки об'єм кулі дорівнює $\frac{4}{3}\pi r^3$, то $\frac{1}{r^3} \geq N(Q, r) \geq \frac{3}{4\pi r^3}$, отже

$$N(Q, r) \propto r^{-3}.$$

У такий спосіб для об'єкта Q відомої розмірності d маємо

$$N(Q, r) \propto r^{-d}.$$

Тепер зробимо знак $\propto$ дещо конкретнішим: якщо для функцій f і g ми пишемо $f(r) \propto g(r)$, то маємо на увазі, що

$$f(r) = g(r) \cdot \omega(r), \qquad \lim_{r \to 0+} \frac{\ln \omega(r)}{\ln g(r)} = 0.$$

Прологарифмуємо рівність, тоді

$$\ln f(r) = \ln g(r) + \ln \omega(r).$$

Поділивши обидві сторони рівняння на $\ln g(r)$, отримаємо

$$\frac{\ln f(r)}{\ln g(r)} = 1 + \frac{\ln \omega(r)}{\ln g(r)}.$$

Таким чином, ми формалізуємо позначення $f(r) \propto \mathrm{g}(r)$ так:

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\ln f(r)}{\ln g(r)} = 1.$$

Розглянемо приклад. Вище ми показали, що якщо Q є квадратом зі стороною 1 на площині, то

$$N(Q, r) \propto r^{-2}.$$

Отже

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-2}} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}} = 2.$$

Узагальнимо наведені приклади: якщо

$$N(Q, r) \propto r^{-d},$$

то

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\ln N(Q, r)}{\ln r^{-1}} = d.$$

Відтак приходимо до означення фрактальної розмірності компактної множини Q [11, 19].

Означення 4.20. *Фрактальна розмірність компакта Q визначається співвідношенням*

$$d_F(Q) = \lim_{r \to 0+} \frac{\ln N(Q,r)}{\ln r^{-1}}.$$

Одне з визначень фрактала саме і полягає в тому, що це – множина з дробовою фрактальною розмірністю.

Використовуючи означення 4.20, знайдемо фрактальну розмірність одного з найвідоміших фракталів – трикутника Серпінського.

Візьмемо трикутник на площині. Введемо поняття *середнього трикутника*, тобто трикутника, який одержують з'єднанням середин його трьох сторін. Отриманий трикутник охоплюватиме $\frac{1}{4}$ площі оригіналу. Тепер видаляємо внутрішню частину середнього трикутника. Залишається три копії початкового трикутника, що дотикаються своїми вершинами один до одного. Вирізаємо в кожному з них внутрішність середніх трикутників. Повторюючи цю процедуру *безліч* разів, ми отримаємо фрактал, який називають *трикутником* (*серветкою*) *Серпінського* (рис. 4.26).

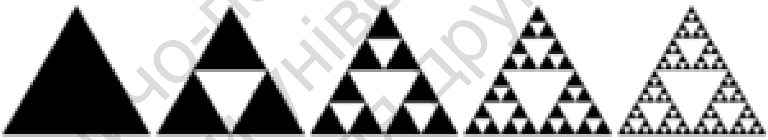


Рис. 4.26. Побудова трикутника Серпінського

Трикутник Серпінського має властивість самоподібності. Крім того, кожен крок описаної процедури усуває $\frac{1}{4}$ площі, отже, після k-го кроку залишається $\left(\frac{3}{4}\right)^k$ розміру площі оригіналу. У такий спосіб можна сказати, що трикутник Серпінського має нульову площу. Проте водночас він здається однозначно масивнішим, ніж одновимірна крива, тому можна припустити, що його розмірність міститься між 1 і 2. Справді, обчислимо мінімальне число $N_0(Q,r)$ квадратів зі стороною r, що покривають компакт Q.

Маємо

$$N_0\left(Q,\frac{1}{2}\right)=3,\quad N_0\left(Q,\frac{1}{4}\right)=9,$$
$$N_0\left(Q,\frac{1}{8}\right)=27,\quad N_0\left(Q,\frac{1}{2^k}\right)=3^k.$$

Отже

$$d_F(Q)=\lim_{r\to 0+}\frac{\ln N(Q,r)}{\ln r^{-1}}=\lim_{r\to 0+}\frac{\ln N\left(Q,2^{-k}\right)}{\ln 2^{-k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln 3^k}{\ln 2^{\mathrm{k}}}=$$
$$=\frac{\ln 3}{\ln 2}=\log_2 3\approx 1{,}585.$$

Виявляється, що глобальний атрактор Лоренца також є фрактальною множиною. Точніше, система Лоренца (4.20) за значень $\sigma=10,\ r=28,\ b=8/3$ породжує дисипативну динамічну систему, глобальний атрактор якої має фрактальну розмірність

$$2<d_F(\mathcal{A})\le 2{,}538\ldots.$$

Запитання, тести для самоконтролю

1. Сформулюйте означення ω-граничної точки і ω-граничної множини розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь.
2. Сформулюйте означення α-граничної точки і α-граничної множини розв'язку автономної системи диференціальних рівнянь.
3. Який розв'язок системи диференціальних рівнянь називають додатно стійким за Лагранжем (від'ємно стійким за Лагранжем)?
4. Які властивості мають α- і ω-граничні множини розв'язків?
5. Обґрунтуйте продовжуваність додатно та від'ємно стійких за Лагранжем розв'язків автономної системи диференціальних рівнянь на довільний інтервал.
6. Наведіть означення атрактора розв'язку автономної системи.

7. За яких умов ω-гранична множина є атрактором розв'язку автономної системи?
8. Сформулюйте принцип інваріантності Ла Саля і наслідки до нього.
9. Сформулюйте теорему Барбашина – Красовського про асимптотичну стійкість, глобальну асимптотичну стійкість і нестійкість. Порівняйте ці теореми.
10. Дайте означення граничного циклу (стійкого, нестійкого, напівстійкого).
11. Сформулюйте теорему Пуанкаре – Бендіксона.
12. Наведіть означення неперервної напівгрупи, визначеної на повному метричному просторі й означення напівгрупи системи.
13. Наведіть означення траєкторії і повної траєкторії неперервної напівгрупи.
14. Наведіть означення нерухомої точки неперервної напівгрупи.
15. Наведіть означення ω-граничної множини для множини щодо неперервної напівгрупи. Які властивості має така множина?
16. Сформулюйте теорему про дисипативність автономної системи диференціальних рівнянь.
17. Дайте означення дисипативної і точково-дисипативної неперервної напівгрупи. У якому випадку ці означення еквівалентні?
18. Яка система називається асимптотично компактною?
19. Сформулюйте означення глобального атрактора неперервної напівгрупи.
20. Сформулюйте теорему про існування глобального атрактора.
21. Яка неперервна напівгрупа називається асимптотично компактною?
22. Сформулюйте означення повної траєкторії (орбіти) неперервної напівгрупи.
23. Сформулюйте теорему про структуру глобального атрактора та наслідок.

24. Яку множину називають стійким многовидом точки і множини?
25. Яку множину називають нестійким многовидом точки і множини?
26. Дайте означення функції Ляпунова для неперервної напівгрупи.
27. Сформулюйте теорему про структуру глобального атрактора градієнтної системи.
28. Сформулюйте критерій стійкості глобального атрактора за Ляпуновим.
29. Сформулюйте теорему про залежність атрактора від параметра.
30. Сформулюйте теорему про принцип редукції для глобального атрактора.
31. Охарактеризуйте поведінку розв'язків системи Хопфа.
32. Охарактеризуйте поведінку розв'язків системи Лоренца.
33. У чому суть алгоритму Бенеттіна?
34. Опишіть підхід до обчислення розмірності кривої.
35. Наведіть означення фрактальної розмірності множини.

Обов'язкові та додаткові задачі

4.1. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x)(x+y), \end{cases}$$

де $g(x)$ – локально ліпшицева функція, $g(x) \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$. Використовуючи функцію

$$V(x,y) = \int_0^x sg(s)ds + xy + y^2,$$

доведіть, що нульовий розв'язок є асимптотично стійким.

4.2. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -h(x) - g(y), \end{cases}$$

де $h(x)$, $g(x)$ – локально ліпшицеві функції, $h(0) = g(0) = 0$, $h(x) > 0$, $g(x) > 0$, $x \in (-\alpha, \alpha) \setminus \{0\}$. Використовуючи функцію

$$V(x, y) = \int_0^x h(s)ds + \frac{1}{2}y^2,$$

доведіть, що нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким. Запишіть умови, за яких буде справедлива глобальна асимптотична стійкість.

4.3. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -h(x) - y - g(z), \\ \dot{z} = y - z, \end{cases}$$

де $h(x)$, $g(x)$ – локально ліпшицеві функції, $h(0) = g(0) = 0$, $h(x) > 0$, $g(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Використовуючи функцію

$$V(x, y, z) = \int_0^x h(s)ds + \frac{1}{2}y^2 + \int_0^z g(s)ds,$$

доведіть, що нульовий розв'язок системи є асимптотично стійким. З'ясуйте додаткові умови, які гарантують глобальну асимптотичну стійкість нульового розв'язку.

У задачах 4.4–4.6 знайти ω-*граничні множини, які залежать від параметра* μ:

4.4. $\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} \dot{x} = x(\mu - x^2 - y^2) - y, \\ \dot{y} = y(\mu - x^2 - y^2) + x. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} \dot{x} = x(\mu + x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y, \\ \dot{y} = y(\mu + x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x. \end{cases}$

4.7. Показати що, коли $\mathcal{K}$ – додатно інваріантна множина неперервної напівгрупи, то $\bar{\mathcal{K}}$ – додатно інваріантна.

4.8. Довести: якщо $\mathcal{K}$ інваріантна передкомпактна множина неперервної напівгрупи, то $\bar{\mathcal{K}}$ – інваріантна множина.

4.9. Припустимо, що неперервна напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ має рівномірно притягувальну компактну множину $\mathcal{K}$. Доведіть, що $\mathcal{S}(t)$ має глобальний атрактор $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{K})$.

4.10. Припустимо, що неперервна напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ породжена системою диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(x)$, де $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – локально ліпшицева функція така, що

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_k \leq -\delta \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + c,$$

де $\delta > 0$, c – константи. Доведіть, що $\mathcal{S}(t): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ має глобальний атрактор.

4.11. Припустимо, що неперервна напівгрупа $\mathcal{S}(t): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ породжена диференціальним рівнянням Дюффінга

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^3 - ax = b,$$

де $\gamma > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Доведіть, що $\mathcal{S}(t)$ має глобальний атрактор.

4.12. За допомогою функції

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + \left(x + \frac{\mu}{2} - \upsilon\right)^2,$$

довести, що система Хопфа

$$\begin{cases} \dot{x} + \mu x + y^2 + z^2 = 0, \\ \dot{y} + \upsilon y - xy - \beta z = 0, \\ \dot{z} + \upsilon z - xz + \beta y = 0, \end{cases}$$

де $\mu > 0$, $\upsilon, \beta \in \mathbb{R}$, породжує глобальний атрактор.

4.13. Припустимо, що $\gamma = \{u(\tau): \tau \in \mathbb{R}\}$ – компактна повна траєкторія неперервної напівгрупи. Доведіть, що її α-гранична множина

$$\mathcal{A}_*(\gamma) = \bigcap_{\tau<0} \overline{\bigcup_{t\leq\tau} u(t)}$$

є непорожньою, компактною, інваріантною і притягує $u(t)$ при $t \to -\infty$

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}\big(u(t), \mathcal{A}_*(\gamma)\big) = 0.$$

4.14. Доведіть, що функція Ляпунова є сталою на кожній ω-граничній множині компактних траєкторій.

4.15. Припустимо, що неперервна напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ має глобальний атрактор $\mathcal{A}$. Доведіть, що для будь-яких u_0, ε, T існують $\tau > 0$, $v_0 \in \mathcal{A}$ такі, що для всіх $t \in [0, T]$ справджується

$$\| \mathcal{S}(t+\tau)u_0 - \mathcal{S}(t)v_0 \| < \varepsilon.$$

4.16. Доведіть, що для системи Лотка – Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_1 - x - b_1 y), \\ \dot{y} = y(a_2 - y - b_2 x), \end{cases}$$

де $a_i > 0$, $b_i \geq 0$, існує глобальний атрактор у просторі $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^2$.

4.17. Доведіть, що для системи хемотаксису

$$\begin{cases} \dot{x} = (\bar{x} - x) - \dfrac{m_1 x y}{a_1 + x} - \dfrac{m_2 x z}{a_2 + x}, \\ \dot{y} = \left(\dfrac{m_1 x y}{a_1 + x} - \mathcal{D}\right) y, \\ \dot{z} = \left(\dfrac{m_2 x y}{a_2 + x} - \mathcal{D}\right) z, \end{cases}$$

де $\bar{x}$, $\mathcal{D}$, m_1, m_2, a_1, a_2 – додатні константи, існує глобальний атрактор у просторі $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^3$.

4.18. Доведіть, що для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + x + x y^2, \\ \dot{y} = -y(1 + x^2) \end{cases}$$

існує глобальний атрактор, який можна записати так:

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : -1 \leq x \leq 1,\ \ y = 0\}.$$

4.19. Доведіть, що у скінченновимірному фазовому просторі дисипативна неперервна напівгрупа є асимптотично компактною.

4.20. Доведіть, що неперервна напівгрупа $\mathcal{S}(t)$ є точково-дисипативною тоді і тільки тоді, коли існує така обмежена множина $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{X}$, що для всіх $x \in \mathcal{X}$

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\mathcal{S}(t)x, \mathcal{B}_0) = 0.$$

Додаткові задачі запропоновано у [18, 19, 23, 24].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Башняков О. М. Практична стійкість і структурна оптимізація динамічних систем / О. М. Башняков, Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2000. – 197 с.
2. Башняков О. М. Практична стійкість, оцінки й оптимізація / О. М. Башняков, Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2008. –383 с.
3. Гаращенко Ф. Г. Прикладні задачі теорії стійкості / Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2014. – 142 с.
4. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри / В. М. Кадець. – Л. : Видавець І. Е. Чижиков, 2012. – 590 с.
5. Капустян О. В. Задачі підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О. В. Капустян, П. О. Касьянов, С. В. Позур. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2011. – 79 с.
6. Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь / І. О. Парасюк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2005. – 88 с.
7. Парасюк І. О. Динамічні системи (Dynamical systems): навч. посіб. 2022. – 209 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.diffeq./univ.kiev.ua/download/dynamical_systems-textbook.pdf
8. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, О. В. Капустян, П. В. Фекета, Н. В. Касімова. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 138 с.
9. Перестюк М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь / М. О. Перестюк, М. Я. Свіщук. – К. : "ТВіМС", 2004. – 225 с.
10. Пічкур В. В. Дослідження задач практичної стійкості диференціальних включень / В. В. Пічкур. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2005. – 141 с.

11. Пічкур В. В. Теорія динамічних систем : навч. посіб. / В. В. Пічкур, О. В. Капустян, В. В. Собчук. – Луцьк : Вежа-друк, 2020. – 348 с.

12. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 450 с.

13. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.

14. Розв'язування задач аналізу та диференціальних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри Mathematica / В. В. Собчук, О. В. Чичурін, І. В. Кальчук, Т. В. Жигалло. – К. : Міленіум, 2021. – 420 с.

15. Швець О. Ю. Детермінований хаос / О. Ю. Швець. – К. : НТУУ "КПІ", 2010. – 93 с.

16. Barbu V. Differential Equations / V. Barbu. – Springer, 2016. – 224 p.

17. Bauschke H. H. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces / H. H. Bauschke, P. L. Combettes. – Springer, 2017. – 620 p.

18. Chueshov I. D. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems / I. D. Chueshov. – Kharkiv : ACTA Scientific Publishing House. – 419 p.

19. Crownover Richard M. Introduction to fractals and chaos / Richard M. Crownover. – Boston ; London : Jones and Bartlett Pub, 1995. – 306 p.

20. Gerald Edgar. Measure, Topology and Fractal Geometry / Edgar Gerald. – Springer, 1990. – 292 p.

21. Hahn W. Stability of Motion / W. Hahn. – Springer-Verlag, 1967. – 446 p.

22. Hale J. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems / J. Hale. – American Mathematical Society, 1988. – 198 p.

23. Global attractors of multivalued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O. V. Kapustyan, V. S. Melnik, J. Valero, V.V. Yasinsky. – K. : Наук. думка, 2008. – 215 p.

24. Nonlinear systems / H. K. Khalil. – NJ. : Prentice Hall, 2002. – 766 p.

25. LaSalle J. P. Stability by Liapunov's direct method / J. P. LaSalle, S. Lefschetz. – Academic Press, 1961. – 134 p.

26. Peter H.O. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems / H. O. Peter, P. H. Richter. – Berlin : Springer-Verlag, 1986. – 188 p.

27. Rouche N. Stability Theory by Lyapunov's Direct Method / N. Rouche, P. Habets, M. Laloy. – New York : Springer-Verlag, 1977. – 396 p.

28. Scheinerman Edward R. Invitation to Dynamical Systems / Edward R. Scheinerman. – Baltimore : The Johns Hopkins University, 2000. – 289 p.

29. Vrabie I. Differential Equations. An Introduction to Basic Concepts, Results and Applications / I. Vrabie // World Scientific, New Jersey ; London ; Singapore, 2004. – 401 p.

З М І С Т

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ 3

ВСТУП 5

РОЗДІЛ 1. ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ 21
1.1. Існування розв'язків. Теорема Пеано 21
1.2. Лема Гронуола – Белмана 26
1.3. Продовження розв'язку 31
    1.3.1. Відношення часткового порядку і лема Цорна 37
    1.3.2. Існування повного розв'язку 38
1.4. Єдиність розв'язку 43
1.5. Неперервна залежність розв'язку від правої частини, початкових умов і параметрів 58
1.6. Диференційованість розв'язку задачі Коші за початковими умовами і параметром 63
1.7. Інтегральна лійка. Теорема Ліувілля 67
1.8. Властивості розв'язків автономних систем 76
1.9. Означення динамічної системи 80
Запитання, тести для самоконтролю 88
Обов'язкові та додаткові задачі 91

РОЗДІЛ 2. ПЕРШИЙ І ДРУГИЙ МЕТОДИ ЛЯПУНОВА 95
2.1. Основні означення 95
2.2. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем 100
2.3. Стійкість розв'язків систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 104
2.4. Аналіз стійкості лінійних систем на площині 112
2.5. Векторне поле і топологічна еквівалентність 122
2.6. Дослідження стійкості за першим наближенням 126
    2.6.1. Аналіз стійкості розв'язків автономної системи 126
    2.6.2. Теорема про стійкість розв'язків неавтономної системи за першим наближенням 132

2.7. Спектр ляпуновських характеристичних показників........ 134
2.8. Другий метод Ляпунова 149
2.8.1. Функції Ляпунова 149
2.8.2. Теореми Ляпунова про стійкість для автономних систем 155
2.9. Теореми Ляпунова про стійкість для неавтономних систем 166
2.10. Теореми про нестійкість для автономних систем. Теорема Четаєва 171
2.11. Теореми про нестійкість для неавтономних систем......... 184
2.12. Глобальна асимптотична стійкість. Теорема Барбашина – Красовського 188
2.13. Методи конструювання функцій Ляпунова 197
2.13.1. Методи побудови функцій Ляпунова для нелінійних систем 197
2.13.2. Числовий метод конструювання функції Ляпунова для нелінійних систем 204
2.13.3. Побудова функцій Ляпунова для лінійних нестаціонарних систем 206
2.13.4. Випадок лінійних стаціонарних систем................. 208
Запитання, тести для самоконтролю 214
Обов'язкові та додаткові задачі 217

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ 223
3.1. Основні означення 223
3.2. Властивості максимальної множини практичної стійкості 230
3.3. Необхідні і достатні умови практичної стійкості на основі функції Ляпунова 233
3.4. Властивості оптимальної множини практичної стійкості лінійної системи 237
3.5. Оптимальні оцінки практичної стійкості лінійних систем 242
Запитання, тести для самоконтролю 247
Обов'язкові та додаткові задачі 248

РОЗДІЛ 4. ГРАНИЧНІ МНОЖИНИ Й АТРАКТОРИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ 251
4.1. Граничні множини траєкторій 251
4.2. Принцип інваріантності. Теореми Барбашина – Красовського 260
4.3. Граничні цикли. Теорема Пуанкаре – Бендіксона 273
4.4. Система Лоренца 279
4.5. Глобальні атрактори дисипативних систем 291
4.6. Дивний атрактор 335
Запитання, тести для самоконтролю 355
Обов'язкові та додаткові задачі 357

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 362

Навчальне видання

Пічкур Володимир Володимирович
Капустян Олексій Володимирович
Собчук Валентин Володимирович

СТІЙКІСТЬ ТА АТРАКТОРИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник