КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ф. Г. Гаращенко
В. Т. Матвієнко
І. І. Харченко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ІНФОРМАТИКІВ

ПІДРУЧНИК

Затверджено
Міністерством освіти і науки України
як підручник
для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за спеціальністю "Інформатика"

КИЇВСЬКИЙ ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ 2008

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73
Г20

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. М.Ф. Кириченко;
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук., проф. М.О. Перестюк;
д-р. фіз.-мат. наук, проф. О.Г. Мазко.

Затверджено Вченою радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
5 березня 2007 року

Гаращенко, Ф.Г.

Г20 Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник / Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, І.І. Харченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.

ISBN __________

Досліджено основні типи диференціальних рівнянь, що допускають аналітичний розв'язок, варіаційне числення, рівняння в частинних похідних, стійкість. Висвітлено питання аналізу якісних властивостей розв'язків диференціальних рівнянь. Значну увагу приділено застосуванню наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь при дослідженні важливих технічних прикладних проблем. Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь продемонстровано на прикладах у середовищі MATLAB.

Виклад матеріалу відповідає сучасному стану теорії диференціальних рівнянь у тій мірі, як це потрібно майбутнім спеціалістам у галузях інформатики та системного аналізу, і в той же час є досить конструктивним і простим для засвоєння.

Для студентів, аспірантів і науковців, що спеціалізуються в галузі застосування сучасного математичного апарату диференціальних рівнянь..

УДК 517.91
ББК 22.161.6

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18–Г–2938 від 30.12.08)

ISBN 966-594-883-0

ПЕРЕДМОВА

Теорія звичайних диференціальних рівнянь як навчальна дисципліна, що викладається в університетах, досить непогано забезпечена літературою. Широко відомі класичні підручники М.М. Матвєєва, Л.Е. Ельсгольця, М.В. Федорюка, В.В. Степанова, І.Г. Петровського, Л.С. Понтрягіна, сучасних російських (В.І. Арнольда, М.Л. Краснова, А.М. Тихонова) та українських авторів (І.І. Ляшка, О.К. Боярчука, Г.П. Головача, І.О. Парасюка, М.О. Перестюка, А.М. Самойленка, С.А. Кривошеї). Для практичних занять із диференціальних рівнянь корисними є задачники та посібники А.Ф. Філіпова, М.Л. Краснова, А.І. Кисельова, Г.І. Макаренка, Ф.С. Гудименка, І.А. Павлюка, В.О. Волкової, Г.П. Головача, О.Ф. Калайди, М.О. Перестюка, М.Я. Свіщук. Однак слід зазначити, що в сучасних умовах для студентів, які спеціалізуються в галузі системних наук та кібернетики, виникла необхідність підготувати новий підручник з диференціальних рівнянь.

Пропонована книга відрізняється, головним чином, тим, що вона має бути путівником і довідником для майбутніх спеціалістів у галузі інформаційних технологій. Це обумовило структуру підручника, який умовно можна розділити на дві частини. Перша – це власне навчальна частина, що містить головні розділи теорії диференціальних рівнянь, методи розв'язування задач, якісні питання дослідження розв'язків, знайомство з лінійними рівняннями в частинних похідних та елементами варіаційного числення. Друга частина містить доробок авторів у галузі створення сучасних інформаційних технологій, тісно пов'язаних з моделюванням складних систем, розвитком теорії практичної стійкості та оптимального керування. Ці напрями протягом останніх тридцяти років розвиваються на кафедрі моделювання складних систем факультету кібернетики.

У першій частині досить детально враховано сучасні вимоги до використання відповідного програмного забезпечення (автори рекомендують застосовувати пакет програм MatLAB для побудови наближеного розв'язку систем диференціальних рівнянь, візуалізації отриманої інформації). Вона містить короткий вступ до теорій побудови математичних моделей процесів і систем. Наведено основні положення теорії диференціальних рівнянь, до якої автори насамперед віднесли:

- основні прийоми та методи інтегрування;
- теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші;
- короткий вступ до теорії стійкості (перший та другий методи О.М. Ляпунова), елементи практичної стійкості;
- розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними;
- елементи теорії варіаційного числення.

Ця частина за обсягом і змістом відповідає нормативному лекційному курсу "Диференціальні рівняння", який протягом останніх десяти років читається на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка для студентів-інформатиків.

Друга частина книги призначена для ознайомлення читача з використанням диференціальних рівнянь у різних галузях наукових досліджень, які виконувалися на кафедрі моделювання складних систем. Окремі результати досліджень отримані за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних і прикладних досліджень Міністерства освіти й науки України та Науково-технологічного центру України у межах відповідних тематик.

Підручник містить велику кількість оригінальних авторських і класичних задач та прикладів. У першій частині підручника вони наведені як вправи для відпрацювання навичок застосування викладених прийомів та алгоритмів. Контрольні запитання призначені для кращого засвоєння теоретичного матеріалу, задачі для самостійної роботи – для якісної підготовки до засвоєння змістовних модулів.

Проблематика задач, наведених у другій частині, підбиралася таким чином, щоб вони могли використовуватися студентами при виконанні дипломних і магістерських робіт.

Автори підручника з повагою згадують методичні рекомендації та цінні поради члена-кореспондента НАН України професора Б.М. Бублика, професора М.Ф. Кириченка, які віддали багато сил розробці на факультеті кібернетики лекційних курсів і семінарських занять з теорії диференціальних рівнянь.

Щира подяка викладачам і співробітникам кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка за велику й різнобічну допомогу.

ВСТУП

Теорія звичайних диференціальних рівнянь є одним з найпотужніших інструментів пізнання довколишнього світу. Вона дозволяє вивчати й досліджувати різноманітні еволюційні процеси, що мають властивості детермінованості, скінченновимірності, диференційованості тощо.

Процес називається *детермінованим*, якщо його майбутній розвиток і минуле однозначно визначаються його станом у теперішній час. Множину всіх можливих станів процесу називають *фазовим простором.*

У класичній механіці розглядають рух систем, майбутнє й минуле яких однозначно визначається початковими положеннями та початковими швидкостями всіх точок системи. Фазовий простір механічної системи – це множина, елементами якої є набір положень і швидкостей усіх точок даної системи.

Рух частинок у квантовій механіці вже неможливо описати за допомогою детермінованого процесу. Розподіл тепла – це приклад напівдетермінованого процесу, оскільки майбутнє визначається теперішнім станом, а минуле не може бути визначеним.

Процес називається *скінченновимірним,* якщо його фазовий простір скінченновимірний. Це означає, що кількість параметрів, потрібних для опису його стану, скінченна. Однак можуть досліджуватися й нескінченновимірні процеси. Прикладами процесів, які неможливо описати за допомогою скінченного фазового простору, є рух рідини, коливання мембрани, поширення хвиль тощо.

Диференційованість процесу визначається тим, що його фазовий простір має структуру диференційованого багатовиду, а зміна стану в часі описується диференційованими функціями. Наприклад, задачі, що досліджуються в теорії удару, не мають властивості диференційованості.

Рух системи у класичній ньютонівській механіці можна описати за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. Опис динаміки рідин, газів, руху частинок у квантовій механіці, дослідження процесів у теорії удару, оптиці, акустиці потребують інших математичних засобів. При цьому зауважимо, що вигляд диференціального рівняння процесу можна встановити в більшості випадків тільки експериментально, тобто лише з деякою точністю. Тому далі ми будемо акцентувати увагу на обставинах, коли процес збігається з певною ідеалізованою математичною моделлю.

Моделювання на цифрових обчислювальних машинах є одним з наймогутніших засобів дослідження, зокрема складних динамічних систем. Воно дозволяє здійснювати обчислювальні експерименти із системами, що ще тільки проектуються, а також вивчати системи, натурні експерименти з якими небезпечні або недоцільні через високу вартість. У той же час, завдяки своїй близькості за формою до фізичного моделювання, цей метод дослідження доступний широкому колу користувачів. Сьогодні, коли розроблені різноманітні засоби моделювання, будь-який кваліфікований інженер, технолог або менеджер повинні вміти не просто моделювати складні об'єкти, але й досліджувати їх за допомогою сучасних технологій, реалізованих у формі графічних середовищ або пакетів візуального моделювання.

Попередні відомості про диференціальні рівняння. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що містить похідні від шуканої функції й може містити шукану функцію та незалежну змінну. Далі вважатимемо, що незалежна змінна завжди дійсна. Незалежну змінну, похідна від якої входить у диференціальні рівняння, позначають літерою x або t, оскільки в багатьох випадках її роль відіграє час. Невідому функцію позначають через $y(x)$.

Приклади диференціальних рівнянь.

а) Відому з математичного аналізу задачу про відшукання всіх первісних даної функції $f(x)$ можна записати у вигляді рівняння

$$y' = f(x), \tag{0.1}$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція, $y = y(x)$ – невідома функція, $y' = dy/dx$. Таке рівняння є простим прикладом *звичайного диференціального рівняння.* Як доводиться в інтегральному численні, якщо $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a,b), то рівняння (0.1) має на ньому нескінченну сім'ю розв'язків, яка задається формулою

$$y = F(x) + C, \tag{0.2}$$

де $F(x)$ – будь-яка фіксована первісна функції $f(x)$, а параметр C пробігає всі дійсні значення.

б) Чудовою властивістю функції $y = e^x$ є те, що вона збігається зі своєю похідною; ця властивість записується у вигляді звичайного диференціального рівняння $y' = y$, розв'язками якого, разом із функцією $y = e^x$, будуть також усі функції сім'ї $y = Ce^x$.

в) З урахуванням механічного змісту другої похідної (прискорення), рівняння прямолінійного рівноприскореного руху записується у формі $\ddot{x} = a$ (точками будемо надалі позначати похідні за часом). Послідовне інтегрування останнього рівняння в межах від 0 до t дає

$$\dot{x} = at + v_0 \quad (v_0 = \dot{x}(0)), \; x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \qquad (x_0 = x(0)).$$

г) Якщо в рівнянні кола $x^2 + y^2 = R^2$ змінні x та y вважати гладкими функціями деякого параметра s ($x = x(s), \; y = y(s)$) і продиференціювати рівняння за параметром s, то отримаємо диференціальне рівняння сім'ї всіх кіл із центром на початку координат $x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = 0$. Одним з розв'язків цього рівняння є пара функцій $x = \sin s, \; y = \cos s$, яка задовольняє систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$

Вище були розглянуті приклади задач, зведених до зображення у вигляді диференціальних рівнянь. Дамо основні означення, які будемо далі використовувати.

У теорії диференціальних рівнянь вивчають також рівняння, які містять кілька незалежних змінних, шукану функцію та частинні похідні від неї за незалежними змінними, наприклад

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \; z = z(x,y).$$

Рівняння такого типу називаються *рівняннями з частинними похідними.*

Порядок старшої похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком* цього рівняння. Наприклад, рівняння n-го порядку можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{0.2}$$

Тут $F(\cdot)$ – деяка відома функція від своїх аргументів, яку далі будемо вважати дійснозначною, причому похідна n-го порядку обов'язково входить у дане рівняння. Така форма запису рівняння називається неявною. Рівняння першого порядку має вигляд

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 . \qquad (0.3)$$

Далі ми, в основному, розглядатимемо рівняння, розв'язані відносно старшої похідної, а саме рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$. Такий запис звичайного диференціального рівняння називається *нормальною формою.*

Поряд з диференціальними рівняннями для однієї незалежної функції $y(x)$ у теорії звичайних диференціальних рівнянь розглядають системи рівнянь. Система рівнянь першого порядку, що розв'язні відносно похідних

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad (0.4)$$

називається *нормальною.* Якщо ввести векторні функції $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y))^T$, то систему рівнянь можна записати у векторній формі:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) . \qquad (0.5)$$

Рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right), \qquad (0.6)$$

може бути зведене до нормальної системи. Для цього необхідно ввести заміну $y(x) = y_1(x), \frac{dy}{dx} = y_2(x), \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} == y_n(x)$. Тоді, ураховуючи рівність $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dy_n}{dx}$, рівнянню n-го порядку можна поставити у відповідність систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (0.7)$$

Розв'язком системи диференціальних рівнянь (0.7) називається будь-яка сукупність функцій $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, що при підстановці в рівняння перетворюють їх на тотожності. Процес знаходження розв'язків називається *інтегруванням* диференціального рівняння. Якщо при цьому вдалося подати всі розв'язки в елементарних функціях, то стверджують, що рівняння проінтегроване в елементарних функціях.

У випадку, коли диференціальне рівняння не інтегрується в елементарних функціях, але всі його розв'язки виражаються через невизначені інтеграли, стверджують, що рівняння *проінтегроване у квадратурах.*

Якщо рівняння вдається проінтегрувати в елементарних функціях або у квадратурах, то говорять, що воно інтегроване у скінченному вигляді. Саме такі рівняння й розглядаються в даному підручнику. Однак слід мати на увазі, що переважна більшість рівнянь не інтегрується у скінченному вигляді, тому для аналітичного зображення розв'язків потрібно застосовувати складніший математичний апарат.

Основна задача теорії диференціальних рівнянь полягає в знаходженні всіх розв'язків рівняння та дослідженні їх властивостей. Вона найповніше розв'язана для *лінійних диференціальних рівнянь* $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$. Такі рівняння мають певні важливі властивості й широко застосовуються в прикладних задачах, а теорія їх розв'язання сьогодні найкраще розроблена.

Наша увага буде також зосереджена на вивченні систем вигляду (0.4) із правими частинами, неперервними в деякій області D зміни невідомих функцій $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, що при цьому розв'язки будуть неперервно диференційованими функціями. Разом з тим, у багатьох прикладних задачах мають справу з рівняннями, у правих частинах яких є розриви – тоді в у якості розв'язків розглядають неперервні функції $y_i(x)$ із кусково-неперервними похідними (напр., при дослідженні систем керування). При підстановці в рівняння такі функції вважаються всюди диференційованими, за винятком точок розриву похідних.

Геометрична інтерпретація розв'язку $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системи (0.4) – це деяка крива у $(n+1)$-вимірному просторі змінних $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, яку називають *інтегральною кривою.* Підпростір змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$ називається *фазовим простором,* а проекція інтегральної кривої на фазовий простір – *фазовою траєкторією.*

Рівняння (0.4) визначає в кожній точці області D деякий напрямок, що задається вектором $\boldsymbol{\tau} = (1, f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Область простору із заданим у кожній точці напрямком називається *полем напрямків.* Отже, інтегрування системи рівнянь (0.4) геометрично інтерпретується як знаходження кривих, у яких напрямок дотичної в кожній точці збігається з напрямком $\boldsymbol{\tau}$, заданим у даному полі напрямків.

Не завжди можна отримати розв'язок у явному вигляді.

Співвідношення $\Phi(x,y)=0$ подає в неявній формі розв'язок диференціального рівняння (0.3), якщо воно визначає функцію $y=y(x)$, яка є його розв'язком.

Співвідношення $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ визначають розв'язок диференціального рівняння (0.3) у параметричній формі на інтервалі (t_0,t_1), якщо $\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\equiv f(\varphi(t),\psi(t)),\quad t\in(t_0,t_1)$.

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{0.8}$$

Припустимо, що $f(x,y)$ однозначна й неперервна в деякій області D змінних x, y. Цю область називають *областю визначення* диференціального рівняння (0.8).

Якщо в деякій області функція $f(x,y)$ перетворюється на ∞, то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}. \tag{0.9}$$

Множину таких точок, а також тих, у яких $f(x,y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (0.8).

Задача Коші полягає в тому, щоб серед усіх розв'язків диференціального рівняння (0.8) знайти такий $y=y(x)$, що проходить через задану точку

$$y(x_0)=y_0. \tag{0.10}$$

Тут x_0 – початкове значення незалежної змінної, y_0 – функції.

Знаходження розв'язку систем рівнянь у формі Коші – традиційна задача обчислювальної математики, записана у вигляді диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 1

Проблеми математичного моделювання та інформатики, їх зв'язок з методами й теорією диференціальних рівнянь

Задача вивчення реальних об'єктів (процесів) полягає у виявленні їх властивостей, розумінні прогнозування поведінки та оптимального керування ними. Розв'язання такої задачі суттєво спрощується, якщо замість самих об'єктів (процесів) досліджувати їх математичні моделі.

1.1. Поняття математичного моделювання. Математичні моделі процесів і систем

Трактування математичного моделювання сьогодні досить абстрактне, але, разом з тим, цей термін широко використовується в інформатиці та прикладній математиці.

Під *математичним моделюванням* будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей. В основу методу покладемо найпростіші поняття теорії лінійних рівнянь і систем, адекватність між змінними складеного рівняння й досліджуваного процесу. Слід зазначити, що при уточненні моделі математичні рівняння ускладнюються. А це означає, що їх комп'ютерне моделювання потребує більше часу.

Моделювання є одним з основних методів отримання результатів у наукових дослідженнях.

Під *моделлю* розуміють об'єкт, що знаходиться у відношенні подібності до системи або процесу, який моделюється.

Процедура моделювання включає дослідження об'єкта шляхом створення його математичної моделі, визначення загальних закономірностей її функціонування та перенесення отриманих результатів на об'єкт.

Треба розрізняти фізичне й математичне моделювання систем і процесів. При фізичному моделюванні дослідник створює фізичну модель об'єкта або процесу, а при математичному – модель у вигляді математичних символів, співвідношень і зв'язків між ними.

Математична модель може охоплювати клас заданих об'єктів, таких як числа, вектори, матриці, тензори, і відношення між ними. Вона наближено відображає властивості системи або процесу, що моделюються. У загальному випадку під *процесом* будемо розуміти сукупність послідовних дій, спрямованих на досягнення певного результату. Математичні моделі сьогодні використовуються як метод дослідження не тільки фізичних процесів, але й властивостей соціально-економічних систем. Зокрема, за допомогою математичного моделювання можна здійснювати:

- розрахунок системи з метою вибору оптимальних значень параметрів;
- прогнозування надійності роботи системи;
- дослідження чутливості системи до змін її параметрів;
- аналіз критичних режимів роботи системи тощо.

Залежно від мети використовують різні класи математичних моделей.

За способом використання експериментальних даних моделі поділяються на *апріорні* (розроблені теоретично) та *апостеріорні* (отримані в результаті обробки експериментальних даних).

За підходом до опису характерних властивостей об'єкта моделювання розрізняють моделі систем з *розподіленими* та *зосередженими параметрами.*

Деякі параметри технічних систем, наприклад маса, при математичному моделюванні можуть зосереджуватись у характерних точках системи. У цьому випадку побудована з урахуванням зосереджування параметрів математична модель буде значно простішою, ніж модель, що враховує розподіл параметрів у просторі. Наприклад, для механічної коливальної системи зосередження параметрів приводить до математичної моделі, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь. У той же час урахування просторового розподілу параметрів потребує використання диференціальних рівнянь із частинними похідними, знаходження розв'язку яких значно складніше, ніж для звичайних диференціальних рівнянь.

Урахування характерних особливостей систем дозволяє розрізняти *лінійні* й *нелінійні* математичні моделі.

Лінійні математичні моделі ґрунтуються на припущенні про лінійність математичних залежностей, які описують характеристики системи та її елементів.

Нелінійні математичні моделі враховують такі особливості, як розриви, специфічні обмеження на параметри, кривизну тощо. Зрозуміло, що нелінійні моделі точніше лінійних і адекватніше відображають властивості систем і процесів. У той же час лінійні моделі значно простіші для розрахунків і допускають ширші узагальнення. Використання лінійних моделей суттєво зменшує трудомісткість математичного моделювання, дозволяє використовувати надійні формалізовані методи математичного опису, застосовувати для проведення обчислювального експерименту відповідне програмне забезпечення, користуватися традиційними пакетами прикладних програм.

За особливостями врахування змін параметрів у часі розрізняють математичні моделі для опису *стаціонарних* і *нестаціонарних* процесів. Моделі стаціонарних процесів описують усталені процеси з усередненими в часі закономірностями. Моделі нестаціонарних систем ураховують зміни параметрів у часі.

За підходом до опису параметрів і відповідних характеристик процесів і систем розрізняють *детерміновані* та *стохастичні* математичні моделі. Детерміновані моделі включають лише визначені параметри й характеристики процесів. Стохастичні математичні моделі містять випадкові величини, функції та умови й дозволяють здійснювати імітацію процесів, які реально мають місце при функціонуванні технічних, біологічних, економічних і соціальних систем.

Імітація реальних процесів і систем випадковими величинами та функціями значно спрощує опис реальних властивостей систем, виконання їх прогнозних оцінок, підвищує достовірність отриманих результатів. Використання сучасних засобів обчислювальної техніки дозволяє автоматизувати процес імітаційного математичного моделювання, отримувати вагомі наукові результати.

За виглядом математичного опису процесів та явищ моделі можна розділити на *неперервні й дискретні.* Неперервні відображають залежності, обумовлені певними проміжками часу та просторовими співвідношеннями. Дискретні моделі описують процес в окремих точках. Вони довели свою ефективність при описі складних виробничих, економічних, фізичних та інших процесів, які відбуваються в реальних умовах. Дискретні моделі відзначаються високою надійністю, точністю й достовірністю розв'язків, дозволяють застосовувати сучасні інформаційні технології для аналізу результатів.

При розробці математичних моделей слід ураховувати особливості використання математичного апарату. Розрізняють моделі, що мають вигляд функціональних залежностей, і моделі у вигляді співвідношень, наприклад систем диференціальних або інтегральних рівнянь.

Дослідження з використанням математичних моделей мають певну послідовність. Спочатку здійснюється постановка задачі моделювання та окреслюються мета й бажані результати досліджень, прогнозується вихід моделі. Постановка задачі виконується в кожному випадку відповідно до вимог замовника або плану досліджень. Тут потрібно враховувати розрахункові параметри, їх кількість, аналіз режимів функціонування, оцінку показників і характеристик системи. За вихід моделі може прийматися набір параметрів, що спостерігаються або вимірюються. Вихід моделі, як правило, відповідає параметрам виходу системи, які є базою для подальшої обробки результатів моделювання. Постановка задачі моделювання неможлива без обробки та аналізу інформації.

Далі виконується розробка загального плану функціонування системи та формалізація процесів шляхом уведення та обґрунтування припущень. Для введення припущень проводять ранжування факторів з метою встановлення їх впливу на результат моделювання. Фактори, які несуттєво впливають на вихід, можуть виключатися з розгляду, що дозволяє в деяких випадках досягти спрощення моделі та одержати ефективну розрахункову схему.

Розрахункову схему можна подати у вигляді графоаналітичного зображення процесу або системи в межах прийнятих припущень. Вона відображає всі основні параметри системи, логіку її роботи та функціональне призначення. Схема є основою вибору методів і стратегії моделювання. Згідно з вибраною стратегією на основі розрахункової схеми будується базова математична модель.

Під *базовою математичною моделлю* будемо розуміти систему рівнянь, складену на основі використання фундаментальних законів відповідно до прийнятої розрахункової схеми процесу або системи. Для раціоналізації процесу розробки моделі базова математична модель зводиться до досить загального стандартного вигляду. Наприклад, запис системи диференціальних рівнянь у матрично-векторному вигляді дає можливість розробити й застосувати універсальні методи їх розв'язання.

Далі для розв'язання рівнянь розробляються відповідні алгоритми та створюється програмне забезпечення.

Наступний етап – проведення обчислювального експерименту. Доцільно як програмне забезпечення використовувати сучасні математичні пакети, наприклад MATLAB, MATCAD тощо.

Одержана математична модель може містити похибки, тому вона підлягає аналізу з метою перевірки її адекватності (достовірності). Установлення адекватності здійснюється шляхом порівняння результатів моделювання з певним еталоном, яким можуть бути експеримент, модельний розрахунок, достовірний процес тощо. У випадку відсутності експериментальних даних перевірка адекватності виконується шляхом статистичного аналізу або іншими методами. Якщо адекватність математичної моделі не підтверджується, то уточнюється стратегія моделювання, модель доопрацьовується. Якщо модель задовольняє умови адекватності, то процес розробки вважають завершеним і переходять до безпосереднього її використання та подальшого впровадження.

Створена математична модель має задовольняти певні вимоги та критерії. Головними параметрами оцінки її якості є точність, економічність, універсальність, інформативність. Усі ці характеристики взаємозалежні. Зрозуміло, що більш точна модель є менш економічною, а універсальна – менш точною. Необхідна точність, як один з основних критеріїв оцінки моделі, визначається умовою адекватності та залежить від похибок моделювання.

Похибки, що виникають при математичному моделюванні, можуть мати різний характер і величину. Причини виникнення похибок можна простежити, виходячи із самого процесу створення математичної моделі. Це, насамперед, спрощення справжніх властивостей процесу, неповна адекватність математичних абстракцій відображуваним властивостям реальності, неможливість точного обчислення, вимірювання або спостереження параметрів вибраної моделі.

Саме диференціальні рівняння широко використовуються для моделювання реальних систем, що залежать від часу, зокрема для опису та дослідження економічних і біологічних систем.

Розглянемо приклади використання диференціальних рівнянь у деяких галузях сучасної науки.

1.2. Приклади використання диференціальних рівнянь

1.2.1. Диференціальні рівняння в екології

Екологія вивчає взаємовідносини людини й живих організмів узагалі з навколишнім середовищем. Основним об'єктом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупності одного виду рослин, тварин, мікроорганізмів, що населяють тривалий час певну територію).

Опишемо математично процес розмноження чи вимирання популяцій. Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t; A – кількість народжених, B – умираючих за одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{1.1}$$

У рівнянні (1.1) A і B можуть залежати від x. Наприклад,

$$A = ax,\ B = bx, \tag{1.2}$$

де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності.

Підставляючи (1.2) в (1.1), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \tag{1.3}$$

Розв'язок диференціального рівняння (1.3) запишемо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}, \tag{1.4}$$

де $x(t_0) = x_0$ – кількісний стан популяції в початковий момент t_0.

З розв'язку (1.4) видно, що при $a > b$ популяція виживає, а при $a < b$ – вимирає.

Рівняння (1.3) у деяких випадках доцільно подавати в нелінійному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (a > 0, b > 0). \tag{1.5}$$

Це рівняння Бернуллі при $n = 2$, і його розв'язок можна записати так:

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{1.6}$$

З останнього виразу видно, що при $t \to \infty$, $x(t) \to \frac{a}{b}$. При цьому можливі випадки $\frac{a}{b} = x_0$, $\frac{a}{b} > x_0$ та $\frac{a}{b} < x_0$. Рівняння (1.5) описує еволюцію популяцій деяких бактерій.

Можна досліджувати й складніші рівняння та системи рівнянь.

Розглянемо детальніше двовидову модель хижак-жертва, побудовану для виявлення коливань рибних уловів у Адріатичному морі.

Нехай $x(t)$ – кількість риб-хижаків, $y(t)$ – риб-жертв у момент часу t. Кількість риб-хижаків буде зростати доти, поки в них буде їжа. Якщо її не буде вистачати, то кількість хижаків буде зменшуватися і, починаючи з деякого моменту, буде зростати кількість жертв. Модель такого процесу має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + bxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx - dxy\ , \end{cases} \tag{1.7}$$

де a, b, c, d – додатні константи.

У системі (1.7) доданок bxy виражає залежність приросту кількості хижаків від кількості жертв, $-dxy$ – зменшення кількості жертв від кількості хижаків.

1.2.2. Закони руху планет Кеплера

Згідно із законом всесвітнього тяжіння два тіла, що знаходяться на віддалі r одне від одного й мають маси m і M, притягаються із силою

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}, \tag{1.8}$$

де γ – константа тяжіння.

Опишемо рух планети з масою m навколо Сонця з масою M. Вплив інших планет на динаміку процесу не будемо враховувати (рис. 1.1).

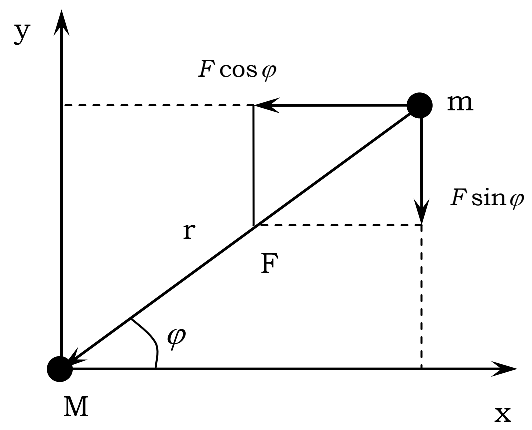

Рис. 1.1

Припустимо, що Сонце знаходиться в початку координат, а планета має положення $x(t), y(t)$ у момент часу t. Використавши другий закон Ньютона, запишемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\varphi = -\gamma\dfrac{mM}{r^2}\cos\varphi\,, \\ m\ddot{y} = -F\sin\varphi = -\gamma\dfrac{mM}{r^2}\sin\varphi\,. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ураховуючи, що $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, і позначивши $k = \gamma \cdot M$, прийдемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, \\ \ddot{y} = -\dfrac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Без обмеження загальності візьмемо початкові умови

$$x = a, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = V_0 \text{ при } t = 0\,. \tag{1.11}$$

Перейдемо до полярних координат

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi\,,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \\ \dot{y} = r\sin\varphi - r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} - r\cos\varphi\cdot\varphi^2\,, \\ \ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi - 2\dot{r}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - r\sin\varphi\cdot\varphi^2\,. \end{cases}$$

Підставляючи отримані вирази в (1.10), матимемо

$$\begin{cases} \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi - \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\sin\varphi = -\dfrac{k\cos\varphi}{r^2}\,, \\ \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\cos\varphi = -\dfrac{k\sin\varphi}{r^2}\,. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на $\cos\varphi$, друге – на $\sin\varphi$ і додамо обидва вирази:

$$4\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}\,. \tag{1.12}$$

Домножимо перше рівняння на $-\sin\varphi$, друге – на $\cos\varphi$ і додамо

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0\,. \tag{1.13}$$

Перепишемо в нових змінних умови (1.11):

$$r = a,\ \varphi = 0,\ \dot{r} = 0,\ \dot{\varphi} = \frac{V_0}{a}. \qquad (1.14)$$

Рівняння (1.13) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \qquad (1.15)$$

Звідси отримаємо

$$r^2\dot{\varphi} = C_1. \qquad (1.16)$$

Константа C_1 має цікаву геометричну інтерпретацію. З математичного аналізу відомо, що площа сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi. \qquad (1.17)$$

Звідси

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \text{ або } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Вираз $\frac{dS}{dt}$ визначає секторну швидкість. З (1.16) випливає, що вона стала. Це означає, що радіус-вектор "замітає" за однакові проміжки часу однакові площі.

Перший закон Кеплера: кожна з планет рухається по плоскій кривій відносно Сонця так, що радіус-вектор, який зв'язує Сонце з планетою, "замітає" однакові площі за рівні проміжки часу.

Задачу Коші (1.12)–(1.14) можна розв'язати. Розв'язок має еліпсоїдальну форму, на основі цього формулюється ***другий закон Кеплера***: планети рухаються по еліптичних траєкторіях, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

З аналізу траєкторій випливає ***третій закон Кеплера***: квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих осей їх орбіт.

1.2.3. Диференціальні рівняння закону попиту та пропозиції в економічних дослідженнях

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. Попит – це потреба в товарах на ринку, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай $p(t)$ – ціна на фрукти, $\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни. Тоді й попит, і пропозиція будуть функціями введених величин. Вони можуть бути різними. Часто попит q і пропозиція S задаються лінійними залежностями, наприклад

$$q = 4p' - 2p + 39,$$
$$S = 44p' + 2p - 1.$$

Для того, щоб попит відповідав пропозиції, необхідне виконання умови $p = S$:

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1 .$$

Звідси

$$40p' + 4p - 40 = 0,$$
$$4dp = -4(p - 10), \tag{1.18}$$
$$\frac{10dp}{p-10} = -dt,\ p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10.$$

Припустимо, що в момент $t = 0$ 1 кг фруктів коштував $p(0) = 1$ грн. Тоді $1 = c - 10$, $c = -9$. Отже,

$$p = -9e^{\frac{1}{10}t} + 10 . \tag{1.19}$$

Отримали закономірність зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

1.2.4. Найпростіші рівняння руху частинок в електромагнітних полях

З електродинаміки відомо, що швидкість зміни імпульсу частинки $\vec{p} = m\vec{V}$ дорівнює силі Лоренца, яка діє на неї:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = Ze(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]) , \tag{1.20}$$

де Z – зарядове число, e – заряд частинки, $\vec{E}$ – вектор напруженості прискорювального поля, $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, $\vec{V}$ – вектор швидкості частинки,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},\quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix},\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix},$$

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0$ – динамічна маса, m_0 – маса спокою,

$\gamma = \dfrac{m}{m_0}$ – зведена енергія частинки,

$$\left[\vec{V},\vec{B}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=\left(V_yB_z-V_zB_y\right)i-\left(V_xB_z-V_zB_x\right)j+$$

$$+\left(V_xB_y-V_yB_x\right)k$$

– векторний добуток двох векторів. Зі співвідношення (1.20) маємо

$$m_0\gamma\frac{d\vec{V}}{dt}+m_0\vec{V}\frac{d\gamma}{dt}=Ze\left(\vec{E}+\left[\vec{V},\vec{B}\right]\right). \qquad (1.21)$$

Рівняння (1.21) не враховує власного поля пучка (кулонівських сил). Перепишемо його в скалярній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_x+\dfrac{dy}{dt}B_z-\dfrac{dz}{dt}B_y-\dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right], \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_y+\dfrac{dz}{dt}B_z-\dfrac{dx}{dt}B_z-\dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right], \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_z+\dfrac{dx}{dt}B_y-\dfrac{dy}{dt}B_x-\dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right]. \end{cases} \qquad (1.22)$$

Визначимо

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}}}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)\frac{\vec{V}^T}{c^2}\frac{d\vec{V}}{dt},$$

тобто

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\gamma^3}{c^2}\vec{V}^T\left(\frac{Ze}{m_0}\left(\vec{E}+\left[\vec{V},\vec{B}\right]\right)-\frac{1}{\gamma}\vec{V}\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

Оскільки $\vec{V}^T\cdot\left[\vec{V},\vec{B}\right]=0$, то знайдемо $\dfrac{d\gamma}{dt}$:

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(1+\frac{\gamma^2\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right)=\frac{\gamma^2 Ze}{m_0c^2}\vec{V}^T\cdot\vec{E}.$$

Отже,

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{Ze}{m_0c^2}\left(\frac{dx}{dt}E_x+\frac{dy}{dt}E_y+\frac{dz}{dt}E_z\right). \qquad (1.23)$$

Підставляючи (1.23) у (1.22), отримаємо рівняння руху.

Однак у ці складні рівняння ще входять компоненти електромагнітного поля, що визначаються рівняннями Максвела

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ rot\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \quad div\vec{B} = 0\,. \end{cases} \tag{1.24}$$

Тут ε_0, μ_0 – електрична й магнітна сталі, ρ – об'ємна густина заряду, $\vec{j}$ – вектор густини струму.

Система рівнянь (1.24) – це рівняння в частинних похідних зі складними граничними умовами. Задача полягає не тільки в моделюванні рівнянь руху, а й у розрахунках оптимальних систем прискорення та фокусування пучка заряджених частинок.

1.2.5. Використання диференціальних рівнянь у біології та математичних дослідженнях

Біологія. Необхідно знайти залежність площі S листка, що має форму круга, від часу t. Відомо, що швидкість зміни площі $\dfrac{dS}{dt}$ у момент t пропорційна площі листка, довжині його контуру та косинуса кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю листка. Маємо модель

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\varphi(t), \tag{1.25}$$

де $\varphi(t) = at + b \ge 0$, a, b – const, $\varphi \le \pi$, k – коефіцієнт пропорційності. Розв'язуючи рівняння (1.25), отримаємо залежність

$$S(t) = \left(c + \frac{k}{2a} \cdot \sin(at + b)\right)^{-2}, \tag{1.26}$$

де c – довільна стала.

Математика. Обчислимо невласний інтеграл

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-x^2 - 2ax} dx, \tag{1.27}$$

залежний від параметра a. Знайдемо похідну

$$\frac{dI}{da} = -2x\int_0^{\infty} e^{-x^2-2ax}dx = -(2x+2a)\int_0^{\infty} e^{-x^2-2ax}dx + 2a\int_0^{\infty} e^{-x^2-2ax}dx =$$

$$= +\int_0^{\infty} e^{-x^2-2ax} d(-x^2 - 2ax) + 2aI(a) = e^{-x^2-2ax}\Big|_0^{\infty} + 2aI(a) = 2aI(a) - 1.$$

Отримали диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{da} = 2aI(a) - 1. \tag{1.28}$$

При цьому відомо, що

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1.29}$$

Розв'язуючи задачу Коші (1.28), (1.29), одержимо

$$I(a) = e^{a^2}\left[I(a) - \int_0^a e^{-t^2} dt\right] = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^a e^{a^2 - t^2} dt. \tag{1.30}$$

1.2.6. Тенденції та перспективи розвитку комп'ютерного моделювання й застосування сучасних інформаційних технологій в економіці

Розглянемо на деяких загальних прикладах тенденції розвитку інформаційних технологій у моделюванні соціально-економічних процесів.

Проблеми наближення ресурсів комп'ютерної системи до людини можна зіставити з проблемами, пов'язаними з трудомісткістю опису та зображення розв'язку задач із заданої предметної галузі. З цих позицій можна виділити такі рівні подання та обробки інформації: 1) мікропрограмний; 2) традиційний машинний; 3) операційної системи; 4) асемблерний; 5) проблемно-орієнтованих мов; 6) об'єктно-орієнтованих мов.

Виділення цих рівнів базується на зображенні комп'ютерної системи як інтегрованого набору алгоритмів і структур даних.

Задачі, що розв'язуються в економіці, поділяються, залежно від фактора часу, на статичні й динамічні. Статика вивчає стани економічних об'єктів, що належать до визначеного періоду часу, без урахування зміни їхніх параметрів у часі. У динамічних задачах значну роль відіграють як залежність змінних від часу, так і їхній взаємозв'язок у часі. Наприклад, динаміка інвестицій визначає динаміку величин основного капіталу, що, у свою чергу, є найважливішим чинником зміни обсягу випуску продукції.

Час в *економічній динаміці* може розглядатися як неперервний або дискретний. Неперервний час зручніший для моделювання, оскільки дозволяє використовувати апарат диференціального числення й диференціальних рівнянь, а дискретний – для практичних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні й належать до конкретних одиниць часу. Для дискретного часу може використовуватися апарат різницевих рівнянь. Зазначимо, що більшість відомих *моделей економічної динаміки* існують як у неперервному, так і в дискретному варіантах. В обох варіантах для них можуть бути отримані, як правило, аналогічні результати, і рівень складності самих моделей приблизно однаковий.

Серед економічних показників зазначимо ті, що характеризують *динаміку економічного об'єкта*, – абсолютні прирости, темпи приросту капіталу (в англомовній літературі користуються терміном "growth rate").

Побудова моделі ґрунтується на даних про економічні змінні, які, як правило, подаються у вигляді чисел. Використання математичного інструментарію дозволяє побудувати абстрактні моделі ринкової економіки.

1.2.7. Модель макроекономічної динаміки. Модель Харрода – Домара

Як приклад моделі з неперервним часом розглянемо *модель макроекономічної динаміки* (найпростіший її варіант – модель Харрода – Домара). Модель описує динаміку доходу $Y(t)$, що розглядається як сума споживання $C(t)$ та інвестицій $I(t)$. Економіка вважається закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні витрати в моделі окремо не виділяються. Основна складова моделі зростання економічного потенціалу – формула взаємозв'язку між інвестиціями та швидкістю зростання доходу, яка покладається пропорційною інвестиціям:

$$I(t) = B\frac{dY(t)}{dt},$$

де B – коефіцієнт капіталоємності приросту доходу, або приростної капіталоємності (зворотна йому величина $1/B$ називається приростною капіталовіддачею). Тим самим у модель фактично включаються такі передумови:

- інвестиційний лаг дорівнює нулю;
- інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу.

Формально це означає, що $\Delta K(t) = I(t)$, де $K(t)$ – неперервна функція приросту капіталу в часі, коли:

- відплив капіталу відсутній;
- виробнича функція в моделі лінійна, що випливає з пропорційності приросту доходу приростові капіталу:

$$dY(t) = \frac{1}{B}K(t)dt. \qquad (1.31)$$

Лінійна виробнича функція $Y(t) = aL(t) + bK(t) + c$, де $b = 1/B$, має цю властивість у тому випадку, коли або $a = 0$, або $L(t) = \text{const}$.

Тим самим наступна передумова така:

- витрати праці сталі в часі, або випуск продукції не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом;
- модель не враховує технічного прогресу.

Перелічені передумови, звичайно, істотно огрублюють опис динаміки реальних макроекономічних процесів, роблять проблемним застосування даної моделі, наприклад для безпосереднього розрахунку прогнозу величини сукупного випуску або доходу. Однак дана модель і не призначена для цього. У той же час її відносна простота дозволяє глибше вивчити взаємозв'язок динаміки інвестицій та зростання випуску продукції, отримати точні формули траєкторій розглянутих параметрів за дотриманих передумов.

Залежність, що пов'язує між собою в часі показники інвестицій, обумовлений ними обсяг основного капіталу й рівень доходу, є базовою в усіх моделях *макроекономічної динаміки*. Крім того, у цих моделях необхідно визначити принципи формування структури доходу, розподілу його між складовими, насамперед – між споживанням і нагромадженням.

Ці принципи можуть ґрунтуватися на оптимізаційному підході (зазвичай це максимізація сукупних обсягів споживання в тій або іншій формі), екстраполяційному, рівноважному тощо. У розглянутій моделі передбачається, що динаміка обсягу споживання $C(t)$ задається *екзогенно*. Цей показник може вважатися сталим у часі, зростати із заданим постійним темпом або мати яку-небудь іншу динаміку.

Найпростіший варіант моделі можна отримати, якщо вважати $C(t) = 0$. Цей випадок зовсім нереалістичний із практичного погляду, однак у ньому всі ресурси спрямовуються на інвестиції, що допомагає визначити максимальні технічно можливі темпи зростання економічних показників.

У цьому випадку одержуємо

$$Y(t) = C(t) + I(t) = 0 + B\frac{dY(t)}{dt} = BY'(t). \qquad (1.32)$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння, і його розв'язок має вигляд $Y(t) = Y(0)e^{(1/B)t}$. Неперервний темп приросту тут дорівнює $1/B$ і є максимально можливим (технологічним).

1.2.8. Модель економічного зростання Солоу

Інший тип моделі економічного зростання запропонував лауреат Нобелівської премії Р. Солоу. Вона дозволяє точніше описати деякі *особливості макроекономічних процесів*. По-перше, виробнича функція в ній нелінійна й має властивість зменшення граничної продуктивності. По-друге, модель ураховує відплив основного капіталу. По-третє, у модель Солоу включається опис *динаміки трудових ресурсів і технічного прогресу* та їхній вплив на економічне зростання. По-четверте, тут ставиться та розв'язується задача *максимізації рівня споживання* на деякій множині стійких траєкторій. Усе це, звичайно, ускладнює структуру моделі та одержання точних формул для траєкторій зміни основних її показників.

Тому деякі інші аспекти описуються в базовій моделі Солоу спрощено: наприклад, вважаються сталими норми заощаджень і відпливу капіталу, інвестиційні лаги відсутні, а виробнича функція має постійну віддачу від масштабу. Крім того, на початковому рівні аналізу моделі шукаються не траєкторії зміни всіх її показників (як у моделі Харрода – Домара), а характеристики станів стійкої рівноваги, до яких система приходить за тривалий період. З формального погляду ця задача значно простіша.

Передумови й позначення моделі Солоу:

- виробнича функція має вигляд $Y = F(K, L)$, де Y – випуск або доход, K – капітал, L – праця. Віддача від масштабу є сталою: $F(\xi K, \xi L) = \xi F(K, L)$. Гранична продуктивність факторів позитивна, але зменшується:

$$Y'_k > 0,\;\; Y'_L > 0,\;\; Y'_{kk} < 0,\;\; Y'_{LL} < 0\,; \tag{1.33}$$

- величина відпливу капіталу W не пропорційна його величині K:

$$W = \delta K\,, \tag{1.34}$$

де δ – норма відпливу;

- норма заощаджень (інвестицій) a стала, інвестиції $I = aY$;
- доход розподіляється на споживання та інвестиції $Y = C + I$;
- кількість зайнятих L зростає зі сталим темпом n;
- працезбережувальний технічний прогрес має швидкість g, тобто кількість одиниць праці зі сталою ефективністю в розрахунку на одного працюючого зростає зі швидкістю g.

За дотриманих передумов виробничу функцію Y можна розглядати як залежність продуктивності праці $y = Y / L$ від її капіталоозброєності $k = K / L$, $y = f(k)$ (тут L – кількість одиниць праці зі сталою ефективністю, тобто чисельність зайнятих працівників за відсутності працезбережувального технічного прогресу, або чисельність умовних працівників з однаковою ефективністю за його наявності).

Це випливає з того, що $Y = F(K,L) = LF[k/L,1] = LF(k)$.

Інвестиції приводять до зростання капіталоозброєності, а відплив капіталу, зростання чисельності працюючих і кількості одиниць праці зі сталою ефективністю – до її зниження. Приріст капіталоозброєності k унаслідок інвестицій становить $i = I/L$. Темп її зниження за рахунок інших факторів дорівнює $(\delta + n + g)$ (дорівнює точно, якщо Y, K, L – неперервні функції часу, і приблизно – у дискретному випадку при малих δ, n, g). Величина зниження капіталоозброєності за рахунок цих факторів становить $(\delta + n + g)\, k$.

Величина k знаходиться в стані стійкої рівноваги, якщо її приріст за рахунок інвестицій дорівнює її зменшенню за рахунок інших факторів. Оскільки $Y = C + I$, то після ділення цієї рівності на L матимемо $y = c + i$, де y – дохід, c – споживання, а i – інвестиції на одну одиницю праці зі сталою ефективністю. Отже, величина i дорівнює $\alpha f(k)$. Умова стабільності показника k, таким чином, записується як $(\delta + n + g)\, k^* = \alpha f(k^*)$, а величина k^* називається стійким рівнем капіталоозброєності.

1.3. Побудова диференціальних рівнянь із заданими параметричними сім'ями кривих

Припустимо, що задано однопараметричну сім'ю кривих

$$\varphi\big(x, y(x), c\big) = 0\,. \qquad (1.35)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти диференціальне рівняння, розв'язками якого є криві (1.35). Вважаючи, що функція (1.35) має повну похідну за x, запишемо

$$\varphi'_x\left(x, y, c\right) + \varphi'_y\left(x, y, c\right)\frac{dy}{dx} = 0\,. \qquad (1.36)$$

З (1.35) та (1.36) як із системи рівнянь вилучаємо сталу c і отримуємо шукане диференціальне рівняння першого порядку. Якщо ж задано n-параметричну сім'ю кривих

$$\varphi\big(x, y(x), c_1, c_2, .., c_n\big) = 0\,, \qquad (1.37)$$

то до виразу (1.37) додаються співвідношення

$$\frac{d}{dx}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\frac{d}{dx}\left[\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}\right]=$$

$$=\varphi''_{xx}(x,y,c_1,..,c_n)+2\varphi''_{xy}(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}+\varphi''_{yy}(x,y,c_1,..,c_n)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+ \tag{1.38}$$

$$+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)\right]=0.$$

З (1.37) та (1.38) як із системи рівнянь, кількість яких $(n+1)$, вилучаються сталі $c_1,c_2,...,c_n$, а отримане таким чином співвідношення між $x,y,y',..,y^{(n)}$

$$F\left(x,y,y',..,y^{(n)}\right)=0 \tag{1.39}$$

буде шуканим диференціальним рівнянням n-го порядку.

У (1.36) та (1.38) $\varphi'_x(\cdot),\varphi'_y(\cdot),\varphi''_{xx}(\cdot),\varphi''_{xy}(\cdot),\varphi''_{yy}(\cdot)$ означають частинні похідні відповідних порядків за вказаними змінними. Припускаємо, що такі похідні існують, тобто функції (1.36) та (1.38) диференційовані відповідну кількість разів.

Аналогічно діють і при складанні систем рівнянь.

Приклад 1.1. Знайти диференціальне рівняння першого порядку, розв'язками якого буде однопараметрична сім'я

$$e^{x+cy}=2x+3y. \tag{1.40}$$

Розв'язання. Продиференціюємо за x праву частину нашого співвідношення в припущенні, що $y=y(x)$:

$$e^{x+cy}\left(1+c\frac{dy}{dx}\right)=2+3\frac{dy}{dx}. \tag{1.41}$$

Ураховуючи (1.40), перепишемо рівність (1.41):

$$(2x+3y)\left(1+c\frac{dy}{dx}\right)=2+3\frac{dy}{dx}. \tag{1.42}$$

З (1.42) знаходимо c:

$$c = \frac{1}{y'}\left[\frac{2+3y'}{2x+3y} - 1\right]$$

і, підставивши її значення в (1.40), отримаємо шукане диференціальне рівняння

$$e^{x + \frac{x}{y'}\left[\frac{2+3y'}{2x+3y} - 1\right]} = 2x + 3y\,. \tag{1.43}$$

Приклад 1.2. Знайти диференціальне рівняння другого порядку, розв'язками якого буде двопараметрична сім'я

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}\,. \tag{1.44}$$

Розв'язання. Згідно з описаним вище алгоритмом складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}, \\ y' = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}, \\ y'' = 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x}. \end{cases} \tag{1.45}$$

Вилучивши з неї c_1 і c_2, знаходимо шукане диференціальне рівняння

$$y'' - 9y = 0\,. \tag{1.46}$$

Приклад 1.3. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих

$$x^2 + y^2 - cx = 0\,. \tag{1.47}$$

Розв'язання. Продиференціюємо співвідношення (1.47) за x: $2x + 2xy' - c = 0$. Звідси $c = 2x + 2yy'$. Підставивши c у рівняння (1.47), дістанемо шукане диференціальне рівняння

$$x^2 + y^2 - (2x + 2yy')x = 0\,, \text{ або } 2xyy' + x^2 - y^2 = 0\,.$$

РОЗДІЛ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

2.1. Поняття диференціального рівняння, його порядок

Означення 2.1. Рівняння вигляду

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx_2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обов'язкова).

Означення 2.2. Найбільший порядок похідної, яка входить у диференціальне рівняння (2.1), називається порядком диференціального рівняння.

Означення 2.3. Функція $y(x)$ називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння (2.1), якщо вона n разів неперервно диференційована на деякому інтервалі $(a,b) = I$ і задовольняє диференціальне рівняння (2.1) для $x \in I$.

Приклад 2.1. $y'' + 3xy' + 2y = x^2$ – диференціальне рівняння другого порядку.

При $n = 1$ диференціальне рівняння (2.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується таким чином:

$$F(x, y, y') = 0 \quad . \qquad (2.2)$$

Диференціальне рівняння (2.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна зобразити у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)\ . \tag{2.3}$$

Припускаємо, що $f(x,y)$ однозначна й неперервна в деякій області D змінних x,y. Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (2.3).

Якщо в деякій області функція $f(x,y)$ перетворюється на ∞, то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}\ .$$

Множину точок x, y, а також тих, у яких $f(x,y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, приєднаємо до області визначення диференціального рівняння (2.3).

Поряд із (2.3) розглянемо еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy - f(x,y)dx = 0\ . \tag{2.4}$$

У загальнішому вигляді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\ . \tag{2.5}$$

Інколи зручно розглядати диференціальне рівняння в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}\ . \tag{2.6}$$

Функції $M(x,y)$, $N(x,y)$, $X(x,y)$, $Y(x,y)$ вважатимемо неперервними в деякій області.

Означення 2.4. Розв'язком диференціального рівняння (2.3) на інтервалі I назвемо функцію $y = \varphi(x)$, визначену й неперервно диференційовану на I, яка не виходить з області визначення функції $f(x,y)$ і перетворює диференціальне рівняння (2.3) на тотожність для $x \in I$, тобто $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x)),\quad x \in I$. У цьому випадку $y = \varphi(x)$ називається розв'язком, записаним у явній формі (вигляді).

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням. Не завжди можна отримати розв'язок у явному вигляді.

Означення 2.5. Будемо говорити, що рівняння

$$\Phi(x,y) = 0 \tag{2.7}$$

задає в неявній формі розв'язок диференціального рівняння (2.3), якщо ним визначається функція $y = y(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння (2.3). При цьому на розв'язках диференціального рівняння (2.3) виконується

$$\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)f(x,y)\equiv 0\ ,\quad x\in I\ . \tag{2.8}$$

Означення 2.6. Будемо говорити, що співвідношення

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \tag{2.9}$$

визначає розв'язок диференціального рівняння (2.3) у параметричній формі на інтервалі (t_0,t_1), якщо $\varphi'(t)\neq 0$,

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\equiv f(\varphi(t),\psi(t)),\qquad t\in(t_0,t_1)\,. \tag{2.10}$$

2.2. Задача Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (2.3). Задача Коші полягає в тому, щоб серед усіх розв'язків диференціального рівняння (2.3) знайти такий $y = y(x)$, що проходить через задану точку

$$y(x_0)=y_0\quad . \tag{2.11}$$

Тут x_0 - початкове значення незалежної змінної, y_0 - функції.

Розв'язати задачу Коші з геометричного погляду означає (рис. 2.1) знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (2.3) ту, яка проходить через задану точку $M(x_0,y_0)$.

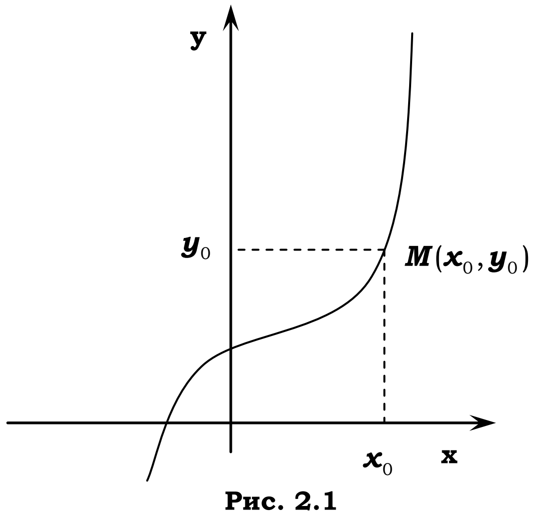

Рис. 2.1

Означення 2.7. Будемо говорити, що задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний розв'язок, якщо існує число $h > 0$, при якому на відрізку $|x - x_0| \le h$ визначений розв'язок $y = y(x)$ такий, що $y(x_0) = y_0$ і не існує іншого розв'язку, визначеного в цьому самому інтервалі $|x - x_0| \le h$, який би не збігався з розв'язком $y = y(x)$ хоча б в одній точці інтервалу $|x - x_0| \le h$, відмінній від точки $x = x_0$.

Якщо задача Коші (2.3), (2.11) має не один, або зовсім не має розв'язків, то говорять, що в точці (x_0, y_0) порушується єдиність її розв'язку.

При постановці задачі Коші ми припускаємо, що x_0, y_0 – обмежені числа, а диференціальне рівняння (2.3) у точці (x_0, y_0) задає деякий напрямок поля, не паралельний осі oy.

Якщо права частина диференціального рівняння (2.3) у точці M набуває нескінченного значення, то необхідно розглянути диференціальне рівняння $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x,y)}$ і знайти розв'язок $x = x(y)$ (рис. 2.2).

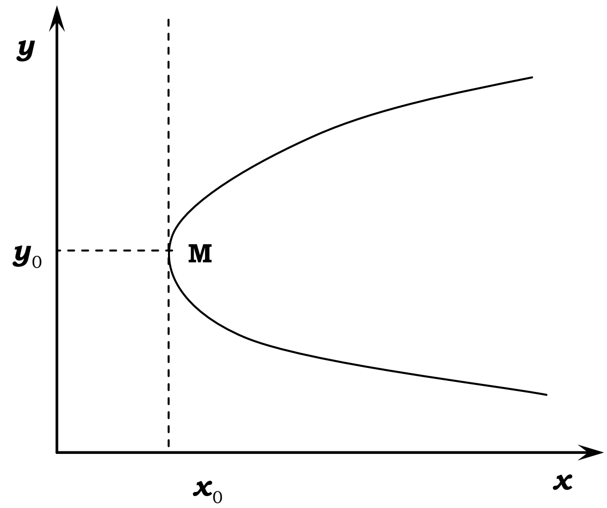

Рис. 2.2

Якщо ж у точці M права частина диференціального рівняння (2.3) має невизначеність, наприклад типу $\dfrac{0}{0}$, то звичайна постановка задачі Коші не має змісту, оскільки через точку M не проходить жодна інтегральна крива. У цьому випадку задача Коші ставиться так: знайти розв'язок $y = y(x)$ (або $x = x(y)$), що примикає до точки M.

У деяких випадках треба шукати розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умови $y \to y_0 \neq \infty$ при $x \to \infty$; $y \to \infty$ при $x \to x_0 \neq \infty$ і т. д.

Теорема Пікара. Припустимо, що функція $f(x,y)$ диференціального рівняння (2.3) визначена й неперервна в обмеженій області

$$D = \{x, y: \ |x - x_0| \leq a; \ |y - y_0| \leq b\} \quad (a > 0, b > 0)$$

І, отже, обмежена

$$|f(x,y)| \leq M, \quad \forall (x,y) \in D \quad (M > 0); \tag{2.12}$$

функція $f(x,y)$ має обмежену частинну похідну за y на D:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq K, \ (x,y) \in D \quad (K > 0). \tag{2.13}$$

За цих умов задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний неперервно диференційований розв'язок в інтервалі

$$|x - x_0| \leq h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \tag{2.14}$$

Зауваження 2.1. У сформульованій теоремі умову (2.13) можна послабити (замінити) так, щоб функція $f(x,y)$ за змінною y задовольняла умову Ліпшиця, тобто

$$\left|f(x,y^{(1)}) - f(x,y^{(2)})\right| \leq L\left|y^{(1)} - y^{(2)}\right|, \quad \forall (x,y^{(1)}) \text{ і } (x,y^{(2)}) \in D. \tag{2.15}$$

Тут $L > 0$ – найменша константа, що задовольняє (2.15) і називається константою Ліпшиця.

Доведення теореми Пікара. Існує кілька способів доведення теореми. Ми використаємо теорему Банаха про нерухому точку стискувального оператора. Цей метод доведення найконструктивніший, тому що дає можливість фактично побудувати розв'язок задачі як границю послідовних наближень Пікара

$$y_0(x) \equiv y_0, \ y_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{m-1}(s))ds, \ m = \overline{1,\infty}. \tag{2.16}$$

Доведемо спочатку, що задача (2.3), (2.11) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{2.17}$$

Справді, нехай $\varphi(x)$ – неперервний розв'язок рівняння (2.17), $\psi(x)$ – неперервно диференційований розв'язок задачі (2.3), (2.11). Підставивши їх відповідно в (2.17) та (2.3), матимемо тотожності

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds\,, \tag{2.18}$$

$$\psi'(x) \equiv f(x,\psi(x)),\ \psi(x_0) = y_0\,. \tag{2.19}$$

З тотожності (2.18) випливає, що розв'язок $\varphi(x)$ як функція верхньої межі інтегрування з неперервною підінтегральною функцією неперервно диференційований і, крім того, задовольняє початкову умову (2.11), тобто $\varphi(x_0) = y_0$. Продиференціювавши тотожність (2.18), матимемо $\varphi'(x) \equiv f(x,\varphi(x))$. Отже, $\varphi(x)$ – розв'язок задачі Коші (2.3), (2.11). Навпаки, проінтегрувавши тотожність (2.19) у межах від x_0 до x, дістанемо $\psi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))ds$, тобто $\psi(x)$ – розв'язок рівняння (2.17).

Отже, для доведення теореми Пікара досить довести справедливість її тверджень для рівняння (2.17). Доведемо теорему для випадку $x \in [x_0, x_0 + h]$, тобто вважатимемо, що $D_1 = \{x : 0 \le x - x_0 \le h\}$. Для $x \in [x_0 - h, x_0]$ доведення здійснюється аналогічно.

Розглянемо множину неперервних на D_1 функцій y, метризовану співвідношенням (відстанню)

$$\rho(y,\tilde{y}) = \sup_{x \in D_1} e^{-B(x)} \left| y(x) - \tilde{y}(x) \right|, \tag{2.20}$$

де $y, \tilde{y}$ – будь-які неперервні функції, тобто $y,\ \tilde{y} \in C(D_1)$, $B(x) = L(x - x_0)$, $L(x) : D \to R,\ L \in C(D)$. Виберемо константу L з умови Ліпшиця, а також замкнену кулю радіусом b із центром у точці y_0

$$\Re = \overline{S}(y_0, b) \in C(D_1)$$

(тобто множину неперервних функцій y, для яких справджується нерівність $\rho(y, y_0) \le b$) та інтегральний оператор $A : C(D_1) \to C(D_1)$, визначений рівністю

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\,. \tag{2.21}$$

Неважко переконатись, що куля $\overline{S}(y_0, b)$ утворює повний метричний (банахів) простір. Покажемо, що оператор A відображає цей простір у себе. Справді, для довільного елемента $y \in \Re$ з урахуванням (2.14), (2.20) маємо оцінки

$$\rho(Ay, y_0) = \sup_{x \in D_1} e^{-B(x)} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) ds - y_0 \right| \le$$

$$\le \sup_{x \in D_1} e^{-B(x)} \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))| ds \le \int_{x_0}^{x_0+h} |f(s, y(s))| ds \le Mh \le b,$$

тобто $Ay \in \Re$.

Доведемо тепер, що оператор A стискувальний:

$$\rho(Ay, Az) \le \alpha\rho(y, z),\ 0 < \alpha < 1\ \ \forall y, z \in \Re. \tag{2.22}$$

Для довільних y, z з $\Re$ маємо рівність

$$\rho(Ay, Az) = \sup_{x \in D_1} e^{-B(x)} \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \right) ds \right|.$$

Використавши умову Ліпшиця (2.15) й очевидні перетворення, дістанемо нерівність

$$\rho(Ay, Az) \le \sup_{x \in D_1} e^{-B(x)} \int_{x_0}^{x} L |y(s) - z(s)| ds =$$

$$= \sup_{x \in D_1} \int_{x_0}^{x} Le^{-L(x-s)} \left(e^{-B(s)} |y(s) - z(s)| \right) ds \le$$

$$\le \sup_{x \in D_1} \int_{x_0}^{x} Le^{-L(x-s)} \left(\sup_{s \in D_1} e^{-B(s)} |y(s) - z(s)| \right) ds =$$

$$= \left(\sup_{x \in D_1} L \int_{x_0}^{x} e^{-(B(x)-B(s))} ds \right) \rho(y, z).$$

Ураховуючи, що

$$0 \le L \int_{x_0}^{x} e^{-(B(x)-B(s))} ds = \int_{x_0}^{x} e^{-(B(x)-B(s))} d\left(B(s) - B(x) \right) =$$

$$= e^{-(B(x)-B(s))} \Big|_{x_0}^{x} = 1 - e^{-B(x)} \le 1 - e^{-B(x_0+h)} = \alpha \le 1, \tag{2.23}$$

дістаємо оцінку (2.22).

Таким чином, установили, що оператор A стискувальний і відображає банахів простір $\Re$ у себе. Тому, згідно з принципом Банаха, рівняння $y = Ay$ або, що те саме, рівняння (2.17) має в просторі $\Re$ єдину нерухому точку – розв'язок $\varphi \in C(D_1)$, тобто

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds .$$

Як уже було показано (див. тотожність (2.18)), неперервний розв'язок рівняння (2.17) неодмінно неперервно диференційований і є розв'язком задачі Коші (2.3), (2.11).

Згідно з принципом Банаха, послідовні наближення $y_m(x)$, побудовані за допомогою рекурентної рівності (2.16), рівномірно збігаються при $m \to \infty$ до нерухомої точки оператора A. Тому нерухому точку $\varphi(x)$ – розв'язок рівняння (2.17), а отже, розв'язок задачі Коші – можна побудувати методом послідовних наближень (2.16). При цьому функція $y_m(x)$, очевидно, буде наближенням до розв'язку задачі Коші. Тому за рівномірною в D_1 збіжністю $y_m(x)$ до $y(x)$ при достатньо великому m функція y_m наближається рівномірно в D_1 до розв'язку задачі Коші з наперед заданою точністю ε, тобто $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; m_0(\varepsilon)$ таке, що $\forall \varepsilon > D_1$ при $m > m_0(\varepsilon)$, $\rho(y_m \;, y) < \varepsilon$, тобто $\max\limits_{x \in D_1} |y_m(x) - y(x)| < \varepsilon$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що метод Пікара доведення теореми найпростіший і, разом з тим, найконструктивніший. Крім доведення теореми, він дає змогу найточніше оцінити швидкість збіжності послідовних наближень (2.16) до розв'язку задачі Коші, а також більш точно вказати міру області існування цього розв'язку. Зупинимось коротко на цих питаннях.

Запишемо послідовно наближення (2.16) у вигляді

$$y_m(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_m - y_{m-1}) .$$

Оцінивши, з урахуванням умови Ліпшиця (2.15), функції $q_i = |y_i - y_{i-1}|$, дістанемо рекурентні нерівності

$$q_1(x) \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)| ds \overset{df}{=} \bar{q}_1(x) ,$$

$$q_i(x) \le \int_{x_0}^{x} L(q_{i-1}(s)ds, \; i = \overline{2, \infty} . \tag{2.24}$$

Звідси одержуємо оцінки

$$q_i(x) \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)| \frac{\sigma^{i-1}(x,s)}{(i-1)!} ds \overset{df}{=} \bar{q}_i(x), \; i = \overline{1, \infty} , \tag{2.25}$$

де $$\sigma(x,s)=B(x)-B(s),\ B(x)=L(x-x_0).$$

Оцінки (2.25) свідчать про степенево-факторіальну швидкість збіжності послідовних наближень (2.16). Разом з тим, за теоремою Банаха про нерухому точку оператора A гарантується лише степенева швидкість збіжності, тобто $q_i \le \alpha^i\tilde{\sigma}$, $\alpha<1$, $\tilde{\sigma}$ – const. Оскільки за доведеною теоремою Пікара послідовність (2.16) рівномірно збіжна до розв'язку задачі (2.3), (2.11), то рівномірно збіжний і ряд

$$y=y_0+\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-y_{i-1}). \qquad (2.26)$$

Використавши оцінки (2.25), матимемо апріорну оцінку залишку ряду (2.26):

$$r_m(x)=\left|y-y_0-\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_{i-1})\right|\le\sum_{i=m+1}^{\infty}\tilde{q}_i(x)=$$

$$=\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}|f(s,y_0)|\sigma^m(x,s)\left(1+\frac{\sigma(x,s)}{m+1}+\ldots+\frac{\sigma^k(x,s)}{(m+1)\ldots(m+k)}+\ldots\right)ds\le$$

$$\le\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}|f(s,y_0)|\sigma^m(x,s)\frac{ds}{1-\dfrac{\sigma(x,s)}{m+1}}. \qquad (2.27)$$

Звідси, зокрема при $m=0$, дістаємо оцінку приросту розв'язку $y(x)$:

$$|y(x)-y_0|\le\int_{x_0}^{x}|f(s,y_0)|e^{\sigma(x,s)}ds. \qquad (2.28)$$

Можна також дістати й апостеріорні оцінки для $r_m(x)$. Справді, записавши для $r_m(x)$ оцінку у вигляді (урахуємо оцінки (2.24))

$$r_m(x)\le q_{m+1}(x)+L\int_{x_0}^{x}\left(q_{m+1}(s)+\ldots+q_{m+k}(s)+\ldots\right)ds\le$$

$$\le\bar{q}_{m+1}(x)+\int_{x_0}^{x}B'(s)\left(\bar{q}_{m+1}(s)+\ldots+\bar{q}_{m+k}(s)+\ldots\right)ds=\bar{r}_m(x),$$

дістанемо для $\bar{r}_m(x)$ інтегральне рівняння

$$r_m(x)\le\bar{r}_m(x)=\int_{x_0}^{x}L\bar{q}_m(s)e^{\sigma(x,s)}ds, \qquad (2.29)$$

де $$\bar{q}_m(x)\ge|y_m(x)-y_{m-1}(x)|=q_m(x).$$

За допомогою оцінок (2.27), (2.29) можна, відповідно апріорно й апостеріорно, установити міру досягнутої точності наближення $y_m(x)$ до розв'язку задачі (2.3), (2.11), знайденого методом Пікара, а також визначити необхідне m, при якому це наближення матиме необхідну точність ε. Для останнього достатньо, згідно з (2.27), розв'язати відносно m нерівність

$$\max_{x \in D_1} \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x} |f(s, y_0)| \sigma^m(x, s) \frac{ds}{1 - \frac{\sigma(x, s)}{m+1}} < \varepsilon .$$

Розглянемо питання про оцінку міри області існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Оцінка (2.28) дає змогу точніше визначати міру області D_1 існування та єдиності розв'язку $y(x)$ задачі (2.3), (2.11), ніж це вказано в (2.14). Справді, величина h у (2.14) фактично випливає з рівняння (2.17), а саме, з нерівності

$$|y - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))| ds \le b .$$

Узявши $|f| \le M$, знаходимо $h \le \frac{b}{M}$, якщо $\frac{b}{M} \le a$; $h = a$, коли $\frac{b}{M} \ge a$. Ця оцінка досить груба. Тому, можливо, за допомогою оцінки (2.28) величина h буде знайдена точніше. Справді, якщо з нерівності

$$\int_{x_0}^{x_0 + h} |f(s, y_0)| e^{\sigma(x_0 + h, s)} ds \le b \qquad (2.30)$$

знайти максимальне значення $h = h_1$, то величина

$$h^* = \min(a, h_1) \qquad (2.31)$$

визначатиме точніше міру області D_1 існування та єдиності розв'язку задачі Коші (2.3), (2.11).

Теорема Пеано (про існування розв'язку). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна на D, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить хоча б одна інтегральна крива.

Якщо функція диференційована й задовольняє (2.13), то вона задовольняє умову Ліпшиця з $L=K$.

Функція може задовольняти умову Ліпшиця, але не бути диференційованою і, отже, не задовольняти (2.13). Наприклад, $y = |x|$ $(L = 1)$.

2.3. Поняття загального розв'язку, форми його запису

На прикладах можна переконатися, що диференціальне рівняння (2.3) має нескінченну множину розв'язків, яка залежить від деякого параметра c:

$$y = u(x,c). \qquad (2.32)$$

Ця сім'я називається загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3). При кожному c (2.32) дає інтегральну криву.

Для розв'язування задачі Коші (2.3), (2.11) параметр c можна знайти з рівняння $y_0 = u(x_0,c)$.

Дамо точне означення загального розв'язку. Припустимо, що на D виконуються умови теореми Пікара.

Означення 2.8. Функцію

$$y = \varphi(x,c), \qquad (2.33)$$

що визначена в деякій області змінних x та c і має неперервну частинну похідну за x, будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області D, якщо рівняння (2.33) можна розв'язати відносно c в області D

$$c = \psi(x,y) \qquad (2.34)$$

і функція (2.33) є розв'язком диференціального рівняння (2.3) при всіх значеннях довільної сталої c, які визначаються формулою (2.34), коли $(x,y) \in D$.

Суть означення 2.8: припустимо, що задана сім'я кривих F на області D, яка залежить від одного параметра c. Якщо будь-яка крива з F є інтегральною кривою диференціального рівняння (2.3) і всі криві з F у сукупності покривають D, то F є загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області D (рис. 2.3).

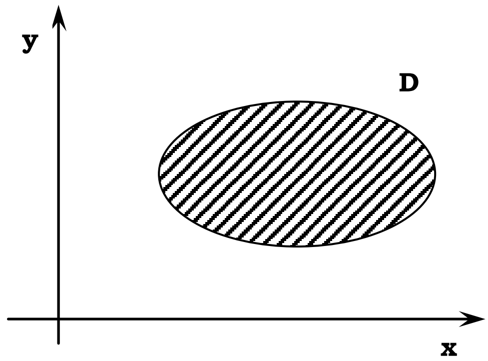

Рис. 2.3

Для розв'язання задачі Коші константу c можна знайти згідно з (2.34): $c_0 = \psi(x_0, y_0)$.

Інколи у формулі (2.33) роль c відіграють x_0 та y_0, тоді говорять, що розв'язок подано у формі Коші:

$$y = y(x, x_0, y_0) \quad . \tag{2.35}$$

Приклад 2.2. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $y(x_0) = y_0$ у формі Коші.

Розв'язання. Загальний розв'язок $y = c\,x$, $0<x<\infty$, $-\infty<y<+\infty$. У вказаній області виконуються умови теореми Пікара. Звідси $c = \frac{y}{x}$, $c_0 = \frac{y_0}{x_0}$, $y = \frac{y_0}{x_0} x$ – розв'язок у формі Коші.

У більшості випадків при інтегруванні диференціального рівняння (2.3) ми отримуємо загальний розв'язок у неявній формі

$$\Phi(x, y, c) = 0 \ \ (\text{або } \ \psi(x, y) = c\ ) \ , \tag{2.36}$$

який називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2.3).

Означення 2.9. Будемо називати співвідношення (2.36) загальним розв'язком у неявній формі або загальним інтегралом в області D, якщо співвідношенням (2.36) визначається загальний розв'язок (2.33) диференціального рівняння (2.3) в області D.

З означення випливає, що (2.34) – загальний інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області D.

Інколи при інтегруванні отримуємо сім'ю інтегральних кривих, залежну від c, у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c), \\ y = \psi(t, c). \end{cases} \tag{2.37}$$

Таку сім'ю інтегральних кривих будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) у параметричній формі. Якщо з (2.37) виключити t, то отримаємо загальний розв'язок у неявній або явній формі.

2.4. Частинні й особливі розв'язки. Знаходження кривих, підозрілих на особливість розв'язку, за диференціальним рівнянням

Означення 2.10. Розв'язок, що складається з точок єдиності розв'язку задачі Коші, називається частинним і його можна отримати із загального при фіксованому c.

Розв'язок задачі Коші, що задовольняє теорему Пікара, є частинним.

Означення 2.11. Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати особливим.

Геометрично особливому розв'язку відповідають інтегральні криві, які не містяться в загальному розв'язку. Тому особливий розв'язок не може існувати всередині області D існування загального розв'язку. Його не можна отримати з формули загального розв'язку при жодних числових значеннях c, включаючи $\pm\infty$. Його можна отримати із загального розв'язку лише при $c = c(x)$.

Існують розв'язки, які не є ні частинними, ні особливими. Їх можна отримати шляхом склеювання кусків частинних і особливих розв'язків (рис. 2.4).

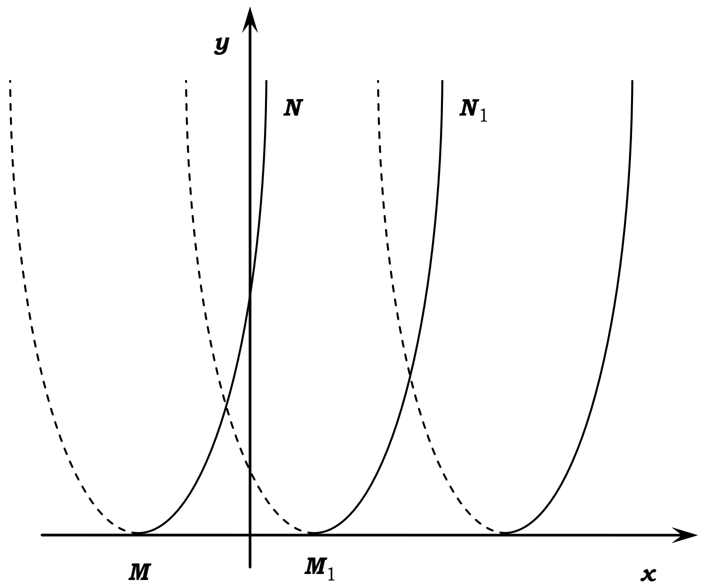

Рис. 2.4

Приклад 2.3. Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння $y' = 2\sqrt{y}$.

Розв'язання. При $y > 0$ маємо $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $y = (x + c)^2$, $x + c \geq 0$.

Отримали загальний розв'язок в області $-\infty < x < \infty$, $0<y<\infty$, у якій виконуються умови теореми Пікара. Однак розв'язком буде $y = 0$, що ми отримуємо при $c = -x$. Він не міститься в загальному розв'язку при жодному фіксованому c . Отже, згідно з означенням, $y(x) \equiv 0$ – особливий розв'язок.

Якщо $f(x, y)$ неперервна на D, то умовою підозрілості на особливий розв'язок є необмеженість похідної $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Знайшовши таку криву, треба переконатися, що:

- вона є інтегральною кривою;
- в кожній її точці порушується єдиність розв'язку.

У прикл. 2.3 частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ дорівнює нескінченності при $y \equiv 0$. Оскільки $y = 0$ – розв'язок і через нього проходять інтегральні криві із загального розв'язку, то $y \equiv 0$ – особливий розв'язок.

Приклад 2.4. Знайти особливі розв'язки диференціального рівняння $y' = 2\sqrt{y} + 1$.

Розв'язання. Знайдемо частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Очевидно, що $\frac{\partial f}{\partial y}$ набуває нескінченного значення при $y \equiv 0$. Однак $y \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння, тому й не є особливим розв'язком.

Припустимо, що диференціальне рівняння має однопараметричну сім'ю інтегральних кривих $\Phi(x, y, c) = 0$. Нехай ця сім'я має обвідну, тобто лінію, що в кожній точці дотикається сім'ї і на жодній ділянці не збігається з жодною її кривою. Тоді ця обвідна й буде особливим розв'язком. Дійсно, через довільну її точку проходять мінімум два розв'язки: обвідна й сам розв'язок.

2.5. Два означення інтеграла. Теореми про загальний вигляд інтеграла та залежність двох інтегралів одного диференціального рівняння

Нехай

$$y = \varphi(x, c) \tag{2.38}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (2.3) в області D, у якій виконуються умови теореми Пікара. Тоді на D рівняння (2.38) можна розв'язати відносно c:

$$\psi(x, y) = c \quad . \tag{2.39}$$

Функція $\psi(x, y)$ набуває сталих значень на довільному частинному розв'язку з D, причому значення сталої визначається частинним розв'язком

$$\psi(x, \varphi(x, c)) = c \quad . \tag{2.40}$$

Означення 2.12 (перше означення інтеграла). Функція $\psi(x, y)$, що визначена на D і не зводиться до константи, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області D, якщо на довільному частинному розв'язку з D вона набуває сталих значень.

Припустимо, що $\psi(x, y)$ – диференційована функція. Тоді на довільному частинному розв'язку

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \tag{2.41}$$

або

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} f(x, y) dx = 0 \quad . \tag{2.42}$$

При цьому $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ на D, оскільки у протилежному випадку $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. А це означає, що поле напрямків диференціального рівняння (2.3) у відповідній точці не задано.

Означення 2.13 (друге означення інтеграла). Функція $\psi(x, y)$, визначена й неперервна з частинними похідними в області D і така, що $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ в області D, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області D, якщо повний її диференціал, узятий за диференціальним рівнянням (2.3), тотожно дорівнює нулю в області D.

З (2.42) випливає, що

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} f(x,y) \ . \tag{2.43}$$

Функція, яка є інтегралом за означенням 2.13, буде інтегралом і за означенням 2.12. Обернене не завжди вірно.

Якщо диференціальне рівняння (2.3) має один інтеграл, то воно має безліч інтегралів.

Теорема 2.1 (про загальний вигляд інтеграла). Якщо $\psi_1(x,y)$ – інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області D і функція $\psi_1(x,y)$ диференційована в D, а $\Phi(z)$ – довільна функція, визначена

й неперервно диференційована в області зміни функції $\psi_1(x,y)$ при $(x,y) \in D$, то

$$\psi(x,y) = \Phi(\psi_1(x,y)) \tag{2.44}$$

є інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

Доведення. Обчислимо $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y},$$

причому $\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \neq 0$ в області D. Маємо

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = \frac{d\Phi}{d\psi_1}\ \mathrm{d}\psi_1 \equiv 0, \tag{2.45}$$

оскільки $d\psi_1 \equiv 0$, а $\psi_1(x,y)$ – інтеграл диференціального рівняння (2.3). З (2.45) випливає, що $\psi(x,y)$ – інтеграл диференціального рівняння (2.3) згідно з означенням.

Теорема 2.2 (про залежність двох інтегралів). Нехай $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ – два інтеграли диференціального рівняння (2.3). Тоді існує неперервно диференційована функція F така, що

$$\psi_2(x,y) = F(\psi_1(x,y)) \ . \tag{2.46}$$

Доведення. Оскільки $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ – інтеграли, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy} = 0, \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy} = 0. \end{cases} \tag{2.47}$$

З (2.47) випливає, що

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad . \tag{2.48}$$

З функціонального аналізу відомо, що з умови (2.48) випливає (2.46).

Приклад 2.5. Обчислити повний диференціал функції $\psi(x,y) = x^2 + y^2$ на розв'язках диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^4 y + y^3 x \, .$$

Розв'язання. Згідно з (2.41), (2.42) маємо

$$d\psi(x,y) = d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy = 2xdx + 2y(x^4 y + y^3 x)dx =$$
$$= (2x + 2x^4 y^2 + 2y^4 x)dx \, .$$

Приклад 2.6. Перевірити, чи є $\psi(x,y) = e^{2x} + 2e^{-y} = c$ інтегралом диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$.

Розв'язання. Дійсно,

$$d\psi(x,y) = d(e^{2x} + 2e^{-y}) =$$
$$= 2e^{2x}dx - 2e^{-y}dy = 2e^{2x}dx + 2e^{-y}(e^{2x+y})dx = 2e^{2x}dx - 2e^{2x}dx \equiv 0 \, .$$

Тому функція $\psi(x,y) = e^{2x} + 2e^{-y}$ є інтегралом указаного диференціального рівняння.

2.6. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

А) Неповні рівняння. Диференціальне рівняння, що не містить шуканої функції, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \ x \in (a,b) \, . \tag{2.49}$$

Припустимо, що $f(x)$ є неперервною функцією на (a,b). Тоді функція

$$y = \int f(x)dx + c \tag{2.50}$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (2.49) в області

$$a < x < b, -\infty < y < +\infty . \tag{2.51}$$

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (2.49) не має.

Разом з диференціальним рівнянням (2.49) розглянемо початкові умови

$$y(x_0) = y_0 . \tag{2.52}$$

Проінтегруємо вираз (2.50) від $x_0 \in (a,b)$ до x:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + c .$$

Знаходимо c з умови (2.52)

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + y_0 \tag{2.53}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (2.49) у формі Коші.

Якщо $f(x)$ – неперервна на (a,b) за виключенням точки $\xi \in (a,b)$, у якій $f(\xi)$ набуває нескінченного значення, то замість диференціального рівняння (2.49) будемо розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)} . \tag{2.49*}$$

Пряма $x = \xi$ є розв'язком диференціального рівняння (2.49*), і ми цей розв'язок повинні приєднати до розв'язку диференціального рівняння (2.49). Він може бути частинним або особливим залежно від того, зберігається чи порушується в будь-якій його точці єдиність. Якщо $x = \xi$ – частинний розв'язок, то його часто можна отримати із загального при нескінченних значеннях c; якщо ж він особливий, то його отримують із загального при $c = c(y)$.

Рівняння, що не містить незалежної змінної, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(y) . \tag{2.54}$$

Припускаємо, що функція $f(y)$ визначена й неперервна на інтервалі (c,d). Замість (2.54) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} . \tag{2.55}$$

Диференціальне рівняння (2.55) не містить шуканої функції і розв'язується аналогічно диференціальному рівнянню (2.49).

Якщо $f(y) \neq 0$, $y \in (c,d)$, то

$$x=\int\frac{1}{f(y)}dy+c \qquad (2.56)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (2.55) в області $c<y<d,\ -\infty<x<+\infty$. Аналогічно

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{1}{f(\tau)}d\tau+x_0 \qquad (2.57)$$

– загальний розв'язок у формі Коші.

Якщо $f(y)$ неперервна на (c,d) і набуває нульового значення при $y=\eta\ \in(c,d)$, то треба розглядати диференціальне рівняння (2.54). Розв'язок $y=\eta$ буде частинним, якщо в кожній його точці зберігається єдиність, і особливим, якщо в кожній його точці вона порушується. Якщо $y=\eta$ – частинний розв'язок, то ми його отримуємо при нескінченних значеннях $c\ (\pm\infty)$, якщо особливий – то при $c=c(x)$.

Якщо $f(y)$ у точці $y=\overline{\eta}$ перетворюється на нескінченність $(\overline{\eta}\in(c,d))$, то розглядаємо диференціальне рівняння (2.55), яке має неперервну праву частину на (c,d). При цьому диференціальне рівняння на (c,d) має єдиний розв'язок (рис. 2.5).

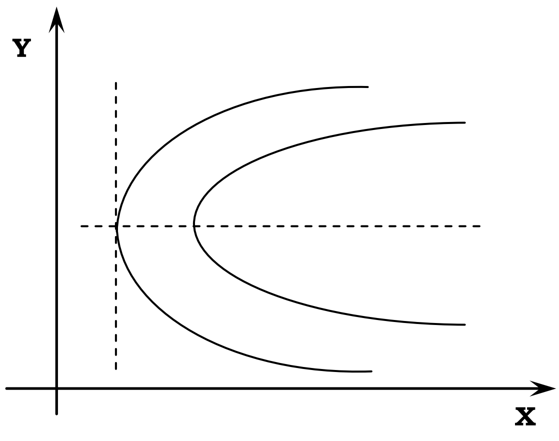

Рис. 2.5

Приклад 2.7. Розв'язати диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}$.

Розв'язання. Область визначення $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $y \neq 0$. Оскільки в точці $y = 0$ дотичні паралельні осі OY, то розв'язок у площині (x, y) єдиний: $2ydy = dx$, $y^2 = x + c$.

Б) Рівняння з відокремлюваними змінними. Розглянемо рівняння в диференціалах вигляду

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \tag{2.58}$$

де $X(x), Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Диференціальне рівняння (2.58) називається рівнянням з відокремленими змінними. Його можна переписати так:

$$d(\int X(x)dx + \int Y(y)dy) = 0.$$

Звідси маємо загальний розв'язок у квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = c. \tag{2.59}$$

Якщо треба записати розв'язок задачі Коші, то записують

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = c.$$

З умови (2.52) визначають $c = 0$. Отже,

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = 0 \tag{2.60}$$

– розв'язок задачі Коші (2.52), (2.58). За даних припущень особливих розв'язків диференціальне рівняння (2.58) не має.

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \tag{2.61}$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними.

Припустимо, що $m_1(x)n(y) \neq 0$. Розділимо обидві частини рівняння (2.61) на $m_1(x)n(y)$ та отримаємо

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \tag{2.62}$$

Аналогічно записуємо

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = c \tag{2.63}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (2.61) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)}d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)}d\tau = 0 \tag{2.64}$$

– розв'язок задачі Коші (2.52), (2.61). При діленні на $n(y)m_1(x)$ ми можемо загубити розв'язки, які визначаються рівняннями $n(y)=0$, $m_1(x)=0$. Дійсно, нехай $n(b)=0$, тоді $m(x)n(b)dx+m_1(x)n_1(b)dy=0$, отже $y=b$ – розв'язок диференціального рівняння (2.61). Аналогічно $x=a$ $(m_1(a)=0)$. Якщо ці розв'язки не входять у (2.63) при деяких c, то вони є особливими розв'язками диференціального рівняння (2.61).

З розв'язку $y=b$ ми повинні виключити точку $x=a$, оскільки в точці (a,b) диференціальне рівняння (2.61) не визначає нахилу поля y'. З тієї самої причини з розв'язку $x=a$ виключається точка $y=b$.

Таким чином, розв'язки $x=a(y\neq b)$ і $y=b$ $(x\neq a)$ примикають до точки (a,b) і можуть бути особливими. Других особливих розв'язків немає.

Приклад 2.8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy(1+x^2)dy-(1+y^2)dx=0$.

Розв'язання. Розділяючи змінні, отримаємо

$$\frac{y}{1+y^2}dy-\frac{1}{x(1+x^2)}dx=0.$$

Оскільки $\dfrac{1}{x(1+x^2)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо у вигляді $\dfrac{y}{1+y^2}dy-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx=0$. Отже,

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{xdx}{1+x^2}=c,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]-\ln x=c,\ (1+x^2)(1+y^2)=c_1x^2,\ c_1=e^{2c}.$$

Очевидно, що $x=0$ є частинним розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

В) Однорідні й узагальнено-однорідні диференціальні рівняння. Розглянемо рівняння в диференціалах (2.5), у якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними одного й того самого степеня однорідності m.

Означення 2.14. Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру m, якщо

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y). \tag{2.65}$$

Якщо (2.65) виконується при $t\geq 0$, то функція $f(x,y)$ називається додатно однорідною.

Однорідне рівняння завжди можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.66}$$

у якому $\varphi(\cdot)$ – однорідна функція нульового виміру.

Однорідні рівняння завжди інтегруються у квадратурах заміною

$$y = zx\,. \tag{2.67}$$

При цьому рівняння (2.5) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$M(x,zx)dx + N(x,zx)(zdx + xdz) = 0\,,$$

$$x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(zdx + xdz) = 0\,,$$

$$\big(M(1,z) + zN(1,z)\big)\,dx + xN(1,z)dz = 0\,,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz = 0\,,$$

$$\ln x + \int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz = \ln c\,,\;\; x = ce^{\phi(z)}\,,$$

$$x = ce^{\phi(\frac{y}{x})}\,, \tag{2.68}$$

де
$$\phi(z) = \int \frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz\,.$$

При відокремленні змінних ми могли загубити розв'язки $z = z_i$, де z_i – корені рівняння

$$M(1,z) + N(1,z)z = 0\,. \tag{2.69}$$

Півпрямі $y = z_i x$ $(x \neq 0)$ примикають до початку координат. Ці розв'язки можуть міститися у формулі загального розв'язку, а можуть бути й особливими. Особливими можуть бути також півосі осі $0Y : x = 0\ (y \neq 0)$. Інших особливих розв'язків диференціальне рівняння (2.5) не має.

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c}\right) \tag{2.70}$$

зводиться до однорідного. Якщо $c_1 = c = 0$, то це однорідне рівняння.

Припустимо, що хоч одне з чисел c_1, c не дорівнює 0. Можливі два випадки.

Перший – $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$. Проводимо заміну

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta, \tag{2.71}$$

де ξ, η – нові змінні, α, β – параметри. Тоді

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right). \tag{2.72}$$

Параметри α, β вибираємо згідно із системою

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0. \end{cases} \tag{2.73}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система (2.73) має єдиний розв'язок. Таким чином, ми прийшли до однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right). \tag{2.74}$$

Другий – $\Delta = 0$. У цьому випадку $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, тобто $a_1 = ka, b_1 = kb$. Тому

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) = f_1(ax + by). \tag{2.75}$$

Заміною $t = ax + by$ диференціальне рівняння (2.75) приводимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dt}{dx} = a + bf_1(t). \tag{2.76}$$

Приклад 2.9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0$.

Розв'язання. Це однорідне рівняння, $m = 2$. Зробимо заміну

$$y = zx, dy = zdx + xdz, \ (1 + z + z^2)dx - (xdz + zdx) = 0,$$

$$(1 + z^2)dx - xdz = 0, \ \frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z^2} = 0, \ \ln x - arctg\, z = c.$$

Отже, $\ln x - arctg\, z = c$ – загальний розв'язок нашого рівняння.

Диференціальне рівняння (2.5) називається узагальнено-однорідним, якщо існує таке число k, при якому ліва частина цього диференціального рівняння стає однорідною функцією від величин x, y, dx, dy у припущенні, що останні мають відповідно виміри: перший, k-й, нульовий, $(k-1)$-й. При $k = 1$ маємо звичайне однорідне рівняння.

У цьому випадку диференціальне рівняння (2.5) заміною

$$y = zx^k \tag{2.77}$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. При

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}$$

рівняння (2.5) є рівнянням з відокремленими змінними. Особливі розв'язки таких рівнянь досліджуються аналогічно.

Приклад 2.10. Розв'язати узагальнено-однорідне диференціальне рівняння $(Ax^2y^2 + Bxy + C)dx - x^2dy = 0$.

Розв'язання. Знайдемо число k для даного рівняння $2 + 2k = 1 + k = 0 = 2 + k - 1$, $k = -1$. Звідси

$$y = \frac{z}{x},\ dy = \frac{xdz - zdx}{x^2},$$

$$(Az^2 + Bz + C)dx - (xdz - zdx) = 0,\ \left(Az^2 + (B+1)z + C\right)dx - xdz = 0.$$

Тоді $\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{Az^2 + (B+1)z + c} = C$ – загальний розв'язок нашого рівняння, записаний в квадратурах.

Г) Лінійні рівняння першого порядку. Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2.78}$$

називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. При $g(x) = 0$ воно називається однорідним:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \tag{2.79}$$

оскільки його ліва частина лінійна й однорідна відносно y і $\frac{dy}{dx}$. Рівняння (2.78) при $g(x) \neq 0$ називається неоднорідним. Диференціальне рівняння (2.79) інтегрується у квадратурах, оскільки є диференціальним з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$. Звідси загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = ce^{-\int p(x)dx}. \tag{2.80}$$

Якщо $y(x_0) = y_0$, то

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}. \tag{2.81}$$

– розв'язок відповідної задачі Коші.

Загальні властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь:

- якщо $p(x)$ та $g(x)$ неперервні, то, згідно з теоремою Пікара, розв'язок задачі Коші для диференціальних рівнянь (2.78), (2.79) існує і є єдиним;
- лінійне диференціальне рівняння (2.79) не має особливих розв'язків;
- інтегральні криві однорідного диференціального рівняння (2.79) не можуть перетинати вісь OX, оскільки у протилежному випадку порушувалися б умови єдиності розв'язку задачі Коші;
- диференціальне рівняння (2.78) інваріантне відносно перетворення $x = \varphi(t), (\varphi'(t) \neq 0)$. Дійсно, скориставшись формулою $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)}$, отримаємо лінійне рівняння в змінних y, t: $\frac{dy}{dt} + P(\varphi(t))\varphi'(t)y = g(\varphi(t))\varphi'(t)$;
- диференціальні рівняння (2.78), (2.79) інваріантні відносно заміни

$$y = \alpha(x)z + \beta(x), \tag{2.82}$$

де z – нова змінна, $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – неперервні функції, $\alpha(x) \neq 0$ на (a, b). Тоді нове рівняння в змінних z, x лінійне, наприклад для (2.78):

$$z' + \frac{\alpha'(x) + p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)} z = \frac{g(x) - \beta'(x) - p(x)\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Якщо $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (2.79), то

$$y(x) = Cy_1(x), \tag{2.83}$$

де C – константа, є загальним його розв'язком.

Справедлива теорема.

Теорема 2.3 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння). Якщо $y_1(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.78), а (2.80) – загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (2.79), то сума

$$y = y_1(x) + ce^{-\int p(x)dx} \tag{2.84}$$

є загальним розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.78).

Теорема доводиться безпосередньою підстановкою (2.84) у рівняння (2.78).

Якщо відомі два частинних розв'язки диференціального рівняння (2.78), то загальний його розв'язок записується без квадратур:

$$y = y_1(x) + c(y_2(x) - y_1(x)). \tag{2.85}$$

Розглянемо два методи інтегрування неоднорідного диференціального рівняння (2.78).

Метод Лагранжа (варіації довільної сталої). Розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.86}$$

Підставивши (2.86) у (2.78), отримаємо

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} + c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Звідси $c'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}$, $c(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Остаточно маємо

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \tag{2.87}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (2.78), записаний через дві квадратури. Довільна стала входить завжди в загальний розв'язок лінійно.

Метод Ейлера полягає в тому, що ліва частина диференціального рівняння (2.78) зображується у вигляді точної похідної шляхом множення на деяку функцію $\mu = \mu(x)$. Визначимо $\mu(x)$: $(\mu y)' = \mu' y + \mu y' = \mu(y' + p(x)y)$. Звідки $\mu' = \mu p(x)$, тобто $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ (функція $\mu(x)$ називається інтегрувальним множником). Тому

$$\left[e^{\int p(x)dx}y\right]' = g(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{2.88}$$

Отже, $e^{\int p(x)dx}y = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. З останнього співвідношення отримуємо формулу (2.87).

Загальний розв'язок за умови $y(x_0) = y_0$ можна записати у формі Коші:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}\left[\int\limits_{x_0}^{x} g(\tau)e^{\int p(\tau)d\tau}d\tau + y_0\right]. \tag{2.89}$$

Приклад 2.11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + xy = 0$.

Розв'язання. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння. Згідно з (2.80) $y = ce^{-\int x dx} = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

Приклад 2.12. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x$.

Розв'язання. За формулою (2.87)

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + c\right] = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Д) Рівняння Бернуллі. Це рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \qquad (2.90)$$

Рівняння (2.90) завжди інтегрується у квадратурах шляхом підстановки

$$y^{1-n} = z. \qquad (2.91)$$

Оскільки $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, то помножимо (2.90) на $(1-n)y^{-n}$:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x), \qquad (2.92)$$

яке вже є лінійним.

При $0 < n < 1$ рівняння Бернуллі має особливий розв'язок $y(x) \equiv 0$. При $n > 1$ розв'язок $y(x) \equiv 0$ міститься в загальному розв'язку при $c = \infty$. При $n < 0$ $y(x) \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння (2.90).

Приклад 2.13. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - y = (1+x)y^2.$$

Розв'язання. Це рівняння Бернуллі при $n = 2$. Тоді

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{y} = -(1+x), \quad \frac{1}{y} = z, \quad \frac{dz}{dx} + z = -(1+x).$$

Отже,

$$\frac{1}{y} = z = e^{-x}\left[\int(-1-x)e^x dx + c\right] = ce^{-x} - x$$

– загальний розв'язок нашого рівняння.

Відомо, що диференціальне рівняння $m'(y)y' + p(x)m(y) = q(x)$ зводиться до лінійного заміною $z = m(y)$.

2.7. Рівняння Ріккаті

Рівняння Ріккаті має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (2.93)$$

де $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – визначені та неперервні на (a,b) скалярні функції. Причому $R(x) \neq 0$ і $P(x) \neq 0$, оскільки при цьому диференціальне рівняння (2.93) вироджується в рівняння Бернуллі або лінійне відповідно.

За таких припущень відносно функцій $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ диференціальне рівняння (2.93) має єдиний розв'язок при $y(x_0) = y_0$. Тому диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

Властивості диференціального рівняння Ріккаті:

а) інваріантність відносно перетворення

$$x = \varphi(t) \quad \left(\varphi'(t) \neq 0\right); \quad (2.94)$$

б) інваріантність відносно дробово-лінійного перетворення

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}, \quad (2.95)$$

де $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ – будь-які неперервно диференційовані функції на (a,b), що задовольняють умову $\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0$, z – нова незалежна змінна.

Заміною $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ диференціальне рівняння (2.93) зводиться до рівняння вигляду

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + a(x). \quad (2.96)$$

За змінних значень функцій $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ диференціальне рівняння (2.93) інтегрується тільки в деяких випадках, а саме:

$$y' = \varphi(x)\left(ay^2 + by + c\right); \quad (2.97)$$

диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = a\frac{y^2}{x^2} + b\frac{y}{x} + c; \quad (2.98)$$

однорідне диференціальне рівняння

$$y' = a\frac{y^2}{x} + b\frac{y}{x} + c, \quad (2.99)$$

де a, b, c – константи.

Диференціальне рівняння, яке зводиться до диференціального рівняння (2.97) заміною $y = z\sqrt{x}$

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}, \tag{2.100}$$

інтегрується, оскільки є узагальнено-однорідним при $k = -1$. Здійснюємо заміну $y = \dfrac{z}{x}$. Тут a, b, c – сталі такі, що $a^2 + c^2 \neq 0$.

Побудова загального розв'язку диференціального рівняння (2.93) у випадках, коли відомі частинні лінійно незалежні розв'язки.

1) Відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$.

Твердження 2.1. Якщо відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$ диференціального рівняння (2.93), то воно зводиться до рівняння Бернуллі при $n = 2$.

Доведення. Зробимо заміну

$$y = y_1(x) + z. \tag{2.101}$$

Підставимо (2.101) у (2.93):

$$y_1' + z' = P(x)(y_1^2 + 2y_1 z + z^2) + Q(x)(y_1 + z) + R(x).$$

Звідси

$$z' - \big(2P(x)y_1(x) + Q(x)\big)z = P(x)z^2. \tag{2.102}$$

Далі підстановкою $u = \dfrac{1}{z}$ диференціальне рівняння (2.102) зводимо до лінійного

$$u' + \big(2P(x)y_1(x) + Q(x)\big)u = -P(x). \tag{2.103}$$

При відомому одному частинному розв'язку диференціальне рівняння (2.103) інтегрується через дві квадратури. Оскільки $z = \dfrac{1}{u}$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}. \tag{2.104}$$

Дослідимо структуру загального розв'язку диференціального рівняння (2.87). Оскільки $u = A(x)c + B(x)$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{A(x)c + B(x)}. \tag{2.105}$$

Отже, загальний розв'язок – це дробово-раціональна функція сталої c.

2) Відомі два частинні розв'язки диференціального рівняння (2.103): $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Твердження 2.2. Якщо відомі два частинні розв'язки диференціального рівняння (2.103), то загальний розв'язок записується через одну квадратуру.

Дійсно, при заміні (2.104) $u_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$ є частинним розв'язком лінійного рівняння (2.103). Однак загальний розв'язок диференціального рівняння (2.103) знаходиться через одну квадратуру:

$$u = ce^{-\int(2P(x)y_1(x)+Q(x))dx} + \frac{1}{y_2 - y_1}. \quad (2.106)$$

3) Відомі три частинні розв'язки диференціального рівняння (2.103) $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння Ріккаті в цьому випадку знаходиться без квадратур. Дійсно, якщо $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ – частинні розв'язки диференціального рівняння (2.93), то $u_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$, $u_2 = \dfrac{1}{y_3 - y_1}$ – частинні розв'язки лінійного рівняння (2.103). А в цьому випадку його розв'язок знаходиться без квадратур

$$u = c\left(u_2(x) - u_1(x)\right) + u_1(x) = c\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) + \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}. \quad (2.107)$$

Підставляючи (2.107) у (2.104), знайдемо розв'язок диференціального рівняння (2.93).

2.8. Рівняння в повних диференціалах

Означення 2.15. Рівняння (2.5) називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$, тобто

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = 0. \quad (2.108)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5) має вигляд

$$U(x,y) = c. \quad (2.109)$$

Особливих розв'язків у цьому випадку диференціальне рівняння (2.5) не має.

Приклад 2.14. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$xdx + ydy = 0.$$

Розв'язання. $U(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$, $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=c$ – загальний інтеграл.

Припустимо, що функції $M(x,y)$, $N(x,y)$ неперервно диференційовані.

Теорема 2.4. Для того, щоб диференціальне рівняння (2.5) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \qquad (2.110)$$

Доведення. Необхідність. Нехай диференціальне рівняння (2.5) є рівнянням у повних диференціалах

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Звідси

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y), \qquad (2.111)$$

а це означає, що виконується (2.110).

Достатність. Нехай умова (2.110) виконується. Покажемо, що існує $U(x,y)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (2.108) або (2.111). Розглянемо перше рівняння із системи (2.111):

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y). \qquad (2.112)$$

Рівняння (2.112) задовольняє функція

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y), \qquad (2.113)$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція, яку виберемо так, щоб виконувалася друга рівність системи (2.111):

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y).$$

Останнє співвідношення запишемо таким чином: $\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y)$. Використавши (2.110), отримаємо

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y), \; N(\tau,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=$$

$$= N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y),\ \ \varphi'(y) = N(x_0,y).$$

Отже, $\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c_1$, $U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c_1$.

Теорему доведено.

Поклавши $c_1 = 0$, загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5) запишемо у вигляді $U(x,y) = c$, тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy = c. \qquad (2.114)$$

Якщо при побудові функції $U(x,y)$ узяти спочатку друге рівняння системи (2.111), то отримаємо

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c. \qquad (2.115)$$

У формулах (2.114), (2.115) точки x_0, y_0 вибирають довільно, але так, щоб інтеграли мали зміст. Якщо точки x_0, y_0 вибрані вдало, то задача інтегрування спрощується.

Приклад 2.15. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^3 + y)dx + (x - y)\,dy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M(x,y) = x^3 + y$, $N(x,y) = x - y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$. Використовуємо формулу (2.114) при $x_0 = y_0 = 0$. Знайдемо $\int\limits_0^x (x^3 + y)dx + \int\limits_0^y (0 - y)dy = c$. Отже, $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = c$ – загальний інтеграл.

Формули (2.114), (2.115) дають можливість розв'язувати задачу Коші з умовами $y(x_0) = y_0$, якщо точка (x_0, y_0) лежить в області визначення диференціального рівняння. Для цього достатньо взяти у (2.114), (2.115) $c = 0$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = 0, \qquad (2.116)$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = 0. \qquad (2.117)$$

Цей розв'язок буде єдиним.

2.9. Інтегрувальний множник. Теореми про існування, неєдиність і загальний вигляд інтегрувального множника

Розглянемо диференціальне рівняння (2.5), яке не є рівнянням у повних диференціалах.

У багатьох випадках диференціальне рівняння (2.5) можна помножити на функцію $\mu(x,y)$, після чого воно стане диференціальним рівнянням у повних диференціалах. Функцію $\mu(x,y)$ називають інтегрувальним множником, а $U(x,y)$ – відповідним до нього інтегралом диференціального рівняння (2.5), тобто

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=dU(x,y)=0\,. \qquad (2.118)$$

Звідси

$$U(x,y)=c\,, \qquad (2.119)$$

отже

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\ M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\ N),\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}\ M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Маємо

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (2.120)$$

– рівняння в частинних похідних першого порядку відносно функції $\mu(x,y)$. У загальному випадку знайти $\mu(x,y)$ з рівняння (2.120) важко.

Розглянемо випадки , коли $\mu(x,y)$ можна визначити з (2.120).

1) Якщо інтегрувальний множник залежить лише від x $\mu=\mu(x)\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0\right)$, то (2.120) перепишемо так: $N\dfrac{d\mu}{dx}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$.

При $N\neq 0$ маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}. \qquad (2.121)$$

Для існування інтегрувального множника в такій формі необхідно, щоб

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x). \qquad (2.122)$$

Тоді $\dfrac{\mu'}{\mu}=\psi(x)$, тобто

$$\mu = ce^{\int \psi(x)dx}. \qquad (2.123)$$

Для простоти візьмемо $c=1$, отримаємо

$$\mu = e^{\int \psi(x)dx}. \qquad (2.124)$$

2) Нехай $\mu=\mu(y)$ $\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}=0\right)$. Маємо $-M\dfrac{d\mu}{dy}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$. Звідси $\dfrac{\mu'}{\mu}=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}$. Якщо $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)$, то

$$\mu = e^{\int \psi(y)dy}. \qquad (2.125)$$

3) Припустимо, що $\mu=\mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ – відома функція. Тоді рівняння (2.120) набуває вигляду

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega).$$

Якщо $N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\neq 0$, то

$$\frac{\dfrac{d\mu}{d\omega}}{\mu}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}. \qquad (2.126)$$

За умови

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}=\psi(\omega) \qquad (2.127)$$

диференціальне рівняння (2.110) можна проінтегрувати і знайти

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)d\omega}=q(\omega(x,y)). \qquad (2.128)$$

Знаючи інтегрувальний множник, ми можемо знайти всі особливі розв'язки. Оскільки $\mu\left(Mdx+Ndy\right)=dU$, то $Mdx+Ndy=\frac{1}{\mu}dU$. Диференціальне рівняння (2.5) перепишемо так:

$$\frac{1}{\mu}dU=0\,. \tag{2.129}$$

Звідси $dU=0$ дає інтеграл $U\left(x,y\right)=c$, а рівняння $\frac{1}{\mu\left(x,y\right)}=0$ може дати особливі розв'язки. Для їх знаходження потрібно:

- знайти криві, на яких $\mu\left(x,y\right)$ набуває нескінченних значень;
- перевірити, чи є ці криві розв'язками диференціального рівняння (2.5);
- перевірити єдиність у кожній точці кривих.

Якщо ж $\mu\left(x,y\right)$ – обмежена функція, то особливих розв'язків немає.

Теорема 2.5 (про існування інтегрувального множника). Якщо диференціальне рівняння (2.5) має загальний інтеграл $U\left(x,y\right)=c$, для якого існують частинні похідні другого порядку, то це рівняння має інтегрувальний множник.

Доведення. Оскільки $U\left(x,y\right)$ – інтеграл, то $dU=0$ згідно з (2.5), тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=0\,,$$

де dx і dy зв'язані диференціальним рівнянням (2.5). Диференціали dx і dy задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}dx+\dfrac{\partial U}{\partial y}dy=0,\\ \quad Mdx+Ndy=0.\end{cases} \tag{2.130}$$

Підставивши в одне з рівнянь dy, згідно з довільністю dx отримаємо з (2.130)

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y}\\ M & N\end{vmatrix}=0\,,\ \text{тобто}\ \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N}=\mu(x,y)\,. \tag{2.131}$$

Звідси $\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \mu N$, тому

$$\mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = 0.$$

Теорему доведено.

Теорема 2.6 (про неєдиність інтегрувального множника). Якщо $\mu_0(x,y)$ – інтегрувальний множник диференціального рівняння (2.5), а $U_0(x,y)$ – відповідний до нього інтеграл, то

$$\mu = \mu_0\varphi(U_0), \tag{2.132}$$

де φ – будь-яка неперервно диференційована функція, не рівна тотожно нулю, також є інтегрувальним множником диференціального рівняння (2.5).

Доведення. Помножимо диференціальне рівняння (2.5) на μ, отримаємо $\mu_0\varphi(U_0)(Mdx + Ndy) = \varphi(U_0)dU_0 = d\int\varphi(U_0)dU_0 = 0$.

Ліва частина рівняння є повним диференціалом функції $\int\varphi(U_0)dU_0$, а це означає, що функція μ, визначена співвідношенням (2.132), є інтегрувальним множником.

Теорема 2.7 (про загальний вигляд інтегрувального множника). Два будь-яких інтегрувальних множники μ_1 і μ_0 диференціального рівняння (2.5) зв'язані співвідношенням

$$\mu_1 = \mu_0\varphi(U_0). \tag{2.133}$$

Доведення. Нехай μ_1 і μ_0 – інтегрувальні множники, яким відповідають інтеграли U_0 і U_1, тобто

$$\begin{cases} \mu_0(Mdx + Ndy) = dU_0 \\ \mu_1(Mdx + Ndy) = dU_1 \end{cases}.$$

Поділимо обидві частини першого рівняння на відповідні частини другого, отримаємо $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{dU_1}{dU_0}$. Однак два інтеграли диференціального рівняння (2.5) залежні, тобто $U_1 = \Phi(U_0)$, де $\Phi(\cdot)$ – диференційована функція. Маємо $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\Phi'(U_0)dU_0}{dU_0} = \Phi'(U_0) = \varphi(U_0)$.

Терему доведено.

Приклад 2.16. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(1+x^2y)dx + x^2(x+y)dy = 0$$

методом інтегрувального множника, виходячи з того, що $\mu = \mu(x)$.

Розв'язання. Оскільки $\mu = \mu(x)$, то

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{x^2 - 3x^2 - 2xy}{x^2(x+y)} = -\frac{2}{x}, \ \mu = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Помноживши наше рівняння на отриманий інтегрувальний множник, отримаємо рівняння $\left(\frac{1}{x^2} + y\right)dx + (x+y)dy = 0$, ліва частина якого є повним диференціалом. Знаходимо

$$U(x,y) = \int (x+y)dy + \varphi(x) = xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x).$$

Тоді $\frac{\partial U}{\partial x} = y + \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} + y$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}$, $\varphi(x) = -\frac{1}{x} + c$. Остаточно маємо

$$U(x,y) = xy + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} = c_1.$$

РОЗДІЛ 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

3.1. Основні поняття та означення. Теорема про достатні умови існування та єдиності розв'язку

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{3.1}$$

Найчастіше зустрічаються диференціальні рівняння першого порядку n-го степеня

$$y'^n + a_1(x, y) y'^{n-1} + .. + a_{n-1}(x, y) y' + a_n(x, y) = 0 . \tag{3.2}$$

Означення 3.1. Функція $y = \varphi(x)$, визначена й неперервно диференційована на (a, b), називається розв'язком диференціального рівняння (3.1), якщо вона після підстановки в (3.1) перетворює це рівняння на тотожність $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0,\ x \in (a, b)$.

Означення 3.2. Будемо говорити, що рівняння $\Phi(x, y) = 0$ визначає розв'язок диференціального рівняння (3.1) у неявній формі, якщо воно визначає y як функцію x, яка є розв'язком рівняння (3.1).

Означення 3.3. Говорять, що співвідношеннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_0 < t < t_1$ визначається розв'язок диференціального рівняння (3.1) у параметричній формі, якщо $F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0$, $t_0 < t < t_1$.

Криві на площині (x, y), що відповідають розв'язкам, будемо називати інтегральними кривими. Задача Коші – задача знаходження розв'язків, які задовольняють умову $y(x_0) = y_0$.

Означення 3.4. Говорять, що задача Коші для диференціального рівняння (3.1) з початковими умовами (x_0, y_0) має єдиний розв'язок, якщо через точку (x_0, y_0) у достатньо малому околі її проходить стільки інтегральних кривих, скільки напрямків поля визначає диференціальне рівняння в цій точці. У протилежному випадку – розв'язок не єдиний.

Теорема 3.1 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо функція $F(x, y, y')$ задовольняє умови:

- є визначеною й неперервно диференційованою разом зі своїми частинними похідними в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0');
- $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;
- $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$,

то диференціальне рівняння (3.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційований в околі точки $x = x_0$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$ і такий, що $y'(x_0) = y_0'$.

Теорему наведено без доведення.

Припустимо, що розв'язуючи диференціальне рівняння (3.1) відносно y', ми знайдемо дійсні розв'язки

$$y' = f_k(x, y), \ k = 1, 2, .., m, \tag{3.3}$$

де $f_k(x, y)$ визначені в області D так, що ми маємо m диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно y'. Припустимо, що в будь-якій точці $(x, y) \in D$ напрямки поля, визначені кожним диференціальним рівнянням (3.3), різні, так що інтегральні криві різних рівнянь не можуть дотикатися одна до одної на D.

Нехай кожне диференціальне рівняння (3.3) на D має загальний інтеграл

$$\Psi_k(x, y) = c, \ k = 1, 2, ..., m. \tag{3.4}$$

Означення 3.5. Сукупність інтегралів (3.4) будемо називати загальним інтегралом диференціального рівняння (3.1) в області D.

Інколи замість співвідношення (3.4) записують

$$\left(\Psi_1(x,y)-c\right)\left(\Psi_2(x,y)-c\right)\ldots\left(\Psi_m(x,y)-c\right)=0. \qquad (3.5)$$

Якщо поле напрямків на D не задовольняє (3.3), тобто існує хоча б одна точка (x_0,y_0), у якій значення хоча б двох функцій $f_k(x,y)$ збігаються, то інтегральні криві, що відповідають диференціальному рівнянню, дотикаються одна до одної в точці (x_0,y_0). Тому, крім інтегральних кривих диференціального рівняння (3.3), додаються ще склеєні інтегральні криві. Усі вони входять у (3.4) або (3.5).

У загальному випадку диференціальне рівняння (3.1) не вдається розв'язати відносно y' в елементарних функціях. Тоді шукають однопараметричну сім'ю інтегральних кривих у вигляді

$$\Phi(x,y,c)=0, \qquad (3.6)$$

яка називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3.1).

Якщо сім'ю інтегральних кривих задано у вигляді

$$y=\varphi(x,c), \qquad (3.7)$$

то вона називається загальним розв'язком диференціального рівняння (3.1).

Зауважимо, що в (3.6) можуть входити й розв'язки диференціального рівняння вигляду (3.3), коли y' – комплексні. Такі рівняння ми не розглядатимемо, тому відповідні до них розв'язки треба виключати.

Сім'ю інтегральних кривих, знайдену в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=\varphi(t,c), \\ y=\psi(t,c) \end{cases} \qquad (3.8)$$

будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння в параметричній формі.

Означення 3.6. Розв'язок $y=y(x)$ диференціального рівняння (3.1) будемо називати частинним, якщо в кожній його точці задача Коші має єдиний розв'язок.

Означення 3.7. Розв'язок $y=y(x)$ називається особливим, якщо в кожній його точці порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

За аналогією з диференціальними рівняннями, розв'язаними відносно y', диференціальне рівняння (3.1) може мати розв'язки, що є ні частинними, ні особливими. Аналіз таких розв'язків складніший. У випадку (3.3) розв'язок $y=y(x)$ буде особливим, якщо він буде особливим хоча б для одного з диференціальних рівнянь (3.3).

Приклад 3.1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0 . \qquad (3.9)$$

Розв'язання. З (3.9) маємо $y' = 1,\ y' = -y^2$. Тоді $y = x + c,\ y = \dfrac{1}{x+c}$ – загальний інтеграл, який можна записати так: $(y - x - c)\left(y - \dfrac{1}{x+c}\right) = 0$. Він отримується шляхом накладання двох сімей інтегральних кривих (рис. 3.1).

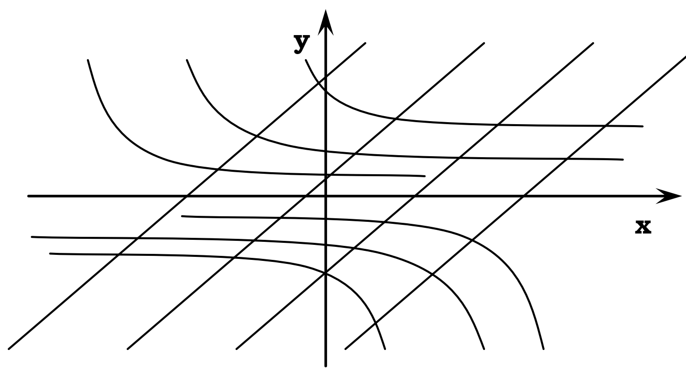

Рис. 3.1

Розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння (3.9) у кожній точці площини (x, y) єдиний. У точці (x_0, y_0) маємо два напрямки поля: $y_0' = 1,\ y_0' = -{y_0}^2$, і через неї проходять дві інтегральні криві:

$$y = x + y_0 - x_0 , \qquad (3.10)$$

$$y = \frac{1}{x + \dfrac{1}{y_0} - x_0} , \text{ якщо } y_0 \neq 0 , \qquad (3.11)$$

або $y = x - x_0,\quad y = 0$, якщо $y_0 = 0$.

Розв'язки (3.10), (3.11) – частинні розв'язки при фіксованих x_0, y_0. Особливих розв'язків немає.

3.2. Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв'язок

Припустимо, що диференціальне рівняння (3.1) подано у формі (3.3). При дослідженні на особливий розв'язок рівнянь вигляду (3.3) ми раніше прийшли до висновку, що такі розв'язки можливі на кривих, де $\dfrac{\partial f_k}{\partial y}$ необмежена. Однак недоцільно переходити від диференціального рівняння (3.1) до рівнянь (3.3) при визначенні особливих розв'язків, оскільки $\dfrac{\partial f_k}{\partial y} = \dfrac{\partial y'}{\partial y}$.

Дійсно, припустимо, що існують похідні $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$, тоді

$\dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial y} = 0$. Звідси

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}. \tag{3.12}$$

Припустимо, що $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, тоді $\dfrac{\partial y'}{\partial y}$ буде необмеженою за умови

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{3.13}$$

Криві, підозрілі на особливий розв'язок, визначатимуться із системи

$$\begin{cases} F\left(x, y, y'\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Розв'язком системи (3.14)

$$R(x, y) = 0 \tag{3.15}$$

є дискримінантна крива. Якщо вона задовольняє диференціальне рівняння (3.1) і в кожній точці порушується єдиність, то розв'язок буде особливим.

Приклад 3.2. Дослідити на особливі розв'язки диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0. \tag{3.16}$$

Розв'язання. Знаходимо дискримінантну криву, розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0, \\ 2y' + 2P(x, y) = 0. \end{cases}$

Маємо

$$R(x, y) = P^2(x, y) - Q(x, y) = 0. \tag{3.17}$$

Співвідношення (3.17) – дискримінантна крива рівняння (3.16). На ній ми маємо не два, а один напрямок поля $y' = -P(x,y)$. У той же час, через неї може проходити не одна інтегральна крива.

3.3. Загальний метод введення параметра

Розглянемо диференціальне рівняння (3.1). Припустимо, що воно допускає параметризацію

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v),\ y' = \eta(u,v) \tag{3.18}$$

таку, що $F\left(\varphi(u,v),\psi(u,v),\eta(u,v)\right) \equiv 0$ за всіх значень параметрів u і v.

Використовуючи (3.18) і співвідношення $dy = y'dx$, ми завжди можемо привести диференціальне рівняння (3.1) до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної

$$dx = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\quad dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\,.$$

Тому

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \eta(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right).$$

Візьмемо, наприклад, u за незалежну змінну, v – за залежну, тоді прийдемо до диференціального рівняння

$$\frac{dv}{du} = f\left(u,v\right). \tag{3.19}$$

Якщо

$$v = w(u,c) \tag{3.20}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (3.19), то загальний розв'язок диференціального рівняння (3.1) можна отримати в параметричній формі

$$x = \varphi\left(u,w(u,c)\right),\ y = \psi\left(u,w(u,c)\right). \tag{3.21}$$

Розглянемо деякі частинні випадки.

Диференціальні рівняння, розв'язані відносно шуканої функції. Такі рівняння мають вигляд

$$y = \varphi(x,y'). \tag{3.22}$$

За параметри u і v можна взяти x і y'. Позначимо $y' = p$, тоді

$$y = \varphi(x,p),\quad dy = pdx\,. \tag{3.23}$$

Маємо

$$dy = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp = pdx\,.$$

Звідси

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}=p\,. \qquad (3.24)$$

Нехай $p=w(x,c)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння (3.24), тоді $y=\varphi\left(x,w(x,c)\right)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння (3.22).

Диференціальне рівняння (3.24) може мати особливий розв'язок $p=\gamma(x)$, тоді диференціальне рівняння (3.22) може мати особливий розв'язок $y=\varphi\left(x,\gamma(x)\right)$.

Випадок, коли диференціальне рівняння розв'язане відносно незалежної змінної. Таке рівняння має вигляд

$$x=\varphi(y,y')\,. \qquad (3.25)$$

Інтегрується воно аналогічно диференціальному рівнянню (3.22). Покладемо $y'=p$. Тоді $x=\varphi(y,p)$, $dy=pdx$. Використовуючи співвідношення $dy=pdx$, отримаємо

$$dy=p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right).$$

Звідси

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dp}{dy}\,. \qquad (3.26)$$

Якщо $p=w(y,c)$ – загальний інтеграл диференціального рівняння (3.26), то

$$x=\varphi\left(y,w(y,c)\right) \qquad (3.27)$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння (3.25).

Якщо $p=\gamma(y)$ – особливий розв'язок диференціального рівняння (3.26), то $x=\varphi\left(y,\gamma(y)\right)$ може бути особливим розв'язком диференціального рівняння (3.25).

Розглянемо тепер простіші випадки, коли рівняння можна проінтегрувати.

Рівняння Лагранжа. Це рівняння має вигляд

$$y=\varphi(y')x+\psi(y')\,. \qquad (3.28)$$

Воно інтегрується у квадратурах. Покладемо $y'=p$. Тоді

$$y=\varphi(p)x+\psi(p),\ dy=pdx\,. \qquad (3.29)$$

З (3.29) маємо

$$\varphi(p)dx+\left(\varphi'(p)x+\psi'(p)\right)dp=pdx\,,$$

$$\left(\varphi(p)-p\right)dx+\left(\varphi'(p)x+\psi'(p)\right)dp=0\,. \tag{3.30}$$

Диференціальне рівняння (3.30) лінійне за x:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\,. \tag{3.31}$$

Нехай $x=A(p)c+B(p)$ – розв'язок диференціального рівняння (3.31). Тоді загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишемо в параметричній формі

$$\begin{cases} x=A(p)c+B(p), \\ y=\varphi(p)\left(A(p)c+B(p)\right)+\psi(p). \end{cases} \tag{3.32}$$

Особливі розв'язки можливі за умови

$$\varphi(p)-p=0\,, \tag{3.33}$$

тобто

$$y=p_i x+\psi(p_i)\,, \tag{3.34}$$

де p_i – корені рівняння (3.33). Розв'язок (3.34) може бути частинним або особливим.

Рівняння Клеро. Це рівняння – частинний випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y')=y'$

$$y=y'x+\psi(y')\,. \tag{3.35}$$

Покладемо $y'=p$, тоді

$$\begin{cases} y=px+\psi(p), \\ dy=pdx. \end{cases} \tag{3.36}$$

Використовуючи $dy=pdx$, отримаємо $pdx+\left(x+\psi'(p)\right)dp=pdx$. Звідси

$$\left(x+\psi'(p)\right)dp=0\,. \tag{3.37}$$

Рівняння (3.37) розпадається на два:

$$dp=0,\quad x+\psi'(p)=0\,. \tag{3.38}$$

Перше рівняння (3.38) дає $p=c$, підставляючи його в (3.35), матимемо загальний розв'язок

$$y=cx+\psi(c)\,. \tag{3.39}$$

Друге – $x=-\psi'(p)$ – разом із (3.35) утворює параметричний розв'язок

$$\begin{cases} x=-\psi'(p), \\ y=-p\psi(p)+\psi(p). \end{cases} \tag{3.40}$$

Розв'язок (3.40) особливий, оскільки він збігається з обвідною. Дійсно,

$$\begin{cases} y=cx+\psi(c), \\ 0=x+\psi'(c), \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x = -\psi'(c), \\ y = -c\psi'(c) + \psi(c). \end{cases} \qquad (3.41)$$

Дискримінантна крива (3.41) збігається з розв'язком (3.40).

Приклад 3.3. Розв'язати рівняння Лагранжа $y = xy'^2 + y'^2$.

Розв'язання. Покладемо $y' = p$. Маємо $y = xp^2 + p^2$, $dy = pdx$,

$$p^2dx + 2pxdp + 2pdp = pdx, \; \left(p^2 - p\right)\frac{dx}{dp} + 2px + 2p = 0.$$

Отримали лінійне рівняння $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p}$. З нього визначимо

$$x = \frac{c_1}{(p-1)^2} - 1, \qquad (3.42)$$

$$y = \frac{c_1 p^2}{(p-1)^2} \qquad (3.43)$$

– загальний розв'язок нашого рівняння в параметричній формі. Або, виключаючи p, отримаємо

$$y = \left(\sqrt{x+1} + c\right)^2, \; \left(c = \sqrt{c_1}\right). \qquad (3.44)$$

Знайдемо ті розв'язки, яким відповідають

$$p^2 - p = 0, \; p_1 = 0, \; p_2 = 1, y_1 = 0, \; y_2 = x + 1.$$

Перший розв'язок – особливий, другий – частинний.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння $y = y'x - \frac{1}{4}y'^2$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Його загальний розв'язок $y = cx - \frac{1}{4}c^2$. Запишемо дискримінантну криву $\begin{cases} x = \frac{1}{2}c, \\ y = \frac{1}{4}c^2. \end{cases}$

Звідси $y = x^2$ – особливий розв'язок, оскільки через нього проходить ще розв'язок, який міститься в загальному при $c(x) = 2x$.

Диференціальні рівняння, що містять тільки похідну. Це рівняння вигляду

$$F(y') = 0\,. \tag{3.45}$$

Рівняння (3.45) може мати скінченну або нескінченну кількість дійсних розв'язків

$$y' = k_i, i = 1, 2, \ldots, \tag{3.46}$$

де k_i – деякі числа, що задовольняють рівняння $F(k_i) = 0$.

Інтегруємо (3.46)

$$y = k_i x + c, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{3.47}$$

Оскільки $k_i = \dfrac{y-c}{x}$, то

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0 \tag{3.48}$$

– загальний інтеграл диференціального рівняння (3.45). За таких припущень інтегральні криві диференціального рівняння (3.45) є системою прямих ліній, які можна записати у вигляді (3.48). При цьому в (3.48) можуть входити комплексні розв'язки диференціального рівняння.

Приклад 3.5. Розв'язати диференціальне рівняння $y'^3 - 1 = 0$.

Розв'язання. Згідно з (3.48) $\left(\dfrac{y-c}{x}\right)^3 - 1 = 0$ – загальний інтеграл. Однак у нього, крім дійсного розв'язку $y = x + c$, входять розв'язки комплексних диференціальних рівнянь $y' = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Диференціальні рівняння, що не містять шуканої функції. Такі рівняння мають вигляд

$$F(x, y') = 0\,. \tag{3.49}$$

Якщо (3.49) можна розв'язати відносно похідної

$$y' = f_k(x), k = 1, 2, \ldots, \tag{3.50}$$

то

$$y = \int f_k(x)dx + c, k = 1, 2, \ldots \tag{3.51}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (3.49). Якщо ж розв'язання відносно y' неможливе, а допускається параметризація

$$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0\,, \tag{3.52}$$

тобто

$$x = \varphi(t), y' = \psi(t), \qquad (3.53)$$

то загальний розв'язок знаходять у параметричній формі.

Дійсно, $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$, звідки визначаємо загальний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c. \end{cases} \qquad (3.54)$$

Якщо диференціальне рівняння (3.49) має вигляд

$$x = \varphi(y'), \qquad (3.55)$$

то це рівняння легко параметризується: $y' = \psi(t)$. У частинному випадку $y' = t$. Для останнього випадку загальний розв'язок запишеться у формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t\varphi'(t)dt + c. \end{cases} \qquad (3.56)$$

Приклад 3.6. Знайти загальний розв'язок рівняння $x = e^{y'} - y'$.

Розв'язання. Вводимо параметризацію $y' = t$, тоді $x = e^t - t$, $dy = tdx$, $dy = t(e^t - 1)dt$. Маємо $\begin{cases} x = e^t - t, \\ y = (t-1)e^t - \dfrac{t^2}{2} + c \end{cases}$ – загальний розв'язок у параметричній формі.

Диференціальні рівняння, що не містять незалежної змінної. Це рівняння вигляду

$$F(y, y') = 0. \qquad (3.57)$$

Якщо рівняння (3.57) розв'язане відносно y', тобто

$$y' = f_k(y),\ k = 1,2,\dots, \qquad (3.58)$$

то

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + c,\ k = 1,2,\dots \qquad (3.59)$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння (3.57). Особливими розв'язками можуть бути криві $y = b_i$, де b_i – корені рівняння $f_k(b_i) = 0,\ k = 1,2,\dots$ (або $F(b_i, 0) = 0$).

Якщо не можна диференціальне рівняння (3.57) розв'язати відносно y', але воно допускає параметризацію

$$y = \varphi(t), y' = \psi(t), \qquad (3.60)$$

то

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c, \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad (3.61)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (3.57) у параметричній формі.

Приклад 3.7. Розв'язати диференціальне рівняння $y'^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Введемо параметризацію $y' = \sin\ t, y = \cos\ t$,

$$dy = \sin\ tdx,\ dx = -\frac{\sin\ t}{\sin\ t}dt.$$

Звідси $\begin{cases} x = -t + c, \\ y = \cos\ t \end{cases}$ – загальний розв'язок нашого рівняння в параметричній формі.

Узагальнено-однорідні рівняння. Диференціальне рівняння назвемо узагальнено-однорідним, якщо його ліва частина є однорідною функцією аргументів x, y, y', яким відповідають величини 1-го, k-го і $(k-1)$-го виміру, тобто

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1}y'\right) = t^m F\left(x, y, y'\right). \qquad (3.62)$$

Зробимо заміну

$$x = e^t, y = ze^{kt}, \qquad (3.63)$$

де t – нова незалежна змінна, z – нова шукана функція. Маємо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{e^t} = \frac{dy}{dt}e^{-t}.$$

Отже, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$. З іншого боку,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}\left(ze^{kt}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}. \qquad (3.64)$$

Підставимо (3.63), (3.64) у диференціальне рівняння (3.1):

$$F\left(e^t, ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t}\right) = e^{mt}F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz\right) = 0.$$

Отримане рівняння

$$F\left(1, z, \frac{dz}{dt} + kz\right) = 0 \qquad (3.65)$$

не містить незалежної змінної t.

РОЗДІЛ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

4.1. Основні поняття та означення. Динамічна інтерпретація диференціальних рівнянь другого порядку. Консервативні системи

Диференціальне рівняння n-го порядку, не розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \ , \tag{4.1}$$

а розв'язане відносно $y^{(n)}$ – форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) . \tag{4.2}$$

Частинним випадком цих рівнянь є лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) . \tag{4.3}$$

Означення 4.1. Функція $y = \varphi(x)$, визначена і n разів неперервно диференційована на (a, b), називається розв'язком диференціального рівняння (4.1), якщо вона на (a, b) перетворює це рівняння на тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \ \ x \in (a, b) . \tag{4.4}$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (4.1) відповідає на площині (x, y) деяка крива, яку будемо називати інтегральною.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \qquad (4.5)$$

і зобразимо рівняння (4.5) як рівняння руху частинки з одиничною масою при дії сили $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Значення x і $\frac{dx}{dt}$ у момент t характеризують стан системи на площині $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ (рис. 4.1). Така площина називається площиною стану, або *фазовою площиною*. Кожному новому стану відповідає нова точка на площині. Траєкторія зображувальної точки називається фазовою траєкторією, швидкість – фазовою швидкістю.

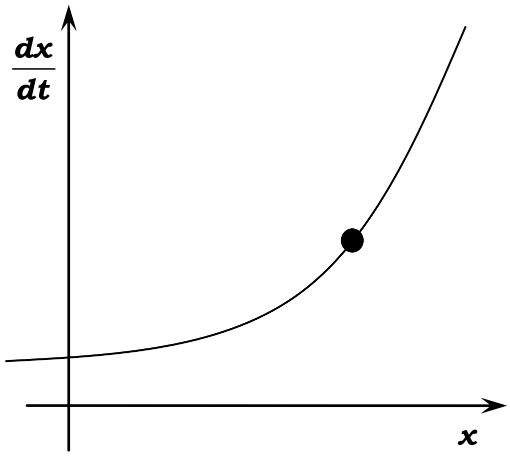

Рис. 4.1

Від диференціального рівняння (4.5) можна перейти до системи

$$\frac{dx}{dt} = y\,, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y)\,. \qquad (4.6)$$

Можна показати, що розв'язки системи (4.5), як і більш загальної

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y)\,, \frac{dy}{dt} = Y(x, y)\,, \qquad (4.7)$$

де $X(x, y), Y(x, y)$ – неперервні функції разом зі своїми частинними похідними в деякій області D, мають таку властивість: якщо *x(t), y(t)* – розв'язок системи, то і $x = x(t + c)$, $y = y(t + c)$, де c – довільна константа, – теж розв'язок.

Система (4.7) називається *автономною*, або *стаціонарною*.

Якщо система (4.7) задана на всій площині, то фазові траєкторії покриють усю площину й не будуть перетинатися одна з одною. Якщо в деякій точці (x_0, y_0) $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$, то така точка називається особливою. Далі ми будемо досліджувати тільки ізольовані особливі точки, тобто такі, у деякому малому околі яких немає інших особливих точок.

У реальних динамічних системах енергія розсіюється. Розсіювання (дисипація) енергії відбувається через тертя. У деяких системах розсіювання енергії повільне і ним можна знехтувати. Для таких систем має місце закон збереження енергії: сума кінетичної та потенціальної енергій стала. Такі системи називають *консервативними*.

Розглянемо консервативну систему

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0\ . \tag{4.8}$$

Від (4.8) перейдемо до системи

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -\frac{f(x)}{m}\ . \tag{4.9}$$

Виключаємо з (4.9) t:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my},\ mydy = -f(x)dx\ . \tag{4.10}$$

Припустимо, що при $t = t_0$ $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, і проінтегруємо (4.10) від t_0 до t:

$$\frac{1}{2}my^2 - \frac{1}{2}my_0^2 = -\int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau\ . \tag{4.11}$$

Звідси

$$\frac{1}{2}my^2 + \int_0^x f(\tau)d\tau = \frac{1}{2}my_0^2 + \int_0^{x_0} f(\tau)d\tau\ . \tag{4.12}$$

Оскільки $\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ – кінетична, $V(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau$ – потенціальна, а $E = \frac{1}{2}my_0^2 + V(x_0)$ – повна енергія, то (4.12) виражає закон збереження енергії.

$$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E\ . \tag{4.13}$$

Співвідношення (4.13) задають інтегральні криві на площині. Вони різні й залежать від значення E.

Ми дали механічну інтерпретацію диференціального рівняння другого порядку. Зупинимося на геометричній інтерпретації. Розглянемо

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{4.14}$$

і перепишемо його у вигляді

$$F\left(x,y,y',(1+y'^2)^{3/2}\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right)=F_1\left(x,y,y',\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right). \tag{4.15}$$

Оскільки $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ – кривизна інтегральної кривої, то диференціальне рівняння другого порядку є зв'язком між координатами, кутом нахилу дотичної та кривизною в кожній точці інтегральної кривої.

4.2. Задача Коші. Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (4.2) і поставимо задачу Коші: серед усіх розв'язків диференціального рівняння (4.2) знайти такий $y=y(x)$, що задовольняє умови

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{4.16}$$

де x_0, $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа, x_0 – початкове значення незалежної змінної, $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – початкові данні.

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x)=f(x,y,y') \tag{4.17}$$

задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв'язок диференціального рівняння (4.17), який би задовольняв умови

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0. \tag{4.18}$$

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти криву $y=y(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (4.17), проходить через точку $M(x_0,y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $tg\alpha=y'_0$ (рис. 4.2).

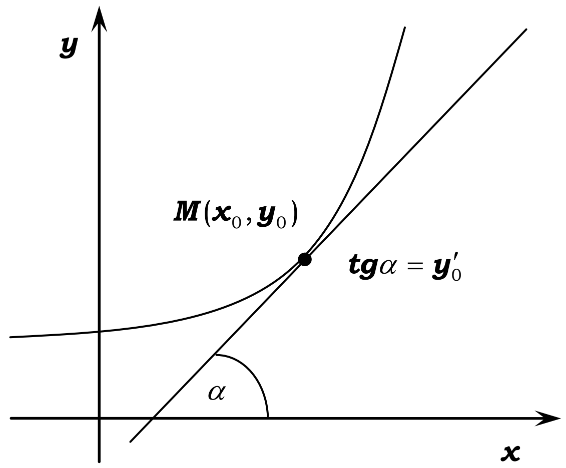

Рис. 4.2

Механічний зміст задачі Коші

$$x'' = f(x,t,x'),\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = V_0 \qquad (4.19)$$

полягає в тому, щоб знайти траєкторію механічної системи, яка є розв'язком диференціального рівняння (4.19) і має в t_0 фіксовані положення x_0 і швидкість V_0.

Розглянемо питання єдиності та існування розв'язку задачі Коші (4.2), (4.16). Єдиність для диференціального рівняння (4.2) не означає, що через точку $M(x_0, y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива. Наприклад, для диференціального рівняння (4.17) єдиність розуміється в тому сенсі, що через точку $M(x_0, y_0)$ проходить єдина інтегральна крива (рис. 4.2) із заданим нахилом дотичної, а через точку $M(x_0, y_0)$ можуть проходити інші інтегральні криві, які мають інші нахили дотичних.

Необхідною умовою існування розв'язку задачі Коші (4.2), (4.16) є неперервність правої частини (4.2) в околі початкових даних.

Сформулюємо без доведення теорему про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема 4.1 (Пікара). Розглянемо задачу Коші (4.2), (4.16). Припустимо, що функція $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ визначена в деякій замкненій обмеженій області

$$R\colon\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b,\ |y' - y_0'| \le b,\ |y'' - y_0''| \le b, \ldots,$$

$$\left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| \le b \qquad (4.20)$$

(a, b – дійсні додатні числа) і задовольняє в цій області умови:

1) Функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ неперервна за своїми аргументами і, отже, обмежена:

$$\left|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\right| \le M, \ (x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in R \qquad (4.21)$$

(тут $M > 0$ – константа);

2) Функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ має обмежені частинні похідні за змінними $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, тобто

$$\left|\frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}}\right| \le K, \ l = 0, 1, 2, \dots, (n-1), \ (x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in R, \qquad (4.22)$$

де K – константа.

За цих припущень диференціальне рівняння (4.2) має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (4.16) і є неперервним разом зі своїми похідними до n-го порядку включно на інтервалі

$$|x - x_0| < h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_R\left(M, |y'|, |y''|, \dots, \left|y^{(n-1)}\right|\right)}\right\}. \qquad (4.23)$$

З теореми випливає, що для поліноміальної відносно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ правої частини диференціального рівняння (4.2) розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами існує і є єдиним.

4.3. Загальний розв'язок і загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні й перші інтеграли

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4.2) називається сім'я розв'язків, яка залежить від n довільних констант $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n). \qquad (4.24)$$

Геометрично вона зображує сім'ю інтегральних кривих на площині (x, y), залежну від n параметрів $c_1, c_2, \dots, c_n$, причому її рівняння розв'язане відносно y.

Розглянемо область D у просторі $(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, у кожній точці якої виконуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

Означення 4.2. Функцію (4.24), що визначена в деякій області змінних x, $c_1,c_2,\ldots,c_n$ і має частинні похідні за x до n-го порядку включно, будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (4.2) в області D, якщо система рівнянь

$$\begin{cases} y=\varphi(x,c_1,\ldots,c_n), \\ y'=\varphi'(x,c_1,\ldots,c_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x,c_1,\ldots,c_n) \end{cases} \qquad (4.25)$$

розв'язується відносно $c_1,c_2,\ldots,c_n$ в області D

$$\begin{cases} c_1=\psi_1(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}), \\ c_2=\psi_2(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n=\psi_n(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}), \end{cases} \qquad (4.26)$$

а функція (4.24) є розв'язком диференціального рівняння (4.2) за всіх значень $c_1,c_2,\ldots,c_n$, які визначаються формулами (4.26), коли точка $(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})\in D$.

Для розв'язання задачі Коші необхідно (4.16) підставити в (4.26) і визначити

$$\begin{cases} c_1^{(0)}=\psi_1(x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}), \\ c_2^{(0)}=\psi_2(x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n^{(0)}=\psi_n(x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)}). \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші запишеться у вигляді $y=\varphi(x,c_1^{(0)},c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})$. Якщо розв'язок можна подати у вигляді $y=\varphi(x,x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0^{(n-1)})$, то така форма запису називається формою Коші.

У більшості випадків розв'язок диференціального рівняння (4.2) отримуємо у вигляді

$$\Phi(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0. \qquad (4.27)$$

Він називається *загальним інтегралом.*

Означення 4.3. Будемо називати (4.27) загальним інтегралом диференціального рівняння (4.2) в області *D*, якщо це співвідношення визначає загальний розв'язок $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ диференціального рівняння (4.2) в області *D*.

Означення 4.4. Розв'язок, що визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c_1, c_2, \dots c_n), \\ y = \psi(t, c_1, c_2, \dots c_n) \end{cases} \tag{4.28}$$

називають *загальним розв'язком у параметричній формі.*

Означення 4.5. Якщо розв'язок диференціального рівняння (4.2) складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші, то такий розв'язок будемо називати *частинним.*

Наприклад, при конкретних $c_1, c_2, \dots, c_n$ розв'язок (4.24) буде частинним.

Означення 4.6. Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати *особливим.*

Рівняння *n*-го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежних від довільних констант, кількість яких може досягати $n-1$.

Приклад 4.1. Знайти особливі розв'язки рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$.

Розв'язання. Вводимо заміну $y' = z$, z – нова змінна. Маємо

$$z' = 2\sqrt{z}. \tag{4.29}$$

Звідси $z = (x + c_1)^2$, $x > -c_1$,

$$y' = (x + c_1)^2,\ x > -c_1,\ y = \frac{1}{3}(x + c_1)^3 + c_2,\ x > -c_1.$$

Рівняння (4.29) має особливий розв'язок $z = 0$, тобто $y' = 0$. Тому $y = c$ – сім'я особливих розв'язків.

Інтегруючи диференціальне рівняння (4.2), приходимо до рівнянь, що не містять вищих похідних, але містять відповідну кількість констант

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0,\ \ 1 \le k \le n. \tag{4.30}$$

Співвідношення (4.30) називається проміжним інтегралом диференціального рівняння (4.2) k-го порядку і є диференціальним рівнянням $(n-k)$-го порядку, яке містить *k* довільних сталих.

При $k = 1$ співвідношення

$$\Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, c_1) = 0 \tag{4.31}$$

називається першим інтегралом.

Якщо існує один перший інтеграл, то диференціальне рівняння (4.2) зводиться до інтегрування диференціального рівняння $(n-1)$-го порядку.

Якщо відомі два перших інтеграли

$$\begin{cases} \Phi_1^{(1)}(x,y,y',\ldots,\ y^{(n-1)},c_1)=0, \\ \Phi_2^{(2)}(x,y,y',\ldots,\ y^{(n-1)},c_2)=0, \end{cases} \tag{4.32}$$

то, виключаючи з них $y^{(n-1)}$, приходимо до проміжного інтеграла другого порядку

$$\Phi_2(x,y,y',\ldots,\ y^{(n-2)},c_1,c_2)=0\,. \tag{4.33}$$

Знання k незалежних перших інтегралів дозволяє знизити порядок диференціального рівняння на k одиниць.

Якщо ми маємо n перших інтегралів, то, виключаючи з них $y',\ldots,y^{(n-1)}$, знайдемо загальний інтеграл

$$\Phi(x,y,c_1,c_2,\ldots,\ c_n)=0\,. \tag{4.34}$$

4.4. Крайова задача

Крім задачі Коші, існують такі диференціальні задачі, у яких умови задаються в різних точках. Такі умови називають *крайовими,* або *граничними*, а відповідну задачу – *крайовою.*

Для рівняння другого порядку

$$y''=f(x,y,y') \tag{4.35}$$

найпростіші граничні умови мають вигляд

$$y(a)=A,\ y(b)=B\,. \tag{4.36}$$

Задача полягає в знаходженні розв'язку на $[a,\ b]$, який задовольняє умови (4.36). Геометрично на площині (x,y) розв'язання крайової задачі означає знаходження інтегральних кривих диференціального рівняння (4.35), які проходять через точки $(a,A),(b,B)$.

У загальнішій постановці для диференціального рівняння другого порядку крайові умови можуть мати вигляд

$$\begin{cases} h_1y(a)+h_2y'(a)=A, \\ h_3y(b)+h_4y'(b)=B, \end{cases} \tag{4.37}$$

де $h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ A,\ B$ – числа, $|h_1|+|h_2|\neq 0,\ |h_3|+|h_4|\neq 0$.

Приклад 4.2. Розв'язати крайову задачу

$$y'' + y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$$

Розв'язання. Маємо загальний розв'язок нашого рівняння $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Згідно з крайовими умовами

$$c_1 1 + c_2 0 = 0,$$
$$-c_1 1 + c_2 0 = 1.$$

Оскільки система не сумісна, то крайова задача не має розв'язку, тобто поставлена некоректно.

Якщо $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$, то $c_1 = 0$, c_2 – будь-яка стала. Отже, крайова задача має безліч розв'язків $y = c_2 \sin x$.

Крайова задача може не мати розв'язку, мати безліч або єдиний розв'язок.

Приклад 4.3. Розв'язати крайову задачу $y'' = 6x,\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0$.

Розв'язання. Маємо $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Звідси $c_2 = 0,\ c_3 = -3$. Отже $y = x^3 - 3x$ – єдиний розв'язок.

Крайові умови можуть мати інший вигляд, наприклад $y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$.

4.5. Інтегрування і зниження порядку диференціальних рівнянь із вищими похідними

4.5.1. Диференціальні рівняння, що містять похідну n-го порядку від шуканої функції та незалежну змінну

1) Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \tag{4.38}$$

Оскільки $\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x)$, то $y^{(n-1)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1$. Аналогічно

$y^{(n-2)} = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dxdx + c_1(x - x_0) + c_2$, …,

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} \dots \int\limits_{x_0}^{x}}_{n\ раз} f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \dots + c_n. \tag{4.39}$$

Остання формула дає загальний розв'язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \ldots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (4.39) легко використати для знаходження розв'язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{4.40}$$

Цей розв'язок зображується у вигляді

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \ldots \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx..dx + y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + y_0. \tag{4.41}$$

Функція $y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \ldots \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx \ldots dx$ є частинним розв'язком диференціального рівняння (4.38) з початковими умовами $y_1(x_0) = 0, y_1'(x_0) = 0, \ldots y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$, яким відповідають константи $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Для обчислення $y_1(x)$ використовують формулу Коші

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt. \tag{4.42}$$

Дійсно, інтеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dxdx = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{u} f(t)dt\right)du = \int\limits_{x_0}^{x} du \int\limits_{x_0}^{u} f(t)dt$$

можна розглядати як повторний у заштрихованій області (рис. 4.3).

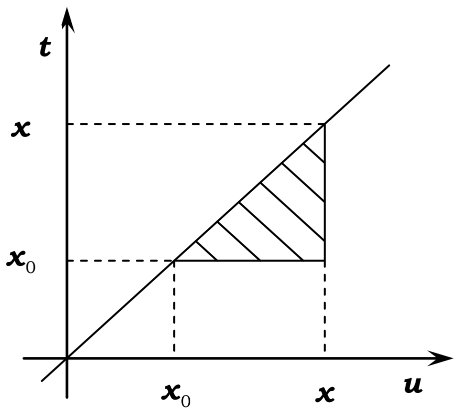

Рис. 4.3

Міняючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \int_{t}^{x} du = \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)dt .$$

Аналогічно обчислюємо

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdxdx = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dtdu = \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)dt \int_{t}^{x} (u-t)du = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f(t)(u-t)^2 dt \text{ ... і т. д.}$$

Приходимо до формули (4.42). Розв'язок (4.41) записується у вигляді

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) +$$

$$+ y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + y_0 .$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (4.38) можна також записати через невизначений інтеграл

$$y = \int \ldots \int f(x)dx..dx + c_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + c_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + c_n .$$

Приклад 4.4. Розв'язати рівняння $y'' = 6x$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $y' = 3x^2 + c_1$, $y = x^3 + xc_1 + c_2$.

2) Розглянемо випадок

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 , \tag{4.43}$$

коли співвідношення (4.43) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ в елементарних функціях або вирази для $y^{(n)}$ будуть досить складними.

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.43) допускає параметризацію

$$y^{(n)} = \phi(t), x = \varphi(t), \tag{4.44}$$

де $\varphi(t)$ та $\phi(t)$ такі, що $F(\varphi(t), \phi(t)) \equiv 0$. Проводимо обчислення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \phi(t)\varphi'(t)dt ,$$

$$y^{(n-1)} = \int \phi(t)\varphi'(t)dt + c_1 \equiv \phi_1(t, c_1) .$$

Аналогічно обчислюємо $y^{(n-2)} = \int \phi_1(t, c_1)\varphi'(t)dt + c_2 \equiv \phi_2(t, c_1, c_2)$.

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y = \phi_n(t, c_1, c_2 \ldots c_n), \\ x = \varphi(t) \end{cases} \tag{4.45}$$

– загальний розв'язок у параметричній формі.

Зазначимо два випадки, у яких диференціальне рівняння (4.43) легко параметризується:

а) $x = \varphi(y^{(n)})$, (4.46)

$y^{(n)} = \phi(t)$, $x = \varphi(\phi(t))$ (зокрема можна ввести параметризацію $y^{(n)} = t$, $x = \varphi(t)$);

б) $P\left(x, y^{(n)}\right) + Q\left(x, y^{(n)}\right) = 0$, (4.47)

де $P(\bullet)$ і $Q(\bullet)$ – однорідні функції вимірів k і m відповідно. Покладемо

$$y^{(n)} = tx \tag{4.48}$$

і розв'яжемо рівняння (4.47) відносно x через t: $x = \varphi(t)$. Підставляючи $x = \varphi(t)$ у (4.48), отримаємо

$$\begin{cases} y^{(n)} = t\varphi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases} \tag{4.49}$$

Далі вищеописаним способом знаходимо загальний розв'язок у параметричній формі.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння $e^{y''} + y'' = x$.

Розв'язання. Зробимо заміну

$$\begin{cases} y'' = t \\ x = e^t + t \end{cases}, \; dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt,$$

$$y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + c_1, \; dy = y'dx = \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + c_1\right](e^t + 1)dt.$$

Остаточно запишемо загальний розв'язок у параметричній формі

$$\begin{cases} y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + c_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2, \\ x = e^t + t. \end{cases}$$

4.5.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, що не містять шуканої функції та послідовності перших похідних

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{4.50}$$

у якому $y^{(k)}$ є найменшою похідною.

Введемо нову змінну

$$y^{(k)} = z\,, \tag{4.51}$$

отримаємо

$$F\left(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0\,. \tag{4.52}$$

Ми знизили порядок диференціального рівняння (4.50) на k одиниць. Припустимо, що ми розв'язали диференціальне рівняння (4.52) і визначили

$$z = \omega(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})\,. \tag{4.53}$$

Проінтегруємо рівняння

$$y^{(k)} = \omega(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) \tag{4.54}$$

і отримаємо загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)\,. \tag{4.55}$$

Якщо замість загального розв'язку (4.53) можна знайти загальний інтеграл $\Omega\left(x, z, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}\right) = 0$, то отримаємо диференціальне рівняння $\Omega\left(x, y^{(k)}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}\right) = 0$ типу (4.43).

Розглянемо два частинних випадки диференціального рівняння (4.50).

1) Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0\,. \tag{4.56}$$

Якщо диференціальне рівняння (4.56) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)})\,, \tag{4.57}$$

то, поклавши $y^{(n-1)} = z$, перейдемо до рівняння $z' = f(z)$.

Якщо $z = \omega(x, c_1)$ – загальний розв'язок останнього рівняння, то остаточно маємо рівняння вигляду (4.38) $y^{(n-1)} = \omega(x, c_1)$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.56) не можна записати у вигляді (4.57), але воно допускає параметризацію

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), y^{(n)} = \phi(t)\,. \tag{4.58}$$

Тоді зі співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ знаходимо $dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\phi(t)}$. Звідси

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\phi(t)} + c_1, \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases} \qquad (4.59)$$

Диференціальне рівняння (4.59) вигляду (4.43) і його розв'язки можна отримати в параметричній формі.

2) Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0\,. \qquad (4.60)$$

Нехай диференціальне рівняння (4.60) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})\,. \qquad (4.61)$$

Позначимо $y^{(n-2)} = z$ і перейдемо до диференціального рівняння

$$z'' = f(z)\,. \qquad (4.62)$$

Помножимо (4.62) на $2z'dx$: $2z'z''dx = 2z'f(z)dx$. Звідси $d(z')^2 = 2f(z)dz$. Отже, $(z')^2 = 2\int f(z)dz + c_1$, з якого визначимо $z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}$.

Останнє диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайшовши з нього $z = \varphi(x, c_1, c_2)$, остаточно переходимо до диференціального рівняння вигляду (4.38)

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2)\,. \qquad (4.63)$$

Припустимо, що диференціальне рівняння (4.60) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, але для нього можлива параметризація $y^{(n-2)} = \varphi(t), y^{(n)} = \phi(t)$. Запишемо співвідношення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx\,.$$

Помножимо першу рівність на $y^{(n-1)}$: $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx$, після чого отримаємо $d\left(y^{(n-1)}\right)^2 = 2y^{(n)}y^{(n-1)}dx = 2y^{(n)}dy^{(n-2)}$. Звідси $d(y^{(n-1)})^2 = 2\phi(t)\varphi'(t)dt$. Отже, маємо $y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\phi(t)\varphi'(t)dt + c_1} \equiv \psi_1(t, c_1)$. Приєднавши до останньої рівності $y^{(n-2)} = \varphi(t)$, отримаємо диференціальне рівняння вигляду (4.56).

4.5.3. Зниження порядку диференціальних рівнянь, що не містять незалежної змінної

Ці диференціальні рівняння мають вигляд

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{4.64}$$

а їх порядок можна знизити на одиницю заміною $y' = z$. При цьому y стає незалежною змінною, а z – шуканою функцією. Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z\,,$$

.....

$$y^{(n)} = \omega_n(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})$$

і остаточно приходимо до диференціального рівняння $(n-1)$ порядку

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, \ldots, \omega_n(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}})\right) = 0\,. \tag{4.65}$$

Якщо $z = \varphi(y, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ – розв'язок диференціального рівняння (4.65), то

$$y' = \varphi(y, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})\,. \tag{4.66}$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (4.66) і знаходимо загальний інтеграл.

Особливі розв'язки можуть з'являтися при інтегруванні диференціального рівняння (4.66). При переході до диференціального рівняння (4.65) ми можемо загубити розв'язки $y = \text{const}$. Для їх знаходження необхідно розв'язати рівняння $F(b, 0, \ldots, 0) = 0$. Якщо $b = b_i$ – розв'язок останнього рівняння, то $y = b_i$ – розв'язок диференціального рівняння (4.64).

Приклад 4.6. Розв'язати рівняння $4y''\sqrt{y} = 1$.

Розв'язання. Вводимо змінну $y' = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dy}z$, тоді

$$4\frac{dz}{dy}z\sqrt{y} = 1\,,\ z^2 = \sqrt{y} + c_1\,.$$

Звідси $z = \pm\sqrt{\sqrt{y} + c_1}$, отже $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\sqrt{y} + c_1}$, $x + c_2 = \pm\int \dfrac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + c_1}}$ – загальний інтеграл рівняння.

4.5.4. Однорідні диференціальні рівняння відносно шуканої функції та її похідних

Так називаються диференціальні рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{4.67}$$

у яких $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$ є однорідною функцією відносно $y, y', \dots, y^{(n)}$, тобто для всіх t маємо $F\left(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right)$.

Шляхом заміни $\frac{y'}{y} = z$ диференціальне рівняння (4.67) можна знизити на один порядок. Обчислюємо

$$y' = yz, y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'), \dots, y^{(n)} = y\omega_n(z, z', \dots, z^{(n-1)}).$$

Диференціальне рівняння (4.67) набуває вигляду

$$y^m F\left(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega_n(z, z', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0. \tag{4.68}$$

Скорочуючи на y^m ($y = 0$ при $m > 0$ може бути розв'язком диференціального рівняння (4.67)), перейдемо до диференціального рівняння порядку $(n-1)$.

Якщо $z = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1})$ – загальний розв'язок останнього диференціального рівняння , то $\frac{y'}{y} = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1})$. Звідси

$$y = c_n e^{\int \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1}) dx} \tag{4.69}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (4.67). Розв'язок $y(x) \equiv 0$ міститься у формулі (4.69) при $c_n = 0$.

Приклад 4.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння однорідне відносно шуканої функції та її похідних, тому

$$\frac{y'}{y} = z, y' = yz, y'' = y(z^2 + z'), xy^2(z^2 + z') + xy^2 z^2 - y^2 z = 0.$$

Маємо $xz' + 2xz^2 - z = 0$ – диференціальне рівняння Бернуллі. Інтегруючи, отримуємо

$$z = \frac{x}{x^2 + c_1}, \ \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + c_1}.$$

Звідси $y = c_2\sqrt{x^2 + c_1}$. Наше диференціальне рівняння Бернуллі має розв'язок $y = c$, який не міститься в знайденому загальному інтегралі.

4.5.5. Диференціальні рівняння, ліва частина яких є точною похідною

Припустимо, що ліва частина диференціального рівняння (4.67) є точною похідною за x від деякої функції $\Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, тобто

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=\frac{d}{dx}\ \Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=$$
$$=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}=0,$$

тоді диференціальне рівняння (4.67) має перший інтеграл

$$\Phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=c_1\,. \tag{4.70}$$

Отже, його порядок можна знизити на одиницю.

Приклад 4.8. Розв'язати диференціальне рівняння $y''y+y'^2=0$.

Розв'язання. Маємо $\frac{d}{dx}(y'y)=0$, $y'y=c_1$, $ydy=c_1dx$, $\frac{y^2}{2}=c_1x+c_2$ – загальний інтеграл.

Якщо ліва частина диференціального рівняння (4.67) не є точною похідною, то в деяких випадках можна знайти функцію $\mu(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, після множення на яку рівняння (4.67) його ліва частина буде точною похідною за x. Ця функція називається інтегрувальним множником. Якщо ми знаємо функцію μ, то можна знайти не тільки перший інтеграл, а й особливі розв'язки, які знаходяться з рівняння $\frac{1}{\mu}=0$.

Приклад 4.9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''y+2y^2y'^2+y'^2-\frac{2yy'}{x}=0$.

Розв'язання. Візьмемо $\mu=\frac{1}{yy'}$, тоді $\frac{y''}{y'}+2yy'+\frac{y'}{y}-\frac{2}{x}=0$. При цьому $y=0$, $y=c$ – розв'язки нашого диференціального рівняння. Маємо $\frac{d}{dx}(\ln y'+y^2+\ln y-2\ln x)=0$.

$\ln y'+y^2+\ln y-2\ln x=\ln c_1$ – перший інтеграл. Перепишемо його у формі $e^{y^2}yy'-c_1x^2=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{c_1}{3}x^3)=0$. Звідси $\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{c_1}{3}x^3=c_2$ – загальний інтеграл. Особливих розв'язків немає, оскільки диференціальне рівняння $yy'=0$ приводить до розв'язків $y=c$, що містяться в загальному.

РОЗДІЛ 5

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ

5.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь *n*-го порядку

5.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{5.1}$$

де $p_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $f(x)$ – задані функції, неперервні на (a,b). За цих умов диференціальне рівняння (5.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Розв'язок визначений і n раз неперервно диференційований на (a,b).

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (5.1) не має. Будь-який розв'язок за конкретних початкових умов є частинним. Якщо при $y^{(n)}$ стоїть $p_0(x)$, то точки, у яких $p_0(x)$=0, називаються особливими.

Якщо $f(x) = 0$, то диференціальне рівняння (5.1) називають однорідним:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \tag{5.2}$$

Для скорочення запису введемо лінійний диференціальний оператор
$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x). \qquad (5.3)$$
Властивості оператора L:
- $L(ky) = kL(y)$, $k = \text{const}$;
- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;
- $L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i)$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – деякі числа.

Використовуючи оператор L, диференціальні рівняння (5.1) і (5.2) перепишемо у вигляді
$$L(y) = f(x), \qquad (5.1^*)$$
$$L(y) = 0. \qquad (5.2^*)$$

Означення 5.1. Функція $y = y(x)$ називається розв'язком диференціального рівняння (5.1), якщо $L(y) \equiv f(x)$ (для диференціального рівняння (5.2) $L(y(x)) \equiv 0$).

Лінійне диференціальне рівняння (5.1) залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$ $\left(\varphi'(t) \neq 0\right)$.

Лінійне диференціальне рівняння (5.1) залишається лінійним при будь-якій лінійній заміні шуканої функції
$$y = \alpha(x) z + \beta(x) \qquad (5.4)$$
за певних обмежень на функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

5.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n–го порядку

Задача полягає в тому, щоб знайти всі дійсні розв'язки диференціального рівняння
$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0. \qquad (5.5)$$
Для розв'язання такої задачі доцільно знайти деякі комплексні розв'язки.

Означення 5.2. Функцію $z(x) = w(x) + iv(x)$, де $w(x)$, $v(x)$ – дійсні функції, $i = \sqrt{-1}$, будемо називати комплексною функцією від дійсної змінної x ($w(x)$ – дійсна частина, $v(x)$ – уявна).

Приклад 5.1. Показати справедливість формул
$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \; e^{\alpha x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right). \qquad (5.6)$$

Розв'язання. Формули (5.6) виводяться шляхом розвинення відповідних експонент у ряд, наприклад

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \cos x + i \sin x .$$

Похідна *n*-го порядку від *z(x)* дорівнює

$$z^{(n)}(x) = w^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x) . \tag{5.7}$$

Наведемо формули для обчислення похідних:

а) $\left(e^{\alpha x}\right)' = \alpha e^{\alpha x} \qquad (\alpha = a + ib).$ (5.8)

Дійсно,

$$\left[e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)\right]' =$$

$$= \alpha e^{\alpha x}(\cos bx + i \sin bx) + e^{ax}\left[-b \sin bx + ib \cos bx\right] =$$

$$= e^{ax}(a + ib)\cos bx + e^{ax}(ai - b)\sin bx = (a + ib)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx);$$

б) для дійсного k і будь-якого α справедлива формула

$$\left(x^k e^{\alpha x}\right)' = \left(kx^{k-1} + \alpha x^k\right)e^{\alpha x} ; \tag{5.9}$$

в) використовуючи (5.9), можна показати

$$\left(P_n(x)e^{\alpha x}\right)' = \bar{P}_n(x)e^{\alpha x} , \tag{5.10}$$

де $P_n(x)$, $\bar{P}_n(x)$ – поліноми степеня *n*;

г) при будь-якому α (дійсному або комплексному) справедлива формула

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha - 1} . \tag{5.11}$$

Формула (5.11) виводиться шляхом зображення $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ і використання рівності (5.8).

Означення 5.3. Комплексна функція

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \tag{5.12}$$

називається розв'язком однорідного диференціального рівняння (5.5), якщо $L(y(x)) \equiv 0,\ a < x < b$.

Комплексний розв'язок (5.12) утворює два дійсних розв'язки: $y_1(x)$, $y_2(x)$. Дійсно, $L(y(x)) = L(y_1(x) + iy_2(x)) = L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) = 0$. Звідси $L(y_1(x)) = 0,\ L(y_2(x)) = 0$.

Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (5.5):

- якщо $y_1(x)$ – розв'язок, тобто $L(y_1)=0$, то $y=cy_1(x)$, де c – довільна константа, – теж розв'язок диференціального рівняння (5.5)
- $L(cy_1)=c\,L(y_1)=0$;
- якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (5.5), то $y=y_1(x)+y_2(x)$ – теж розв'язок. Дійсно $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)=0$;
- якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (5.5), то їх лінійна комбінація також є розв'язком

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i(x))=0 .$$

Приклад 5.2. Записати двопараметричну сім'ю розв'язків диференціального рівняння $y''+y=0$.

Розв'язання. Очевидно, що $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ – розв'язки, тоді $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ – розв'язок.

5.1.3. Необхідні й достатні умови лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку

Означення 5.4. Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються лінійно незалежними на (a,b), якщо між ними не існує співвідношення вигляду

$$\alpha_1 y_1(x)+\cdots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0,\quad a<x<b, \tag{5.13}$$

де α_1, ..., α_n – сталі числа, не рівні нулю одночасно. У протилежному випадку функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ називають лінійно залежними на (a,b).

Для двох функцій поняття лінійної незалежності на (a,b) зводиться до того, щоб відношення функцій $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, $(y_2(x)\neq 0)$ не було сталим на (a,b).

Зауваження 5.1. Якщо одна з функцій на (a,b) тотожно дорівнює нулю, то ці функції лінійно залежні.

Приклад 5.3. Функції $y_1=1$, $y_2=x$, ..., $y_n=x^{n-1}$ – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі $(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$.

Дійсно, співвідношення $\alpha_1 1+\alpha_2 x+\ldots+\alpha_n x^{(n-1)}=0$, у якому не всі α_i дорівнюють нулю, не може виконуватися для будь-яких x, оскільки рівняння $(n-1)$-го степеня має не більше $(n-1)$ коренів.

Приклад 5.4. Функції $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ – лінійно незалежні, оскільки співвідношення $\alpha_1 e^x+\alpha_2 e^{-x}=0$, де α_1,α_2 не дорівнюють одночасно нулю, виконуються не більше ніж в одній точці. Це випливає з $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=e^{2x}\neq \text{const}$.

Приклад 5.5. Функції $y_1=\sin^2 x$, $y_2=\cos^2 x$, $y_3=1$ – лінійно залежні на $(-\infty,+\infty)$, оскільки для будь-якого x справджується співвідношення $\sin^2 x+\cos^2 x-1=0$.

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності n функцій.

Теорема 5.1. Якщо функції $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ – лінійно залежні на (a,b), то їх вронськіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю на (a,b). Тут

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{5.14}$$

Доведення. Згідно з умовою теореми 5.1 $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0$, $a<x<b$, де не всі α_i одночасно рівні нулю. Нехай $\alpha_n\neq 0$, тоді

$$y_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}. \tag{5.15}$$

Диференціюємо (5.15) $(n-1)$ разів і підставляємо в (5.14):

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{5.16}$$

Розкладаючи визначник (5.16) на суму визначників, матимемо в кожному з них два однакові стовпці, тому всі визначники будуть рівними нулю і, отже, $W(x) \equiv 0$, $a < x < b$. Теорему доведено.

Нехай кожна з функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язок диференціального рівняння (5.5). Необхідні й достатні умови лінійної незалежності цих розв'язків наводяться в теоремах 5.1, 5.2.

Теорема 5.2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння (5.5), усі коефіцієнти якого неперервні на (a,b), то вронськіан цих розв'язків W не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу (a,b).

Доведення. Припустимо протилежне: у точці $x_0 \in (a,b)$ $W(x_0) = 0$. Складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \ \ldots \ + c_n y_n(x_0) = 0, \\ c_1 y_1'(x_0) + \ \ldots \ + c_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ \ldots \ + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Оскільки визначник системи (5.17) $W(x_0) = 0$, то вона має ненульовий розв'язок $c_1^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}$. Розглянемо функцію

$$y = c_1^{(0)} y_1(x) + \ldots + c_n^{(0)} y_n(x), \tag{5.18}$$

яка є розв'язком диференціального рівняння (5.5).

Система (5.17) показує, що в точці x_0 розв'язок (5.18) перетворюється на нуль разом зі своїми похідними до $(n-1)$-го порядку. За теоремою існування та єдиності це значить, що має місце тотожність

$$y(x) = c_1^{(0)} y_1(x) + \ldots + c_n^{(0)} y_n(x) \equiv 0, \ a < x < b,$$

де не всі $c_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Останнє означає, що розв'язки $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійно залежні на (a,b). Це протиріччя й доводить теорему.

З теорем 5.1 і 5.2 випливає: для того, щоб n розв'язків диференціального рівняння (5.5) були лінійно незалежними на (a,b), необхідно й достатньо, щоб їх вронськіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

Виявляється, що для з'ясування лінійної незалежності n розв'язків диференціального рівняння (5.5) достатньо переконатися, що $W(x)$ не дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу (a,b). Це випливає з властивостей вронськіана від n розв'язків диференціального рівняння (5.5):

- якщо вронськіан дорівнює нулю в одній точці $x_0 \in (a,b)$ і всі коефіцієнти диференціального рівняння (5.5) неперервні, то $W(x) \equiv 0$ на (a,b).

Дійсно, якщо $W(x_0) = 0$, то за теоремою 5.2 функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійно залежні на (a,b). Тоді за теоремою 5.1 $W(x) \equiv 0$ на (a,b);

- якщо вронськіан n розв'язків диференціального рівняння (5.5) відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in (a,b)$, то $W(x) \neq 0$ на (a,b).

Дійсно, якби $W(x)$ дорівнював в одній точці з (a,b) нулю, то, згідно з а), $W(x) \equiv 0$ на (a,b), у тому числі й у точці $x_0 \in (a,b)$, що суперечить умові.

Звідси випливає: якщо n розв'язків диференціального рівняння (5.5) лінійно незалежні на (a,b), то вони лінійно незалежні на будь-якому $(a_1, b_1) \subset (a,b)$.

5.1.4. Формула Остроградського – Ліувілля

Ця формула має вигляд

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}. \tag{5.19}$$

Доведення. Розглянемо вронськіан

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

і обчислимо його похідну

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$\ldots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Перші $(n-1)$ визначників дорівнюють нулю, оскільки всі вони мають по два однакових рядки. Далі множимо перші $(n-1)$ рядків останнього визначника відповідно на $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_2(x)$ і складаємо всі n рядків. За диференціальним рівнянням (5.5) маємо

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \cdots & p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=-p_1(x)W(x).$$

Звідси отримуємо формулу (5.19).

5.1.5. Фундаментальна система розв'язків та її існування

Означення 5.5. Сукупність n розв'язків диференціального рівняння (5.5), визначених і лінійно незалежних на (a,b), називається *фундаментальною системою розв'язків.*

З цього випливає: для того, щоб система n розв'язків диференціального рівняння (5.5) була фундаментальною системою розв'язків, необхідно й достатньо, щоб вронськіан цих розв'язків був відмінним від нуля хоча б в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (5.5). Усі ці розв'язки мають бути ненульовими.

Теорема 5.3 (про існування фундаментальної системи розв'язків). Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (5.5) неперервні на (a,b), то існує фундаментальна система розв'язків на цьому інтервалі.

Доведення. Візьмемо точку $x_0 \in (a,b)$ і побудуємо, використовуючи метод Пікара, розв'язки:

- $y_1(x)$ з початковими умовами

$y_1(x_0)=1, y_1'(x_0)=0,\dots,y_1^{(n-1)}(x_0)=0$;

- $y_2(x)$ з початковими умовами

$y_2(x_0)=0, y_2'(x_0)=1,\dots,y_2^{(n-1)}(x_0)=0$;

- $y_n(x)$ з початковими умовами

$y_n(x_0)=0, y_n'(x_0)=0,\dots,y_n^{(n-1)}(x_0)=1$.

Очевидно, що $W(x_0)=1\neq 0$, отже побудовані розв'язки лінійно незалежні. Теорему доведено.

З методу побудови лінійно незалежних функцій випливає, що таких функцій можна побудувати безліч. Побудована система розв'язків називається *нормованою* в точці $x=x_0$.

Для будь-якого диференціального рівняння (5.5) існує тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована за моментом x_0.

5.1.6. Загальний розв'язок. Кількість лінійно незалежних розв'язків

Теорема 5.4. Якщо $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (5.5), то формула

$$y=c_1y_1(x)+c_2\,y_2(x)+\dots+c_n\,y_n(x), \tag{5.20}$$

де $c_1, c_2,\dots, c_n$ – довільні константи, дає загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) в області

$$a<x<b\,,\ |y|<\infty, |y'|<\infty,\dots,\left|y^{(n-1)}\right|<\infty\,, \tag{5.21}$$

тобто в області визначення диференціального рівняння (5.5).

Доведення. Якщо $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (5.5), то лінійна комбінація (5.20) – теж розв'язок. Систему

$$\begin{cases} y=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i(x), \\ y'=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i'(x), \\ \dots \\ y^{(n-1)}=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x) \end{cases} \tag{5.22}$$

можна розв'язати відносно c_1, c_2, ..., c_n в області (5.21), оскільки $W(x)\neq 0$. Згідно з визначенням, (5.20) – загальний розв'язок, який містить усі розв'язки диференціального рівняння (5.5).

Теорему доведено.

Для знаходження частинного розв'язку такого, що

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0{}',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{5.23}$$

необхідно (5.23) підставити в (5.22) і визначити $c_i^{(0)}$, $i=1,2,\ldots,n$. Тоді $y=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(0)} y_i(x)$ – частинний розв'язок. Якщо фундаментальна система розв'язків нормована в точці $x=x_0$, то $c_1^{(0)}=y_0, c_i^{(0)}=y_0^{i-1}$, $i=2,3,\ldots,n$, тобто

$$y=y_0y_1(x)+y_0'y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)}y_n(x) \tag{5.24}$$

– загальний розв'язок у формі Коші.

Зауважимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) є однорідною лінійною функцією від довільних констант.

Твердження 5.1. Диференціальне рівняння (5.5) не може мати більше n лінійно незалежних розв'язків.

Дійсно, нехай ми маємо $n+1$ частинних розв'язків. Розглянемо n перших. Якщо вони лінійно залежні, то всі будуть лінійно залежними, оскільки $\alpha_1y_1(x)+\alpha_2y_2(x)+\ldots+\alpha_ny_n(x)+0y_{n+1}(x)=0$, $a<x<b$, де не всі α_i дорівнюють нулю. Якщо ж вони лінійно незалежні, то за теоремою 5.4 будь-який розв'язок, у тому числі і y_{n+1}, виражається через $y_1(x),y_2(x),\ldots, y_n(x)$, тобто $y_{n+1}=c_1^{(0)}y_1(x)+c_2^{(0)}y_2(x)+\ldots+c_n^{(0)}y_n(x)$. Отримали, що $(n+1)$-й розв'язок знову виявився лінійно залежним.

Для побудови диференціального рівняння типу (5.5) за системою лінійно незалежних функцій $y_1(x),y_2(x),\ldots, y_n(x)$, які n разів неперервно диференційовані на (a,b), вронськіан яких $W(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$, необхідно розглянути вронськіан порядку $(n+1)$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

і розкрити цей визначник за останнім стовпчиком.

Якщо відомий один частинний ненульовий розв'язок диференціального рівняння (5.5), то можна знизити його порядок на одиницю заміною

$$y = y_1 \int u dx \text{, або } u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'. \tag{5.25}$$

Тоді

$$\begin{cases} y' = y_1' \int u du + y_1 u, \\ y'' = y_1'' \int u du + 2y_1' u + y_1 u', \\ \qquad \ldots \\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u du + n y_1^{(n-1)} u + \dfrac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u' + \ldots + y_1 u^{(n-1)} \end{cases}$$

і диференціальне рівняння (5.5) запишемо у вигляді

$$L(y_1) \int u dx + b_{n-1}(x) u + b_{n-2}(x) u' + \ldots + y_1 u^{(n-1)} = 0 .$$

Ми отримали диференціальне рівняння порядку $(n-1)$

$$y_1(x) u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2}(x) u' + b_{n-1}(x) u = 0 .$$

Якщо маємо k лінійно незалежних частинних розв'язків, то диференціальне рівняння (5.5) можна знизити на k одиниць.

5.2. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

5.2.1. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{5.26}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a,b).

Разом з неоднорідним диференціальним рівнянням (5.26) будемо розглядати однорідне диференціальне рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 . \tag{5.27}$$

Для побудови загального розв'язку диференціального рівняння (5.27) необхідно знайти хоч одну фундаментальну систему розв'язків. Виявляється, що фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (5.27) можна побудувати з елементарних функцій.

Наприклад, при $n=1$ для диференціального рівняння $y'+a_1y=0$, де a_1 – дійсне число, частинним розв'язком буде функція $y_1=e^{-a_1x}$.

Дотримуючись ідеї Ейлера, частинні розв'язки диференціального рівняння (5.27) шукаємо у вигляді

$$y=e^{\lambda x}, \tag{5.28}$$

де λ – деякі невідомі сталі числа (дійсні або комплексні). Підставимо (5.28) у (5.27), отримаємо

$$L\left(e^{\lambda x}\right)=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)e^{\lambda x}=P_n(\lambda)e^{\lambda x}. \tag{5.29}$$

З (5.29) випливає, що $y=e^{\lambda x}$ є розв'язком диференціального рівняння (5.27) тоді й тільки тоді, коли $P_n(\lambda)=0$, тобто

$$P_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{5.30}$$

Рівняння (5.30) називають *характеристичним*, а його корені – *характеристичними числами* диференціального рівняння (5.27).

Розглянемо три випадки побудови лінійно незалежних розв'язків.

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ дійсні й різні. Тоді n дійсних частинних розв'язків знайдемо згідно з формулами

$$y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x},\ldots,y_n=e^{\lambda_n x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні. Дійсно,

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1x} & e^{\lambda_2x} & \ldots & e^{\lambda_nx} \\ \lambda_1e^{\lambda_1x} & \lambda_2e^{\lambda_2x} & \ldots & \lambda_ne^{\lambda_nx} \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2x} & \ldots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_nx} \end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}\neq 0,$$

оскільки останній визначник є визначником Вандермонда, який не дорівнює нулю, коли всі числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ різні. У цьому випадку загальний розв'язок має вигляд

$$y=\sum_{k=1}^{n}c_ke^{\lambda_kx} \tag{5.31}$$

в області

$$-\infty<x<\infty, |y|<\infty, |y'|<\infty,\ldots,\left|y^{(n-1)}\right|<\infty, \tag{5.32}$$

де $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – довільні сталі.

Корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні.

Нехай $a \pm bi$ – пара комплексно-спряжених коренів. Два дійсних, лінійно незалежних розв'язки будуються таким чином. Кореню $a+bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$. Згідно з доведеним вище функції $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ також є розв'язками диференціального рівняння (5.27), незалежними в інтервалі $(-\infty, \infty)$. Аналогічно кореню $a-bi$ відповідають два дійсних, лінійно незалежних розв'язки $e^{ax}\cos bx$, $-e^{ax}\sin bx$. Їх приєднання до знайдених раніше дає лінійно залежну систему розв'язків. Отже, спряжений корінь не дає нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, кожній парі комплексно-спряжених коренів відповідають два дійсних лінійно незалежних розв'язки вигляду $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, які разом з розв'язками $e^{\lambda_k x}$ (λ_k – дійсні числа) утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, \infty)$.

Приклад 5.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_2 = 3$. Тоді

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}, y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

– загальний розв'язок.

Приклад 5.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Розв'язання. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$, $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$,

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{2x}\sin 3x,$$

$$y = c_1e^{-x} + (c_2\cos 3x + c_3\sin 3x)e^{2x}$$

– загальний розв'язок.

Приклад 5.8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

Розв'язання. Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i.$$

Його загальний розв'язок:

$$y_1 = e^x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x,\ y = c_1e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x.$$

Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння.

Припустимо, що $\lambda_1 - k$ – кратний корінь характеристичного рівняння (5.30) такий, що

$$P_n(\lambda_1) = P_n'(\lambda_1) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\lambda_1) = 0 \text{, але } P_n^{(k)}(\lambda_1) \neq 0 . \tag{5.33}$$

Щоб знайти розв'язки, які відповідають характеристичному числу λ_1, продиференціюємо тотожність

$$L\left(e^{\lambda x}\right) \equiv P_n(\lambda)e^{\lambda x} \tag{5.34}$$

m разів за λ, використовуючи при цьому формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}L(v) = L\left(\frac{\partial^m v}{\partial\lambda^m}\right), \quad \left(v = e^{\lambda x}\right).$$

Для знаходження похідної від добутку функцій використовуємо формулу Лейбніця $(uv)^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(i)} v^{(m-i)}$, $\left(C_m^0 = 1\right)$, де $u(\lambda) = P_n(\lambda), v(\lambda) = e^{\lambda x}$. Маємо $L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\lambda) x^{m-i} e^{\lambda x}$. Використовуючи (5.33), запишемо $L(x^m e^{\lambda_1 x}) \equiv 0$, $m = 0,1,\ldots,k-1$, тобто функції

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{5.35}$$

є розв'язками диференціального рівняння (5.27). Ці функції лінійно незалежні на (a,b).

Таким чином, кожному дійсному кореню λ_1 кратністю k відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (5.35).

Якщо характеристичне рівняння має комплексні корені $a \pm bi$ кратністю k, то $2k$ лінійно незалежних розв'язків матимуть вигляд

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, \ xe^{ax}\cos bx, \ldots, \ x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, \ xe^{ax}\sin bx, \ldots, \ x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases} \tag{5.36}$$

Розв'язки (5.36) лінійно незалежні на інтервалі $\left(-\infty,\infty\right)$.

Приклад 5.9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 .$$

Розв'язання. Запишемо розв'язки характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 , \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 .$$

Тут $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2e^x$, $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$ – загальний розв'язок.

Приклад 5.10. Розв'язати диференціальне рівняння
$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$ і знайдемо його корені $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Тут $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}$ – фундаментальна система розв'язків, тому $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x + c_3 xe^x$ – загальний розв'язок.

Приклад 5.11. Розв'язати диференціальне рівняння
$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. Розв'яжемо характеристичне рівняння $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ і знайдемо його корені $\lambda_{1,2} = 1 + i, \lambda_{3,4} = 1 - i$. Побудуємо фундаментальну систему розв'язків
$$y_1 = e^x \cos x,\ y_2 = xe^x \cos x,\ y_3 = e^x \sin x,\ y_4 = xe^x \sin x,$$
на основі якої знайдемо $y = e^x \cos x(c_1 + xc_2) + e^x \sin x(c_3 + xc_4)$ – загальний розв'язок.

5.2.2. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

Для деяких частинних випадків функції $f(x)$ можна знайти частинні розв'язки диференціального рівняння (5.26) без квадратур.

1) Розглянемо диференціальне рівняння з правою частиною
$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x}, \qquad (5.37)$$
де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m$ $(m \geq 0)$ – поліном з дійсними чи комплексними коефіцієнтами, α – стале дійсне чи комплексне число.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (5.37) шукають у вигляді
$$y_1 = Q_m(x) e^{\alpha x}, \qquad (5.38)$$
де
$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m \qquad (5.39)$$
– поліном m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. У цьому випадку частинний розв'язок має ту саму аналітичну структуру, що і права частина диференціального рівняння (5.37). Коефіцієнти q_i, $i = 0,1,\ldots,m$ знаходяться шляхом підстановки (5.38) у (5.37) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x.

Переконаємося, що шукані коефіцієнти визначаються однозначно. Підставимо (5.38) у (5.37), отримаємо

$$L(y_1) = L\left(Q_m(x)e^{\alpha x}\right) = L\left(\left(q_0x^m + q_1x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m\right)e^{\alpha x}\right) =$$

$$= q_0L\left(x^m e^{\alpha x}\right) + q_1L\left(x^{m-1}e^{\alpha x}\right) + \ldots + q_{m-1}L\left(xe^{\alpha x}\right) + q_mL\left(e^{\alpha x}\right) =$$

$$= \left(p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}.$$

Використовуючи вищенаведені формули, запишемо

$$L\left(e^{\alpha x}\right) = P_n(\alpha)e^{\alpha x}, L\left(x^s e^{\alpha x}\right) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{s-i}e^{\alpha x} .$$

Звідси маємо

$$q_0 \sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-i}e^{\alpha x} + q_1 \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-1-i}e^{\alpha x} +$$

$$+\ldots + q_{m-1} \sum_{i=0}^{1} C_1^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{1-i}e^{\alpha x} + q_mP_n(\alpha)e^{\alpha x} =$$

$$= \left(p_0x^m + p_1x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}.$$

Скорочуємо на $e^{\alpha x}$ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{r} x^m: \\ x^{m-1}: \\ \ldots \\ x: \\ 1: \end{array} \left\{ \begin{array}{c} q_0P_n(\alpha) = p_0, \\ q_0C_m^1P_n'(\alpha) + q_1P_n(\alpha) = p_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_0C_m^{m-1}P_n^{(m-1)}(\alpha) + q_1C_{m-1}^{m-2}P_n^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P_n(\alpha) = p_{m-1}, \\ q_0C_m^mP_n^{(m)}(\alpha) + q_1C_{m-1}^{m-1}P_n^{m-1}(\alpha) + \ldots + q_{m-1}P_n'(\alpha) + q_mP_n(\alpha) = p_m. \end{array} \right. \qquad (5.40)$$

Оскільки $P_n(\alpha) \neq 0$, то з (5.40) послідовно визначаються всі коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Випадок 2. Параметр α є k-кратним коренем характеристичного рівняння $(k \geq 1)$, тобто

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\alpha) = 0, P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0 . \qquad (5.41)$$

У цьому випадку частинний розв'язок не можна побудувати у вигляді (5.38), оскільки $P_n(\alpha) = 0$. Шукаємо його у вигляді

$$y_1 = x^kQ_m(x)e^{\alpha x}, \qquad (5.42)$$

де $Q_m(x)$ – поліном вигляду (5.39).

Коефіцієнти полінома визначаються шляхом підстановки (5.42) у (5.37):

$$L(y_1)=L\left(x^kQ_m(x)e^{\alpha x}\right)=L\left(\sum_{s=0}^{m}q_sx^{k+m-s}e^{\alpha x}\right)=\sum_{s=0}^{m}q_sL\left(x^{k+m-s}e^{\alpha x}\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{m}q_s\sum_{i=k}^{k+m-s}C_{k+m-s}^{i}P_n^{(i)}(\alpha)\,x^{k+m-s-i}e^{\alpha x}=\sum_{s=0}^{m}p_sx^{m-s}e^{\alpha x}.$$

Звідси $\sum\limits_{s=0}^{m}q_s\sum\limits_{i=0}^{m-s}C_{k+m-s}^{k+i}P_n^{(k+i)}(\alpha)x^{m-s-i}=\sum\limits_{s=0}^{m}p_sx^{m-s}$.

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{l} x^m \\ x^{m-1} \\ \ldots \\ x \\ 1 \end{array}\begin{cases} q_0C_{k+m}^{k}P_n^{(k)}(\alpha)=p_0, \\ q_0C_{k+m}^{k-1}P_n^{(k+1)}(\alpha)+q_1C_{k+m-1}^{k}P_n^{(k)}(\alpha)=p_1, \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_0C_{k+m}^{k+m-1}P_n^{(k+m-1)}(\alpha)+q_1C_{k+m-1}^{k+m-2}P_n^{(k+m-2)}(\alpha)+\ldots+q_{m-1}C_{k+1}^{k}P_n^{(k)}(\alpha)=p_{m-1}, \\ q_0C_{k+m}^{k+m}P_n^{(k+m)}(\alpha)+q_1C_{k+m-1}^{k+m-1}P_n^{(k+m-1)}(\alpha)+\ldots+q_mC_k^kP_n^{(k)}(\alpha)=p_m. \end{cases} \tag{5.43}$$

З (5.43) послідовно однозначно визначаються $q_0,q_1,\ldots,q_m$, оскільки $P_n^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

2) Припустимо, що права частина диференціального рівняння (5.26) має вигляд

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right), \tag{5.44}$$

де $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$ – відомі поліноми степеня менше або рівного m (хоча б один має степінь m).

Використовуючи формули Ейлера, обчислимо

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\ \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}$$

і перепишемо функцію $f(x)$:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+P_m^{(2)}(x)\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}\right)=$$

$$=\bar{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\bar{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

де $\bar{P}_m^{(1)}(x)$ і $\bar{P}_m^{(2)}(x)$ – поліноми степеня m, тобто $f(x)$ є сумою двох функцій, розглянутих вище.

Випадок 1. Число $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1=\bar{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\bar{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \qquad (5.45)$$

де $\bar{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\bar{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1=x^k\left(\bar{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\bar{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}\right). \qquad (5.46)$$

Зводячи (5.45) і (5.46) до дійсного вигляду, сформулюємо правило знаходження частинного розв'язку для співвідношення (5.44).

Випадок 3. Якщо $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_1=e^{\alpha x}\left(\bar{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x+\bar{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \qquad (5.47)$$

Випадок 4. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння ($k\geq 1$), то

$$y_1=x^k e^{\alpha x}\left(\bar{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x+\bar{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \qquad (5.48)$$

Тут $\bar{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\bar{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 5.12. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів $y''-5y'+6y=6x^2+10x+2$.

Розв'язання. Запишемо розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$z''-5z'+6z=0,\ \lambda^2-5\lambda+6=0,\ \lambda_1=2,\lambda_2=3,\ z=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

Знаходимо розв'язки неоднорідного диференціального рівняння

$$\alpha=0,\ y_1=Ax^2+Bx+C,$$

$$6Ax^2+(6B-10A)x+6C-5B+2A=6x^2-10x+2,$$

$$\begin{cases}6A=6,\\6B-10A=-10,\\6C-5B+2A=2,\end{cases}\quad\begin{cases}A=1,\\B=0,\\C=0.\end{cases}$$

Отже, $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+x^2$ – загальний розв'язок.

Приклад 5.13. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів $y''-y=2e^x$.

Розв'язання. Розв'яжемо однорідне рівняння $z'' - z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Оскільки $\alpha = 1$ – корінь кратністю 1, то $y_1 = Axe^x$, $A = 1$, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x$ – загальний розв'язок.

Приклад 5.14. Знайти методом невизначених коефіцієнтів загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - \sin x).$$

Розв'язання. Для нашого випадку $\alpha = 1, \beta = 1$. Маємо $z'' + z' - 2z = 0$, $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -2$, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Оскільки $\alpha + \beta i = 1 + i$, то $y_1 = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Після підстановки отримаємо $y_1 = e^x(2\cos x + \sin x)$, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$ – загальний розв'язок.

5.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку

5.3.1. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (5.49)$$

де $f(x)$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – неперервні на (a, b) функції.

Припустимо, що для диференціального рівняння (5.49) ми знайшли частинний розв'язок такий, що

$$L(y_1) = f(x). \qquad (5.50)$$

Введемо нову змінну z:

$$y = y_1 + z. \qquad (5.51)$$

Тоді $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x)$. Звідси

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)z = 0. \qquad (5.52)$$

Диференціальне рівняння (5.52) називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку, що відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (5.49).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (5.52) записується у формі

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n, \qquad (5.53)$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (5.52), $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі. Тоді

$$y = y_1(x) + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n \tag{5.54}$$

буде загальним розв'язком диференціального рівняння (5.49) в області

$$a < x < b, \left|y\right| < \infty, \ \left|y'\right| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty . \tag{5.55}$$

Таким чином, для знаходження загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (5.49) необхідно знайти один частинний розв'язок диференціального рівняння (5.49) і додати до нього загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Зауваження 5.2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) . \tag{5.56}$$

Припустимо, що $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $L(y) = f_1(x)$, а $y_2(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $L(y) = f_2(x)$. Тоді $y_1(x) + y_2(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (5.56).

Приклад 5.15. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y = 2 + 3e^x$.

Розв'язання. Розглянемо диференціальні рівняння:

a) $y'' + 2y = 2$, для якого $y_1 = 1$;

b) $y'' + 2y = 3e^x$, для якого $y_2 = e^x$.

Тоді $y_1 + y_2 = e^x + 1$ – частинний розв'язок даного диференціального рівняння.

5.3.2. Метод варіації довільної сталої (Лагранжа)

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (5.49) можна знайти у квадратурах, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння (5.52). Будемо шукати загальний розв'язок диференціального рівняння (5.49) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i , \tag{5.57}$$

де $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ – деяка фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (5.52).

Виберемо функції $c_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ так, щоб функція (5.57) була загальним розв'язком диференціального рівняння (5.49). Оскільки шукані функції задовольняють тільки одну умову, то для їх визначення можна підпорядкувати їх будь яким $(n-1)$ умовам. Знайдемо n похідних функції (5.57):

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i\ ;$$

$$y'=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i'+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i \text{ і покладемо } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i=0\ ;$$

$$y''=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i''+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i' \text{ і покладемо; } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i'=0\ ; \qquad (5.58)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i^{(n-1)}+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)} \text{ і покладемо } \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)}=0\ ;$$

$$y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)z_i^{(n)}.+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}\ .$$

Підставляючи (5.58) у диференціальне рівняння (5.49), отримаємо n-не рівняння $\sum_{i=1}^{n}c_i(x)L(z_i)+\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=f(x)$. Для визначення невідомих функцій отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i'=0,\dots,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-2)}=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)z_i^{(n-1)}=f(x). \quad (5.59)$$

Відносно $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$ (5.59) є системою лінійних рівнянь із визначником $W(x)\neq 0$. Для знаходження $c_i'(x)$ запишемо формулу

$$c_i'(x)=\frac{W_{ni}(x)f(x)}{W(x)},\quad i=1,2,\dots,n\ , \qquad (5.60)$$

де $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення до елемента n-го рядка та i-го стовпчика визначника $W(x)$. Усі функції, що входять у праву частину диференціального рівняння (5.60), неперервні на (a,b). З (5.60) отримаємо

$$c_i(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(t)f(t)}{W(t)}dt+c_i,\quad i=1,2,\dots,n\ , \qquad (5.61)$$

де c_i, $i=1,2,\dots,n$ – довільні сталі, $x_0\in(a,b)$. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (5.49) запишеться у вигляді

$$y=\sum_{i=1}^{n}z_i\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}f(t)}{W(t)}dt+\sum_{i=1}^{n}c_iz_i\ . \qquad (5.62)$$

Тут

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni} f(t)}{W(t)} dt \qquad (5.63)$$

– частинний розв'язок диференціального рівняння (5.49).

Неважко перевірити, що частинний розв'язок (5.63) задовольняє нульові початкові умови

$$y_1(x_0) = 0,\ y_1'(x_0) = 0, \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ x_0 \in (a,b).$$

Приклад 5.16. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + k^2 y = f(x),\ k \neq 0$.

Розв'язання. Фундаментальною системою розв'язків для диференціального рівняння $z'' + k^2 z = 0$ буде $z_1 = \cos kx,\ z_2 = \sin kx$. Отже

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{vmatrix} = k.$$

Тому загальний розв'язок запишемо у вигляді ($w_{21} = -\sin kx,\ w_{22} = \cos kx$)

$$y = -\frac{\cos kx}{k} \int_{x_0}^{x} \sin kt\, f(t)dt + \frac{\sin kx}{k} \int_{x_0}^{x} \cos kt\, f(t)dt +$$

$$+ c_1 \cos kx + c_2 \sin kx,$$

$$y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \sin k(x-t) f(t)dt + c_1 \cos kx + c_2 \sin kx.$$

Зокрема, для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (5.64)$$

загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = -z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{z_2 f(x)}{W(t)} dt + z_2 \int_{x_0}^{x} \frac{z_1 f(x)}{W(t)} dt + c_1 z_1 + c_2 z_2. \qquad (5.65)$$

Тут $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (5.64), що задовольняє це рівняння з початковими умовами $y(x_0) = 0$, $y('x_0) = 0$.

Для диференціального рівняння вигляду

$$y'' + q(x)y = f(x) \qquad (p(x) \equiv 0), \qquad (5.66)$$

оскільки $W(x) = \text{const}$, що випливає з формули Остроградського – Ліувілля. Загальний розв'язок запишемо у формі

$$y = -\frac{z_1}{W(x_0)} \int_{x_0}^{x} z_2 f(t)dt + \frac{z_2}{W(x_0)} \int_{x_0}^{x} z_1 f(t)dt + c_1 z_1 + c_2 z_2. \qquad (5.67)$$

Таким чином, для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння (5.49) необхідно знайти фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння (5.52), після чого загальний розв'язок запишеться у квадратурах.

5.3.3. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку методом Коші

Припустимо, що для рівняння (5.52) відома фундаментальна система розв'язків $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Використовуючи (5.53), побудуємо частинний розв'язок диференціального рівняння (5.52), який задовольняє початкові умови

$$z(\alpha) = 0,\ z'(\alpha) = 0, \ldots, z^{(n-2)}(\alpha) = 0,\ z^{(n-1)}(\alpha) = 1. \tag{5.68}$$

Цей розв'язок буде залежати від α як від параметра $z = \varphi(x, \alpha)$. Тут $a < x < b,\ a < \alpha < b$, функція $\varphi(x, \alpha)$ має неперервні частинні похідні за x та α до n -го порядку включно. Причому вона є розв'язком диференціального рівняння (5.52) $L(\varphi(x, \alpha)) \equiv 0,\ a < x < b,\ a < \alpha < b$. Крім цього, згідно з початковими умовами (5.68), функція $\varphi(x, \alpha)$ задовольняє умови

$$\varphi(\alpha, \alpha) = 0,\ \varphi'(\alpha, \alpha) = 0, \ldots, \varphi^{(n-2)}(\alpha, \alpha) = 0,\ \varphi^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = 1, \tag{5.69}$$

де

$$\varphi^{(p)}(\alpha, \alpha) = \left. \left(\frac{d^p \varphi(x, \alpha)}{dx^p} \right) \right|_{x=\alpha}.$$

Умову (5.69) можна записати й так:

$$\varphi(x, x) = 0,\ \varphi'(x, x) = 0, \ldots, \varphi^{(n-2)}(x, x) = 0,\ \varphi^{(n-1)}(x, x) = 1, \tag{5.70}$$

де

$$\varphi^{(p)}(x, x) = \left. \left(\frac{d^p \varphi(x, \alpha)}{dx^p} \right) \right|_{\alpha=x}.$$

Розглянемо функцію

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha, \tag{5.71}$$

де $x_0 \in (a, b)$, і покажемо, що вона є частинним розв'язком диференціального рівняння (5.49) з початковими умовами

$$y_1(x_0) = 0, y_1'(x_0) = 0, \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Для цього використаємо формулу

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x}\psi(x,\alpha)d\alpha=\int\limits_{x_0}^{x}\psi'_x(x,\alpha)d\alpha+\psi(x,x).$$

Знаходимо похідні

$$\frac{dy_1}{dx}=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi'_x(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi(x,x)f(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi'_x(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,\ \ (\varphi(x,x)=0),$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi''_{xx}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi'_x(x,x)f(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi''_{xx}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha,$$

$$(\varphi'_x(x,x)=0), \tag{5.72}$$

$$\dots$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{(n-1)}_{x\dots x}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi^{(n-2)}_{x\dots x}(x,x)f(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{(n-1)}_{x\dots x}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha\quad,$$

$$(\varphi^{(n-2)}_{x\dots x}(x,x)=0),$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{(n)}_{x\dots x}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\varphi^{(n-1)}_{x\dots x}(x,x)f(x)=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{(n)}_{x\dots x}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+f(x),$$

$$(\varphi^{(n-1)}_{x\dots x}(x,x)=1).$$

Підставимо (5.72) у диференціальне рівняння (5.49), отримаємо

$$L(y_1)=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{(n)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+f(x)+p_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{(n-1)}(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha+\dots+$$

$$+p_n(x)\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha=\int\limits_{x_0}^{x}L(\varphi(x,\alpha))f(\alpha)d\alpha+f(x)=f(x),$$

$$(L(\varphi(x,\alpha))=0).$$

Отже, $L(y_1))=f(x)$, а це означає, що функція (5.71) є частинним розв'язком диференціального рівняння (5.49). Формула (5.71) називається формулою Коші.

5.4. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі змінними коефіцієнтами, що зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Рівняння Ейлера. Це рівняння вигляду

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 . \qquad (5.73)$$

Рівняння (5.73) зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною

$$x = e^t,\ x > 0, \qquad x = -e^{-t},\ x < 0 . \qquad (5.74)$$

Дійсно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) e^{-t} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}, \qquad (5.75)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{dt}\right) e^{-nt} .$$

Підставляючи (5.74) і (5.75) у диференціальне рівняння (5.73), отримаємо диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = 0 . \qquad (5.76)$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння (5.76) знаходять у вигляді $y = e^{rt}$. Ураховуючи (5.74), частинні розв'язки диференціального рівняння (5.73) можна одразу шукати у вигляді (5.74):

$$y = x^r . \qquad (5.77)$$

Рівняння Лагранжа. Рівняння Лагранжа має вигляд

$$(ax+b)^n y^n + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{n-1} + \cdots + (ax+b) a_{n-1} y' + a_n y = 0 . \qquad (5.78)$$

Заміною $ax + b = e^t$ воно також зводиться до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Рівняння Чебишева. Це рівняння вигляду

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0 . \qquad (5.79)$$

Після заміни $x = \cos t$ при $|x| < 1$ воно набуває форми

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0 . \qquad (5.80)$$

Дійсно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Отже, $\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+n^2y=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$.

Отримали (5.80).

Приклад 5.17. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^3y'''+xy'-y=0.$$

Розв'язання. Випишемо й розв'яжемо характеристичне рівняння

$$r(r-1)(r-2)+r-1=0,\ r_1=r_2=r_3=1.$$

Фундаментальна система розв'язків буде такою:

$$y_1=x,\ y_2=x\ln x,\ y_3=x\ln^2 x.$$

Отже, $y=x\left(c_1+c_2\ln x+c_3\ln^2 x\right)$ – загальний розв'язок.

5.5. Деякі питання теорії лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Задача Штурма – Ліувілля

5.5.1. Зведення диференціального рівняння другого порядку до рівняння, що не містить члена з першою похідною, за допомогою заміни шуканої функції

Розглянемо однорідне диференційне рівняння другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \qquad (5.81)$$

Заміною

$$y=\alpha(x)z, \qquad (5.82)$$

де z – нова змінна, $\alpha(x)$ – двічі неперервно диференційована функція на інтервалі неперервності коефіцієнтів, диференціальне рівняння (5.81) зводиться до диференціального рівняння, яке не містить члена з першою похідною. Підставимо (5.82) у (5.81), отримаємо

$$\alpha''(x)z+2\alpha'(x)z'+\alpha(x)z''+p(x)\left(\alpha'(x)z+\alpha(x)z'\right)+q(x)\alpha(x)z=0,$$

$$z''+\left(\frac{2\alpha'(x)+p(x)\alpha(x)}{\alpha}\right)z'+\left(\frac{\alpha''(x)+p(x)\alpha'(x)+q(x)\alpha(x)}{\alpha}\right)z=0. \qquad (5.83)$$

Виберемо $\alpha(x)$ з умови

$$\frac{2\alpha'}{\alpha}+p(x)=0\,. \tag{5.84}$$

За $\alpha(x)$ можна взяти, наприклад, функцію

$$\alpha(x)=e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}, \tag{5.85}$$

тоді

$$\alpha'=-\frac{p(x)}{2}e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx},\quad \alpha''=\left(-\frac{p'(x)}{2}+\frac{p^2(x)}{4}\right)e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}$$

і диференціальне рівняння (5.83) перепишеться у вигляді

$$z''+Q(x)z=0\,, \tag{5.86}$$

де $Q(x)=-\dfrac{p'(x)}{2}-\dfrac{p^2(x)}{4}+q(x)$. Функція $Q(x)$ називається інваріантом диференціального рівняння (5.81).

Приклад 5.18. Звести диференціальне рівняння Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \qquad (x>0) \tag{5.87}$$

до вигляду, коли воно не містить члена з першою похідною, за допомогою заміни шуканої функції.

Розв'язання. Тут $p(x)=\dfrac{1}{x}$, $q(x)=1-\dfrac{n^2}{x^2}$. Таким чином,

$$Q(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+1-\frac{n^2}{x^2}=1+\frac{1/4-n^2}{x^2},$$

і рівняння Бесселя підстановкою $y=e^{-\int\frac{dx}{2x}}z=\dfrac{z}{\sqrt{x}}$ зводиться до рівняння

$$z''+\left(1+\frac{1/4-n^2}{x^2}\right)z=0\,. \tag{5.88}$$

5.5.2. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь, що не містять члена з першою похідною, за допомогою заміни незалежної змінної

Розглянемо для диференціального рівняння (5.81) заміну

$$x=x(t) \tag{5.89}$$

і покажемо, що його можна звести до вигляду, який не містить члена з першою похідною.

Припустимо, що $\psi(x)$ – неперервно диференційована функція на інтервалі неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (5.81), причому $\psi'(x) \neq 0$. Маємо

$$y'_x = y'_t \psi(x), \; y''_{xx} = y''_{t^2} \varphi'^2(x) + y'_t \psi''(x), \tag{5.90}$$

де $x = x(t)$ – функція, що визначається з (5.89). Підставляючи (5.90) у (5.81), отримаємо $\psi'^2(x) y''_{t^2} + \left[\psi''(x) + p(x)\psi'(x)\right] y'_t + q(x) y = 0$.

Функцію $\psi(x)$ виберемо з рівняння $\psi''(x) + p(x)\psi'(x) = 0$. Звідси $\psi'(x) = c e^{-\int p(x)dx}$. Узявши $c = 1$, знаходимо функцію $\psi(x)$ як частинний розв'язок

$$\psi(x) = \int e^{-\int p(x)dx} dx. \tag{5.91}$$

Підстановкою $t = \int e^{-\int p(x)dx} dx$ диференціальне рівняння (5.81) зводиться до вигляду

$$y''_{t^2} + q(x) e^{2\int p(x)dx} y = 0, \; x = x(t). \tag{5.92}$$

Приклад 5.19. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0.$$

Розв'язання. Зведемо наше диференціальне рівняння до вигляду, який не містить члена з першою похідною, за допомогою заміни

$$t = \int e^{-\int \frac{1}{2x} dx} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}.$$

Отримаємо диференціальне рівняння $y''_{t^2} - y = 0$. Отже $y(x) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = c_1 e^{2\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$.

5.5.3. Спряжені, самоспряжені диференціальні оператори, крайові умови та крайові задачі

Спряженим з диференціальним оператором

$$L(u) = a(x)\frac{d^2 u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} + c(x)u \tag{5.93}$$

називають диференціальний оператор вигляду

$$M(v) = \frac{d^2}{dx^2}\left(a(x)v\right) - \frac{d}{dx}\left(b(x)v\right) + c(x)v. \tag{5.94}$$

Властивість спряженості двох операторів взаємна, тобто спряженим до диференціального оператора $M(v)$ буде диференціальний оператор $L(u)$.

Якщо $L(u) \equiv M(v)$, то оператор $L(u)$ називають самоспряженим.

Характерна властивість спряжених диференціальних операторів: для будь-яких двічі неперервно диференційованих функцій $u(x)$ і $v(x)$ виконується співвідношення

$$vL(u) - uM(v) = \frac{d}{dx}\big(P(x,u,v,u',v')\big). \qquad (5.95)$$

Дійсно,

$$vL(u) - uM(v) =$$
$$= va(x)\frac{d^2u}{dx^2} + vb(x)\frac{du}{dx} + c(x)vu - u\frac{d^2}{dx^2}\big(a(x)v\big) +$$
$$+u\frac{d}{dx}\big(b(x)v\big) - c(x)uv +$$
$$+\left(\frac{d}{dx}(va)\frac{du}{dx} - \frac{d}{dx}(va)\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[va\frac{du}{dx} - u\frac{d}{dx}(va) + ubv\right] =$$
$$= \frac{d}{dx}\big(P(x,u,v,u',v')\big).$$

Нехай $\{u\}$ і $\{v\}$ – дві множини функцій, які задовольняють деякі однорідні крайові умови A і B відповідно на $[a,b]$. Якщо для довільних функцій з цих множин виконується співвідношення

$$\int_a^b \big[vL(u) - uM(v)\big]dx = 0, \qquad (5.96)$$

то крайові умови *A* та *B* називають спряженими крайовими умовами, що відповідають диференціальним операторам $L(u)$ і $M(v)$.

Крайову задачу для диференціального рівняння $L(u) = -f(x)$ за крайових умов A і крайову задачу $M(v) = -\phi(x)$ за крайових умов B ($f(x)$ *і* $\phi(x)$ – задані функції) називають спряженими крайовими задачами. Якщо при цьому диференціальний оператор $L(u)$ і крайові умови *A* самоспряжені, тобто збігаються з крайовими умовами *B*, то крайова задача для $L(u) = -f(x)$ за крайових умов *A* називається самоспряженою крайовою задачею.

5.5.4. Зведення лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку до самоспряженого вигляду

Означення 5.6. Лінійне однорідне диференціальне рівняння, у якому коефіцієнт при y' дорівнює похідній від коефіцієнта при y', тобто диференціальне рівняння (5.81) має вигляд

$$L(u) = \left(p(x)y' \right)' - q(x)y = 0\,, \tag{5.97}$$

називають самоспряженим диференціальним рівнянням другого порядку.

Твердження 5.2. Довільне лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,, \tag{5.98}$$

коефіцієнти якого неперервні на (a,b), а $p_0(x) \neq 0$ і є неперервно диференційованою функцією на (a,b), завжди можна звести до самоспряженого вигляду множенням на деяку функцію від x.

Доведення. Помножимо (5.89) на $\mu(x)$:

$$\mu(x)p_0(x)y'' + \mu(x)p_1(x)y' + \mu(x)p_2(x)y = 0\,.$$

Виберемо $\mu(x)$ згідно з умовами $\left(\mu(x)p_0(x)\right)' = \mu(x)p_1(x)$. Звідси $p_0\mu'(x) = \left(p_1(x) - p_0(x)\right)\mu(x)$, тобто

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\,. \tag{5.99}$$

Домножаючи диференціальне рівняння (5.98) на функцію (5.99), отримаємо

$$e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y' + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y = 0\,.$$

Позначивши $p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, перепишемо диференціальне рівняння так:

$$p(x)y'' + p'(x)y' - q(x)y = 0\,,\ \text{де}\ q(x) = -\frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\,.$$

Твердження доведено.

5.5.5. Задача Штурма – Ліувілля

Це задача про власні значення і власні функції: на відрізку $[a,b]$ знайти двічі неперервно диференційовані, не рівні тотожно нулю розв'язки крайової задачі

$$L(u)+\lambda\rho(x)u=0 \quad \left(L(u)=\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right)-q(x)u\right), \tag{5.100}$$

$$\begin{cases} R_0(u)=u(a)\cos\alpha+u'(a)\sin\alpha=0, \\ R_1(u)=u(b)\cos\beta+u'(b)\sin\beta=0 \end{cases} \tag{5.101}$$

і визначити відповідні до них значення параметра λ. Тут $0\le\alpha$, $\beta\le 2\pi$ – сталі числа, $p(x), q(x), \rho(x)$ – неперервні на $[a,b]$ функції, причому $p(x)>0$, $\rho(x)>0$.

Указані розв'язки називають власними, або фундаментальними, функціями, а відповідні до них числові значення λ – власними значеннями, або власними числами.

Властивості оператора $L(u)$:

а) Справедливе співвідношення

$$\upsilon L(u)-uL(\upsilon)=\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(\upsilon\frac{du}{dx}-u\frac{d\upsilon}{dx}\right)\right). \tag{5.102}$$

Дійсно,

$$\upsilon L(u)-uL(\upsilon)=\upsilon\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right)-\upsilon q(x)u-u\frac{d}{dx}\left(p(x)\upsilon'\right)+uq(x)\upsilon=$$

$$=\upsilon\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right)-u\frac{d}{dx}\left(p(x)\upsilon'\right).$$

З іншого боку,

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(\upsilon\frac{du}{dx}-u\frac{d\upsilon}{dx}\right)\right)=\upsilon\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right)+\upsilon'p(x)u'-$$

$$-u\frac{d}{dx}\left(p(x)\upsilon'\right)-u'p(x)\upsilon'=$$

$$=\upsilon\frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right)-u\frac{d}{dx}\left(p(x)\upsilon'\right).$$

Твердження доведено.

б) Якщо $u(x)$ і $\upsilon(x)$ задовольняють умову (5.101), то

$$\int_a^b\left(\upsilon L(u)-uL(\upsilon)\right)dx=0\,. \tag{5.103}$$

Дійсно,

$$\int_a^b \left(vL(u)-uL(v)\right)dx=\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\right)dx=$$

$$=p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_a^b=p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_{x=b}-p(x)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\Bigg|_{x=a}.$$

Запишемо крайові умови:

- $u(a)\cos(\alpha)+u'(a)\sin(\alpha)=0$,
- $u(b)\cos(\beta)+u'(b)\sin(\beta)=0$,
- $v(a)\cos(\alpha)+v'(a)\sin(\alpha)=0$,
- $v(b)\cos(\beta)+v'(b)\sin(\beta)=0$.

Розглянемо дві системи: перше і третє, друге й четверте рівняння. Для першої системи $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$ розглядаємо як ненульовий розв'язок $(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1)$. Це можливо тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix}=u(a)v'(a)-u'(a)v(a)=0.$$

Аналогічно можна отримати $u(b)v'(b)-u'(b)v(b)=0$. Співвідношення (5.103), таким чином, буде виконуватися.

Властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма – Ліувілля:

а) Власні функції $u_1(x)$ і $u_2(x)$, що відповідають різним власним значенням λ_1 і λ_2, ортогональні з ваговою функцією $\rho(x)$, тобто

$$\int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx=0. \qquad (5.104)$$

Дійсно, домноживши рівняння $L(u_1)+\rho\lambda_1u_1=0$ і $L(u_2)+\rho\lambda_2u_2=0$ відповідно на $u_2(x)$ і $u_1(x)$ та проінтегрувавши їх різницю, отримаємо

$$\int_a^b \left[u_2L(u_1)-u_1L(u_2)\right]dx+(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b \rho(x)u_1(x)u_2(x)dx=0.$$

б) Усі власні значення дійсні.

Згідно з б) перший доданок дорівнює нулю, оскільки $\lambda_1\neq\lambda_2$. Отже, виконується (5.104).

Дійсно, якби знайшлося комплексне власне значення λ із власною функцією u, то спряжене з ним комплексне число $\overline{\lambda}$ також було б власним значенням, а функція $\bar{u}$ була б його власною функцією. З ортогональності власних функцій $u(x)$ та $\bar{u}(x)$ випливає

$$\int_a^b \rho(x)u(x)\bar{u}(x)dx = \int_a^b \rho(x)|u|^2\,dx = 0,$$

тобто $u(x) \equiv 0$. Це означає, що число λ не є власним значенням.

в) Будь-якому власному значенню відповідає тільки одна лінійно незалежна власна функція.

Дійсно, припустимо, що маємо дві лінійно незалежні власні функції $u(x)$ і $v(x)$, які відповідають одному власному значенню λ. Тоді ліва частина в (5.102) дорівнює нулю, оскільки $L(u) = -\lambda\rho u$, $L(v) = -\lambda\rho v$. Тому

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\left(v\frac{du}{dx} - udv\right)dx\right) = 0,$$

тобто

$$p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right) = \text{const}. \tag{5.105}$$

Ліва частина співвідношення (5.105) у точці $x = a$ дорівнює нулю, оскільки для функцій $u(x)$ і $v(x)$ виконуються крайові умови. Ураховуючи, що $p(x) \neq 0$, у точці $x = a$ $vu' - uv' = 0$. Це означає, що в точці $x = a$ вронськіан від функцій $u(x)$ і $v(x)$ дорівнює нулю. Отже, функції $u(x)$ і $v(x)$ лінійно залежні.

г) Довільну власну функцію $u(x)$ можна пронормувати:

$$\int_a^b \rho(x)u^2(x)dx = 1. \tag{5.106}$$

5.5.6. Функція Гріна

Припустимо, що $\lambda = 0$ не є власним значенням задачі Штурма – Ліувілля (5.100), (5.101). Тоді крайова задача не має ненульових розв'язків. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ – розв'язки рівняння $L(u) = 0$, що задовольняють відповідно крайові умови $R_0(u) = 0$ та $R_1(v) = 0$.

Такі розв'язки існують і їх можна отримати як розв'язки задачі Коші, наприклад за початкових умов

$$u(a) = -\sin\alpha,\ u'(a) = \cos\alpha;\ v(b) = -\sin\beta,\ v'(b) = \cos\beta.$$

Функції $u(x)$ і $v(x)$ будуть лінійно незалежними, інакше, якби $u(x) = cv(x)$, де c – стала, то виконувалися б умови $R_0(u) = 0$, $R_1(u) = 0$.

А це б означало, що задача (5.100), (5.101) при $\lambda = 0$ мала б ненульовий розв'язок. За (5.102)

$$\Delta = p(x)\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} \right) = \mathrm{const}\,. \qquad (5.107)$$

Ця константа, згідно з лінійною незалежністю функцій $u(x)$ і $v(x)$, буде відмінною від нуля.

Функцію

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} u(x)v(x_0),\ x \le x_0, \\ \frac{1}{\Delta} u(x_0)v(x),\ x \ge x_0 \end{cases} \qquad (5.108)$$

будемо називати *функцією впливу*, або *функцією Гріна* крайової задачі (5.100), (5.101) при $\lambda = 0$, тобто

$$L(u) = 0\,,\ \left(L(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x)u' \right) - q(x)u \right), R_0(u) = 0\,, R_1(u) = 0\,. \qquad (5.109)$$

Властивості функції Гріна:

- неперервна на $[a, b]$;
- на кожному з інтервалів $[a, x_0]\,, [x_0, b]$ двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівняння $L(u) = 0$;
- $R_0(G) = 0$, $R_1(G) = 0$;
- $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x = x_0 + 0} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x = x_0 - 0} = -\frac{1}{p(x_0)}$;
- симетрична, тобто $G(x, x_0) = G(x_0, x)$.

Властивості а), б), в), д) випливають з побудови функції Гріна у вигляді (5.108).

Доведемо властивість г):

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, x_0) = \frac{1}{\Delta} u(x_0)v'(x), x > x_0\,;\ \frac{\partial G}{\partial x}(x, x_0) = \frac{1}{\Delta} u'(x)v(x_0), x < x_0\,.$$

Тому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x = x_0 + 0} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x = x_0 - 0} = \frac{1}{\Delta}\left.\left(u(x_0)v'(x) - u'(x)v(x_0) \right)\right|_{x = x_0} = -\frac{1}{p(x_0)}\,.$$

Наведемо без доведення деякі теореми, що часто використовуються при розв'язанні прикладних задач.

Теорема 5.5 (про інтегральне подання розв'язку за допомогою функції Гріна). Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма – Ліувілля (5.100), (5.101), тобто крайова задача (5.109) має ненульовий розв'язок, то для того, щоб функція $u(x)$ була двічі неперервно диференційованим на $[a,b]$ розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} L(u) = -r(x), \\ R_0(u) = 0, R_1(u) = 0, \end{cases} \tag{5.110}$$

необхідно й достатньо, щоб

$$u(x) = \int_a^b G(x,s)r(s)ds, \tag{5.111}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі (5.109).

Теорема 5.6. Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма – Ліувілля (5.100), (5.101), то для того, щоб функція $u(x)$ була двічі неперервно диференційованим розв'язком цієї задачі на $[a,b]$, необхідно й достатньо, щоб вона була розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,s)\rho(s)u(s)ds, \tag{5.112}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі (5.109).

Теорема 5.7 (В.А. Стеклова про розвинення функції в ряд). Довільна двічі неперервно диференційована функція $f(x)$ на $[a,b]$, що задовольняє крайові умови $R_0(f) = 0, R_1(f) = 0$, розкладається на цьому відрізку за власними функціями задачі Штурма – Ліувілля (5.100), (5.101) в абсолютно й рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \tag{5.113}$$

де $u_n(x)$ – власні функції задачі Штурма – Ліувілля (5.100), (5.101), які відповідають власним значенням λ_n і задовольняють умову ортогональності з ваговою функцією $\rho(x)$

$$\int_a^b u_n(x)u_k(x)\rho(x)dx = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \tag{5.114}$$

де c_n – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$

$$c_n = \int_a^b f(x)u_n(x)\rho(x)dx. \tag{5.115}$$

5.5.7. Поняття повноти системи функцій. Зв'язок збіжності в середньому й повноти

Нехай $u_1(x), u_2(x),\dots,u_n(x),\dots$ – система власних функцій задачі (5.100), (5.101), або довільна система двічі неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій, ортогональних з ваговою функцією $\rho(x)$.

Означення 5.7. Система функцій називається повною на $[a,b]$, якщо для довільної функції $f(x)$, яка є кусково-неперервною на $[a,b]$ і задовольняє умову $\int\limits_a^b f^2(x)dx<\infty$, має місце рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)dx, \tag{5.116}$$

де $c_k=\int\limits_a^b \rho(x)f(x)u_k(x)dx$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Співвідношення (5.116) називають умовою повноти, або рівністю Парсеваля – Стеклова.

Згідно з ортонормованістю функцій $u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x),\dots$, маємо

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_a^b \rho(x)\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)}u_k(x)\right]^2dx=\\&=\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n} c_kc_k^{(1)}+\sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)2}=\\&=\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)dx-\sum_{k=1}^{n} c_k^2+\sum_{k=1}^{n}(c_k-c_k^{(1)})^2,\end{aligned} \tag{5.117}$$

де $c_k^{(1)}$ – будь-які сталі, c_k – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

Величину

$$I=\sqrt{S} \tag{5.118}$$

називають середнім квадратичним відхиленням функції $f(x)$ від $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(1)}u_k(x)$. З (5.117) випливає, що величина I найменша при $c_k=c_k^{(1)},\ k=1,2,\dots$ і визначається формулою

$$I^2=\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)dx-\sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{5.119}$$

З (5.119) маємо

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \qquad (5.120)$$

– нерівність Бесселя.

Згідно з (5.119) можна стверджувати: для того, щоб система функцій $u_1(x),\ldots,u_n(x),\ldots$ була повною, необхідно й достатньо, щоб для довільної функції $f(x)$, кусково-неперервної на $[a,b]$ з інтегрованим квадратом, мала місце гранична рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \rho(x) \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \right)^2 dx = 0 . \qquad (5.121)$$

Рівність (5.121) означає, що середнє квадратичне відхилення суми $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$ від $f(x)$ прямує до нуля при $n \to \infty$. У цьому випадку говорять, що послідовність функцій $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ у середньому.

Таким чином, для того, щоб система функцій $u_1(x),\ldots,u_n(x),\ldots$, ортонормована з ваговою функцією $\rho(x)$, була повною, необхідно й достатньо, щоб ряд Фур'є для довільної функції $f(x)$, кусково-неперервної на $[a,b]$ з інтегрованим квадратом, збігався до неї в середньому або, що те ж саме, щоб будь-яку з указаних функцій $f(x)$ можна було апроксимувати в розумінні середнього квадратичного відхилення з будь-якою наперед заданою точністю.

Теорема 5.8 (про повноту власних функцій задачі Штурма – Ліувілля).

Ортонормована з ваговою функцією $\rho(x)$ система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля (5.100),(5.101) є повною на $[a,b]$.

РОЗДІЛ 6

Системи звичайних диференціальних рівнянь

6.1. Основні поняття та загальні властивості розв'язків

6.1.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

Означення 6.1. Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – шукані функції від незалежної змінної x, називається системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Означення 6.2. Будемо говорити, що систему звичайних диференціальних рівнянь (6.1) записано в нормальній формі, якщо її можна розв'язати відносно похідних і зобразити у вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \; i = 1, 2, \ldots, n . \tag{6.2}$$

Кількість рівнянь системи диференціальних рівнянь (6.2) називається її порядком.

Означення 6.3. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) лінійні за $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + f_i(x),\ i = 1,..,n, \tag{6.3}$$

то система називається лінійною.

Означення 6.4. Сукупність n функцій

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x), \tag{6.4}$$

визначених і неперервно диференційованих на (a,b), називається розв'язком системи (6.2), якщо вона перетворює всі рівняння системи (6.2) на тотожності на (a,b).

Процес знаходження розв'язків системи називається інтегруванням.

Задача Коші: для системи диференціальних рівнянь (6.2) серед усіх розв'язків знайти такий

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x), \tag{6.5}$$

що задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ldots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{6.6}$$

Тут $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, x_0 – початкове значення незалежної змінної x. Числа $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ називаються початковими даними розв'язку (6.5), умови (6.6) – початковими умовами.

Геометричний зміст задачі Коші: серед усіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (6.2) знайти ту, що проходить через точку (6.6).

Механічний зміст задачі Коші: знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (6.2), що задовольняє початкові умови (6.6).

6.1.2. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші й неперервну залежність розв'язку системи від початкових даних і параметрів

Теорема 6.1 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші). Розглянемо задачу (6.2), (6.6). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) визначені в області

$$R : \left|x - x_0\right| \le a, \left|y_k - y_k^{(0)}\right| \le b,\ k = 1,2,\ldots,n,\ (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R$$

($a, b > 0$ – задані числа) і задовольняють на R умови:

1) функції $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ неперервні за всіма аргументами і, отже, обмежені:

$$|f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| < M, \; k = 1, 2, \ldots, n, \quad (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R;$$

2) функції $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ мають обмежені частинні похідні за $y_1, \ldots, y_n$, тобто

$$\left|\frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_l}\right| \leq K, \quad l, k = 1, 2, \ldots, n, \; (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R$$

($K > 0$ – задане число).

При цьому існує єдиний розв'язок системи (6.2) за умов (6.6), визначений і неперервно диференційовний на відрізку $|x - x_0| \leq h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Зауваження 6.1. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) – поліноми від аргументів $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то існує єдиний розв'язок задачі Коші (6.2), (6.6) для будь-яких початкових умов.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь у нормальній формі, залежну від параметрів

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.7}$$

праві частини якої визначені в областях

$$R: |x - x_0| \leq a, \; \left|y_k - y_k^{(0)}\right| \leq b, \; k = 1, 2, \ldots, n \text{ і}$$

$$R_\lambda : \lambda_1^{(0)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(0)} \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(0)} \leq \lambda_m \leq \lambda_m^{(1)}.$$

Теорема 6.2 (про неперервну залежність розв'язку від параметрів). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (6.7) задовольняють умови:

1) функції $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ неперервні за $x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ в областях R і R_λ, і, отже, обмежені

$$|f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)| \leq M,$$

$$(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R, \; (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in R_\lambda \; (M = \text{const});$$

2) функції $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ задовольняють умову Ліпшиця за $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\left|f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)\right| \leq L \sum_{i=1}^{n} \left|\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i\right|,$$

де $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ і $(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n)$ – будь-які точки з R,

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ – будь-яка точка з R_λ, L – стале додатне число, незалежне від x та λ. Тоді система (6.7) має єдиний розв'язок

$$y_i = y_i(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m),\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.8}$$

що задовольняє початкові умови $y_i(x_0) = y_i^{(0)}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Цей розв'язок визначений і неперервно диференційований за x на відрізку

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \tag{6.9}$$

визначений і неперервний за $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ в області R_λ рівномірно за x з (6.9), тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що одночасно для кожного x з (6.9) виконується нерівність

$$|y_k(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2 + \Delta\lambda_2, \ldots, \lambda_m + \Delta\lambda_m) - y_k(x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

якщо $|\Delta\lambda_1| < \delta, |\Delta\lambda_2| < \delta, \ldots, |\Delta\lambda_m| < \delta$.

Теорема 6.3 (про неперервну залежність розв'язків від початкових умов). Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (6.2) задовольняють у R обидві умови тереми 6.1 (Пікара), то розв'язок

$$y_k = \varphi_k(x, x^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*),\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{6.10}$$

з початковими умовами

$$y_1(x^*) = y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n(x^*) = y_n^* \tag{6.11}$$

буде неперервним за x і початковими умовами $x^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$, коли

$$|x - x_0| \le \frac{h}{2} - \omega, \tag{6.12}$$

а $y_1(x^*) = y_1^*, y_2(x^*) = y_2^*, \ldots, y_n(x^*) = y_n^*$ лежать в області

$$|x^* - x_0| \le \omega,\ |y_i^* - y_i^{(0)}| \le \frac{b}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.13}$$

де $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $0 \le \omega \le \frac{h}{4}$. При цьому розв'язок (6.10) буде неперервним за $x^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$ в області (6.13) рівномірно за x з (6.12), тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що нерівності

$$|\varphi_k(x, x^* + \Delta x^*, y_1^* + \Delta y_1^*, \ldots, y_n^* + \Delta y_n^*) - \varphi_k(x, x^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)| < \varepsilon,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

виконуються одночасно для всіх x з (6.12), коли

$$|\Delta x^*| < \delta,\ |\Delta y_1^*| < \delta,\ |\Delta y_2^*| < \delta, \ldots, |\Delta y_n^*| < \delta.$$

6.1.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки

Нехай D – область, у кожній точці якої виконуються умови теореми існування та єдиності.

Означення 6.5. Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \end{cases} \tag{6.14}$$

що визначені в деякій області змінних $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$ і мають неперервні частинні похідні за x, будемо називати загальним розв'язком системи (6.2) в області D, якщо систему (6.14) можна розв'язати відносно $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ c_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ c_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{6.15}$$

а сукупність функцій (6.14) є розв'язком диференціального рівняння (6.2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (6.15), коли $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$.

Якщо у (6.14) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ y_2 = \varphi_2(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \end{cases} \tag{6.16}$$

то (6.16) називається загальним розв'язком, записаним у формі Коші.

Означення 6.6. Розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.2) називається частинним, якщо він складається з точок єдиності розв'язку задачі Коші. Його можна отримати за конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

Означення 6.7. Розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.2) називається особливим, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

6.1.4. Інтеграл. Перший і загальний інтеграли. Кількість незалежних інтегралів

Розглянемо одну з рівностей (6.15):

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_i. \tag{6.17}$$

Функція $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ на будь-якому частинному розв'язку набуває сталих значень, тобто

$$\psi_i\left(x, \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \varphi_n(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)\right) = c_i.$$

Така функція називається *інтегралом.*

Означення 6.8 (перше визначення інтеграла). Функція $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, що визначена на D і не зводиться до сталої, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, якщо при заміні $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будь-яким частинним розв'язком цієї системи вона набуває сталого значення.

На частинних розв'язках системи (6.2) $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2}dy_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}dy_n \equiv 0.$$

Це записується таким чином:

$$d\psi_{(6.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}f_1(x, y_1, \ldots, y_n)dx + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}f_n(x, y_1, \ldots, y_n)dx \equiv 0. \tag{6.18}$$

Означення 6.9 (друге визначення інтеграла). Функція $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ неперервно диференційована в області D і така, що $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \frac{\partial \psi}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ не дорівнюють одночасно нулю в цій області, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, якщо $d\psi_{(6.2)} \equiv 0$.

Співвідношення (6.18) еквівалентне такому:

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(6.2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}f_1(x, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0.$$

Якщо функція є інтегралом у сенсі другого означення, то вона буде інтегралом і в сенсі першого. Обернене не вірно – $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ може не мати частинних похідних.

Рівність $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = c$ називається *першим інтегралом* системи диференціальних рівнянь (6.2).

Означення 6.10. Сукупність n перших інтегралів вигляду (6.15), яку можна розв'язати відносно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, у результаті чого в області D

отримаємо загальний розв'язок у формі (6.14), будемо називати *загальним інтегралом* системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D .

Перші інтеграли (6.15), що утворюють загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2), незалежні, якщо між функціями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ не існує співвідношення вигляду $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$ при жодному виборі функції $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$.

Теорема 6.4. Якщо інтеграли $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ мають неперервні частинні похідні, то для незалежності їх необхідно й достатньо, щоб якобіан від функцій $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ за $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не перетворювався тотожно на нуль:

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (6.19)$$

Доведення випливає з відповідного розділу математичного аналізу: необхідна й достатня умова незалежності m функцій $u_1, u_2, \ldots, u_m$ від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(m \le n)$ полягає в тому, щоб хоча б один з функціональних визначників, який можна утворити зі стовпців матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

не дорівнював тотожно нулю.

Якщо ми маємо k інтегралів $1 \le k \le n$, то вони будуть незалежними тоді й тільки тоді, коли хоча б один з функціональних визначників k -го порядку, складений зі стовпців матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\psi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\psi_k}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\psi_k}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

не дорівнюватиме тотожно нулю.

Припустимо, що інтеграли $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні за $x,y_1,y_2,...,y_n$.

Теорема 6.5. Нормальна система n рівнянь не може мати більше n незалежних інтегралів.

Доведення. Твердження теореми рівносильно тому, що коли відомі $n+1$ інтегралів системи диференціальних рівнянь (6.2) $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$, ψ, то вони не можуть бути незалежними.

Розглянемо два випадки:

а) Якщо $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$ залежні, то $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$, ψ – теж залежні.

б) $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$ не залежні. Тоді $\frac{D(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)}{D(y_1,y_2,...,y_n)} \neq 0$. Оскільки $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$, ψ – інтеграли системи диференціальних рівнянь (6.2), то

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}f_2+\dots+\frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}f_n=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x}+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_2}f_2+\dots+\frac{\partial\psi_n}{\partial y_n}f_n=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}f_2+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}f_n=0.$$

Ця система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок $1,f_1,f_2,...,f_n$. Тому $\frac{D(\psi,\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)}{D(x,y_1,y_2,...,y_n)}=0$.

З математичного аналізу відомо, що в цьому разі $\psi=\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)$, тобто функції $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n,\psi$ – залежні.

Теорема 6.6. Якщо $\psi_1,\psi_2,...,\psi_k$, $1\le k\le n$ – незалежні інтеграли системи диференціальних рівнянь (6.2) в області D, а $\Phi(z_1,z_2,...,z_k)$ –

довільна функція, визначена в деякій області змінних $z_1, z_2, ..., z_k$, яка є областю значень функцій $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$, коли $(x, y_1, y_2, ..., y_n) \in D$, і яка має в цій області неперервні частинні похідні за $z_1, z_2, ..., z_k$, не рівні нулю одночасно, то функція

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k) \tag{6.20}$$

також буде інтегралом системи диференціальних рівнянь (6.2). Дійсно, $d\psi_{(6.2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} d\psi_{i_{(6.2)}} \equiv 0$ за умовою теореми, що $d\psi_{i_{(6.2)}} \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., k$.

6.1.5. Зниження порядку системи за допомогою перших інтегралів

Знаючи один перший інтеграл системи диференціальних рівнянь (6.2), можна знизити її порядок на одиницю. Дійсно, нехай

$$\psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c_1 \tag{6.21}$$

– перший інтеграл. Визначимо з (6.21)

$$y_1 = \overline{\varphi_1}(x, y_2, y_2, ..., y_n, c_1). \tag{6.22}$$

Підставивши (6.22) в $n-1$ рівняння системи (6.2), матимемо

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, \bar{\varphi}_1 y_{2,}, y_3, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_3}{dx} = f_3(x, \bar{\varphi}_1 y_{2,}, y_3, \ldots, y_n), \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, \bar{\varphi}_1 y_{2,}, y_3, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{6.23}$$

– систему порядку $n-1$.

Якщо відомо k перших інтегралів, то порядок системи диференціальних рівнянь (6.2) можна знизити на k одиниць.

6.1.6. Системи диференціальних рівнянь у симетричній формі

Така система має вигляд

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_1(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, ..., x_n)}. \tag{6.24}$$

Будь-яку систему нормальних рівнянь типу (6.2) можна записати в симетричній формі

$$\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,\dots,y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x,y_1,\dots,y_n)}=\dots=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,\dots,y_n)}=\frac{dx}{1}. \qquad (6.25)$$

Якщо $X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 0$, то (6.24) можна записати в нормальній формі

$$\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{X_i(x_1,x_2,\dots,x_n)}{X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)},\ i=1,2,\dots,(n-1). \qquad (6.26)$$

При розв'язуванні систем у симетричній формі користуються такою властивістю: якщо $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$, то $\frac{a_i}{b_i}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j a_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j b_j}$.

Приклад 6.1. Розв'язати систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}.$$

Розв'язання. Для знаходження загального інтеграла системи:

- візьмемо $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ і просумуємо чисельники та знаменники, отримаємо

$$d(x+y+z)=0,\ \ x+y+z=c_1;$$

- якщо ж виберемо $\alpha_1=x,\alpha_2=y,\alpha_3=z$, то будемо мати $d(x^2+y^2+z^2)=0,\ x^2+y^2+z^2=c_2$.

Загальний інтеграл системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x+y+z=c_1, \\ x^2+y^2+z^2=c_2. \end{cases}$$

6.2. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

6.2.1. Однорідні системи

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\dots+a_{in}y_n,\ i=1,2,\dots,n, \qquad (6.27)$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \ A(x) = \left\{a_{ij}(x)\right\}_{i,j=1}^{n}. \qquad (6.28)$$

Тут $A(x)$ – неперервна за $a < x < b$ матриця розмірністю $n \times n$. Якщо функції $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ – вектор-розв'язки системи (6.28),то і

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y^{(i)}(x), \qquad (6.29)$$

де $c_1, \ldots, c_m$ – довільні сталі, теж є розв'язком системи (6.28).

Дійсно, введемо оператор

$$L = \frac{d}{dx} - A, \qquad (6.30)$$

який має властивості:

- $L(cy) = cL(y)$;
- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

За допомогою оператора L систему диференціальних рівнянь (6.28) запишемо так:

$$L(y) = 0. \qquad (6.31)$$

Якщо $L(y^{(i)}) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$, то, згідно з властивостями а), б), функція (6.29) також є розв'язком системи (6.28).

6.2.2. Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні й незалежні розв'язки

Означення 6.11. Вектор-розв'язки $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) називаються лінійно залежними на (a,b), якщо існують такі сталі $c_1, c_2, \ldots, c_m$, що не дорівнюють нулю одночасно, і $c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0,\ a < x < b$. У протилежному випадку система розв'язків називається лінійно незалежною на (a,b).

Теорема 6.7. Якщо для деякого $x_0 \in (a,b)$ система векторів

$$y^{(1)}(x_0), y^{(2)}(x_0), \ldots, y^{(m)}(x_0) \qquad (6.32)$$

лінійно залежна, то відповідні розв'язки $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) також лінійно залежні.

Доведення. Припустимо, що вектори (6.32) лінійно залежні, тобто

$$c_1 y^{(1)}(x_0) + c_2 y^{(2)}(x_0) + \ldots + c_m y^{(m)}(x_0) = 0\,, \tag{6.33}$$

де не всі $c_1, c_2, \ldots, c_m$ дорівнюють нулю. Розглянемо вектор-функцію з тими самими сталими

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x)\,. \tag{6.34}$$

Вектор $y(x)$ задовольняє систему диференціальних рівнянь (6.28) і, згідно з (6.33), $y(x_0) = 0$. На основі теореми існування та єдиності отримуємо, що

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0\,. \tag{6.35}$$

Співвідношення (6.35) означає, що $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots y^{(m)}(x)$ лінійно залежні.

Означення 6.12. Сукупність n лінійно незалежних розв'язків

$$y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots y^{(n)}(x) \tag{6.36}$$

системи диференціальних рівнянь (6.28) називається *фундаментальною системою* розв'язків, або її *базисом.*

Теорема 6.8. Система звичайних диференціальних рівнянь (6.28) має фундаментальну систему розв'язків. Якщо (6.36) – фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (6.28), то загальний розв'язок записується у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x)\,, \tag{6.37}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі.

Доведення. Доведемо першу частину теореми. Задамо сукупність із n лінійно незалежних векторів $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$. Побудуємо систему розв'язків $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ для системи диференціальних рівнянь (6.28) з початковими умовами $y^{(i)}(x_0) = h^{(i)},\ i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки вектори $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$ лінійно незалежні, то, згідно з теоремою 6.7, вектори $y^{(i)}(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ також лінійно незалежні, тобто складають фундаментальну систему розв'язків.

Доведемо другу частину теореми, тобто покажемо, що за допомогою формули (6.37) можна розв'язати будь-яку задачу Коші:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad y(x_0) = h\,. \tag{6.38}$$

Розв'язок задачі (6.38) можна записати у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i y^{(i)}(x)\,, \tag{6.39}$$

де $\bar{c}_i$ – сталі числа.

Числа $\bar{c}_i$ визначаються із системи

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i y^{(i)}(x_0) = h . \qquad (6.40)$$

Оскільки вектори $y^{(i)}(x), i = 1,2,...,n$ лінійно незалежні, то, за теоремою 6.7, вектори $y^{(i)}(x_0)$, $i = 1,2,...,n$ також лінійно незалежні. Тому визначник системи (6.40) відмінний від нуля. Таким чином, система (6.40) має єдиний розв'язок $\bar{c}_i$, $i = 1,2,...,n$. Теорему доведено.

6.2.3. Інтегральна (фундаментальна) матриця

Введемо матрицю $Y(x)$ розмірністю $n \times n$, яка складається з n лінійно незалежних розв'язків системи (6.28):

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \dots & y_2^{(n)}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}. \qquad (6.41)$$

$Y(x)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) . \qquad (6.42)$$

Матриця $Y(x)$ називається *інтегральною*, або *фундаментальною*.

Якщо $Y(x)$ – фундаментальна матриця розв'язків, то і $Y(x)C$, де C – довільна неособлива матриця розмірністю $n \times n$, також фундаментальна. Дійсно, $\frac{d[Y(x)C]}{dx} = A(x)[Y(x)C]$.

6.2.4. Визначник Вронського. Формула Якобі

Визначник $\det Y(x) = W(x)$ називається визначником Вронського, або вронськіаном системи (6.28).

На основі теореми 6.7 можна зазначити:

- якщо система векторів (6.36) лінійно залежна, то $W(x) = 0$;
- якщо система (6.36) лінійно незалежна, то $W(x) \neq 0$, $a < x < b$ і матриця $Y(x)$ буде інтегральною.

Теорема 6.9. Припустимо, що матриця $A(x)$ системи диференціальних рівнянь (6.28) має неперервні елементи на $a < x < b$. Якщо матриця $Y(x)$ задовольняє (6.28), то

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} SpA(\tau)d\tau \right), \qquad (6.43)$$

де $x_0, x \in (a,b)$, $SpA(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$. Рівність (6.43) називають формулою Якобі.

Доведення. Запишемо систему матричних диференціальних рівнянь (6.42) у вигляді $y_i^{(j)'} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_k^{(j)}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$. Тоді

$$\frac{d}{dx}\left(\det Y(x)\right) = \frac{dW(x)}{dx} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n, \qquad (6.44)$$

де $I_1, I_2, \ldots, I_n$ – деякі визначники. Обчислимо визначник I_1:

$$I_1 = \det\begin{pmatrix} y_1^{(1)'} & y_1^{(2)'} & \ldots & y_1^{(n)'} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(1)} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(2)} & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_k^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Від першого рядка віднімемо суму другого, помноженого на a_{12}, і третього, помноженого на a_{13}, … . Отримаємо

$$I_1 = \begin{vmatrix} a_{11} y_1^{(1)} & a_{11} y_1^{(2)} & \ldots & a_{11} y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = a_{11} W(x).$$

Аналогічно показується, що

$$I_i = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{i-1}^{(1)} & y_{i-1}^{(2)} & \ldots & y_{i-1}^{(n)} \\ y_i^{(1)'} & y_i^{(2)'} & \ldots & y_i^{(n)'} \\ y_{i+1}^{(1)} & y_{i+1}^{(2)} & \ldots & y_{i+1}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = a_{ii}(x) W(x), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Таким чином, $\frac{dW}{dx} = SpA(x)W(x)$, звідки отримуємо *формулу Якобі* (6.43). Теорему доведено.

З формули (6.43) випливає:коли $W(x_0) = 0$, тобто система функцій у точці $x = x_0$ лінійно залежна, то $W(x) \equiv 0,\ a < x < b$; якщо ж $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0,\ \ a < x < b$.

Теорема 6.10. Припустимо, що матриця $Y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (6.42). Для того, щоб вона була інтегральною, необхідно й достатньо, щоб

$$\det Y(x) = W(x) \neq 0, \quad a < x < b. \tag{6.45}$$

Доведення. Достатність. Припустимо, що $W(x) \neq 0$. Це означає, що вектори $y^{(i)}(x),\ \ i = 1, 2, \ldots, n$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь (6.28) і лінійно незалежними, тобто $Y(x)$ – інтегральна матриця.

Необхідність. Нехай $Y(x)$ – фундаментальна матриця. Згідно з теоремою (6.8) задача Коші $\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y(x_0) = h \neq 0$ має єдиний розв'язок $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x)$, де c_i визначається із системи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x_0) = h\ . \tag{6.46}$$

Оскільки система (6.46) має єдиний розв'язок, то $\det Y(x_0) \neq 0$. Тоді, згідно з (6.43), $W(x) \neq 0,\ a < x < b$. Теорему доведено.

За допомогою матриці $Y(x)$ загальний розв'язок лінійної системи можна записати у вигляді

$$y = Y(x)c\ , \tag{6.47}$$

де $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$.

6.2.5. Спряжені системи

Розглянемо дві системи:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y\ , \tag{6.48}$$

$$\frac{dz}{dx} = -A^T(x)z\ , \tag{6.49}$$

які називаються спряженими (тут T – знак транспонування).

Для цих систем справедлива властивість

$$y^T(x)z(x) = c_0 = \text{const}. \qquad (6.50)$$

Дійсно, $\frac{d}{dx}(y^T z) = \frac{dy^T}{dx} z + y^T \frac{dz}{dx} = y^T A^T z - y^T A^T z = 0$.

Якщо $Y(x)$ і $Z(x)$ – інтегральні матриці для систем (6.49), (6.50) відповідно, тобто

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \qquad (6.51)$$

$$\frac{dZ}{dx} = -A^T(x)Z, \qquad (6.52)$$

то

$$Z^T(x)Y(x) = C, \qquad (6.53)$$

де C – стала матриця.

$$\frac{d}{dx} Z^T Y = \frac{dZ^T}{dx} Y + Z^T \frac{dY}{dx} = -Z^T AY + Z^T AY = 0.$$

Якщо $C = E$, то

$$Z^T(x) = Y^{-1}(x). \qquad (6.54)$$

6.2.6. Неоднорідні системи

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \qquad (6.55)$$

що називається лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Теорема 6.11. Якщо $\overline{y}(x)$ – розв'язок неоднорідної системи, тобто $L(\overline{y}) = f(x)$, а $y_1(x)$ – розв'язок однорідної системи $L(y_1) = 0$, то сума $y_1(x) + \overline{y}(x)$ є розв'язком неоднорідної системи.

Доведення. $L(\overline{y} + y_1) = L(\overline{y}) + L(y_1) \equiv f(x)$.

Теорема 6.12. Загальний розв'язок неоднорідної системи (6.55) можна записати у вигляді суми загального розв'язку однорідної і частинного–неоднорідної системи.

Доведення. Нехай $Y(x)$ – інтегральна матриця однорідної системи, $\overline{y}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідної. Тоді

$$y = Y(x)c + \overline{y}(x), \qquad (6.56)$$

згідно з теоремою 6.11, – розв'язок системи неоднорідних диференціальних рівнянь (6.55).

Для доведення теореми достатньо показати, що система алгебраїчних рівнянь

$$Y(x_0)c = y(x_0) - \overline{y}(x_0), \tag{6.57}$$

де $y(x_0)$ – довільний початковий вектор, має єдиний розв'язок. Оскільки $Y(x)$ – інтегральна матриця, то в такому випадку вона має обернену на (a,b). Тому $c = Y^{-1}(x_0)\big(y(x_0) - \overline{y}(x_0)\big)$. Теорему доведено.

6.2.7. Метод варіації довільної сталої

Загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь (6.28) запишемо у формі

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x), \tag{6.58}$$

де c_i – довільні сталі.

Розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь (6.55) шукаємо у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)}(x), \tag{6.59}$$

де $c_i(x),\ i = 1,2,\dots,n$ – невідомі функції.

Підставляючи (6.59) у (6.55), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)\prime}(x) = A(x)\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y^{(i)}(x) + f(x).$$

Оскільки $y^{(i)\prime} = A(x) y^{(i)},\ i = 1,2,\dots,n$, то остаточно функції $c_i(x)$ шукаємо із системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y^{(i)}(x) = f(x). \tag{6.60}$$

Визначник системи (6.60) $W(x) \neq 0$, якщо $y^{(i)}(x),\ i = 1,2,\dots,n$ – фундаментальна система рівнянь. З (6.60) визначаємо $c_i'(x) = \varphi_i(x),\ i = 1,2,\dots,n$. Звідси $c_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + c_i,\ i = 1,2,\dots,n$. Тому

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + c_i\right) y^{(i)}(x) \tag{6.61}$$

– загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (6.55).

6.2.8. Формула Коші

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x),\ y(x_0) = y_0. \qquad (6.62)$$

Припустимо, що нам відома матриця $Y(x, x_0)$, нормована за моментом x_0:

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y,\ Y(x_0, x_0) = E. \qquad (6.63)$$

Шукаємо розв'язок задачі Коші (6.62) у вигляді

$$y(x) = Y(x, x_0)c(x). \qquad (6.64)$$

Підставляючи (6.64) у (6.62), отримаємо

$$Y(x, x_0)c'(x) + Y'(x, x_0)c(x) = A(x)Y(x, x_0)c(x) + f(x).$$

Звідси $c'(x) = Y^{-1}(x, x_0)f(x)$, тобто $c(x) = c(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(\tau, x_0)f(\tau)d\tau$. Однак $c(x_0) = y(x_0) = y^{(0)}$, тому $y(x) = Y(x, x_0)y^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} Y(x, x_0)Y^{-1}(\tau, x_0)f(\tau)d\tau$.

Ураховуючи, що $Y(x, \tau) = Y(x, x_0)Y^{-1}(\tau, x_0)$, остаточно запишемо

$$y(x) = Y(x, x_0)y^{(0)} + \int\limits_{x_0}^{x} Y(x, \tau)f(\tau)d\tau. \qquad (6.65)$$

Формула (6.65) називається формулою Коші.

Приклад 6.2. Розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ay. \end{cases}$

Розв'язання. Зведемо дану систему до диференціального рівняння другого порядку $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2a\dfrac{dx}{dt} - (1 + a^2)x$. Отримаємо диференціальне рівняння $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2a\dfrac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0$. Запишемо й розв'яжемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2a\lambda + (1 + a^2) = 0$. Знайдемо $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тоді

$$x = e^{at}(c_1 \cos t + c_2 \sin t),\ y = \frac{dx}{dt} - ax = e^{at}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

– загальний розв'язок.

Приклад 6.3. Розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}, \end{cases}$ $t > 0$.

Розв'язання. Складемо й віднімемо почленно два рівняння, отримаємо $\dfrac{d(x+y)}{dt} = -\dfrac{1}{t}(x+y)$, $\dfrac{d(x-y)}{dt} = \dfrac{1}{t}(x-y)$. Звідси $x + y = \dfrac{c_1}{t}$, $x - y = c_2 t$, тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} + c_2 t\right), \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} - c_2 t\right) \end{cases}$$

– загальний розв'язок нашої системи.

Приклад 6.4. Перевірити, чи є першим інтегралом системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - t}{x} \end{cases} \tag{6.66}$$

функції а) $z = t^2 + 2xy$; б) $z = x - ty^2$.

Розв'язання. Обчислимо повні похідні по t від заданих функцій на розв'язках системи (6.66).

а) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)} = 2t + 2\dfrac{dx}{dt}y + 2x\dfrac{dy}{dt} = 2t - 2y^2 + 2x\dfrac{y^2 - t}{x} = 2t - 2y^2 + 2y^2 - 2t \equiv 0$

є інтегралом;

б) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)} = \dfrac{dx}{dt} - y^2 - 2ty\dfrac{dy}{dt} = -y - y^2 - 2ty\dfrac{y^2 - t}{x} \neq 0$ не є інтегралом.

6.3. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

6.3.1. Випадки інтегрованості лінійних систем у квадратурах

Розглянемо матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad x_0 \le x < \infty, \tag{6.67}$$

де $A(x)=\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ – задана матриця, $Y(x)$ – фундаментальна матриця.

Розглянемо випадок (Лапо – Данилевського), коли фундаментальна матриця диференціального рівняння (6.67) виражається через $A(x)$.

Припустимо, що $A(x)$ комутує зі своїм інтегралом, тобто

$$A(x)\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau=\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau A(x), \tag{6.68}$$

$$\|A(x)\|\le a_0<\infty \tag{6.69}$$

на будь-якому кінцевому відрізку.

За цих умов нормована за моментом x_0 фундаментальна матриця має вигляд

$$Y(x)=e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau}. \tag{6.70}$$

Дійсно, за визначенням маємо

$$e^{M}=E+\frac{M}{1!}+\frac{M^2}{2!}+\cdots+\frac{M^m}{m!}+\cdots, \tag{6.71}$$

де

$$M=M(x)=\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau. \tag{6.72}$$

З (6.71) випливає, що $Y(x_0)=E$.

Якщо виконується умова (6.68), то матриця $M(x)$ комутує зі своєю похідною $M'(x)=A(x)$. Тому $\dfrac{dM^2}{dx}=\dfrac{dM}{dx}M+M\dfrac{dM}{dx}=2\dfrac{dM}{dx}M$.

За індукцією можна вивести, що

$$\frac{dM^k}{dx}=k\frac{dM}{dx}M^{k-1},\ k=3,4,\ldots \tag{6.73}$$

З урахуванням (6.73) продиференціюємо (6.71)

$$\frac{de^M}{dx}=M'+M'M+\cdots+\frac{M'M^{m-1}}{(m-1)!}+\cdots=M'\left(E+M+\frac{M^2}{2!}+\cdots\right)=M'e^M.$$

Таким чином,

$$\frac{d}{dx}e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau}=A(x)e^{\int_{x_0}^{x} A(\tau)d\tau}. \tag{6.74}$$

Матричний ряд (6.71), що складається з n^2 скалярних рядів, збіжний на будь-якому кінцевому відрізку $x_0 \le x \le x_1 < \infty$. Оскільки $\left|M^k\right| \le |M|^k$, то, згідно з (6.69), кожен із n^2 скалярних рядів мажорується збіжним рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_0^m \frac{(x-x_0)^m}{m!}$. Звідси випливає рівномірна збіжність матричного ряду на будь-якому кінцевому відрізку, і сума (6.71) є неперервною функцією на цьому відрізку.

6.3.2. Матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем

Припустимо, що в системі (6.67) матриця A – стала. Тоді виконуються умови комутативності (6.68). Тому, згідно (6.70), маємо

$$Y(x) = e^{A(x-x_0)}. \tag{6.75}$$

Розглянемо випадок $x_0 = 0$, тоді

$$Y(x) = e^{Ax}. \tag{6.76}$$

Властивості матричної експоненти:

- якщо $AB=BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$;
- якщо $A = T^{-1}JT$, то $e^A = T^{-1}e^J T$;
- матриця $Y(x) = e^{Ax}$ є розв'язком матричного диференціального рівняння (6.67) з початковими умовами $Y(0) = E$.

Тому розв'язок задачі Коші запишеться так: $y(x) = Y(x)y(0)$.

Таким чином, для знаходження загального розв'язку системи необхідно знайти матрицю e^{Ax}. Для цього подамо матрицю A у вигляді $A = T^{-1}JT$, де J – жорданова форма матриці A. Тоді

$$e^{Ax} = T^{-1}e^{Jx}T. \tag{6.77}$$

При обчисленні (6.77) ураховуємо: якщо J_{ρ_k} – k-та клітина Жордана розмірністю ρ_k

$$J_{\rho_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \tag{6.78}$$

то зобразимо її у вигляді

$$J_1 = \lambda_k E_{\rho_k} + I_{\rho_k}, \tag{6.79}$$

де E_{ρ_k} – одинична, а $I_{\rho_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратна матриці розмірністю ρ_k.

На основі цього знаходимо

$$e^{J_{\rho_k} x} = e^{\lambda_k x} e^{I_{\rho_k} x}. \tag{6.80}$$

Матрицю $e^{I_{\rho_k} x}$ можна знайти за допомогою ряду (6.71), оскільки $I_{\rho_k} = 0$. Це означає, що в ряді (6.71) відмінні від нуля тільки перші ρ_k членів.

Розглянемо приклади, у яких матриця Жордана має різну структуру, тобто корені характеристичного рівняння мають різний вигляд.

Приклад 6.5. Обчислити e^{Ax}, якщо А = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Розв'яжемо характеристичне рівняння $|\lambda E - A| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Знайдемо невироджену матрицю $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, щоб $A = T^{-1} J T$, де $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases},$$

тобто $$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо:

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{-x} & -e^x + e^{-x} \\ 2e^x - 2e^{-x} & -e^x + 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.6. Знайти $Y(x)=e^{Ax}$, якщо A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо корені характеристичного рівняння $\lambda_1=\lambda_2=2$. Оскільки $rank(A-\lambda E)=1$, то $J=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Визначимо матрицю $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $T=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тут $e^{Ax}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Але $e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x}=e^{2x}e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x}=\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$.

Тому $e^{Ax}=\begin{pmatrix} (x+1)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1-x)e^{2x} \end{pmatrix}$.

Приклад 6.7. Знайти e^{Ax}, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$, то $J=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ – жорданова форма. Аналогічно визначаємо $T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тому $e^{Ax}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Зобразимо $J=1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, тоді $e^{Jx}=e^{1\cdot Ex}e^{2Ix}=1\cdot e^{x}Ee^{2Ix}=e^{x}e^{2Ix}$, де $I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Легко обчислити (згідно з (6.71)), що

$$e^{Ix}=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix},\ e^{2Ix}=\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}.$$

Тому

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{x}\cos 2x & e^{x}\sin 2x \\ -e^{x}\sin 2x & e^{x}\cos 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{x}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right) & 5e^{x}\sin 2x \\ -e^{x}\sin 2x & e^{x}\left(\cos 2x-2\sin 2x\right) \end{pmatrix}.$$

6.3.3. Структура фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера

Розглянемо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у векторно-матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = Ay\,. \tag{6.81}$$

Лінійно незалежні розв'язки, за Ейлером, шукаємо у вигляді

$$y = he^{\lambda x}\,, \tag{6.82}$$

де h – власний вектор, λ – власне значення, тобто

$$\lambda he^{\lambda x} = Ahe^{\lambda x}\,,\ Ah = \lambda h\,. \tag{6.83}$$

Число λ має задовольняти характеристичне рівняння

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,. \tag{6.84}$$

Розглянемо різні випадки:

- Корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні й різні. Тоді

$$y^{(1)} = h^{(1)}e^{\lambda_1 x}, y^{(2)} = h^{(2)}e^{\lambda_2 x}, \ldots, y^{(n)} = h^{(n)}e^{\lambda_n x} \tag{6.85}$$

  – система n лінійно незалежних розв'язків, оскільки в даному випадку кожному $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ відповідають лінійно незалежні власні вектори $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$.

- Характеристичне рівняння має пару комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Кореню $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ відповідає власний вектор $h^{(1)} = a + bi$. Це означає, що система (6.81) має комплексний розв'язок

$$y(x) = h^{(1)}e^{\lambda_1 x} = (a + bi)e^{(\alpha+\beta i)x} = (a + bi)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x).$$

Звідси

$$y^{(1)}(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x)\,,$$
$$y^{(2)}(x) = e^{\alpha x}(b\cos\beta x + a\sin\beta x) \tag{6.86}$$

– два лінійно незалежні розв'язки, що відповідають кореню $\alpha + i\beta$. При цьому розгляд кореня $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ не дає нових лінійно незалежних розв'язків.

Розглянемо випадок кратних коренів. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ($s < n$) – різні розв'язки характеристичного рівняння (6.84) кратністю $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ відповідно, тобто

$$(\lambda-\lambda_1)^{\rho_1}(\lambda-\lambda_2)^{\rho_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{\rho_s} = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Матрицю A можна зобразити клітками Жордана, тобто знайдеться неособлива матриця S така, що $S^{-1}AS = diag\left(I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \ldots, I_{\rho_s}(\lambda_s)\right)$,

де $I_{\rho_j}\left(\lambda_j\right) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{pmatrix}$ – квадратна матриця розмірністю ρ_j, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Заміною $y = Sz$ прийдемо до системи диференціальних рівнянь $\dfrac{dy}{dx} = S\dfrac{dz}{dx} = ASz$, $\dfrac{dz}{dx} = S^{-1}ASz$. Якщо $z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(s)} \end{pmatrix}$, $z^{(j)}$ – вектори розмірністю ρ_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, то маємо

$$\frac{dz^{(1)}}{dx} = I_{\rho_1}(\lambda_1)z^{(1)}, \frac{dz^{(2)}}{dx} = I_{\rho_2}(\lambda_2)z^{(2)}, \ldots, \frac{dz^{(s)}}{dx} = I_{\rho_s}(\lambda_s)z^{(s)}. \quad (6.87)$$

Розглянемо одну з підсистем системи (6.87) з матрицею

$$I_{\rho_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + I_{\rho_j}(0) =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо фундаментальна матриця для системи (6.87) має вигляд

$$Z=\begin{pmatrix} e^{I_{\rho 1}(\lambda_1)x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x} \end{pmatrix},$$

то, виконавши заміну $y = Sz$, отримаємо матрицю $Y(x) = SZ$, яка буде фундаментальною для даної системи.

Визначимо

$$e^{I_{\rho_j}(\lambda_j)x} = e^{\left[\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} + I_{\rho_j}(0)\right]x} = e^{\lambda_j x} e^{I_{\rho_j}(0)x}.$$

Однак $e^{I_{\rho_j}(0)x} = E_{\rho_j} + I_{\rho_j}(0)x + \frac{1}{2!}I_{\rho_j}^2(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{(\rho_j - 1)!}I_{\rho_j}^{\rho_j - 1}(0)x^{\rho_j - 1}$,

де E_{ρ_j} – одинична матриця розмірністю ρ_j, причому

$$I_{\rho_j}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ I_{\rho_j}^{\rho_j - 1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$e^{I_{\rho_j}(\lambda_j)x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j x} & xe^{\lambda_j x} & \vdots & \frac{x^{\rho_j - 1}}{(\rho_j - 1)!}e^{\lambda_j x} \\ 0 & e^{\lambda_j x} & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}.$$

Домножуючи S на отриману матрицю, отримаємо інтегральну матрицю для даної системи.

Ураховуючи вигляд інтегральної матриці для побудови лінійно незалежних розв'язків j-ї підсистеми

$$\frac{dz^{(j)}}{dx} = I_{\rho_j}\left(\lambda_j\right)z^{(j)}, \tag{6.88}$$

можна зробити так. Шукаємо $z^{(j,1)} = h^{(j,1)}e^{\lambda_j x}$,

$$\left(\lambda_j E_{\rho_j} - I_{\rho_j}\left(\lambda_j\right)\right)h^{(j,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} h^{(j,1)} = 0,\ h^{(j,1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $z^{(j,1)} = e^{\lambda_j x}\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $z^{(j,2)} = \left(h^{(j,1)}x + h^{(j,2)}\right)e^{\lambda_j x}$. Звідси

$$\left(I_{\rho_j}\left(\lambda_j\right) - \lambda_j E_{\rho_j}\right)h^{(j,2)} = h^{(j,1)}. \tag{6.89}$$

У результаті отримаємо

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} h^{(j,2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ h^{(j,2)} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$z^{(j,2)} = \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] e^{\lambda_j x}.$$

Міркуючи аналогічно, можна отримати $h^{(j,\rho_j)} = \begin{pmatrix} c_{\rho_j} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix}$, тому

$$z^{(j,\rho_j)} = \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{\rho_j - 1} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x^{\rho_j - 2} + \dots + \begin{pmatrix} c_{\rho_j} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_j x}. \qquad (6.90)$$

Висновки. Якщо характеристичному числу λ_j відповідає тільки один елементарний дільник, то ми отримуємо одну групу розв'язків вигляду (6.90), яка містить ρ_j розв'язків (цей випадок відповідає тому, що ранг характеристичної матриці дорівнює $(n-1)$). Якщо ж $\lambda = \lambda_j$ відповідає кілька елементарних дільників $(\lambda - \lambda_j)^{l_1} (\lambda - \lambda_j)^{l_2} \dots (\lambda - \lambda_j)^{l_m}$ $(l_1 + l_2 + \dots + l_m = \rho_j)$, то йому відповідає m груп розв'язків типу (6.90). Причому кожна з груп має відповідно $l_1, l_2, \dots, l_m$ розв'язків. Якщо всі елементарні дільники прості, то ми маємо випадок простого кореня.

РОЗДІЛ 7

Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь на основі методу степеневих рядів і малого параметра

7.1. Розвинення розв'язку в степеневий ряд

Такий підхід особливо зручний при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь. Проілюструємо його використання на прикладі рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 . \tag{7.1}$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$ подаються у вигляді рядів, розвинених за цілими додатними степенями x так, що рівняння (7.1) можна записати у вигляді

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)y' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)y = 0 . \tag{7.2}$$

Його розв'язок будемо шукати у вигляді степеневого ряду

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k . \tag{7.3}$$

Підставивши вираз (7.3) для y та відповідних похідних у (7.2), отримаємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0 . \tag{7.4}$$

Перемноживши степеневі ряди, зібравши подібні члени та прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях x у лівій частині виразу (7.4), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2\cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (7.5)$$

Бачимо, що кожне з наступних рівнянь містить на один шуканий коефіцієнт більше, ніж попереднє. Зауважимо, що коефіцієнти c_0 та c_1 залишаються довільними й відіграють роль довільних сталих. Перше з рівнянь дає змогу відшукати c_2 залежно від c_0 та c_1, друге – c_3 залежно від c_2, c_0 та c_1, третє – c_4 і т. д.

На практиці алгоритм відшукання відповідних коефіцієнтів має таку послідовність дій: визначаємо за описаною схемою розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$, причому для $y_1(x)$ вибираємо $c_0 = 1$ і $c_1 = 0$, а для $y_2(x)$ – $c_0 = 0$ і $c_1 = 1$, що рівносильно початковим умовам $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Довільний розв'язок рівняння (7.1) буде лінійною комбінацією розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$.

Має місце така теорема.

Теорема 7.1. Якщо ряди $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ та $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ збіжні при $|x| < R$, то побудований вищевказаним способом степеневий ряд (7.3) також збіжний за цих значень x і є розв'язком рівняння (7.1).

У частинному випадку, якщо $p(x)$ та $q(x)$ – багаточлени від x, то ряд (7.3) буде збіжним для будь-яких значень x.

Приклад 7.1. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' - xy' - 2y = 0 \qquad (7.6)$$

у вигляді степеневого ряду.

Розв'язання. Шукаємо $y_1(x)$ у вигляді ряду $y_1(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, тоді $y_1'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$, $y_1''(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$. Підставимо $y_1(x)$, $y_1'(x)$ та $y_1''(x)$ у рівняння (7.6). Отримаємо співвідношення

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0\,. \qquad (7.7)$$

Звівши в (7.7) подібні члени і прирівнявши до нуля коефіцієнти при всіх однакових степенях x, отримаємо співвідношення, з яких знайдемо коефіцієнти $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$.

Покладемо для визначеності $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$. Тоді неважко визначити, що $c_0=1,\ c_1=0$. Згідно з визначеним алгоритмом знайдемо

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2\cdot c_2-2c_0=0, \\ x^1 & 3\cdot 2c_3-1c_1-2c_1=0, \\ x^2 & 4\cdot 3c_4-2c_2-2c_2=0, \\ x^3 & 5\cdot 4c_5-3c_3-2c_3=0, \\ x^4 & 6\cdot 5c_6-4c_4-2c_4=0, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ . \end{array}$$

Звідси $c_2=1$, $c_3=0$, $c_4=\dfrac{1}{3}$, $c_5=0$, $c_6=\dfrac{c_4}{5}=\dfrac{1}{3\cdot 5}$ ... Отже, можемо записати значення $y_1(x)$ у вигляді степеневого ряду

$$y_1(x)=1+x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{15}x^6+\dots \tag{7.8}$$

За аналогією, узявши

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k \tag{7.9}$$

і початкові умови $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$, отримаємо $A_0=0,\ A_1=1$. Підставивши ряд (7.9) у вихідне рівняння (7.6), знайдемо

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)A_k x^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}k\ A_k x^k-2\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k=0,$$

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2\cdot A_2=0,\ A_2=0, \\ x^1 & 3\cdot 2A_3-3A_1=0, \\ x^2 & 4\cdot 3A_4-4A_2=0, \\ x^3 & 5\cdot 4A_5-5A_3=0, \\ x^4 & 6\cdot 5A_6-6A_4=0, \\ x^5 & 7\cdot 6A_7-7A_5=0, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Звідси легко обчислити $A_3 = \frac{1}{2}, A_4 = 0, A_5 = \frac{1}{2\cdot 4}, A_6 = 0, A_7 = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \ldots$

Очевидно, що $A_{2k} = 0,\ A_{2k+1} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, тоді

$$y_2(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2\cdot 4}x^5 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^7 + \ldots = x\sum \frac{(x^2/2)^k}{k!} = xe^{x^2/2}. \quad (7.10)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.6) можна записати у вигляді $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ задаються формулами (7.8) і (7.10) відповідно, а A та B – довільні сталі, причому $y(0) = A$, $y'(0) = B$.

7.2. Розвинення розв'язку в узагальнений степеневий ряд

Означення 7.1. Функція $\varphi(x)$ називається *голоморфною* в деякому околі $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$, якщо в цьому околі її можна зобразити у вигляді степеневого ряду $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$, який є збіжним в області $|x - x_0| < \rho$.

Точка x_0 називається *звичайною точкою* диференціального рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, якщо коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$ у ній голоморфні; у протилежному випадку точка x_0 називається *особливою точкою* диференціального рівняння.

Ряд вигляду

$$x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0), \quad (7.11)$$

де ρ – задане число, а степеневий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ є збіжним у деякій області $|x| < R$, називається *узагальненим степеневим рядом.*

У випадку, коли ρ є цілим числом, узагальнений степеневий ряд (7.11) перетворюється на звичайний степеневий.

Теорема 7.2. Якщо точка $x = 0$ є особливою точкою рівняння (7.1), то коефіцієнти $p(x)$ та $q(x)$ рівняння можна зобразити у вигляді

$p(x) = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k}{x}$, $q(x) = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k}{x^2}$, де ряди в чисельниках збіжні в деякій області $|x| < R$, а коефіцієнти a_0, b_0 та b_1 не дорівнюють нулю одночасно. Тоді рівняння (7.1) має хоча б один розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{7.12}$$

який збігається, принаймні, у тій самій області $|x| < R$.

Для визначення показника степеня ρ та коефіцієнтів c_k потрібно підставити ряд (7.12) у рівняння (7.1), скоротити на x^{ρ} та прирівняти коефіцієнти при всіх степенях x (тобто скористатися методом невизначених коефіцієнтів). При цьому число ρ знаходиться з рівняння, яке називається *визначальним*:

$$\rho(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0 = 0, \tag{7.13}$$

де $$a_0 = \lim_{x \to 0} x\, p(x),\; b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x).$$

Нехай ρ_1 та ρ_2 – корені визначального рівняння (7.13). Розглянемо три випадки.

- Якщо різниця $\rho_1 - \rho_2$ не дорівнює цілому числу або нулю, то можна побудувати два розв'язки вигляду (7.12):

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \;\; (c_0 \neq 0),\;\; y_2 = x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \;\; (A_0 \neq 0).$$

- Якщо різниця $\rho_1 - \rho_2$ є цілим додатним числом, то можна побудувати лише один ряд, який буде розв'язком рівняння (7.1):

$$y = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{7.14}$$

- Якщо рівняння (7.13) має кратний корінь $\rho_1 = \rho_2$, то також можна побудувати лише один ряд, а саме розв'язок вигляду (7.14).

Зрозуміло, що в першому випадку побудовані розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ будуть лінійно незалежними (тобто їх відношення не буде сталою величиною).

У другому та третьому випадках можна побудувати лише по одному розв'язку. Тут слід зазначити, що коли різниця $\rho_1-\rho_2$ є цілим додатним числом або нулем, то поряд з розв'язком (7.14) рівняння (7.1) буде мати розв'язок

$$y_2 = Ay_1(x)\ln x + x^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (A_0 \neq 0)\,. \tag{7.15}$$

У цьому випадку $y_2(x)$ містить додаткову складову $Ay_1(x)\ln x$, де $y_1(x)$ задається співвідношенням (7.14).

Зауваження 7.1. Стала A у виразі (7.15) може виявитися рівною нулю, тоді для $y_2(x)$ отримаємо співвідношення у вигляді узагальненого степеневого ряду.

Приклад 7.2. Розв'язати рівняння

$$2x^2y'' + (3x-2x^2)y' - (x+1)y = 0\,. \tag{7.16}$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння (7.16) таким чином:

$$y'' + \frac{(3x-2x^2)}{2x^2}y' - \frac{(x+1)}{2x^2}y = 0\,.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y = x^{\rho}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0)$, оскільки точка $x=0$ є особливою точкою рівняння. Для знаходження ρ випишемо визначальне рівняння $\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$, де

$a_0 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-2x}{2} = \dfrac{3}{2}, b_0 = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x+1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, тобто $\rho(\rho-1)+\dfrac{3}{2}\rho-\dfrac{1}{2}=0$,

або $\rho^2+\dfrac{1}{2}\rho-\dfrac{1}{2}=0$, звідки $\rho_1=\dfrac{1}{2}$, $\rho_2=-1$. Згідно з наведеним алгоритмом вибираємо $y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (x>0)$, $y_2(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^k$. Далі, щоб визначити $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, необхідно підставити $y_1(x)$ та її похідні в (7.16):

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\frac{1}{2}}\,,\quad y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)c_k x^{k-\frac{1}{2}}\,,$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)c_k x^{k-\frac{3}{2}}\,.$$

У результаті підстановки в (7.16) отримаємо

$$2x^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(k^2-\frac{1}{4}\right)c_k x^{k-\frac{3}{2}}+\left(3-2x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)c_k x^{k-\frac{1}{2}}-$$

$$-(x+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{k+\frac{1}{2}}=0. \qquad (7.17)$$

Після відповідних перетворень вираз (7.17) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(2k+3)c_k x^{k+\frac{1}{2}}-\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)c_k x^{k+\frac{3}{2}}=0. \qquad (7.18)$$

Оскільки шукаємо розв'язок для $x>0$, то співвідношення (7.18) можна скоротити на $x^{\frac{1}{2}}$, що дозволяє спростити вираз:

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(2k+3)c_k x^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)c_k x^{k+1}=0. \qquad (7.19)$$

З останнього рівняння знаходимо співвідношення для визначення коефіцієнтів $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 1\cdot 5c_1-2c_0=0,\\ x^2 & 2\cdot 7c_2-2\cdot 2c_1=0,\\ x^3 & 3\cdot 9c_3-2\cdot 3c_2=0,\\ \dots & \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ x^n & n(2n+3)c_n-2nc_{n-1}=0,\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \end{array} \qquad (7.20)$$

Поклавши у першому рівнянні співвідношення (7.20) $c_0=1$, отримаємо $c_1=\frac{2}{5}$. З другого рівняння знаходимо $c_2=\frac{2^2}{5\cdot 7}$. З третього – $c_3=\frac{2^3}{5\cdot 7\cdot 9}$ і т. д. Легко помітити, що $c_n=\frac{2^n}{5\cdot 7\cdot 9\dots(2n+3)}$ $(n=1,2,3,\dots)$, отже $y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x)^k}{5\cdot 7\cdot 9\dots(2k+3)}\right]$. Аналогічно знаходяться коефіцієнти A_k. Виявляється, що при $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{1}{2!}$, ..., $A_k = \frac{1}{k!}$, отже

$y_2(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ або $y_2(x) = \frac{e^x}{x}$.

Загальний розв'язок рівняння (7.16) можна записати у вигляді $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, де A та B – довільні сталі.

7.3. Поняття про рівняння Бесселя

Це рівняння вигляду

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \qquad (7.21)$$

Його розв'язки називаються *функціями Бесселя порядку* ν. У рівнянні (7.21) параметр ν – стала величина, яку ми будемо далі вважати дійсною. Функції Бесселя в багатьох задачах фізики, механіки відіграють таку саму роль, як і традиційні тригонометричні функції – синуси та косинуси.

Використавши підстановку $y = z/\sqrt{x}$, рівняння (7.21) можна привести до вигляду $z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right)z = 0$. Таке рівняння називається *зведеним рівнянням Бесселя*. У частинному випадку, при $\nu = \pm 1/2$, функції $\sin x/\sqrt{x}$ та $\cos x/\sqrt{x}$ є розв'язками рівняння Бесселя (7.21).

Рівняння Бесселя має особливість при $x = 0$, і ця точка є регулярною особливою точкою.

Розв'язок рівняння Бесселя будемо шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y(x) = x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \quad (y_0 \neq 0). \qquad (7.22)$$

Діємо за аналогією з вищенаведеним. Підставляємо (7.22) у рівняння (7.21) і прирівнюємо до нуля коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо нескінченну систему рівнянь

$$y_0(\lambda^2 - \nu^2) = 0,\ y_1[(\lambda+1)^2 - \nu^2] = 0,$$

$$y_2[(\lambda+2)^2 - \nu^2] - y_0 = 0, \ldots,\ y_n[(\lambda+n)^2 - \nu^2] - y_{n-2} = 0, \ldots$$

Оскільки $y_0 \neq 0$, то з першого рівняння знаходимо $\lambda_{1,2} = \pm\nu$. Нехай $\nu \geq 0$. Покладемо $\lambda = \nu$. Тоді $y_1 = 0,\ y_3 = 0, \ldots$, тобто всі непарні

$y_{2n+1}=0$, $n\ge 0$. Далі $y_{2n}=-\dfrac{y_{2n-2}}{4n(\nu+n)}$, звідки знаходимо $y_{2n}=\dfrac{(-1)^n y_0}{4^n n!(\nu+1)\dots(\nu+n)}$, $n\ge 1$. Отримали розв'язок

$$y_1(x)=y_0 x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n!(\nu+1)\dots(\nu+n)}.$$

Враховуючи тотожності для гамма-функції Ейлера

$$\Gamma(\nu+n+1)=(\nu+n)\dots(\nu+1)\Gamma(\nu+1),\quad \Gamma(n+1)=n!,$$

можемо записати розв'язок у вигляді

$$y_1(x)=C_1 x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \qquad (7.23)$$

За аналогією, поклавши $\lambda=-\nu$, отримаємо для нецілого значення ν

$$y_2(x)=C_2 x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \qquad (7.24)$$

Зауважимо, що при $\lambda=-\nu$ та цілому значенні ν формулу (7.23) не можна використовувати, оскільки знаменник може перетворитися на нескінченність, і в цьому випадку другий лінійно незалежний розв'язок $y_2(x)$ містить $\ln x$.

Функцію

$$J_{\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \qquad (7.25)$$

називають *функцією Бесселя першого роду ν-го порядку.*

$J_{\nu}(x)$ та $J_{-\nu}(x)$ для нецілого значення ν утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння Бесселя. При цілому значенні ν замість $J_{-\nu}(x)$ потрібно шукати інший розв'язок, лінійно незалежний відносно $J_{\nu}(x)$. Для цього введемо нову функцію

$$Y_{\nu}(x)=\frac{J_{\nu}(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \qquad (7.26)$$

вважаючи, що ν – неціле число.

Очевидно, що визначена таким чином функція $Y_{\nu}(x)$ є розв'язком рівняння (7.21) (оскільки вона є лінійною комбінацією частинних розв'язків $J_{\nu}(x)$ та $J_{-\nu}(x)$).

Перейшовши до границі у виразі (7.26) при ν, що прямує до цілого числа, отримаємо частинний розв'язок $Y_{\nu}(x)$, лінійно незалежний відносно $J_{\nu}(x)$ і вже визначений для цілих значень ν.

Введена функція $Y_\nu(x)$ називається *функцією Бесселя другого роду* ν *-го порядку*. Таким чином для довільного ν, дробового або цілого, будується фундаментальна система розв'язків рівняння Бесселя (7.21). Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння (7.21) може бути записаний у вигляді $y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$, де A та B – довільні сталі.

Зауваження 7.2. Широкий клас рівнянь вигляду

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + (b + cx^m)y = 0\,, \qquad (7.27)$$

де a, b, c, m – сталі ($c > 0,\ m \neq 0$), зводиться за допомогою введення нової змінної t та нової функції u за формулами

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}$$

до рівняння Бесселя

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)u = 0\,.$$

Тут $$\alpha = \frac{a-1}{2},\ \beta = \frac{m}{2},\ \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m},\ \nu^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2}\,.$$

Приклад 7.3. Звести рівняння

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (x^4 - 12)y = 0 \qquad (7.28)$$

до рівняння Бесселя та знайти його загальний розв'язок.

Розв'язання. Враховуючи значення коефіцієнтів рівняння $a = -3$, $b = -12$, $c = 1$, $m = 4$, визначимо відповідні параметри

$$\alpha = \frac{a-1}{2} = -2\,,\ \ \beta = \frac{m}{2} = 2,\ \gamma = \frac{2\sqrt{c}}{m} = \frac{1}{2},\ \nu^2 = \frac{(a-1)^2 - 4b}{m^2} = 4,\ \ -\frac{\alpha}{\beta} = 1,\ \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}\,.$$

Введемо нові незалежну змінну t та функцію u за формулами $y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\alpha/\beta} u$, $x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{1/\beta}$, тобто $y = 2ut$, де $u = u(t)$, а $x = \sqrt{2t}$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}(2ut)}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt{2t}\,\frac{d}{dt}(2ut) = 2\sqrt{2}\left(t^{3/2}\frac{du}{dt} + t^{1/2}u\right).$$

Аналогічно знаходимо $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4t^2\dfrac{d^2u}{dt^2} + 10t\dfrac{du}{dt} + 2u$. Після підстановки відповідних значень у (7.28) отримаємо рівняння Бесселя

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - 4)u = 0,$$

загальний розв'язок якого $u(t) = C_1J_2(t) + C_2Y_2(t)$. Далі переходимо до змінних x та y і записуємо загальний розв'язок рівняння (7.28):

$$y(x) = x^2\left[C_1J_2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_2Y_2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right].$$

7.4. Метод малого параметра

Метод малого параметра застосовується для систем вигляду

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}, \mu), \qquad (7.29)$$

що залежать від малого параметра μ. Інколи малий параметр штучно вводиться в диференціальне рівняння для знаходження наближеного розв'язку. Ідея методу полягає в тому, що розв'язок (7.29) шукають у вигляді степеневих рядів за параметром μ. У випадку, коли функція f аналітична за параметром μ і змінними $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$, метод малого параметра називається *регулярним*. Він широко та ефективно використовується для знаходження періодичних розв'язків рівняння вигляду $y'' + \omega^2 y = f(x) + \mu F(x, y, y', \mu)$, що описують квазілінійні коливання механічних систем.

Розглянемо регулярний метод малого параметра (*Ляпунова – Пуанкаре*) для системи першого порядку

$$y' = f(x, y, \mu) \qquad (7.30)$$

за початкових умов

$$y(x_0) = y_0(\mu), \qquad (7.31)$$

які в загальному випадку також залежать від параметра μ.

Припустимо, що функція f аналітична за змінними y і μ, а функція y_0 у співвідношенні (7.31) аналітична за μ. Тоді розв'язок $y(x, \mu)$ задачі

Коші (7.30)–(7.31) є аналітичною функцією параметра μ, тому для неї при досить малому $|\mu|$ виконується розвинення у степеневий ряд

$$y(x,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty} z_n(x)\mu^n\ , \tag{7.32}$$

де $z_n(x)$ – коефіцієнти, що залежать від x і підлягають визначенню.

Регулярний метод малого параметра полягає в побудові розв'язку рівняння (7.30) за початкових умов (7.31) у вигляді (7.32) з невідомими коефіцієнтами $z_n(x)$ і знаходженні цих коефіцієнтів. Фактично він подібний до методу степеневих рядів, але не за незалежною змінною x, а за малим параметром μ. Для знаходження невідомих у співвідношенні (7.32) розвинемо функцію y_0 у ряд (7.31) за степенями μ

$$y_0(\mu)=\sum_{k=0}^{\infty} y_{0k}\mu^k, \tag{7.33}$$

а функцію f у співвідношенні (7.30) – у ряд за степенями y_i та μ (у загальному випадку y_i – компоненти вектора y)

$$f(x,y,\mu)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d^i f}{i!}\Bigg|_{\substack{y=0\\ \mu=0}}\ , \tag{7.34}$$

коефіцієнти якого будуть відомими функціями змінної x. У випадку скалярного рівняння (7.30) маємо

$$f(x,y,\mu)=\sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij}(x)y^j\mu^j,\ b_{00}(x)=f(x,0,0),\ b_{ij}(x)=\frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^i\partial\mu^j}\Bigg|_{\substack{\mu=0\\ y=0}}.$$

Підставивши (7.34) з урахуванням (7.32) у вираз (7.30), отримаємо тотожність у вигляді ряду за степенями μ. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ, отримаємо рекурентну систему диференціальних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $z_n(x)$ у (7.32). Ця система є лінійною відносно кожної шуканої функції $z_n(x)$.

Подальші викладки проведемо для випадку скалярного рівняння (7.30). Урахувавши (7.34), (7.32), (7.30), отримаємо тотожність

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n(x)\mu^n\equiv\sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij}(x)\mu^j\left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n(x)\mu^n\right)^i. \tag{7.35}$$

В останньому співвідношенні прирівняємо послідовно коефіцієнти при однакових степенях μ та отримаємо рекурентну систему диференціальних рівнянь відносно $z_0(x)$, $z_1(x)$, ...

$$\begin{gathered} z_0'(x) = b_{00}(x) = f(x,0,0), \\ z_1'(x) = a_1(x)z_1(x) + q_1(x, z_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n'(x) = a_n(x)z_n(x) + q_n(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}), \end{gathered} \tag{7.36}$$

де a_i, q_i – відомі, визначені відносно своїх аргументів функції. Перше рівняння системи (7.36) називається *породжувальним.*

Початкові умови для системи (7.36) визначаються з початкових умов (7.31) у формі (7.33), тобто цілком однозначно, і їх можна записати у вигляді $z_0(x_0) = y_{00}$, ... , $z_n(x_0) = y_{0n}$.

Головна перевага методу малого параметра (регулярного) полягає в тому, що він зводить задачу (7.30), (7.31) (нелінійну в загальному випадку) до послідовності лінійних задач (7.35), (7.36) і дає в області збіжності ряду (7.32) асимптотичні наближення шуканого розв'язку у вигляді частинних сум цього ряду, рівномірні за x в області збіжності ряду.

Приклад 7.4. Побудувати з точністю до $O(\mu^2)$ розв'язок диференціального рівняння

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \mu\dot{x}^2, \tag{7.37}$$

що задовольняє початкові умови $x(0,\mu) = 0, \quad \dot{x}(0,\mu) = 1$.

Розв'язання. Зведемо рівняння другого порядку до нормальної системи двох рівнянь, у правій частині якої є вектор

$$f(t, x, \mu) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2\sin t - 3x_1 + \mu\, x_2^{\,2} \end{pmatrix},$$

де $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Шуканий розв'язок розвивається в ряд за степенями параметра μ. Запишемо $x(t,\mu)$ у вигляді $x(t,\mu) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n(t)\mu^n$.

Підставивши цей вираз у (7.37) і прирівнявши послідовно вільний член і коефіцієнти при степенях μ, μ^2 і т. д., отримаємо

$$\begin{gathered} \ddot{z}_0 + 3z_0 = 2\sin t, \\ \ddot{z}_1 + 3z_1 = (z_0)^2, \\ \ddot{z}_2 + 3z_2 = 2\dot{z}_0\dot{z}_1, \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{7.38}$$

Перше рівняння системи (7.38) породжувальне. Розв'язуючи його та враховуючи початкову умову, знаходимо $z_0 = \sin t$. Тоді друге рівняння системи матиме вигляд $\ddot{z}_1 + 3z_1 = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.

Для розв'язання останнього рівняння застосуємо метод невизначених коефіцієнтів і скористаємося принципом суперпозиції. Ураховуючи нульові початкові умови, отримаємо $z_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}t$.

Отже, $x(t,\mu) = \sin t + \mu\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}t\right) + O\left(\mu^2\right)$. Якщо знайти розв'язок з нульовими початковими даними третього рівняння системи (7.38), то отримаємо коефіцієнт розвинення $x(t,\mu)$ при μ^2.

РОЗДІЛ 8

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЛАПЛАСА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

8.1. Основні поняття

Операційне числення – один з найекономніших методів розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, з частинними похідними, а також інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь типу згортки. До таких типів рівнянь зводяться задачі з теорії перехідних процесів лінійних фізичних, імпульсних систем, теорії автоматичного регулювання й багатьох галузей сучасної науки й техніки. Цей метод користується популярністю в інженерній практиці та легко реалізується на ПЕОМ. Наведемо його сучасний варіант.

Означення 8.1. *Функцією-оригіналом* будемо називати будь-яку комплексну функцію $f(x)$ дійсної змінної x, що визначена на всій числовій прямій і задовольняє такі умови:

- $f(x)$ неперервна при $x \geq 0$, за виключенням, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду;
- $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$;
- $|f(x)| \leq Me^{ax}$ при $x \geq 0$. У цій нерівності сталі M, a визначаються окремо для кожної функції.

Прикладом найпростішої функції-оригіналу є функція Хевісайда

$$\eta(x)=\begin{cases}1,\ x\ge 0,\\ 0,x<0.\end{cases}$$

Означення 8.1. *Зображенням функції-оригіналу* $f(x)$ називають функцію комплексної змінної $p=s+ib$, яка визначається співвідношенням

$$F(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)e^{-px}dx\,. \qquad (8.1)$$

Вираз (8.1) називають *перетворенням Лапласа* функції $f(x)$.

Функцію $F(p)$ будемо далі називати *зображенням функції* $f(x)$ і позначати $f(x)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}F(p)$.

Покажемо, що інтеграл (8.1) збігається при комплексних p у півплощині $\operatorname{Re}p>a$, де вибір a вказаний в умові 3 означення 8.1.

$$\left|\int\limits_{0}^{\infty} e^{-px}f(x)dx\right|\le M\int\limits_{0}^{\infty} e^{(a-\operatorname{Re}p)x}dx<\infty\,,$$

оскільки $a-\operatorname{Re}p<0$. Можна показати, що в півплощині $\operatorname{Re}p>a$ функція $F(p)$ нескінченно диференційована.

Виведемо основні формули операційного числення. При їх виведенні вважається, що всі функції, які розглядаються, належать класу оригіналів. Крім того, параметр p вибирається таким великим, щоб усі позаінтегральні підстановки при $x=+\infty$ перетворювалися на нуль, наприклад $e^{-px}f(x)\Big|_{x=\infty}=0$.

8.2. Властивості перетворення Лапласа

1. *Лінійність перетворення Лапласа.* Якщо $f(x)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}F(p)$, $g(x)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}G(p)$ і α,β – сталі, то $\alpha f(x)+\beta g(x)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}\alpha F(p)+\beta G(p)$.

Доведення цієї властивості випливає з лінійності інтеграла.

2. *Подібність*. Для довільної сталої $\alpha > 0$

$$f(\alpha x) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. *Зображення похідних*. Якщо функція $f(x)$ неперервна при $x \geq 0$, а її похідні $f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ є оригіналами, то

$$f'(x) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(x) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(x) \risingdotseq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{8.2}$$

4. *Диференціювання зображення* $(-1)^n x^n f(x) \risingdotseq F^{(n)}(p)$.

5. *Інтегрування оригіналу* $\int\limits_0^x f(x)dx \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

6. *Інтегрування зображення.* Якщо інтеграл $\int\limits_0^\infty F(p)dp$ збігається, то він є зображенням функції $\dfrac{f(x)}{x}$, тобто $\dfrac{f(x)}{x} \risingdotseq \int\limits_0^\infty F(p)dp$.

7. *Запізнення.* Для будь-якого додатного τ виконується $f(x-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$.

8. *Зміщення.* Для будь-якого комплексного α виконується $e^{\alpha x} f(x) \risingdotseq F(p-\alpha)$.

9. *Множення*: $\int\limits_0^x f(x)q(x-\tau)dx \risingdotseq F(p)Q(p)$.

Перетворення Лапласа має ще багато корисних для застосування властивостей. З ними можна ознайомитися, скориставшись спеціальною літературою з операційного числення.

8.3. Таблиця зображень деяких оригіналів

Наведемо в табл. 8.1 зображення функцій, що найчастіше використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь.

Таблиця 8.1

№	Оригінал	Зображення
1	$\eta(x)$	p^{-1} $(\operatorname{Re} p > 0)$
2	x^n $(n > 0$, n – ціле)	$n!\,p^{-n-1}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
3	$e^{\sigma x}$ $(\sigma = \mathrm{const})$	$(p-\sigma)^{-1}$ $(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\sigma)$
4	$x^n e^{\sigma x}$ $(\sigma = \mathrm{const}$, $n > 0$, n – ціле)	$n!(p-\sigma)^{-n-1}$ $(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\sigma)$
5	$\sin\omega x$ (ω – дійсна стала)	$\omega(p^2+\omega^2)^{-1}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
6	$e^{\sigma x}\sin\omega x$ (σ, ω – дійсні сталі)	$\dfrac{\omega}{(p-\sigma)^2+\omega^2}$ $(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\sigma)$
7	$x\sin\omega x$ (ω – дійсна стала)	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
8	$\cos\omega x$ (ω – дійсна стала)	$p(p^2+\omega^2)^{-1}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
9	$e^{\sigma x}\cos\omega x$ (σ, ω – дійсні сталі)	$\dfrac{p-\sigma}{(p-\sigma)^2+\omega^2}$ $(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\sigma)$
10	$x\cos\omega x$ (ω – дійсна стала)	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
11	$ch\omega x$ ($\omega \ge 0$, ω – стала)	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ $(\operatorname{Re} p > \omega)$
12	$sh\omega x$ ($\omega \ge 0$, ω – стала)	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$ $(\operatorname{Re} p > \omega)$

8.4. Знаходження зображень функцій-оригіналів

При знаходженні зображень функцій-оригіналів потрібно використовувати табл. 8.1 і властивості перетворення Лапласа.

Приклад 8.1. Знайти зображення функцій:

а) $7x^2+5\cos 2x-x^3e^x$; б) $\sin^2 2x$; в) $\cos^3 x$.

Розв'язання. Для знаходження зображення виразу а) використаємо формули з табл. 8.1:

$$7x^2+5\cos 2x-x^3e^x \doteqdot 7\cdot\frac{2!}{p^3}+5\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{3!}{(p-1)^4}=\frac{14}{p^3}+\frac{5p}{p^2+4}-\frac{6}{(p-1)^4}.$$

б) Зображення функції $\sin^2 2x$ знайдемо, застосовуючи формули зниження степеня: $\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$. Далі

$$\frac{1-\cos 4x}{2}\doteqdot\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+16}.$$

в) Для знаходження зображення функції $\cos^3 x$ скористаємося формулою Ейлера $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Тоді

$$\cos^3 x=\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3}{8}=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+\frac{3}{4}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{4p^2+36}+\frac{3p}{4p^2+4}.$$

8.5. Знаходження оригіналу за зображенням

Оригінал може бути відновлений за зображенням також за допомогою табл. 8.1 та з використанням властивостей перетворення Лапласа.

Приклад 8.2. Знайти оригінали таких зображень: а) $\dfrac{7}{p^5}$; б) $\dfrac{5}{(p+1)^4}$;

в) $\dfrac{2p+3}{p^2+p+3}$; г) $\dfrac{p}{p^2-5p+6}$; д) $\dfrac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}$.

Розв'язання. Для знаходження оригіналу за зображенням використаємо формули з табл. 8.1:

а) $\dfrac{7}{p^5}=\dfrac{4}{4!}\dfrac{4!}{p^5}\risingdotseq\dfrac{7}{4!}x^4=\dfrac{7x^4}{24}$.

б) $\dfrac{5}{(p+1)^4}=\dfrac{5}{3!}\dfrac{3!}{(p+1)^4}=\dfrac{5}{6}\dfrac{3!}{(p-(-1))^4}\risingdotseq\dfrac{5}{6}x^3e^{-x}$.

в) Оскільки дискримінант знаменника дробу $\dfrac{2p+3}{p^2+p+3}$ від'ємний, то для знаходження оригіналу спочатку виділяємо повний квадрат знаменника дробу $p^2+p+3=\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$. Далі записуємо

$$\frac{2p+3}{p^2+p+3}=\frac{2p+3}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=2\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}+2\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=$$

$$=2\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\frac{1}{\left(p-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x+\frac{4}{\sqrt{11}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\ .$$

г) Знаменник дробу $\dfrac{p}{p^2-5p+6}$ розкладається на множники. Для знаходження оригіналів дробів подібного вигляду потрібно виконати таку послідовність дій:

- розкласти знаменник дробу на множники;
- подати дріб у вигляді суми простих дробів з невизначеними коефіцієнтами;
- знайти невизначені коефіцієнти;
- знайти за табл. 8.1 оригінали отриманих простих дробів.

Використовуючи цей алгоритм, знайдемо оригінал функції $\dfrac{p}{p^2-5p+6}$.

Отже, $p^2-5p+6=(p-2)(p-3)$, $\dfrac{p}{p^2-5p+6}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p-3}$,

$p=A(p-3)+B(p-2)$, $p=Ap-3A+Bp-2B$, звідки $A=-2, B=3$.

$$\frac{p}{p^2-5p+6}=-\frac{2}{p-2}+\frac{3}{p-3}\doteqdot-2e^{2x}+3e^{3x}.$$

$$\text{д)}\ \frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1},$$

$$p=A(p-1)(p^2+1)+B(p^2+1)+(Cp+D)(p-1)^2,$$

$$p=Ap^3-Ap^2+Ap-A+Bp^2+B+Cp^3-2Cp^2+Cp+Dp^2-2Dp+D.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях p, знайдемо

$$D=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2},\ A=0,\ C=0.$$

Отже, $$\frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}\doteqdot\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

8.6. Розв'язання диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з використанням операційного числення

Щоб знайти зображення лінійного диференціального рівняння, спочатку слід відшукати за допомогою формули (8.2) зображення всіх похідних, що входять у рівняння, і зображення правої частини рівняння за допомогою табл. 8.1.

Приклад 8.3. Знайти зображення диференціального рівняння $y''-8y'+7y=3\cos x,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.

Розв'язання. Знаходимо зображення похідних за допомогою властивості диференціювання оригіналу $y(x)\doteqdot Y(p)$,

$$y'(x)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$

$$y''(x)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p-2.$$

Знаходимо зображення правої частини рівняння за табл. 8.1: $3\cos x \risingdotseq \dfrac{3}{p^2+1}$. Підставляємо знайдені зображення в рівняння

$p^2Y(p) - p - 2 - 8\left(pY(p) - 1\right) + 7Y(p) = \dfrac{3}{p^2+1}$.

Означення 8.2. Зображення диференціального рівняння називається *операторним рівнянням.*

Щоб розв'язати диференціальне рівняння операторним методом, необхідно виконати таку послідовність дій:

- знайти зображення рівняння;
- з отриманого операторного рівняння знайти зображення даного рівняння;
- за знайденим зображенням знайти оригінал.

Приклад 8.4. Розв'язати рівняння

$$y' + y = 1, \tag{8.3}$$

яке задовольняє початкову умову

$$y(0) = 1. \tag{8.4}$$

Розв'язання. Нехай $y(x) \risingdotseq Y(p)$, тоді за правилом диференціювання оригіналу маємо $y'(x) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$. Відомо, що $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, тому задача Коші (8.3)–(8.4) зводиться до розв'язання операторного рівняння $pY(p) - 1 + Y(p) = \dfrac{1}{p}$, звідки $(p+1)Y(p) = 1 + \dfrac{1}{p}$ або $Y(p) = \dfrac{1}{p}$, отже $y(x) = 1$. Знайдений розв'язок задовольняє рівняння (8.3) і початкову умову (8.4).

Приклад 8.5. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 4y = 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Розв'язання. Оскільки $4 \risingdotseq \dfrac{4}{p}$, то, з урахуванням початкових умов, операторне рівняння матиме вигляд $(p^2 - 5p + 4)Y(p) = \dfrac{4}{p} + 2$. Знаходимо операторний розв'язок $Y(p) = \dfrac{2p+4}{p(p^2 - 5p + 4)}$. Розкладаємо праву частину на елементарні дроби: $Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p-1}+\frac{1}{p-4}$. Перейшовши до оригіналів, отримуємо шуканий розв'язок $y(x)=1-2e^{x}+e^{4x}$.

8.7. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом інтегральних перетворень Лапласа

Нехай потрібно знайти розв'язок системи двох рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_1x+b_1y+f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt}=a_2x+b_2y+f_2(t), \end{cases} \tag{8.5}$$

який задовольняє початкові умови

$$x(0)=x_0\,,\ y(0)=y_0\,. \tag{8.6}$$

Будемо вважати, що функції $x(t), x'(t), y(t), y'(t), f_1(t), f_2(t)$ є функціями-оригіналами.

Нехай $x(t) \doteqdot X(p),\ y(t) \doteqdot Y(p),\ f_1(t) \doteqdot F_1(p),\ f_2(t) \doteqdot F_2(p)$. За правилом диференціювання оригіналів з урахуванням початкових умов (8.6) отримаємо $x'(t) \doteqdot pX(p)-x_0$, $y'(t) \doteqdot pY(p)-y_0$. Застосувавши до обох частин кожного з рівнянь системи (8.5) перетворення Лапласа, отримаємо операторну систему

$$\begin{cases} pX(p)=a_1X(p)+b_1Y(p)+F_1(p)+x_0\,, \\ pY(p)=a_2X(p)+b_2Y(p)+F_2(p)+y_0\,. \end{cases}$$

Це лінійна алгебраїчна система двох рівнянь із двома невідомими $X(p)$ та $Y(p)$. Розв'язавши її, знайдемо $X(p)$ та $Y(p)$, а потім, перейшовши до оригіналів, отримаємо розв'язок $x(t)$ та $y(t)$ системи (8.5), який задовольняє початкові умови (8.6).

Приклад 8.6. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t, \end{cases}$$

який задовольняє початкову умову $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Оскільки $5 \doteqdot \dfrac{5}{p}$, $-37t \doteqdot -\dfrac{37}{p^2}$ і $x_0 = y_0 = 0$, то операторна система матиме вигляд

$$\begin{cases} pX(p) = -7X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p}, \\ pY(p) = -2X(p) - 5Y(p) - \dfrac{37}{p^2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, отримаємо

$$X(p) = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2(p^2 + 12p + 37)}, \quad Y(p) = \frac{-47p - 259}{p^2(p^2 + 12p + 37)}.$$

Розкладаємо дроби, що стоять у правих частинах, на елементарні:

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{p+6}{p^2 + 12p + 37}, \; Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{7}{p^2} - \frac{p+5}{p^2 + 12p + 37},$$

або $X(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{p+6}{(p+6)^2 + 1}$, $Y(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{7}{p^2} - \dfrac{p+6}{(p+6)^2 + 1} + \dfrac{1}{(p+6)^2 + 1}$.

Нарешті, перейшовши до оригіналів, отримуємо шуканий розв'язок $x(t) = 1 - t - e^{-6t}\cos t$, $y(t) = 1 - 7t - e^{-6t}\cos t + e^{-6t}\sin t$.

РОЗДІЛ 9

ОСОБЛИВІ ТОЧКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ПЛОЩИНІ. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ

9.1. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \qquad (9.1)$$

Якщо $f(x,y)$ в околі точки (x_0,y_0) задовольняє умови теореми Пікара, то через точку (x_0,y_0) проходить лише одна інтегральна крива диференціального рівняння (9.1).

Припустимо, що функція $f(x,y)$ у точці (x_0,y_0) не є неперервною. Тоді можливі випадки:

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ (A – деяке число);
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \infty$;
- $f(x,y)$ невизначена в точці (x_0,y_0).

Перші два випадки зводяться до випадку, який розглядає теорема Пікара:

- $f(x,y)$ можна довизначити: $f(x_0,y_0) = A$;

замість диференціального рівняння (9.1) розглядаємо рівняння

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)} \tag{9.2}$$

і, прийнявши $\frac{1}{f(x_0,y_0)}=0$, знаходимо єдиний розв'язок $x=\varphi(y)$ з вертикальною дотичною в точці (x_0,y_0).

У випадку в) точка (x_0,y_0) називається ізольованою особливою точкою.

Дослідження особливих точок проведемо для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}, \tag{9.3}$$

де a,b,c,d – дійсні числа, $ad-bc\neq 0$, оскільки у протилежному випадку диференціальне рівняння (9.3) зводиться до рівняння $\frac{dy}{dx}=\mathrm{const}$.

Нас цікавить поведінка інтегральних кривих в околі точки $(0,0)$. Перепишемо диференціальне рівняння (9.3) у вигляді

$\frac{dx}{cx+dy}=\frac{dy}{ax+by}=dt$ і перейдемо до системи

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=cx+dy,\\ \frac{dy}{dt}=ax+by.\end{cases} \tag{9.4}$$

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}c-\lambda & d\\ a & b-\lambda\end{vmatrix}=0$.

Нехай λ_1,λ_2 – корені характеристичного рівняння. Розглянемо такі випадки:

1. Корені дійсні, різні й одного знаку, тобто $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. Тоді система диференціальних рівнянь (9.4) має жорданову форму

$$\begin{cases}\frac{dq_1}{dt}=\lambda_1 q_1,\\ \frac{dq_2}{dt}=\lambda_2 q_2.\end{cases} \tag{9.5}$$

Звідси $\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{q_1}{q_2}$ і, отже,

$$q_1 = c\left|q_2\right|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{9.6}$$

Якщо $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, то $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$ і всі криві (9.6) примикають до точки $(0,0)$, тобто $q_1 \to 0$ при $q_2 \to 0$ і розв'язок дотичний у цій точці до осі Oq_2 (рис. 9.1).

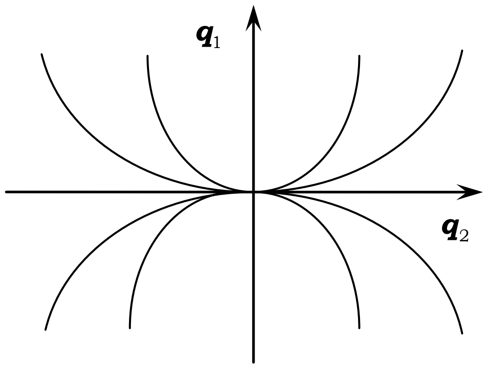

Рис. 9.1

У цьому випадку інтегральні криві дотичні до тієї осі, якій відповідає мінімальне за абсолютною величиною власне значення. Особлива точка – *вузол*.

Крім інтегральних кривих до особливої точки примикають дві півосі осі Oq_1, тобто $q_2 = 0,\ q_1 \neq 0$.

2. Припустимо, що $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Тоді $q_1 = c\left|q_2\right|^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. У даному випадку тільки чотири інтегральні криві $q_1 = 0 \quad (q_2 \neq 0)$, $q_2 = 0 \quad (q_1 \neq 0)$ примикають до особливої точки $(0,0)$. Останні інтегральні криві зображено на рис. 9.2.

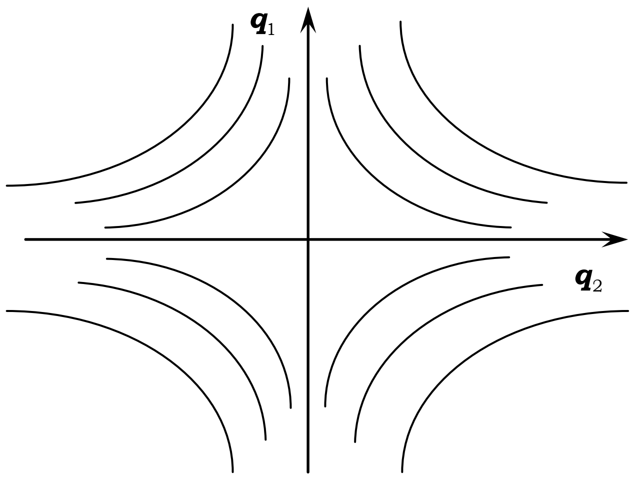

Рис. 9.2

Особлива точка – *сідло***.**

3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексні корені.

У цьому випадку, через довільність перетворення матриці до жорданової форми, її елементи можна вибрати так, що $q_{1,2} = u \pm iw$, де u, w – дійсні змінні. Отже,

$$\frac{du + idw}{du - idw} = \left(\frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta}\right)\left(\frac{u + iw}{u - iw}\right), \qquad (9.7)$$

$$(du + idw)\left[(\alpha u - \beta w) - i(\alpha w + \beta u)\right] = (du - idw)\left[(\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u)\right].$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини, отримаємо диференціальне рівняння:

дійсні: $du(\alpha u - \beta w) + dw(\alpha w + \beta u) \equiv du(\alpha u - \beta w) + dw(\alpha w + \beta u)$;

уявні: $dw(\alpha u - \beta w) - du(\alpha w + \beta u) \equiv -dw(\alpha u - \beta w) + du(\alpha w + \beta u)$.

З останньої рівності маємо

$$\frac{du}{dw} = \frac{\alpha u - \beta w}{\beta u + \alpha w}. \qquad (9.8)$$

Диференціальне рівняння (9.8) перепишемо у вигляді

$\frac{\beta(udw + wdw)}{u^2 + w^2} = \frac{\alpha\left(udw - wdu\right)}{u^2 + w^2}$. Звідси

$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2 + w^2\right) + \frac{\alpha}{\beta} arctg \frac{w}{u} = \ln c\,,$$

$$\sqrt{u^2 + w^2} = ce^{-\frac{\alpha}{\beta} arctg \frac{w}{u}}. \quad (9.9)$$

У (9.9) покладемо $u = r\cos\varphi, \quad w = r\sin\varphi$, тоді

$$r = ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}. \quad (9.10)$$

Формулою (9.10) задається сім'я логарифмічних спіралей (рис. 9.3).

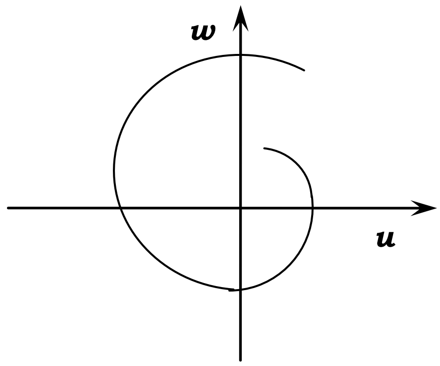

Рис. 9.3

У даному випадку всі інтегральні криві примикають до точки $(0,0)$, роблячи нескінченну кількість обертів. Те саме буде й у площині *XOY*. Особлива точка – *фокус*.

4. Корені уявні, тобто $\alpha = 0$. Тоді криві (9.10) будуть замкненими, у площині (u, w) будуть концентричні еліпси (рис. 9.4). Особлива точка – *центр*.

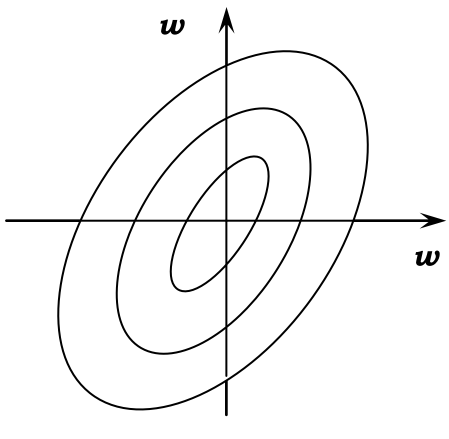

Рис. 9.4

5. Розглянемо випадок кратних коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

У цьому випадку жорданова форма матриці залежить від кратності елементарних дільників:

а) Кореню λ відповідають два простих елементарних дільники, тобто $r(A - \lambda E)$=0. Тоді $a = d = 0$, $b = c = \lambda$. Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{9.11}$$

і $$y = cx, \qquad (y \neq 0).$$

Отримали сім'ю півпрямих, що примикають до точки $(0,0)$ (рис. 9.5).

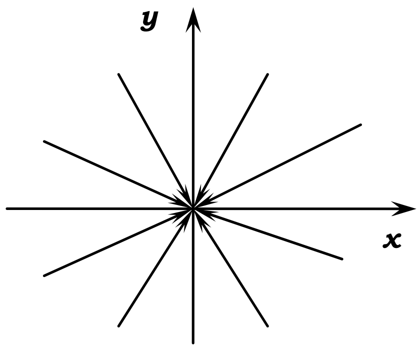

Рис. 9.5

Особлива точка – *дикритичний вузол.*

б) Кореню λ відповідає елементарний дільник кратністю 2, тобто $r(A - \lambda E)$=1, і матриця Жордана має форму $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda q_2. \end{cases} \tag{9.12}$$

Звідси $$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{\lambda}.$$

Розв'язок останнього диференціального рівняння запишемо у вигляді

$$q_1 = \frac{1}{\lambda} q_2 \ln|q_2| + cq_2, \quad q_2 \neq 0. \tag{9.13}$$

Крім (9.13), треба додати два розв'язки: $q_2 = 0$ $(q_1 \neq 0)$, $q_1 = 0$ $(q_2 \neq 0)$.

З (9.13) випливає, що інтегральні криві примикають до точки $(0,0)$, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\pm\infty$ (рис. 9.6).

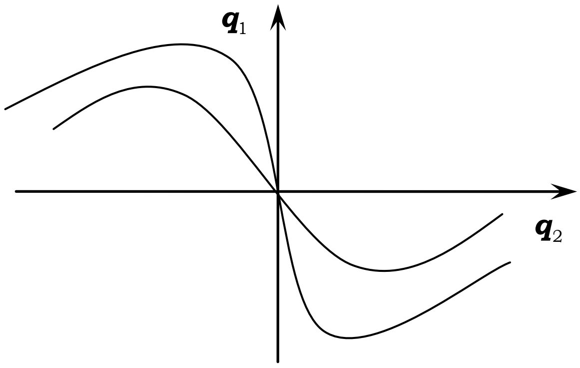

Рис. 9.6

Особлива точка – *вироджений вузол.*

На практиці для знаходження особливих точок нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{9.14}$$

необхідно:

а) Знайти розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$ Нехай (x_i, y_i), $i = 1,2, \ldots$ – її корені, тобто $\begin{cases} P(x_i, y_i) = 0, \\ Q(x_i, y_i) = 0, \end{cases}$ $i = 1,2, \ldots$.

Таких коренів може бути як скінченна, так і нескінченна кількість.

б) Знаходимо числа

$$a_i = \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}, \ b_i = \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}, \ c_i = \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}, \ d_i = \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}},$$

що визначають коефіцієнти лінійних членів розкладу функцій $Q(x,y)$ та $P(x,y)$.

в) Особливі точки знаходимо для рівнянь типу

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_i(x - x_i) + b_i(y - y_i)}{c_i(x - x_i) + d_i(y - y_i)}, \ i = 1,2, \ldots .$$

г) Геометричну інтерпретацію легко провести за аналогією з вищеописаним, скориставшись паралельним перенесенням $x - x_i = u_i$, $y - y_i = v_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

9.2. Стійкість розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший метод Ляпунова

9.2.1. Основні поняття та означення стійкості за Ляпуновим

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad t \ge t_0, \tag{9.15}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – n-вимірний вектор стану об'єкта, $f(x,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ f_2(x,t) \\ \vdots \\ f_n(x,t) \end{pmatrix}$ – вектор-функція розмірністю n, що задовольняє умови теореми існування та єдиності.

Без обмеження загальності міркувань припустимо, що $x(t) \equiv 0$ – розрахунковий розв'язок (незбурений рух). Дійсно, якщо незбурений рух ненульовий $x(t) = \bar{x}(t, t_0, x_0)$, то заміною $x = y + \bar{x}$ приходимо до розглянутого випадку

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f(x,t) - f(\bar{x},t) = f(y+\bar{x},t) - f(\bar{x},t) = \varphi(y,t). \tag{9.16}$$

Для системи диференціальних рівнянь (9.16) незбурений рух $y(t) \equiv 0$, $t \ge t_0$.

Розв'язок $x(t) \equiv 0$, який досліджується на стійкість, називається *незбуреним*, інші розв'язки будемо називати *збуреними*.

Означення 9.1. Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (9.15) будемо називати стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ таке, що $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ при $\|x_0\| < \delta$.

Означення 9.2. Незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ називають асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо він стійкий за Ляпуновим, тобто виконується означення 9.1 і знайдеться $0<\overline{\delta}\le\delta$ таке, що $\left\|x\left(t,t_0,x_0\right)\right\|\to 0$ при $t\to\infty$, якщо $\left\|x_0\right\|<\overline{\delta}$.

Множину $\Omega(t_0)=\left\{x_0:\left\|x\left(t,t_0,x_0\right)\right\|\to 0,\ t\to\infty\right\}$ будемо називати множиною асимптотичної стійкості.

Якщо означення 9.1 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ будемо називати нестійким за Ляпуновим.

Для дослідження питань стійкості розглядатимемо два методи Ляпунова. Суть першого полягає в тому, що для аналізу стійкості знаходиться загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (9.15). За його виглядом можна зробити висновок про стійкість або нестійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь (9.15). Знайти її загальний розв'язок важко, тому не завжди можна використати цей метод.

Приклад 9.1. Дослідити на стійкість розв'язки $x(t)\equiv 0$ залежно від параметра a рівняння: $\dfrac{dx}{dt}=ax$, $t\ge 0$.

Розв'язання. Загальний розв'язок нашого рівняння запишемо у формі Коші $x\left(t\right)=x_0e^{at}$, $\quad t\ge 0$.

Розв'язок $x(t)\equiv 0$ при

$$\begin{cases} a<0-\text{\textit{асимптотично}}\quad \text{\textit{стійкий}}, \\ a=0-\text{\textit{стійкий}}, \\ a>0-\text{\textit{нестійкий.}} \end{cases}$$

У другому методі для дослідження стійкості використовуються спеціальні функції, що називаються функціями Ляпунова. У цьому випадку загальний розв'язок можна не шукати.

9.2.2. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну систему однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=A\left(t\right)x, \tag{9.17}$$

де $A\left(t\right)=\left\{a_{ij}\left(t\right)\right\}_{i,j=1}^{n}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

Розв'язок лінійної системи однорідних диференціальних рівнянь (9.17) можна записати у формі Коші:

$$x(t) = X(t,t_0)x_0\,,\ t \ge t_0\,, \tag{9.18}$$

де $X(t,t_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків, нормована за моментом t_0

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt} = A(t)X(t,t_0), \qquad X(t,t_0) = E\,. \tag{9.19}$$

Питання про стійкість розв'язується шляхом аналізу властивостей матриці $X(t,t_0)$. Розглянемо такі випадки:

а) Матриця $X(t,t_0) = \left\{x_{ij}(t,t_0)\right\}_{i,j=1}^{n}$ обмежена при $t \ge t_0$

$$\left\|X(t,t_0)\right\| \le \sum_{i,j=1}^{n}\left|x_{ij}(t,t_0)\right| \le M\,,\ t \ge t_0\,.$$

У цьому випадку $\left\|x(t)\right\| \le \left\|X(t,t_0)\right\|$, $\left\|x_0\right\| < \varepsilon$ при $\left\|x_0\right\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. За цих умов незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ стійкий.

б) Припустимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$. У цьому випадку матриця $X(t,t_0)$ обмежена при $t \ge t_0$ і розв'язок $x(t) \equiv 0$, $t \ge t_0$ стійкий. Крім того, з формули Коші випливає, що $\left\|x(t)\right\| \to 0$ при $t \to \infty$. Таким чином, незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий.

в) Нехай $X(t,t_0)$ – необмежена при $t \ge t_0$, тобто існує зростаюча послідовність чисел $t_0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ така, що $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|X(t_k,t_0)\right\| = \infty$.

У цьому випадку серед функцій $x_{ij}(t,t_0)$ знайдеться хоча б одна $x_{pl}(t_k,t_0)$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty}\left|x_{pl}(t_k,t_0)\right| = \infty$.

Розглянемо розв'язок $\overline{x}(t)$ з початковими умовами

$$\overline{x}_j(t_0) = 0, \quad j = 1,2\ldots,n, \quad j \ne l, \quad \overline{x}_l(t_0) \ne 0\,.$$

Розв'язок (координата) $\overline{x}_p(t) = x_{pl}(t,t_0)\overline{x}_l(t_0)$ буде зростати при $t \ge t_0$, які б малі за модулем початкові умови $\overline{x}_l(t_0)$ ми не взяли. Це означає, що незбурений розв'язок $\lim\limits_{t\to\infty}\left|x_i(t)\right| = 0$ буде нестійким.

Ми показали достатність умов стійкості. Покажемо необхідність.

Припустимо, що незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ стійкий. Тоді
$$\|x(t)\| < \varepsilon \tag{9.20}$$
при $t \ge t_0$, коли $\|x_0\| < \delta$. Нерівність (9.20) означає, що величини
$$|x_i(t)| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t,t_0)\,x_j(t_0)\right| \tag{9.21}$$
є обмеженими. Поклавши в (9.21)
$$x_j(t_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n,\ j \ne k, \quad x_k(t_0) \ne 0,$$
отримаємо
$$|x_{ik}(t,t_0)| \le \frac{|x_i(t)|}{|x_k(t_0)|} \le L = \text{const},\ t \ge t_0. \tag{9.22}$$
Звідси
$$\|X(t,t_0)\| \le n^2 L,\ t \ge t_0, \tag{9.23}$$
тобто матриця $X(t,t_0)$ обмежена при $t \ge t_0$.

Якщо незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий, то $\lim\limits_{t\to\infty} |x_i(t)| = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ і з (9.22) випливає $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$.

Якщо незбурений розв'язок нестійкий, то $X(t,t_0)$ – необмежена матриця при $t \ge t_0$, оскільки у протилежному випадку з її обмеженості випливає стійкість незбуреного розв'язку $x(t) \equiv 0$. Ми довели таку теорему:

Теорема 9.1. Для стійкості незбуреного розв'язку $x(t) \equiv 0$ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (9.17) необхідно й достатньо, щоб її фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ була обмеженою при $t \ge t_0$;

для асимптотичної стійкості необхідно й достатньо, щоб $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$;

для нестійкості необхідно й достатньо, щоб фундаментальна матриця була необмеженою при $t \ge t_0$.

Зауваження 9.1. Оскільки фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ не залежить від початкових умов $x(t_0)$, то всі розв'язки системи (9.17) будуть стійкими або нестійкими.

9.2.3. Стійкість розв'язку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами $\frac{dx}{dt} = Ax, t \geq t_0$.

Для побудови її розв'язків треба записати характеристичне рівняння $P(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ і, залежно від коренів, побудувати загальний розв'язок.

Розрізняють три випадки.

1) Корені характеристичного рівняння $\lambda_i, i = 1,2,\ldots,n$ дійсні та різні. Тоді загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь записується у формі $x = \sum_{i=1}^{n} c_i h^{(i)} e^{\lambda_i t}, t \geq t_0$, де $h^{(i)}$ – власні вектори матриці A: $(\lambda_i E - A)h^{(i)} = 0, i = 1,2\ldots,n$.

2) Корінь λ_1 має кратність k. Е цьому випадку треба аналізувати ранг матриці $(\lambda_1 E - A)$. Якщо $rank(\lambda_1 E - A) = n - k$, то рівняння $(\lambda_1 E - A)h = 0$ має k лінійно незалежних розв'язків $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(k)}$, яким відповідає k розв'язків системи $x^{(i)} = h^{(i)} e^{\lambda_i t}, i = 1,2\ldots,k$.

Якщо $rank(\lambda_1 E - A) = l < n - 1$, то система має $n - l$ груп розв'язків

$$h^{(1)} e^{\lambda_1 t}, P_1^{(1)}(t) e^{\lambda_1 t}, \ldots, P_{q_1}^{(1)}(t) e^{\lambda_1 t}, \ldots, h^{(n-l)} e^{\lambda_1 t}, \ldots, P_{q_{n-l}}^{(n-l)}(t) e^{\lambda_1 t}.$$

Тут $l + q_1 + \ldots + q_{n-l} = k$, $P_{q_j}^{(r)}(t)$ – вектор-поліном степеня q_j.

3) Пара коренів $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ – комплексні. Тоді кореню λ_1 відповідає комплексний власний вектор $h^{(1)} = c + id$. Два лінійно незалежні розв'язки будуються таким чином:

$$x^{(1)} = \mathrm{Re}\left[(c + id)e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\right] =$$

$$= e^{at}[c \cos bt - d \sin bt],$$

$$x^{(2)} = \mathrm{Im}\left[(c + id)e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\right] =$$

$$= e^{at}[c \cos bt - d \sin bt].$$

Аналіз побудованих розв'язків приводить до такого твердження:

Теорема 9.2. Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (9.17) зі сталими коефіцієнтами тоді й тільки тоді є:

- стійким, коли дійсні частини коренів характеристичного рівняння

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (9.24)$$

- недодатні, причому характеристичним числам з нульовими дійсними частинами відповідають одновимірні клітини Жордана, тобто такі характеристичні числа мають прості елементарні дільники;
- асимптотично стійким, коли всі дійсні частини коренів характеристичного рівняння (9.24) від'ємні;
- нестійким, коли хоча б один з коренів характеристичного рівняння (9.24) має додатну дійсну частину або хоча б одному кратному кореню з нульовою дійсною частиною відповідає неодновимірна клітина Жордана (таке число має непростий елементарний дільник).

Для аналізу стійкості використовується критерій Гурвіца. Розглянемо рівняння

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0,\ a_0 > 0. \qquad (9.25)$$

Складемо матрицю Гурвіца розмірністю $n \times n$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

де $a_i = 0$ при $i > n$. Розглянемо послідовність головних мінорів

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = |\Gamma|. \qquad (9.26)$$

Критерій Гурвіца. Для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (9.24) мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб послідовність (9.26) була додатною, тобто $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2\ldots, n$.

Приклад 9.2. Записати умови асимптотичної стійкості для системи, якій відповідає характеристичне рівняння $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$.

Розв'язання. Згідно з критерієм Гурвіца запишемо умови асимптотичної стійкості $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,\ a_3 > 0$.

Приклад 9.3. Записати умови асимптотичної стійкості для розв'язків лінійної стаціонарної системи, що має характеристичне рівняння $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$.

Розв'язання. Побудуємо матрицю Гурвіца для нашого випадку:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Запишемо умови асимптотичної стійкості:

$$\Delta_1 = a_1 > 0\,,\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0\,,\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_4a_1^2 > 0\,,\ a_4 > 0\,.$$

9.2.4. Дослідження стійкості за першим наближенням

Лема Гронуолла – Беллмана. Нехай функції $u(t)$ і $v(t)$ неперервні при $t \ge t_0$, $c > 0$ – стала і при $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$\left|u(t)\right| \le c + \int_{t_0}^{t} \left|u(\tau)\right|\left|v(\tau)\right| d\tau\,. \tag{9.27}$$

Тоді при $t \ge t_0$ справедлива нерівність

$$\left|u(t)\right| \le c \exp \int_{t_0}^{t} \left|v(\tau)\right| d\tau\,. \tag{9.28}$$

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності (9.27) на $\left|v(t)\right|$

$$\left|u(t)\right|\left|v(t)\right| \le \left|v(t)\right|\left(c + \int_{t_0}^{t} \left|u(\tau)\right|\left|v(\tau)\right| d\tau\right)$$

і позначимо $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \left|u(\tau)\right|\left|v(\tau)\right| d\tau$. З останньої нерівності отримаємо $\frac{d\alpha}{dt} \le \left|v(t)\right|(c+\alpha)$. Оскільки $c + \alpha > 0$, то $\frac{d\alpha}{c+\alpha} \le \left|v(t)\right| dt$, $\ln(c+\alpha) - \ln c \le \int_{t_0}^{t} \left|v(\tau)\right| d\tau$. Отже,

$$c + \alpha \le c \exp \int_{t_0}^{t} \left|v(\tau)\right| d\tau\,. \tag{9.29}$$

Використовуючи, (9.27) і (9.29), отримаємо (9.28). Лему доведено.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)\ \ (x(t) \equiv 0\ \text{– незбурений розв'язок}),\ t \ge t_0\,. \tag{9.30}$$

Проведемо лінеаризацію системи диференціальних рівнянь (9.30) в околі точки $x(t)=0$:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+R(x,t),\ t\geq t_0, \tag{9.31}$$

де $A(x,t)=\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $R(x,t)=f(x,t)-A(t)x$.

Стійкість системи диференціальних рівнянь (9.30) у деяких випадках можна проаналізувати за допомогою дослідження стійкості лінеаризованої системи, що відповідає (9.31).

Припустимо, що

$$\left\|R(x,t)\right\|\leq\alpha\left\|x\right\|,\ t\geq t_0, \tag{9.32}$$

де $\alpha=\alpha(\delta)$ – стала в достатньо малому околі нуля $\left\|x\right\|<\delta$.

Теорема 9.3. Якщо фундаментальна матриця $X(t,\tau)$ системи $\frac{dx}{dt}=A(t)x$ при будь-яких $\tau\geq t_0$ і $t\geq t_0$ задовольняє нерівність

$$\left\|X(t,\tau)\right\|\leq ke^{-\rho(t-\tau)} \tag{9.33}$$

з додатними й незалежними від t,τ константами k і ρ, то незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ системи (9.30) асимптотично стійкий при $\alpha<\frac{\rho}{k}$ і будь-якому виборі функції $R(x,t)$, яка задовольняє умову (9.32), причому для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи звичайних диференціальних рівнянь (9.30), для якого $\left\|x(t_0)\right\|<\frac{\delta}{k}$, виконується нерівність

$$\left\|x(t)\right\|\leq e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}\delta \text{ при } t\geq t_0. \tag{9.34}$$

Доведення. Запишемо розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (9.31) у вигляді $x(t)=X(t,t_0)x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}X(t,\tau)R(x,\tau)d\tau$.

Звідси
$$\left\|x(t)\right\|\leq ke^{-\rho(t-t_0)}\left\|x(t_0)\right\|+k\alpha\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\rho(t-\tau)}\left\|x(\tau)\right\|d\tau,$$

$$\left\|x(t)\right\|e^{\rho(t-t_0)}\leq k\left\|x(t_0)\right\|+k\alpha\int\limits_{t_0}^{t}e^{\rho(\tau-t_0)}\left\|x(\tau)\right\|d\tau.$$

Позначимо $u(t) = \|x(t)\| e^{\rho(t-t_0)}$, $c = k\|x(t_0)\|$, $\upsilon = k\alpha$, $u(\tau) = e^{\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|$. Згідно з лемою $u(t) \le k\left\|x\left(t_0\right)\right\| e^{k\alpha(t-t_0)}$. Отже,

$$\left\|x\left(t\right)\right\| \le e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)} k\left\|x\left(t_0\right)\right\| \le \delta e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}.$$

Теорему доведено.

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right). \tag{9.35}$$

Лінеаризуємо систему (9.35), ураховуючи $f(0) = 0$, $t \ge t_0$:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R\left(x\right), \quad A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad R\left(x\right) = f\left(x\right) - Ax. \tag{9.36}$$

Критерій стійкості автономної системи за першим наближенням:

а) Якщо корені характеристичного рівняння (9.24) задовольняють умову $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, то незбурений розв'язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (9.35) асимптотично стійкий;

б) Якщо серед коренів характеристичного рівняння (9.24) знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (9.35) нестійкий;

в) Якщо лінійна система стійка, тобто серед коренів характеристичного рівняння (9.24) знайдуться деякі з нульовими дійсними частинами, то незбурений розв'язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (9.35) може бути як стійким, так і нестійким. У цьому випадку аналіз стійкості необхідно проводити за допомогою урахування наближень вищих порядків.

Приклад 9.4. Дослідити на стійкість незбурений розв'язок $x = y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad t \ge 0.$$

Розв'язання. Розглянемо два підходи, що описані вище.

а) $\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Згідно з критерієм система стійка.

б) Знайдемо фундаментальну матрицю. Загальний розв'язок системи має вигляд

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y = c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{cases}$$

Фундаментальну матрицю запишемо таким чином:

$$X(t,0)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Оскільки вона обмежена, то незбурений розв'язок $x=y=0$ є стійким.

9.3. Другий метод Ляпунова

9.3.1. Функції Ляпунова

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(x),\ t\ge t_0, \tag{9.37}$$

де $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix}$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови теореми існування та єдиності.

Припустимо, що $x(t)=0$, $t\ge t_0$ – розв'язок системи диференціальних рівнянь (9.37), який досліджується на стійкість. Його будемо називати *незбуреним або програмним розв'язком.* Якщо досліджуваний на стійкість розв'язок не нульовий $x=\bar{x}(t)$, то заміною $x=y+\bar{x}(t)$ переходимо до нульового.

Для дослідження властивості стійкості використовують два методи Ляпунова.

Перший метод передбачає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (9.37), але його не завжди можна знайти.

У другому методі аналіз стійкості або нестійкості проводиться за допомогою спеціальних функцій, які називаються функціями Ляпунова і позначаються $V(x)=V(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Якщо означення 9.1 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ називається нестійким. У цьому випадку для будь-якого $\varepsilon>0$ у будь-якому околі початку координат знайдуться точки x_0, відповідні до розв'язків, для яких траєкторії виходять з ε-околу.

Означення 9.3. Функцію $V(x)=V(x_1,\dots,x_n)$ будемо називати додатно (від'ємно) визначеною на множині $\|x\|\le H$, якщо вона на цій множині набуває додатних (від'ємних) значень при $\|x\|\ne 0$ і $V(0)=0$.

Означення 9.4. Функція $V(x)$ називається знакосталою на множині $\|x\| \le H$, якщо вона набуває недодатних або невід'ємних значень і може дорівнювати нулю не лише в одній точці $x = 0$ (у першому випадку функція називається від'ємно, у другому – додатно сталою).

Означення 9.5. Функція $V(x)$ називається знакозмінною на множині $\|x\| \le H$, якщо вона на цій множині набуває як від'ємних, так і додатних значень.

Приклад 9.5. Визначити типи вказаних функцій:

а) $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$;

б) $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2$;

в) $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

Відповідь: а) – додатно визначена; б) – додатно стала; в) – знакозмінна функція.

Дуже часто функції Ляпунова будують у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$, де B – додатно визначена симетрична квадратна матриця. Сформулюємо критерій додатної визначеності квадратичної форми.

Критерій Сільвестра. Для того, щоб квадратична форма $V(x) = x^T Bx$ була додатно визначеною, необхідно й достатньо, щоб усі головні мінори

$$\Delta_1 = b_{11}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; \Delta_n = |B| \tag{9.38}$$

були додатними.

Для від'ємної визначеності необхідно й достатньо, щоб головні мінори міняли по черзі свій знак, починаючи з від'ємного.

Наведемо геометричну інтерпретацію знаковизначених функцій. Без обмежень на загальність розглянемо додатно визначену функцію трьох змінних і поверхню

$$V(x_1, x_2, x_3) = c \quad (c > 0). \tag{9.39}$$

Якщо $c = 0$, то співвідношення (9.39) задовольняє тільки одна точка $x = 0$. Покажемо, що при досить малих c поверхня (9.39) замкнена.

Дійсно, нехай l – точна нижня грань функції $V(x)$ на множині $\|x\| = H$. Розглянемо неперервну криву, що виходить з початку координат і другим кінцем лежить на поверхні $\|x\| = H$. Оскільки $V(0) = 0$, а на поверхні $V(x) \ge l$, то при $0 < c < l$ у деякій точці кривої функція

$V(x)$ набуває значення c згідно з неперервністю. Звідси випливає замкненість поверхні й те, що точка $x = 0$ входить в цю поверхню.

Ця властивість характерна тільки для знаковизначених функцій, для знакосталих поверхні розімкнені.

9.3.2. Геометрична інтерпретація умов стійкості

Обчислимо повну похідну по t від функції $V(x(t))$ згідно із системою диференціальних рівнянь (9.37):

$$\frac{dV}{dt} = grad_x^T V(x) f(x). \tag{9.40}$$

Виберемо на поверхні $V(x) = c$ будь-яку точку M і обчислимо в ній $grad_x V(x)\big|_{x=M}$.

Такий вектор напрямлений по нормалі в точці M до поверхні $V(x) = c$. Причому нормаль буде зовнішньою, якщо $V(x)$ додатно визначена і вектор напрямлений усередину за умови, що $V(x)$ від'ємно визначена. Геометрично $f(x)$ є вектором швидкості. Знаком скалярного добутку (9.40) визначається стійкість незбуреного розв'язку $x(t) \equiv 0$.

Припустимо, що в деякий момент t динамічна траєкторія визначається точкою M. Проведемо через неї поверхню $V(x) = c$. Розглянемо три випадки:

а) Якщо $\frac{dV}{dt} < 0$ (рис. 9.7), то це означає, що кут між векторами $f(x)$ і $grad_x V(x)$ тупий. А це свідчить про те, що траєкторія входить у поверхню $V(x) = c$. Якщо така властивість буде виконуватися для будь-якої точки траєкторії, то спостерігатиметься асимптотична стійкість.

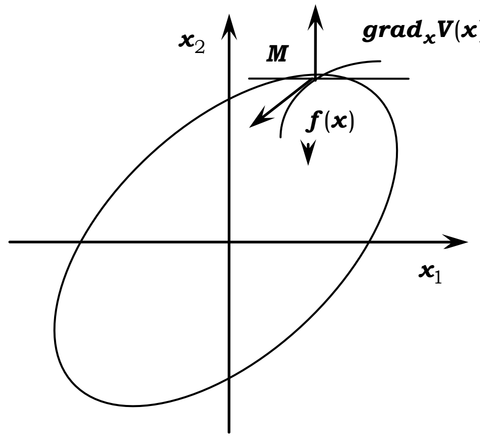

Рис. 9.7

б) Якщо в точці M виконується умова $\frac{dV}{dt}=0$, то кут між векторами $grad_x V(x)$ та $f(x)$ становить $90°$ і траєкторія дотикаються поверхні $V(x)=c$. Якщо вказане співвідношення виконується для будь-якої точки траєкторії, то точка рухається по поверхні $V(x)=V(M)$.

в) Якщо $\frac{dV}{dt}>0$ (рис. 9.8), то траєкторія виходить з поверхні $V(x)=c$.

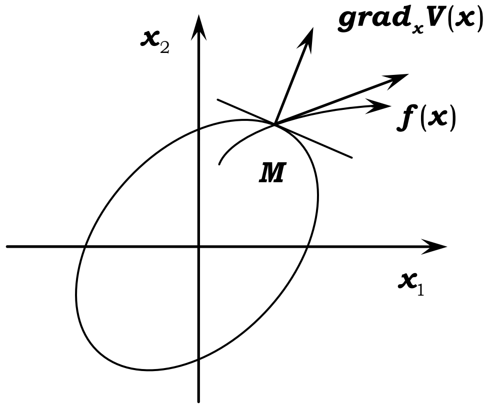

Рис. 9.8

Приклад 9.6. Указати, при яких c лінії рівня замкнені:

а) $V(x)=x_1^2+2x_2^2=c$;

б) $V(x)=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{1+2x_1^2+2x_2^2}=c$.

Розв'язання. а) Функція $V(x)$ додатно визначена і $V(x)\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$. Лінії рівня $V(x)=c$ є еліпсами і замкнені для будь-якого $c>0$; б) співвідношення $V(x)=c$ можна переписати у вигляді $(1-2c)x_1^2+(1-2c)x_2^2=c$. З нього випливає, що лінії рівня замкнені при $0<c<\frac{1}{2}$.

9.3.3. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість

Теорема 9.4 (Ляпунова про стійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (9.37) знайдеться додатно визначена функція $V(x)$, повна похідна від якої по t, згідно із системою (9.37), є функцією від'ємно сталою, то розв'язок $x(t) \equiv 0$ стійкий за Ляпуновим.

Доведення. Виберемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо сферу $\|x\| = \varepsilon$ (рис. 9.9).

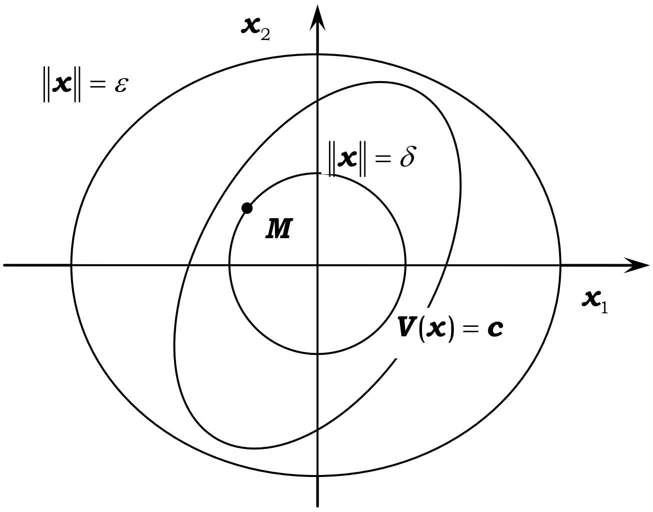

Рис. 9.9

Побудуємо поверхню $V(x) = c$, яка лежить усередині сфери $\|x\| = \varepsilon$. Це можна зробити, оскільки $V(x)$ є неперервною функцією і $V(0) = 0$. Виберемо δ таке, щоб куля $\|x\| \le \delta$ лежала всередині поверхні $V(x) = c$.

Покажемо, що зображувальна точка *M*, починаючи свій рух із δ-околу (точки M_0), не дійде до сфери ε. Дійсно, оскільки $\dot{V} \le 0$, то $V - V_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt} dt \le 0$. Звідси

$$V(x) \le V_0 = V(x_0). \tag{9.41}$$

З (9.41) випливає, що зображувальна точка або знаходиться на поверхні $V(x) = V_0 = c_1$ $\left(\dot{V}_{(7.37)} \equiv 0\right)$, або йде всередину поверхні $V(x) = c_1$. Це й доводить теорему.

Приклад 9.7. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2^3 . \end{cases} \tag{9.42}$$

Розв'язання. Дослідимо на стійкість незбурений рух $x_1 = x_2 = 0$ за допомогою функції $V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Обчислимо $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.42)} = -\left(x_1 - x_2^2\right)^2 \le 0$.

Згідно з теоремою 9.4 незбурений розв'язок $x_1 = x_2 = 0$ стійкий.

Теорема 9.5 (Ляпунова про асимптотичну стійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (9.37) знайдеться додатно визначена функція Ляпунова $V(x)$ така, що $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)}$ є функцією від'ємно визначеною, то незбурений рух $x(t) \equiv 0$ – асимптотично стійкий.

Доведення. Оскільки умови теореми 9.5 сильніші ніж умови теореми 9.4, то зображувальна точка в динаміці не вийде з поверхні $V(x) = c$ (рис. 9.9). Причому вона залишатися на поверхні $V(x) = c$ $\left(\dot{V} < 0\right)$ не може і строго входить в неї. З умови $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} < 0$ випливає, що функція $V(x)$, залишаючись додатною, монотонно спадає. Це значить, що вона має границю c_2, тобто $V(x(t)) \to c_2$, $t \to \infty$. Як видно з рис. 9.10, зображувальна точка M прямує до граничної поверхні $V(x) = c_2$.

Покажемо, що $c_2 = 0$, тобто поверхня $V(x) = c_2$ вироджується в точку – початок координат.

Припустимо, що $c_2 \ne 0$. Тоді в замкненій області $D = \{x : c_2 \le V(x) \le c\}$ функція $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} < 0$ строго від'ємна. Якщо $\dot{V}_{(9.37)}$ є неперервною на D, то вона має точну верхню й нижню границі. З відношення $\dot{V}_{(9.37)} \le -l$ випливає нерівність

$$V(x(t)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} d\tau \le V(x(t_0)) - l\left(t - t_0\right). \tag{9.43}$$

З (9.43) випливає, що з часом функція $V(x(t))$ стає від'ємною, а це суперечить умові теореми. Тому $c_2 = 0$, тобто зображувальна точка асимптотично прямує в початок координат. Теорему доведено.

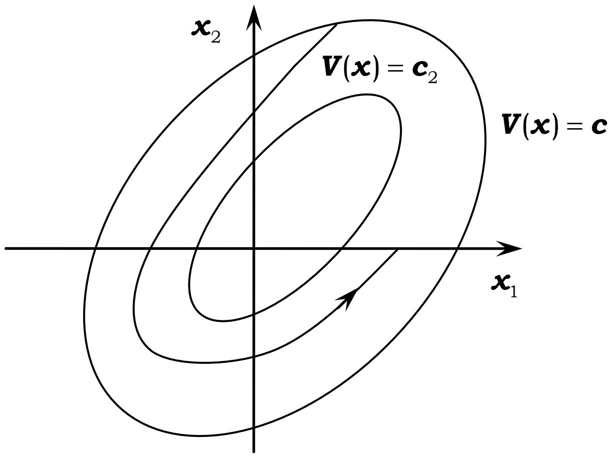

Рис. 9.10

9.3.4. Теореми Четаєва й Ляпунова про нестійкість

Теорема 9.6 (Четаєва про нестійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (9.37) можна знайти функцію $V(x)$, для якої в як завгодно малому околі точки $x = 0$ існує область $V(x) > 0$, а $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} > 0$ у всіх точках області $V(x) > 0$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ – нестійкий.

Доведення. Припустимо, що функція $V(x)$ визначена на множині $x^T x \le \mu (\mu > 0)$. Візьмемо як завгодно мале $\varepsilon > 0$ і побудуємо кулю $x^T x \le \varepsilon \le \mu$. Для того, щоб виявити нестійкість, достатньо знайти в як завгодно малому околі точки $x = 0$ хоч би одну траєкторію, яка виходить за сферу радіусом $\sqrt{\varepsilon}$.

Візьмемо початкове положення точки M в області $V(x) > 0$. Причому така точка M_0 може бути вибрана як завгодно близько до точки $x = 0$, але не збігатися з нею.

Оскільки в області $V(x) > 0$ виконується $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} > 0$, то функція $V(x)$ монотонно зростає, отже

$$V(x) \geq V_0 > 0, \ t \geq t_0, \tag{9.44}$$

де $V_0 = V(x)\big|_{M_0}$.

Динамічна точка M, з початком у точці M_0, у процесі руху не може перетинати границю області $V > 0$ (на границі $V = 0$, а $V_0 > 0$ і V зростає).

Припустимо, що точка M не виходить за сферу ε, тобто знаходиться всередині замкненої області $G = \left\{x : x^T x \leq \varepsilon, V(x) \geq V_0\right\}$ (рис. 9.11).

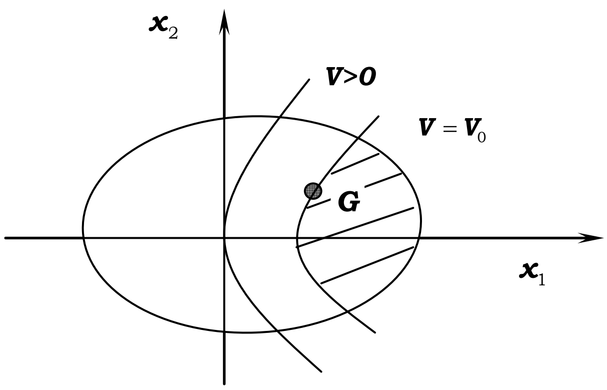

Рис. 9.11

Оскільки функція $V(x)$ неперервна на G, то

$$L_{\min} \leq V(x) \leq L_{\max}. \tag{9.45}$$

На G функція $\dot{V}_{(9.37)} > 0$ також є неперервною. Тому

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} \geq l_1. \tag{9.46}$$

Звідси

$$V(x) \geq V_0 + l_1(t - t_0). \tag{9.47}$$

З (9.47) випливає, що функція $V(x)$ при $t \to \infty$ необмежено зростає, що суперечить (9.45). Отже, наше припущення, що траєкторія не вийде з ε-околу, хибне. Теорему доведено.

Сформулюємо теорему Ляпунова про нестійкість, яка є частинним випадком теореми Четаєва.

Теорема 9.7 (перша теорема Ляпунова про нестійкість). Якщо система диференціальних рівнянь (9.37) така, що існує функція $V(x)$, для якої $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} > 0$, а сама функція $V(x)$ в околі точки $x = 0$ набуває значення $V(x) > 0$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ нестійкий.

Теорема 9.8 (друга теорема Ляпунова про нестійкість). Якщо для системи диференціальних рівнянь (9.37) існує функція $V(x)$ така, що

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.37)} = \lambda V + W\left(x_1, \ldots, x_n\right), \tag{9.48}$$

де $\lambda > 0$, а $W(x)$ або тотожно дорівнює нулю, або додатно стала функція, і при цьому $V(x)$ не є від'ємно сталою, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (9.37) нестійкий.

Доведення. Оскільки $W(x)$ додатна, то з (9.48) маємо $\frac{dV}{dt} \geq \lambda V$. Припустимо, що траєкторія системи диференціальних рівнянь (9.37) не виходить з ε-сфери, тобто

$$\|x\| \leq \varepsilon. \tag{9.49}$$

Тоді $V(x)$ на (9.49) обмежена:

$$V(x) \leq L. \tag{9.50}$$

Оскільки $\frac{dV(x)}{dt}$ залишається додатною на траєкторії, то

$$\frac{dV(x)}{dt} \geq \lambda V(x) \geq \lambda V(x_0) > 0.$$

Звідси

$$V(x) \geq V(x_0) + \lambda(t - t_0)V(x_0), \tag{9.51}$$

що суперечить умові (9.50). Отже, розв'язок виходить з ε-сфери. Теорему доведено.

9.3.5. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем

Розглянемо лінійну стаціонарну систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{9.52}$$

у якій $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – стаціонарна матриця, корені характеристичного рівняння якої $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. У цьому випадку функцію Ляпунова для системи (9.52) можна побудувати у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx$. Симетрична додатно визначена матриця B знаходиться з умови

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(9.52)} = -x^T Dx\,, \tag{9.53}$$

де D – задана додатно визначена матриця.

Для знаходження симетричної матриці B користуються матричним рівнянням Ляпунова

$$AB + BA = -D\,, \tag{9.54}$$

яке легко отримується з умови (9.53).

При розв'язуванні прикладних задач часто користуються співвідношенням Релея

$$\rho_{\min}^{B} \le \frac{x^T Bx}{x^T x} \le \rho_{\max}^{B}\,, \tag{9.55}$$

де $\rho_{\min}^{B}$, $\rho_{\max}^{B}$ – мінімальне й максимальне власні значення симетричної додатно визначеної матриці B.

9.4. Елементи теорії практичної стійкості систем звичайних диференціальних рівнянь

Задачі практичної стійкості (технічної стійкості, стійкості на кінцевому інтервалі часу) уперше досліджувались у працях відомого вченого М.Г. Четаєва та ін. Основою таких досліджень була робота О.М. Ляпунова, у якій ставились задачі отримання $\varepsilon - \delta$ оцінок для різного типу динамічних систем. Незважаючи на велику кількість наукових праць у цьому напрямі, виникає необхідність подальшого розвитку дослідження стійкості для розв'язування прикладних задач. Зокрема виявилося, що основні задачі оптимального формування пучків заряджених частинок – це задачі практичної стійкості в оптимізаційних постановках. З іншого боку, такі прикладні задачі приводять до необхідності дослідження нових математичних проблем: задач практичної стійкості з екстремальними властивостями, побудови конструктивних критеріїв для певних класів динамічних систем, оптимізації отриманих оцінок тощо. В останньому випадку ми приходимо до розв'язання непростих задач з недиференційованими критеріями якості.

9.4.1. Основні поняття та означення практичної стійкості. Внутрішня й зовнішня стійкості

Розглянемо задачі практичної стійкості, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь. Подібні задачі ставляться і для інших, складніших математичних моделей, наприклад систем з розподіленими параметрами, математичних моделей, які описуються інтегро-диференціальними рівняннями. Математичні моделі можуть залежати й від параметрів. У цьому випадку задачі стійкості та чутливості взаємопов'язані, що дає можливість глибше зрозуміти їх сутність.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ t \in [t_0, T], \tag{9.56}$$

у якій $x^T = (x_1, x_2, .., x_n)$ – n-вимірний вектор стану рухомого об'єкта, t – незалежна скалярна змінна, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор-функція, яка задовольняє умови теореми існування та єдиності, $f(0,t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$, а за необхідності систему (9.56) будемо розглядати й на нескінченному відрізку часу $t \geq t_0$.

Нехай G_0 – множина допустимих початкових станів для системи (9.56), Φ_t – множина допустимих фазових станів вектора x у момент t, $\|x(t)\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}$ – евклідова норма вектора x у момент t, $x = x(t, t_0, x_0)$ – розв'язок задачі Коші для системи (9.56) за початкових умов $x(t_0) = x_0$.

Означення 9.6. Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ системи (9.56) будемо називати внутрішньо $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійким, якщо $x(t, t_0, x_0) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ для будь-яких початкових умов $x_0 \in G_0$.

Існує певна кількість прикладних задач аналізу й керування пучками траєкторій, у яких не має прив'язки до незбуреного (розрахункового) розв'язку. У такому випадку $x(t) \equiv 0,\ t \in [t_0, T]$ може й не задовольняти систему (9.56), а означення 9.6 доцільно дати так:

Означення 9.7. Будемо говорити, що система (9.56) має якість внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості, якщо $x(t, t_0, x_0) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ для будь-яких початкових умов $x_0 \in G_0$.

При цьому $x(t) \equiv 0,\ t \in [t_0, T]$ може й не належати множинам $\Phi_t,\ t \in [t_0, T]$.

Означення 9.8. Незбурений розв'язок системи (9.56) $x(t) \equiv 0, t \ge t_0$ будемо називати асимптотично внутрішньо $\{G_0, \Phi_t, t_0, \infty\}$-стійким, якщо:

- означення 9.6 справедливо для будь-якого $T < \infty$;
- $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0, t \to \infty$ для будь-яких $x_0 \in G_0$.

У прикладних задачах структура множини початкових даних часто визначається в еліпсоїдальній формі $G_0 = \{x : x^T B x \le c^2\}$, де B – задана симетрична додатно визначена матриця розмірністю $n \times n$.

Означення 9.9. Незбурений рух $x(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ системи (9.56) будемо називати внутрішньо $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-стійким, якщо $x(t, t_0, x_0) \in \Phi_t,\ t \in [t_0, T]$ для будь-яких початкових умов $x_0 \in \{x : x^T B x \le c^2\}$.

Нехай D_0 – деяка множина початкових даних, для якої справедливе співвідношення $D_0 \cap \overline{\Phi_{t_0}} \ne \varnothing$, де $\overline{\Phi_{t_0}}$ – доповнення до множини Φ_{t_0}. Введемо означення зовнішньої стійкості. Таке означення, як і у випадку внутрішньої стійкості, можна вводити двома способами.

Означення 9.10. Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ системи (9.56) будемо називати зовнішньо $\{D_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійким, якщо для будь-якої точки $x_0 \in D_0$ існує хоча б один момент $t_1 \in [t_0, T]$ такий, що $x(t_1, t_0, x_0) \in \Phi_{t_1}$.

Якщо ж $x(t) \equiv 0,\ t \in [t_0, T]$ не є розрахунковим розв'язком, то означення зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості можна дати так:

Означення 9.11. Будемо говорити, що система (9.56) має якість зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості, якщо для будь-якої точки $x_0 \in D_0$ існує хоча б один момент $t_1 \in [t_0, T]$ такий, що $x(t_1, t_0, x_0) \in \Phi_{t_1}$. За аналогією приводяться означення зовнішньої $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості.

Надалі будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь (9.56) з постійно діючими збуреннями

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + R(x, t), t \in [t_0, T]. \tag{9.57}$$

Тут $R^T(x, t) = (R_1(x, t), R_2(x, t), .., R_n(x, t)) \in \Omega_R$ – вектор постійно діючих збурень із заданої області Ω_R.

Означення 9.12. Незбурений процес $x(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ системи (9.56) будемо називати внутрішньо $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійким при постійно діючих збуреннях $R(x,t) \in \Omega_R$, якщо $x(t, t_0, x_0) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$ для будь-яких початкових даних та постійно діючих збурень, які задовольняють співвідношення

$$x_0 \in G_0, \; R(x,t) \in \Omega_R.$$

Зрозуміло, що останнє означення, за аналогією з означенням 9.7, можна дати й у такій формі:

Означення 9.13. Будемо говорити, що система (9.57) має якість внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійкості, якщо $x(t, t_0, x_0) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$, для будь-яких $x_0 \in G_0$, $R(x,t) \in \Omega_R$.

Означення 9.14. Незбурений процес $x(t) \equiv 0, t \in [t_0, T]$ системи (9.57) будемо називати зовнішньо $\{D_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійким при постійно діючих збуреннях $R(x,t) \in \Omega_R$, якщо для будь-якої точки $x_0 \in D_0$ знайдеться хоча б один момент часу $t_1 \in [t_0, T]$, для якого $x(t_1, t_0, x_0) \in \Phi_{t_1}$ для довільного $R(x,t) \in \Omega_R$.

Означення 9.15. Будемо говорити, що система (9.57) має якість зовнішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійкості при постійно діючих збуреннях $R(x,t) \in \Omega_R$, якщо для будь-якої точки $x_0 \in G_0$ знайдеться хоча б один момент часу $t_1 \in [t_0, T]$, для якого $x(t_1, t_0, x_0) \in \Phi_{t_1}$ для довільних $R(x,t) \in \Omega_R$.

Критерії практичної стійкості далі будемо формулювати для двох типів множин:

$$\Gamma_t \overset{\Delta}{=} \Phi_t = \{x : | l_s^T(t) x | \le 1, s = 1, 2, \ldots, N\}, t \in [t_0, T], \tag{9.58}$$

$$\Psi_t \overset{\Delta}{=} \Phi_t = \{x : \psi(x,t) \le 1\}, t \in [t_0, T]. \tag{9.59}$$

Тут $l_s(t)$ – задані кусково-неперервні функції розмірністю n, $\psi(x,t)$ – скалярна функція, неперервна за t разом зі своїми частинними похідними за компонентами вектора x, Ψ_t – замкнені опуклі множини для будь-яких $t \in [t_0, T]$, що містять внутрішню точку $x(t) \equiv 0$.

При формулюванні теорем і критеріїв будемо користуватися загальноприйнятими означеннями функцій Ляпунова і припускати, у разі необхідності, їх неперервність разом із частинними похідними на множинах визначення. При записі критеріїв для фазових обмежень (9.58), (9.59) далі будемо користуватися нерівностями

$$|a^T x| \le \sqrt{c^2 a^T B^{-1} a}\,,\ x \in \{x : x^T Bx \le c^2\}\,, \tag{9.60}$$

$$|a^T x| \le \sqrt{x^T Bx a^T B^{-1} a}\,, \tag{9.61}$$

$$\rho_{\min}^{(B)} \le \frac{x^T Bx}{x^T x} \le \rho_{\max}^{(B)}\,, \tag{9.62}$$

де B – задана додатно визначена матриця розмірністю $n \times n$, $\rho_{\min}^{(B)}, \rho_{\max}^{(B)}$ – мінімальне та максимальне власні значення матриці B, B^{-1} – обернена до B матриця.

Нерівність (9.62) є співвідношенням Реллея. А співвідношення (9.60) та (9.61) легко довести шляхом розв'язання такої задачі на умовний екстремум:

$$a^T x \to extr \tag{9.63}$$

за умови

$$x^T Bx = c^2. \tag{9.64}$$

Складемо функцію Лагранжа $L(x,\lambda) = a^T x + \lambda(c^2 - x^T Bx)$ і запишемо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = a - 2\lambda Bx = 0, \tag{9.65}$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = c^2 - x^T Bx = 0. \tag{9.66}$$

З (9.65) знаходимо

$$x = \frac{1}{2\lambda} B^{-1} a \tag{9.67}$$

і, підставивши його в (9.66), визначаємо множник Лагранжа

$$\frac{1}{2\lambda} = \pm \frac{c}{\sqrt{a^T B^{-1} a}}. \tag{9.68}$$

За допомогою параметрів (9.68), на основі формули (9.67) знаходимо дві точки, які дають максимум і мінімум лінійної форми (9.63) на еліпсоїді (9.64):

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{a^T B^{-1} a}} B^{-1} a. \tag{9.69}$$

З використанням знайдених точок екстремуму (9.69) доведення нерівностей (9.60) та (9.61) стає очевидним.

9.4.2. Прикладні постановки деяких задач практичної стійкості

На основі введених означень можна сформулювати різноманітні постановки задач.

Задача 9.1. Множини $G_0, \Phi_t, t \in [t_0, T]$ задані. Перевірити, чи будуть виконуватися умови внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.56).

Задача 9.2. Задано множину G_0. Визначити фазові обмеження Φ_t, для яких пучок траєкторій, породжений множиною G_0, не буде покидати Φ_t, $t \in [t_0, T]$, тобто будуть виконуватися умови внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості. При цьому на множину Φ_t можуть накладатися додаткові умови, наприклад, щоб вона мала в певному сенсі оптимальні характеристики.

Задача 9.3. За відомими фазовими обмеженнями Φ_t, $t \in [t_0, T]$ визначити множини G_0 таким чином, щоб система (9.56) мала якість внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості.

Задача 9.4. Для заданих множин G_0, Φ_t, $t \geq t_0$ знайти найбільший проміжок часу $[t_0, T]$, на якому виконувалися б умови внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості нульового розв'язку системи (9.56).

Аналогічні задачі можна ставити для розрахунку та аналізу зовнішньої стійкості.

Задача 9.5. Множини D_0 та Φ_t, $t \in [t_0, T]$ задані. Перевірити, чи будуть виконуватися умови зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.56).

Задача 9.6. Множина D_0 задана. Визначити фазові мінімальні обмеження Φ_t, $t \in [t_0, T]$, для яких виконувалися б умови зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.56).

Задача 9.7. За відомими фазовими обмеженнями Φ_t, $t \in [t_0, T]$ визначити множини D_0 таким чином, щоб система (9.56) мала якість зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості.

Зрозуміло, що подібні постановки можна розглянути і для задач аналізу внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$- та зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійкості системи (9.57). Однак їх кількість суттєво зростає, оскільки при цьому додатково можна вибирати параметри множини постійно діючих збурень Ω_R. У такому випадку суть критеріїв буде полягати в установленні кількісних співвідношень між оцінками множин G_0, Φ_t, $t \in [t_0, T]$, Ω_R і параметром $T - t_0$ для внутрішньої стійкості та D_0, Φ_t, $t \in [t_0, T]$, Ω_R і $T - t_0$ – для зовнішньої стійкості.

9.4.3. Теореми про практичну стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь

Теорема 9.9 (про достатні умови практичної стійкості). Якщо для системи (9.56) можна вказати неперервну функцію Ляпунова $V(x,t)$ і $0<\varepsilon\le 1$, яка задовольняє умови

$$\{x: V(x,t)\le 1\}\subset \Phi_t, t\in[t_0,T]; \qquad (9.70)$$

функція $V(x,t)$ є незростаючою на розв'язках системи (9.56) для всіх

$$x\in\Phi_t\setminus\{x: V(x,t)<1-\varepsilon\}, t\in[t_0,T]; \qquad (9.71)$$

$$G_0\subset\{x: V(x,t)<1\}, \qquad (9.72)$$

то незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ системи (9.56) є $\{G_0,\Phi_t,t_0,T\}$-стійким.

Доведення. Теорему доведемо від супротивного. Нехай умови теореми виконуються, але існують момент часу $t_0<t_1\le T$ і вектор початкових умов $\bar{x}_0\in G_0$ такі, що відповідна траєкторія $\overline{x}_0(t_1,t_0,\overline{x}_0)\bar{\in}\Phi_{t_1}$. З умови (9.70) випливає $V(\overline{x}(t_1,t_0,\overline{x}_0),t_1)>1$.

Згідно з неперервністю функції $V(x,t)$ на розв'язках і тим, що за (9.72) $V(\overline{x}_0,t_0)<1$, існує момент $t_0<t_2<t_1$, для якого

$$V(\overline{x}(t_2,t_0,\overline{x_0}),t_0)=1. \qquad (9.73)$$

Оскільки $V(\overline{x}_0,t_0)<1$ і виконується умова (9.73), а функція $V(x,t)$ неперервна на розв'язках системи, то існує момент $t_0\le t_3<t_2$ такий, що порушується друга умова сформульованої теореми (7.71) на $[t_3,t_2]$. Це протиріччя й доводить теорему.

У наступній теоремі розглянемо множину початкових умов в еліпсоїдальній формі. Для такого випадку теорема 9.9 справедлива, її умови мають необхідний і достатній характер. Отже, можна побудувати функцію Ляпунова, яка буде задовольняти вимоги наступної теореми.

Теорема 9.10. Для того, щоб незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$, $t\in[t_0,T]$ системи (9.56) був внутрішньо $\{c,B,\Phi_t,t_0,T,\}$-стійким, необхідно й достатньо, щоб існували додатно визначена функція Ляпунова $V(x,t)$ і параметр $0<\varepsilon\le 1$, які б задовольняли умови (9.70), (9.71) та

$$\{x: x^T Bx<c^2\}\subset\{x: V(x,t_0)<1\}. \qquad (9.74)$$

Перш ніж доводити сформульовану теорему, відмітимо, що в ній конкретизовано умову для розглянутого випадку, тобто замість (9.72) записано співвідношення (9.74).

Доведення. Достатність умов теореми 9.10 доводиться аналогічно тому, як це робилося в попередній теоремі.

Необхідність. Припустимо, що система (9.56) має якість внутрішньої $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкості. Покажемо існування функції Ляпунова $V(x,t)$, яка задовольняє умови сформульованої теореми. Побудуємо функцію

$$V(x,t) = \frac{1}{c^2}\varphi^T(t,t_0,x)B\varphi(t,t_0,x), \tag{9.75}$$

де $x(t_0) = x_0 = \varphi(t,t_0,x)$ – загальний інтеграл системи (9.56) у формі Коші.

Функція (9.75) додатно визначена, оскільки $V(0,t) = 0$ і $V(x,t) > 0$ при $\|x(t)\| \neq 0, t \in [t_0, T]$ згідно з єдиністю розв'язку задачі Коші для системи (9.56). На траєкторіях системи (9.56) функція (9.75) набуває сталих значень

$$V(x,t) = \frac{1}{c^2} x_0^T B x_0, \tag{9.76}$$

тому друга умова сформульованої теореми справджується при $0 < \varepsilon \leq 1$.

Покажемо, що включення (9.70) виконується. Для доведення припустимо супротивне: розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (9.56) внутрішньо $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкий, але існує $x_1 = x(t_1) \notin \Phi_{t_1}$. Для цього випадку виконується нерівність

$$V(x,t_1) = \frac{1}{c^2}\varphi^T(t_1,t_0,x)B\varphi(t_1,t_0,x) > 1. \tag{9.77}$$

З (9.77) випливає, що й відповідні початкові дані задовольняють співвідношення $\frac{1}{c^2} x_0^T B x_0 > 1$, що суперечить нашому припущенню про внутрішню $\{c, B, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкість системи (9.56).

Умови (9.74) виконуються, оскільки

$$\{x : x^T B x < c^2\} = \{x : V(x,t) < 1\} \text{ при } t = t_0.$$

Необхідність умов теореми показано.

Зауваження 9.2. Якщо структура початкової області задана $\{G_0 = \{x : W(x) < 1\}$, де $W(x)$ – додатно визначена функція, то можна побудувати функцію Ляпунова, яка задовольняє умови сформульованої теореми, у такому вигляді:

$$V(x,t) = W(\varphi(t,t_0,x)). \tag{9.78}$$

Теорема 9.11. Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь (9.56) можна знайти додатно визначену функцію Ляпунова $V(x,t)$, яка задовольняє умови:

$$\{x : V(x,t) \leq 1\} \subset \Phi_t, t \geq t_0; \tag{9.79}$$

функція $\left.\dfrac{dV(x,t)}{dt}\right|_{(9.56)}$ від'ємно визначена на множині

$$\{x : V(x,t) \le 1\}, t \ge t_0; \tag{9.80}$$

на множині (9.80) функція $V(x,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю в точці $x = 0$, тобто існує додатно визначена функція $V_1(x)$, для якої

$$V(x,t) \le V_1(x),\ x \in \{x : V(x,t) \le 1\}, t \ge t_0; \tag{9.81}$$

виконується включення (9.72), то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (9.56) асимптотично внутрішньо $\{G_0, \Phi_t, t_0, \infty\}$-стійкий.

Доведення. Умови сформульованої теореми сильніші ніж умови теореми 9.9, тому має місце співвідношення $x(t,t_0,x_0) \in \Phi_t$, $t \in [t_0,T]$ для будь-яких початкових умов $x_0 \in G_0$ та як завгодно великих T.

Покажемо, що при виконанні умов теореми будуть мати місце граничні співвідношення $\|x(t,t_0,x_0)\| \to 0$, коли $t \to \infty$ для будь-яких $x_0 \in G_0$. Дійсно, оскільки повна похідна за t від функції $V(x,t)$, узята на розв'язках системи (9.56) для будь-яких початкових даних $x_0 \in G_0$, від'ємно визначена, то сама функція $V(x,t)$ буде монотонно спадною на траєкторіях системи (9.56). Вона прямуватиме до деякої границі α, не досягаючи її, тобто

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t,t_0,x_0),t) = \inf_{t \ge t_0} V(t) = \alpha \ge 0. \tag{9.82}$$

Нам необхідно показати, що $\alpha = 0$. Тоді, згідно з довільністю $x_0 \in G_0$ та додатною визначеністю функції $V(x,t)$, будуть виконуватися й умови асимптотичної стійкості для будь-яких $x_0 \in G_0$. Припустимо, що $\alpha > 0$. Оскільки траєкторії системи знаходяться в області $V_1(x) \ge \alpha > 0$, а сама похідна $\left.\dfrac{dV(x,t)}{dt}\right|_{(9.56)}$ є функцією від'ємно визначеною, то можна вказати таке додатне число $\varepsilon > 0$, що $\dfrac{dV(x,t)}{dt} < -\varepsilon,\ t \ge t_0$.

Інтегруючи останню нерівність, приходимо до співвідношення $V(x(t,t_0,x_0),t) < V(x_0,t_0) - \varepsilon(t - t_0)$, яке при $t \to \infty$ суперечить умові додатної визначеності функції $V(x,t)$. Отже, $\alpha = 0$, звідси й випливають асимптотичні властивості $\|x(t,t_0,x_0)\| \to 0$, коли $t \to \infty$ для будь-яких $x_0 \in G_0$. А оскільки, як відмічалося вище, $x(t,t_0,x_0) \in \Phi_t, t \ge t_0$ для довільних $x_0 \in G_0$, то це й означає виконання асимптотичної внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, \infty\}$-стійкості.

Теорему доведено.

Наведемо кілька теорем про практичну стійкість при постійно діючих збуреннях. Припустимо, що множина Ω_R задана у вигляді

$$\Omega_R^{(1)} = \{R(x,t) : | R_i(x,t) | \leq \bar{R}_i(t), i = 1,2,..,n, t \in [t_0, T]\}, \tag{9.83}$$

де $\bar{R}_i(t)$ – задані додатні функції на $[t_0, T]$.

Теорема 9.12. Якщо для системи (9.57) можна вказати додатно визначену функцію $V(x,t)$ і $0 < \varepsilon \leq 1$ такі, що виконуються умови (9.70), (9.72) і

$$\frac{dV(x,t)}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} \right| \bar{R}_i(t) \leq 0, \tag{9.84}$$

$$x \in \Phi_t \setminus \{x : V(x,t) < 1 - \varepsilon\}, t \in [t_0, T],$$

то система (9.57) має якість внутрішньої $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R^{(1)}\}$-стійкості.

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконуються, але в деякий момент $t_1 \in [t_0, T]$ розв'язок системи з початковими умовами $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \in G_0$ покине множину Φ_{t_1}, тобто $\bar{x}(t_1) = x(t_1, t_0, x) \notin \Phi_{t_1}$. Тоді, згідно з неперервністю розв'язків системи (9.57), існує момент $t_0 < t_2 < t_1$, для якого $\bar{x}(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, t_2]$ і $V(\bar{x}(t_2), t_2) = 1$. Оскільки функція $V(x,t)$ неперервна за змінною t, то, згідно зі співвідношенням (9.72), знайдеться додатне число $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ і момент $t_0 \leq t_3 < t_2$ такі, що $V(\bar{x}(t_3), t_3) = 1 - \varepsilon_1$ і $\bar{x}(t) \in \Phi_t \setminus \{x : V(x,t) < 1 - \varepsilon\}, t \in [t_3, t_2]$. Тоді

$$V(\bar{x}(t_2), t_2) - V(\bar{x}(t_3), t_3) = \int_{t_3}^{t_2} \frac{dV(x(t),t)}{dt} dt = \varepsilon_1 > 0,$$

що суперечить умові (9.84).

Теорему доведено.

Для формулювання наступних теорем припустимо, що постійно діючі збурення довільні з простору L_p:

$$R(x,t) \in \Omega_R^{(2)} = \{R(x,t) : (\int_{t_0}^{T} \|R(x(\tau),\tau)\|^p \, d\tau)^{\frac{1}{p}} \leq \bar{R}\}. \tag{9.85}$$

Теорема 9.13. Якщо для системи звичайних диференціальних рівнянь (9.57) можна вказати додатно визначену функцію Ляпунова

$V(x,t)$, що задовольняє умови (9.70), (9.72), і для довільної n-вимірної функції $\psi(t)\in\Phi_t, t\in[t_0,T]$ з класу розв'язків системи має місце співвідношення

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial V(\psi(\tau),\tau)}{\partial t}+grad_x^T V(\psi(\tau),\tau)\right]d\tau+$$

$$+\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left\|grad_x^T V(\psi(\tau),\tau)\right\|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\overline{R}\le 0, t\in[t_0,T],\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad (9.86)$$

то незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ системи (9.57) внутрішньо $\{G_0,\Phi_t,t_0,T,\Omega_R^{(2)}\}$-стійкий.

Доведення. Сформульовану теорему будемо доводити від супротивного. Нехай умови теореми виконуються, але система (9.57) не має вказаної якості стійкості. Це означає, що для деякої траєкторії $\overline{x}(t)$ з початковими умовами $\overline{x}(t_0)=\overline{x}_0\in G_0$ знайдеться момент $t_1\in(t_0,T]$, для якого $\overline{x}(t_1)\notin\Phi_{t_1}$. З урахуванням співвідношень (9.70) та (9.72) можна стверджувати, що існують такий момент $t_2\in(t_0,t_1]$, у який $V(\overline{x}(t_2),t_2)=1$, а також $\varepsilon>0$, для якого $V(\overline{x}(t_0),t_0)=1-\varepsilon$. За аналогією з доведенням попередньої теореми розглянемо співвідношення

$$V(\overline{x}(t_2),t_2)-V(\overline{x}(t_0),t_0)=\varepsilon=\int\limits_{t_0}^{t_2}\left(\frac{\partial V(\overline{x}(\tau),\tau)}{\partial t}+grad_x^T V(\overline{x}(\tau),\tau)f(\overline{x}(\tau),\tau)\right)d\tau+$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_2} grad_x^T V(\overline{x}(\tau),\tau)R(\overline{x}(\tau),\tau)d\tau>0.$$

Звідси
$$\int\limits_{t_0}^{t_2}\left(\frac{\partial V(\overline{x}(\tau),\tau)}{\partial t}+grad_x^T V(\overline{x}(\tau),\tau)f(\overline{x}(\tau),\tau)\right)d\tau+$$

$$+\left(\int\limits_{t_0}^{t_2}\left\|grad_x^T V(\psi(\tau),\tau)\right\|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\overline{R}>0,$$

що суперечить умові (9.86).

Теорему доведено.

Теорема 9.14. Якщо для системи (9.57) можна вказати додатно визначену функцію Ляпунова $V(x,t)$ і число $A > 1$ такі, для яких виконуються умови (9.70) і

$$D_0 \subset \{x : V(x(t_0), t_0) < A\}, \tag{9.87}$$

а для довільної n-вимірної функції $\psi(t) \in E_n \setminus \Phi_t, \psi(t_0) \in D_0, t \in (t_0, T]$ з класу розв'язків системи виконується нерівність

$$\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial V(\psi(\tau),\tau)}{\partial t} + grad_x^T V(\psi(\tau),\tau) f(\psi(\tau),\tau) \right) d\tau +$$

$$+ \left(\int_{t_0}^{t} \left\| grad_x^T V(\psi(\tau),\tau) \right\|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \bar{R} \le 1 - A,\ t \in (t_0, T],\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{9.88}$$

то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (9.57) зовнішньо $\{D_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R^{(2)}\}$-стійкий.

Доведення. Проведемо доведення сформульованої теореми за аналогією з попередньою. Припустимо, що умови теореми виконуються, але система (9.57) не має якості зовнішньої $\{D_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R^{(2)}\}$-стійкості. Отже, для деяких початкових умов $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \in D_0$ відповідна траєкторія $\bar{x}(t) \notin \{x : V(x,t) \le 1\}$ для жодного моменту $t \in [t_0, T]$. Ураховуючи нерівності $V(\bar{x}(t_0), t_0) < A$, $V(\bar{x}(t), t) > 1, t \in [t_0, T]$, запишемо різницю

$$V(\bar{x}(t), t) - V(\bar{x}(t_0), t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(\tau),\tau)}{\partial t} + grad_x^T V(x(\tau),\tau) f(x(\tau),\tau) \right) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} grad_x^T V(\bar{x}(\tau),\tau) R(\bar{x}(\tau),\tau) d\tau > 1 - A, t \in (t_0, T],$$

що суперечить умові (9.88). Це протиріччя й доводить теорему.

9.4.4. Оптимальні оцінки в задачах практичної стійкості лінійних однорідних систем

Нехай рух об'єкта описується лінійною однорідною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [t_0, T], \tag{9.89}$$

де x – вектор стану системи розмірністю n, $A(t)$ – n-вимірна квадратна матриця з неперервними елементами на $[t_0, T]$.

Твердження 9.1. Для внутрішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.89) необхідно й достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,\dots,N} [l_s^T(t)X(t,t_0)B^{-1}X^T(t,t_0)l_s(t)]^{-1}. \qquad (9.90)$$

Дійсно, для доведення сформульованого твердження скористаємося теоремами 9.9 та 9.10. Оскільки загальний розв'язок системи (9.89) можна записати у формі Коші $x(t) = X(t,t_0)x(t_0)$, то загальний інтеграл для цієї системи зображується у вигляді

$$x(t_0) = x_0 = \varphi(t, t_0, x_0) = X(t_0, t)x. \qquad (9.91)$$

Тут $X(t,t_0)$ – нормована за моментом t_0 фундаментальна матриця для системи (9.89), яка є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt} = A(t)X(t,t_0), \quad X(t_0,t_0) = E, \qquad (9.92)$$

E – одинична матриця розмірністю $n \times n$.

Згідно з теоремою 9.10 і виглядом загального інтеграла (9.91) для нашого випадку, функцію Ляпунова для системи (9.89) запишемо у формі (9.75):

$$V(x,t) = \frac{1}{c^2} x^T X^T(t_0,t) B X(t_0,t)x. \qquad (9.93)$$

Маючи функцію Ляпунова (9.93), умови внутрішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T\}$-стійкості згідно з (9.70) подамо у вигляді

$$\left\{x : \frac{1}{c^2} x^T X^T(t_0,t) B X(t_0,t)x \le 1\right\} \subset$$

$$\subset \{x : |\, l_s^T(t)\,| \le 1, s = 1,2,\dots,N\}, t \in [t_0, T]. \qquad (9.94)$$

Умови включення (9.94) легко визначаються за допомогою нерівностей (9.60), (9.61), що й доводить твердження 9.1.

Для перевірки умов (9.90) потрібно чисельно розв'язувати матричну задачу Коші (9.92) і знаходити мінімуми за індексом s та незалежною змінною t. При чисельному моделюванні n задач Коші для системи (9.89) з різними початковими умовами можна розпаралелювати обчислювані процеси з метою підвищення швидкодії.

Твердження 9.2. Для внутрішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T\}\}$-стійкості системи (9.89) необхідно й достатньо, щоб справджувалась нерівність

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,\dots,N} [l_s^T(t)Q(t)l_s(t)]^{-1}, \qquad (9.95)$$

де $Q(t)$ – симетрична додатно визначена матриця розмірністю $n \times n$, що задовольняє матричне диференціальне рівняння Ляпунова

$$\frac{dQ}{dt} = A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t), Q(t_0) = B^{-1}. \tag{9.96}$$

Співвідношення (9.95) отримуємо безпосередньо шляхом диференціювання матриці $Q(t) = X(t,t_0)B^{-1}X^T(t,t_0)$ і врахування матричного рівняння (9.92). Оскільки матриця $Q(t)$ симетрична, то при реалізації алгоритму розв'язування рівнянь (9.95), (9.96) час обчислень суттєво зменшується. Чисельне моделювання матричного рівняння (9.92) еквівалентно розв'язуванню системи диференціальних рівнянь у нормальній формі порядку n^2, а для матричного диференціального рівняння Ляпунова (9.96) необхідно розв'язувати систему рівнянь у нормальній формі порядку $\frac{n(n+1)}{2}$.

Розглянемо випадок, коли матриця $A(t)$ у системі (9.89) стаціонарна:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{9.97}$$

обмеження в (9.58) також стаціонарні, тобто вектори $l_s(t), s = 1,2,...,N$ не залежать від t.

Твердження 9.3. Для внутрішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, \infty\}$-асимптотичної стійкості системи (9.97) необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$ були з від'ємними дійсними частинами та виконувалось співвідношення

$$c^2 \le \inf_{t \ge t_0} \min_{s=1,2,...,N} [l_s^T e^{A(t-t_0)} B^{-1} e^{A^T(t-t_0)} l_s]^{-1}. \tag{9.98}$$

У (9.98) $e^{A(t-t_0)}$ – матрична експонента, нормована за моментом t_0 фундаментальною матрицею для системи (9.97).

Достатні умови такої стійкості можна сформулювати для стаціонарної системи (9.97) за допомогою функції Ляпунова, яка будується у квадратичній формі $V(x) = x^T B^{(1)} x$. При цьому, як відомо, додатно визначена симетрична матриця $B^{(1)})$ визначається з алгебраїчного матричного рівняння Ляпунова

$$B^{(1)}A + A^T B^{(1)} = -D, \tag{9.99}$$

де D – задана від'ємно визначена симетрична матриця.

Твердження 9.4. Для внутрішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, \infty\}$-асимптотичної стійкості системи (9.97) достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння $|\lambda E - A| = 0$ були з від'ємними дійсними частинами та виконувалась нерівність

$$c^2 \le \min_{s=1,2,\dots,N} [\rho_{\max}(B^{(1)}) l_s^T B^{(1)-1} l_s]^{-1}. \qquad (9.100)$$

Тут $\rho_{\max}(B^{(1)})$ – максимальне власне значення матриці $B^{(1)}$.

Зауваження 9.3. Оцінка (9.98) оптимальна при $B = E$ порівняно з (9.100) у тому сенсі, що

$$\inf_{t \ge t_0} \min_{s=1,2,\dots,N} [l_s^T e^{(A+A^T)(t-t_0)} l_s]^{-1} \ge \min_{s=1,2,\dots,N} [\rho_{\max}(B^{(1)}) l_s^T B^{(1)-1} l_s]^{-1}. \qquad (9.103)$$

Алгоритми для аналізу внутрішньої $\{c, B, \Psi_t t_0, T\}$-стійкості можна отримати шляхом апроксимації опуклих множин Ψ_t гіперплощинами, тобто звести нелінійні фазові обмеження (9.59) до лінійних (9.58), а потім для запису критеріїв застосувати розроблену вище методику.

Твердження 9.5. Для внутрішньої $\{c, B, \Psi_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.89) необхідно й достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{l(\,|\,|l|\,|=1)} \frac{[k(l,t) g^T(l,t) l]^2}{g^T(l,t) Q(t) g(l,t)}. \qquad (9.102)$$

Тут l – довільний одиничний вектор розмірністю n, $k(l,t)$ – додатна скалярна функція, що є розв'язком рівняння $\psi(k(l,t)l, t) = 1$ для будь-яких l та t, $Q(t)$ – матриця розмірністю $n \times n$, яка може обчислюватись згідно з матричною задачею Коші (9.96) або розв'язанням системи (9.92) і врахуванням співвідношення $Q(t) = X(t, t_0) B^{-1} X^T(t, t_0)$.

9.4.5. Критерії практичної стійкості лінійних неоднорідних систем

Дослідимо задачу практичної стійкості лінійної нестаціонарної системи при постійно діючих збуреннях

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [t_0, T], \qquad (9.103)$$

де $f(t)$ – деяка n-вимірна вектор-функція. В одному випадку будемо припускати, що вона є відомою кусково-неперервною функцією, в іншому – невідомою, що задовольняє умову

$$\|f(t)\| = \left(\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} |\, f_i(t) \,|^q \right)^{q_1/q} dt \right)^{1/q_1} \le \overline{R}. \qquad (9.104)$$

Розглянемо випадок, коли $f(t)$ є відомою функцією. Запишемо розв'язок системи (9.103) у формі Коші:

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau\,, \tag{9.105}$$

а також зазначимо належність траєкторії множині Γ_t

$$z(t) \in \{z : -1 - l_s^T(t)a(t) \le l_s^T(t)z(t) \le 1 - l_s^T(t)a(t), \quad s = 1,2,..,N\}, t \in [t_0,T]\,, \tag{9.106}$$

де
$$z(t) = X(t,t_0)x(t_0)\,, \quad a(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau\,.$$

Зрозуміло, що співвідношення (9.106) виконується за умови

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{z\in\{z:z^TQ^{-1}(t)z\le c^2\}} l_s^T(t)z \le L_s^{(1)}(t) \\ \min\limits_{z\in\{z:z^TQ^{-1}(t)z\le c^2\}} l_s^T(t)z \ge L_s^{(2)}(t) \end{array}\right\}, t \in [t_0,T], s = 1,2,\ldots,N\,. \tag{9.107}$$

Тут $L_s^{(1)}(t) = 1 - l_s^T(t)a(t), L_s^{(2)}(t) = -1 - l_s^T(t)a(t)$. Розв'язуючи екстремальні задачі (9.107) або користуючись нерівностями (9.60), (9.61), сформулюємо твердження.

Твердження 9.6. *Для внутрішньої* $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T\}$*-стійкості системи (9.103) при відомих збуреннях* $f(t)$ *необхідно й достатньо, щоб виконувалось співвідношення*

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]}\min_{s=1,2,..,N} \frac{(1-|\,l_s^T(t)a(t)\,|)^2}{l_s^T(t)Q(t)l_s(t)}\,, \tag{9.108}$$

$$|\,l_s^T(t)a(t)\,| < 1, t \in [t_0,T], s = 1,2,\ldots,N\,.$$

При користуванні формулою (9.108) необхідно розв'язувати чисельно матричну задачу Коші (9.96), або, ураховуючи структуру матриці $Q(t)$, обчислювати фундаментальну матрицю згідно з (9.92). У даному випадку останньому варіанту треба віддати перевагу, оскільки необхідно в (9.108) обчислювати інтеграл $a(t)$.

Твердження 9.7. *Для внутрішньої* $\{c, B, \Psi_t, t_0, T\}$*-стійкості системи (9.103) при відомих збуреннях* $f(t)$ *необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність*

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]}\min_{l(\|l\|=1)} \frac{[g^T(l,t)(k(l,t)l - a(t))]^2}{g^T(l,t)Q(t)g(l,t)}\,, \tag{9.109}$$

$$g^T(l,t)a(t) < k(l,t)g^T(l,t)l, t \in [t_0,T] \ \forall l \ \left(\|l\|=1\right),$$

де $g(l,t) = grad_x \psi(k(l,t)l,t)$, $k(l,t)$ – розв'язок рівняння $\psi(k(l,t)l,t)=1$ для будь-яких t і l.

Доведення проводиться за аналогією з попереднім апроксимацією замкненої опуклої множини Ψ_t дотичними гіперплощинами, тобто зображенням Ψ_t у вигляді

$$\Psi_t = \{x : \psi(x,t) \le 1\} = \{g^T(l,t)x \le k(l,t)g^T(l,t)l, k(l,t) > 0 \ \forall l (\|l\|=1)\}. \tag{9.110}$$

Аналогічно можна сформулювати критерії для зовнішньої стійкості.

Твердження 9.8. Для зовнішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.103) при відомих збуреннях $f(t)$ необхідно й достатньо, щоб виконувались співвідношення

$$c^2 \le \max_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,..,N} \frac{(1-|l_s^T(t)a(t)|)^2}{l_s^T(t)Q(t)l_s(t)}, \tag{9.111}$$

$$|l_s^T(t)a(t)| < 1, t \in [t_0,T], s = 1,2,\dots,N.$$

Якщо ж постійно діючі збурення задовольняють (9.104), то включення $x(t) \in \Gamma_t, t \in [t_0,T]$ запишемо таким чином:

$$z(t) \in \{z : |l_s^T(t)z| \le 1 - a_s(t), s = 1,2,\dots,N\}, \tag{9.112}$$

$$a_s(t) < 1, t \in [t_0,T], s = 1,2,\dots,N,$$

де

$$a_s(t) = \max_{\|f(t)\|<\overline{R}} \left| l_s^T(t) \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau) d\tau \right| =$$

$$= \overline{R} \left(\int_{t_0}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(t,\tau) l_{si}(t) \right|^p \right)^{p_1/p} d\tau \right)^{1/p_1},$$

$$X(t,\tau) = \{x_{ij}(t,\tau)\}_{i,j=1}^n, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1.$$

Розв'язуючи екстремальні задачі для того, щоб виконувалось включення (9.70), приходимо до таких тверджень.

Твердження 9.9. Необхідні й достатні умови внутрішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійкості при збуреннях, що задовольняють (9.104), мають вигляд

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,..,N} \frac{(1-a_s(t))^2}{l_s^T(t)Q(t)l_s(t)}, \tag{9.113}$$

$$a_s(t) < 1, t \in [t_0, T], s = 1, 2, \ldots, N.$$

Для нелінійних фазових обмежень (9.59) необхідні та достатні умови внутрішньої $\{c, B, \Psi_t, t_0, T\}$-стійкості при збуреннях, які задовольняють (9.104), запишемо таким чином:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{l(\|l\|=1)} \frac{[k(l,t)g^T(l,t)l - a_l(t)]^2}{g^T(l,t)Q(t)g(l,t)}, \tag{9.114}$$

$$k(l,t)g^T(l,t)l > a_l(t) > 0, t \in [t_0, T]\ \forall l(\|l\| = 1).$$

У співвідношеннях (9.114)

$$a_l(t) = \max_{\|f(t)\|<R} \left| g^T(l,t) \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau) d\tau \right| =$$

$$= \overline{R} \left(\int_{t_0}^{t} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(t,\tau) g_i(l,t) \right|^p \right)^{p_1/p} d\tau \right)^{1/p_1}.$$

Ураховуючи умови зовнішньої стійкості (9.111) при відомих збуреннях, а також співвідношення (9.113) і (9.114) для $f(t)$, які задовольняють (9.104), критерії зовнішньої $\{c, B, \Gamma_t, t_0, T, \Omega_R\}$- та $\{c, B, \Psi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійкості запишемо у вигляді

$$c^2 \le \max_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,..,N} \frac{(1-a_s(t))^2}{l_s^T(t)Q(t)l_s(t)}, \tag{9.115}$$

$$a_s(t) < 1, t \in [t_0, T], s = 1, 2, \ldots, N;$$

$$c^2 \le \max_{t\in[t_0,T]} \min_{l(\|l\|=1)} \frac{[k(l,t)g^T(l,t)l - a_l(t)]^2}{g^T(l,t)Q(t)g(l,t)}, \tag{9.116}$$

$$k(l,t)g^T(l,t)l > a_l(t) > 0, t \in [t_0, T], \forall l(\|l\| = 1).$$

На завершення розглянемо рівняння руху системи (9.103) при лінійних фазових обмеженнях (9.58), причому початкові умови й постійно діючі збурення довільні, але в момент $t \in [t_0, T]$ задовольняють співвідношення

$$x(t_0),\ f(t) \in S_c(t) = \Big\{ x(t_0), f(t) : x^T(t_0) B x(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} f^T(\tau) G(\tau) f(\tau) d \le c^2 \Big\}, \tag{9.117}$$

де B та $G(t)$ – додатно визначені квадратні матриці розмірністю n.

Означення 9.16. Будемо говорити, що система (9.103) має якість $\{S_c(t), B, \Gamma_t, t_0, T\}$- (чи $\{S_c(t), B, \Psi_t, t_0, T\}$)-стійкості, якщо для довільних $x(t_0)$, $f(t) \in S_c(t)$ її розв'язок задовольняє співвідношення $x(t) \in \Gamma_t$ $(x(t) \in \Psi_t)$, $t \in [t_0, T]$.

Умову $\{S_c(t), B, \Gamma_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.103) сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 9.15. Для $\{S_c(t), B, \Gamma_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.103) необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,..,N} [l_s^T(t) Q_1(t) l_s(t)]^{-1}, \qquad (9.118)$$

де симетрична матриця $Q_1(t)$ задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = A(t)Q_1(t) + Q_1(t)A^T(t) + G^{-1}(t), \quad Q_1(t_0) = B^{-1}. \qquad (9.119)$$

Доведення теореми проводиться шляхом подання розв'язку системи (9.103) у формі Коші та знаходження максимуму відповідної лінійної форми на множині (9.117). При нелінійних фазових обмеженнях (9.59) критерій $\{S_c(t), B, \Psi_t, t_0, T\}$-стійкості записується так:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{l(\|l\|=1)} \frac{[k(l,t)g^T(l,t)l)]^2}{g^T(l,t)Q_1(t)g(l,t)}. \qquad (9.120)$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)(x(t) + f_2(t)) + f_1(t), \qquad (9.121)$$

причому n-вимірні вектори $x(t_0)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ задовольняють умову

$$x(t_0), f_1(t), f_2(t) \in S_c(t) = \Big\{x(t_0), f_1(\cdot), f_2(\cdot) : x^T(t_0)Bx(t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left(f_1^T(\tau)G_1(\tau)f_1(\tau) + f_2^T(\tau)G_2(\tau)f_2(\tau) \right) d\tau \le c^2 \Big\}. \qquad (9.122)$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 9.16. Для $\{S_c(t), \Gamma_t, t_0, T\}$-стійкості системи (9.121) за початкових умов і збурень, які задовольняють (9.122), необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,..,N} [l_s^T(t) Q_2(t) l_s(t)]^{-1}, \qquad (9.123)$$

де симетрична матриця $Q_2(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = A(t)Q_2(t) + Q_2(t)A^T(t) + G_1^{-1}(t) + A(t)G_2^{-1}(t)A^T(t), \quad Q_2(t_0) = B^{-1}. \tag{9.124}$$

Критерій $\{S_c(t), \Psi_t, t_0, T\}$-стійкості при нелінійних фазових обмеженнях для системи (9.121) за умов (9.122) запишемо у вигляді

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{l(\|l\|=1)} \frac{[k(l,t)g^T(l,t)l)]^2}{g^T(l,t)Q_2(t)g(l,t)}. \tag{9.125}$$

Тут $k(l,t)$ – раніше введена функція змінних l і t, що є розв'язком скалярного рівняння $\psi(k(l,t)l,t) = 1$.

9.4.6. Дослідження задач практичної стійкості нелінійних систем

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{9.126}$$

на замкнених, обмежених множинах фазового простору R^n:

$$\Psi = \{x : \psi_p(x) \le 1, \quad p = 1,2,\dots,N\}, \tag{9.127}$$

$$\Gamma = \{x : | l_s^T x | \le 1, \quad s = 1,2,\dots,N\}, \tag{9.128}$$

де n-вимірна вектор-функція $F(x)$ визначена на множинах (9.127), (9.128) і задовольняє умови теореми існування та єдиності, n-вимірні вектори l_s не змінюються в часі.

Дослідження практичної стійкості системи (9.126) за лінійним наближенням іноді не дає достатньо якісної картини поведінки розв'язку на множинах (9.127), (9.128) за деяких початкових умов, тобто члени більш високого порядку малості значно впливають на властивість стійкості руху.

Задачу практичної стійкості системи (9.126) при обмеженнях (9.127) заміною змінних $y_i = x_i,\ i = 1,2,\dots n,\ y_{p+n} = \psi_p(x),\ p = 1,2,\dots,N$ можна звести до задачі про стійкість системи диференціальних рівнянь розмірністю $n + N$ при обмеженнях типу (9.128), що не завжди бажано, оскільки збільшується розмірність. Тому надалі будемо розглядати обмеження типу (9.127), (9.128).

Якщо в деякому значенні узагальнити поняття $\{c,B,\Gamma,t_0,T\}$- чи $\{c,B,\Psi,t_0,T\}$-стійкості, то для широкого класу систем (9.126) дослідження практичної стійкості можна звести до визначення необхідних і достатніх умов внутрішньої $\{c,B,\Gamma_1,t_0,T\}$- та $\{c,B,\Psi_1,t_0,T\}$-стійкості руху лінійних систем вищого порядку, ніж порядок системи (9.126).

Введемо до розгляду на множинах Γ та Ψ систему лінійно незалежних (структурно заданих) функцій $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_M(x),\ldots$ із властивостями:

1) $\|\varphi(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi_i^2(x) \le \bar{\varphi}^2$,

$$\sum_{i=M+1}^{\infty}\varphi_i^2(x) \le \varphi_M^2,\ \ \varphi_M \to 0 \ \text{ при } \ M \to \infty\,, \qquad (9.129)$$

де $\bar{\varphi}$, φ_M – сталі величини, що не залежать від x з Ψ або Γ;

2) система функцій є повною в деякому класі L_φ, тобто довільну функцію $f(x) \in L_\varphi$ можна зобразити у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x)\,, \qquad (9.130)$$

причому константи a_i задовольняють умову $\|a\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2 \le \infty$;

3) $\|\varphi(0)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi_i^2(0) = 0$;

4) $\varphi_i(x) = x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Визначимо у фазовому просторі множини

$$G_{\lambda,M} = \left\{x : \sum_{i=1}^{M}\varphi_i^2(x) < \lambda^2\right\}, \qquad (9.131)$$

$$G_{c,B^M} = \left\{x : \varphi^T(x)B^M\varphi(x) < c^2\right\},\ \ M \ge n\,, \qquad (9.132)$$

$$\varphi^T(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_M(x))\,.$$

Означення 9.17. Система (9.126) називається внутрішньо $\left\{G_{c,B^M},\Psi,t_0,T\right\}$-стійкою, якщо для довільних початкових умов $x(t_0) \in G_{c,B^M}$ траєкторії системи задовольняють співвідношення

$$x(t) \in \Psi,\ \ t \in [t_0,T]\,.$$

За аналогією вводиться поняття внутрішньої $\left\{G_{c,B^M}, \Gamma, t_0, T\right\}$-стійкості.

Припустимо, що функції $F_i(x)$ на множинах Ψ та Γ мають властивості

$$grad_x^T \varphi_j(x) F(x) \in L_\varphi, \quad j = 1,2,\ldots,M, \qquad (9.133)$$

тоді можливе зображення

$$grad_x^T \varphi_j(x) F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{is}\varphi_s(x), \quad j = 1,2,\ldots,M. \qquad (9.134)$$

Тому на даних множинах можна перейти від нелінійної системи (9.126) до деякої нової лінійної системи більш високого порядку. Введемо нові змінні $y_i = \varphi_i(x)$, $\quad i = 1,2,\ldots,M$, для яких можна записати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} y_j + \sum_{s=M+1}^{\infty} a_{is}\varphi_s(x), \qquad i = 1,2,\ldots,M. \qquad (9.135)$$

У новому фазовому просторі множинам (9.127), (9.128) відповідають

$$\Gamma_1 = \{y : |\, m_s^T y \,| \le 1, \;\; s = 1,2,\ldots,N\}, \;\; \Psi_1 = \{y : \psi_p(y) \le 1, \qquad p = 1,2,\ldots,N\},$$

де $m_s^T = (l_{s1}, l_{s2}, \ldots, l_{sn}, 0, \ldots, 0), s = 1,2,\ldots,N$ – M-вимірні вектори. Згідно з (9.129) для довільного x із множини Γ або Ψ виконується оцінка

$$\overline{R}_{iM} = \max_x \left| \sum_{\mathrm{s=M+1}}^{\infty} a_{\mathrm{is}}\varphi_{\mathrm{s}}(\mathrm{x}) \right| \le \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} \varphi_j^2(x) \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \varphi_M. \qquad (9.136)$$

Це означає, що внутрішня $\left\{G_{c,B^M}, \Gamma, t_0, T\right\}$-стійкість нелінійної системи (9.126) випливає з внутрішньої $\left\{G_{c,B^M}, \Gamma_1, t_0, T\right\}$-стійкості системи

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} y_j + f_i(t), \qquad i = 1,2,\ldots,M \qquad (9.137)$$

при постійно діючих збуреннях, що задовольняють умову

$$|\, f_i(t) \,| \le \overline{R}_{iM}, \qquad i = 1,2,\ldots,M. \qquad (9.138)$$

Використовуючи результати попереднього підрозділу, записуємо критерій внутрішньої $\left\{G_{c,B^M}, \Psi, t_0, T\right\}$-стійкості нелінійної системи (9.126), причому замість (9.126) розглядаємо лінійну систему (9.137) вищого порядку при постійно діючих збуреннях, що задовольняють умову (9.138). Згідно з (9.129) $\overline{R}_{im} \to 0$ при $M \to \infty$. А це означає, що при достатньо великих значеннях M вплив постійно діючих збурень у (9.137) на результати розрахунків указаних типів стійкості може стати незначним. Оцінки для постійно діючих збурень типу (9.136) краще розраховувати таким чином:

$$\overline{R}_{iM} = \max_{x} \left| grad_x \varphi_i(x) F(x) - \sum_{s=1}^{M} a_{is} \varphi_s(x) \right|, \; i = 1,2,\ldots,M . \qquad (9.139)$$

Матрицю $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{M}$ при лінеаризації вихідної системи можна вибрати, виходячи з умов оптимальної апроксимації функцій

$$Q_i(x) = grad_x^T \varphi_i(x) F(x) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} F_j(x), \; i = 1,2,\ldots,M \qquad (9.140)$$

лінійними комбінаціями в класі L_φ. Наприклад, при апроксимації з мінімальними середньоквадратичними похибками на множинах Γ чи Ψ

$$\varepsilon_i = \left(\int_{\Psi} \int \ldots \int \left(Q_i(x) - \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \varphi_j(x) \right)^2 dx_1 \ldots dx_n \right)^{1/2}$$

матриця A визначається виразом $A = \iint\limits_{\Psi} \ldots \int Q(x) \varphi^T(x) dx_1 dx_2 \ldots dx_n K^{-1}$,

де $$K = \iint\limits_{\Psi} \ldots \int \varphi(x) \varphi^T(x) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

$$Q(x) = \left(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_M(x)\right)^T, \; \varphi(x) = \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_M(x)\right)^T .$$

Методику переходу від нелінійної системи (9.126) до лінійної можна використовувати при побудові функцій Ляпунова для нелінійних систем. Нехай однорідна система, що відповідає (9.137), асимптотично стійка. Тоді для неї функцію Ляпунова можна будувати у вигляді квадратичної форми

$$V_1(x) = y^T B_1 y = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} b_{ij}^{(1)} \varphi_i(x) \varphi_j(x) . \qquad (9.141)$$

Матриця $B_1 = \{b_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^{M}$ знаходиться з матричного рівняння $A^T B_1 + B_1 A = -D$, де D – задана додатно визначена матриця.

РОЗДІЛ 10

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

10.1. Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

10.1.1. Зв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \qquad (10.1)$$

Означення 10.1. Розв'язком рівняння (10.1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (10.2)$$

що визначена й неперервна разом із частинними похідними в деякій області змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і перетворює в цій області рівняння (10.1) на тотожність. При цьому $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

Якщо в рівнянні (10.1) функція $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається лінійним:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ...$$
$$... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n, u). \tag{10.3}$$

Розглянемо однорідне рівняння, тобто випадок, коли $R(x_1, x_2, ..., x_n, u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1, x_2, ..., x_n, u)$, $i = 1, 2, ..., n$ не залежать від u:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ ...$$
$$+ X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{10.4}$$

Рівняння (10.4) має очевидний розв'язок

$$u = c \ (c = \text{const}). \tag{10.5}$$

Доведемо, що рівняння (10.4) має безліч розв'язків, відмінних від очевидних. Для цього, разом із (10.4), розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)}. \tag{10.6}$$

Доведемо дві теореми, що встановлюють зв'язок між рівнянням (10.4) і системою (10.6). Припустимо, що коефіцієнти $X_1(x_1, x_2, ..., x_n), X_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., X_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ рівняння (10.4) неперервні разом із частинними похідними за $x_1, x_2, ..., x_n$ у деякому околі точки $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} ..., x_n^{(0)}$ і в цій точці вони одночасно не перетворюються на нуль (тобто точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} ..., x_n^{(0)})$ не є особливою точкою системи (10.6)). Припустимо, що

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} ..., x_n^{(0)}) \neq 0. \tag{10.7}$$

При цьому припущенні система (10.6) має рівно $n - 1$ незалежних інтегралів, визначених і неперервних разом із частинними похідними в околі точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots, x_n^{(0)})$. Це випливає з того, що система (10.6) рівносильна нормальній системі розмірністю $n-1$:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

$$\frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad (10.8)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

для якої виконуються умови теореми про існування незалежних інтегралів нормальної системи.

Теорема 10.1. Довільний інтеграл системи (10.6) є неочевидним розв'язком рівняння (10.4).

Доведення. Припустимо, що $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – інтеграл системи (10.6), визначений у деякому околі точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots, x_n^{(0)})$. Тоді повний диференціал від $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, згідно з (10.6) або (10.8), дорівнює нулю, тобто

$$d\psi_{(10.8)} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n \equiv 0. \qquad (10.9)$$

Ураховуючи співвідношення

$$dx_1 = \frac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}dx_n,\ dx_2 = \frac{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}dx_n, \ldots$$

$\ldots, dx_{n-1} = \dfrac{X_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}dx_n$, перепишемо рівняння (10.9):

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right]dx_n \equiv 0. \qquad (10.10)$$

Скорочуємо на dx_n і множимо на X_n – отримуємо

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0. \qquad (10.11)$$

Це означає, що функція $u = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (10.4).

Теорема 10.2. Довільний неочевидний розв'язок рівняння (10.4) є інтегралом системи (10.6).

Доведення. Нехай $u=\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – неочевидний розв'язок рівняння (10.4). Тоді

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0. \qquad (10.12)$$

Обчислимо

$$d\psi_{(10.8)}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=$$

$$=\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right]dx_n=$$

$$=\left(X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\frac{dx_n}{X_n}=0\,.$$

Це означає, що $\psi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ є інтегралом системи (10.6).

Приклад 10.1. Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння з частинними похідними

$$x\frac{\partial U}{\partial x}-2y\frac{\partial U}{\partial y}-z\frac{\partial U}{\partial z}=0\,. \qquad (10.13)$$

Розв'язання. Запишемо для рівняння (10.13) систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z}\,. \qquad (10.14)$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь (10.14) маємо інтеграли

$$\psi_1=xz,\ \ \psi_2=x\sqrt{y}\,. \qquad (10.15)$$

Тому

$$U_1=xz,\ U_2=x\sqrt{y} \qquad (10.16)$$

є розв'язками рівняння (10.13).

10.1.2. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння з частинними похідними. Розв'язання задачі Коші

Нехай

$$\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,\psi_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (10.17)$$

– незалежні інтеграли системи (10.6). Тоді функція

$$u=\Phi(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-1}), \qquad (10.18)$$

де $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ – будь-яка диференційована функція, буде розв'язком рівняння (10.4).

Дійсно, підставимо (10.18) у (10.4):

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots$$

$$+ X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0 . \quad (10.19)$$

Формулу (10.18) називають загальним розв'язком рівняння (10.4). На відміну від загального розв'язку звичайного диференціального рівняння, у (10.18) входять не довільні сталі, а довільна функція.

Задача знаходження загального розв'язку рівняння (10.4) рівносильна задачі знаходження $(n - 1)$ незалежних інтегралів відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі.

Розглянемо випадок двох незалежних змінних

$$X(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 . \quad (10.20)$$

Запишемо систему в симетричній формі:

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} . \quad (10.21)$$

Якщо $\psi(x, y)$ – інтеграл системи (10.21), то

$$z = \Phi(\psi(x, y)) \quad (10.22)$$

– загальний розв'язок рівняння (10.20). Тут $\Phi(\psi(x, y))$ – довільна неперервно диференційована функція від ψ .

Приклад 10.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 . \quad (10.23)$$

Розв'язання. Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} . \quad (10.24)$$

Для системи (10.24) знаходимо інтеграли

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1 , \; \frac{x_3}{x_1} = c_2 , \ldots , \frac{x_n}{x_1} = c_{n-1} , \quad (10.25)$$

тобто

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\ \psi_2=\frac{x_3}{x_1},\dots,\ \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}. \qquad (10.26)$$

Тоді

$$U=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\right), \qquad (10.27)$$

де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\right)$ – неперервно диференційована функція, буде загальним розв'язком системи (10.23).

Приклад 10.3. Розв'язати рівняння

$$(z-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial U}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial U}{\partial z}=0. \qquad (10.29)$$

Розв'язання. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \qquad (10.30)$$

Легко визначити

$$\psi_1=x+y+z,\ \psi_2=x^2+y^2+z^2. \qquad (10.31)$$

Тому загальний розв'язок має вигляд

$$U=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2). \qquad (10.32)$$

Перейдемо до постановки і розв'язання задачі Коші для рівняння (10.4). Серед усіх розв'язків рівняння треба знайти такий

$$u=f(x_1,x_2,\dots,x_n), \qquad (10.33)$$

що задовольняє початкову умову

$$u=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) \text{ при } x_n=x_n^{(0)} \qquad (10.34)$$

або

$$u\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \qquad (10.35)$$

де $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$ – задана неперервно диференційована функція від $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}$.

Для випадку двох змінних: знайти функцію

$$z=f(x,y), \qquad (10.36)$$

що задовольняє умову

$$z=\varphi(y) \text{ при } x=x^{(0)}. \qquad (10.37)$$

Геометрично (10.36), (10.37) означає, що серед усіх інтегральних поверхонь треба знайти ту, яка проходить через задану криву (10.37) при $x = x^{(0)}$. Ця крива лежить у площині $x = x^{(0)}$, паралельній YOZ.

У загальному випадку розв'язання задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ так, щоб

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{10.38}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi}_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \overline{\psi}_{n-1}. \end{cases} \tag{10.39}$$

Перепишемо (10.38):

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{10.40}$$

Розв'яжемо систему (10.39) в околі точок $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ відносно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (це можливо, оскільки $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли):

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}). \end{cases} \tag{10.41}$$

Виберемо функцію $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})). \tag{10.42}$$

Тоді умова (10.40) буде виконуватися:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1})) =$$
$$= \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Тому функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})) \tag{10.43}$$

– шуканий розв'язок задачі Коші.

Приклад 10.4. Розв'язати задачу Коші $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ за умови $z = \varphi(y)$ при $x = 0$.

Розв'язання. Складаємо систему $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, звідси $\psi = x^2 + y^2$ – інтеграл. Отже, $y^2 = \overline{\psi}, y = \sqrt{\psi}$. Шуканий розв'язок $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Розглянемо частинні випадки (рис. 10.1, 10.2):

а) $\varphi(y) = y$. Тоді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$.

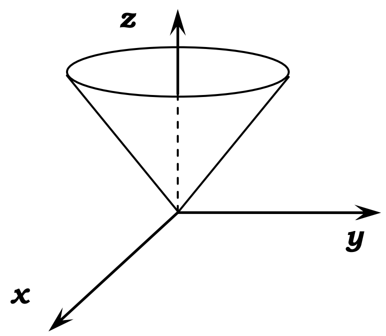

Рис. 10.1

Розв'язок – конус, отриманий обертанням прямої $z = y$ навколо осі OZ;

б) $\varphi(y) = y^2$, $z = x^2 + y^2$.

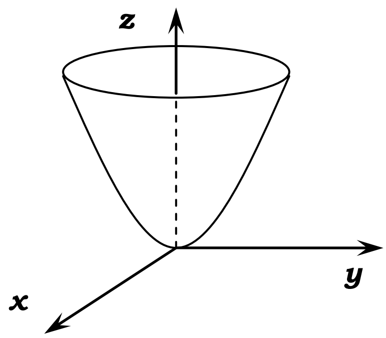

Рис. 10.2

Розв'язок – параболоїд, отриманий обертанням параболи $z = y^2$ навколо осі OZ.

10.2. Розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots$$

$$\cdots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \qquad (10.44)$$

Розв'язок диференціального рівняння (10.44) шукаємо у вигляді

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \qquad (10.45)$$

де $V(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ – неперервно диференційована функція за всіма змінними і $\frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_n, u)}{\partial u} \neq 0$ в околі точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$.

Припустимо, що в (10.45) $u(\cdot)$ залежить від $x_1, x_2, \dots, x_n$. Продиференціюємо (10.45) за x_k:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \ k = 1, 2, \dots, n. \qquad (10.46)$$

Підставивши (10.46) у (10.44), отримаємо

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots$$

$$\dots + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \qquad (10.47)$$

Рівняння (10.47) однорідне. Його розв'язуємо за відомою схемою:

а) складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n,u)}=\dots$$

$$\dots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)}=\frac{du}{R(x_1,x_2,...,x_n,u)}; \qquad (10.48)$$

б) знаходимо n незалежних інтегралів

$$\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u),\ \psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u),...,\ \psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u); \quad (10.49)$$

в) записуємо загальний розв'язок

$$V=\Phi(\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,x_2,...,x_n,u))=0. \quad (10.50)$$

Приклад 10.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=mu \quad (m\neq 0).$$

Розв'язання. Складаємо систему в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\dots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{du}{mu}.$$

Знаходимо інтеграли $\psi_1=\frac{x_2}{x_1}$, $\psi_2=\frac{x_3}{x_1},...,\psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}$, $\psi_n=\frac{u}{x_1{}^m}$. Тоді

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1},\frac{u}{x_1^m}\right)=0 \qquad (10.51)$$

– загальний розв'язок.

Якщо розв'язати (10.51) відносно $\frac{u}{x_1{}^m}$, то отримаємо

$$u=x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},...,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

– загальний розв'язок у явній формі.

Задача Коші ставиться та розв'язується для рівняння (10.44) аналогічно. Знайти функцію

$$u=f(x_1,.x_2,..,x_n), \qquad (10.52)$$

що задовольняє початкову умову

$$u=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1}) \text{ при } x_n=x_n^{(0)}, \qquad (10.53)$$

де $\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ – задана неперервно диференційована функція від $x_1,x_2,...,x_{n-1}$.

Алгоритм для знаходження розв'язку задачі Коші:

а) перепишемо початкові умови (10.53) у вигляді

$u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ при $x_n = x_n^{(0)}$;

б) знайдемо n інтегралів $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ і складемо систему

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_n; \end{cases} \tag{10.54}$$

в) розв'яжемо систему (10.54) відносно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n), \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n), \\ u = \omega_n(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_n); \end{cases} \tag{10.55}$$

г) запишемо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \omega_n(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) -$$
$$-\varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = 0\,. \tag{10.56}$$

При цьому умова (10.53) буде виконуватися.

Приклад 10.6. Розв'язати задачу Коші

$$\left(1 + \sqrt{z - x - y}\,\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2, z = 2x \text{ при } y = 0\,.$$

Розв'язання. Складаємо систему в симетричній формі

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}\,.$$

Звідси $\psi_1 = z - 2y, \psi_2 = 2\sqrt{z - x - y} + y\,.$

При $y = 0$: $z = \overline{\psi}_1$, $2\sqrt{z - x} = \overline{\psi}_2$. Отже

$$\begin{cases} x = \overline{\psi}_1 - \dfrac{\overline{\psi}_2^2}{4}, \\ z = \overline{\psi}_1 \end{cases}.$$

Тому $\psi_1 - 2(\psi_1 - \dfrac{\psi_2^2}{4}) = 0$, $2\psi_1 - \psi_2^2 = 0$ – розв'язок задачі Коші. Остаточно маємо $2z - 4y - (2\sqrt{z - x - y} + y)^2 = 0\,.$

РОЗДІЛ 11

ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

11.1. Основні поняття варіаційного числення

11.1.1. Функціонали та деякі їх властивості

У практичній діяльності ми часто зустрічаємося з оптимальним вибором деяких величин: об'єму тіла, площі земельної ділянки, прибутку фірми, енергії, грошових витрат, шляху і т. д. Для розв'язування таких проблем використовують задачі дослідження на екстремум деяких функцій $y = f(x)$. З математичного аналізу відомо, що в тій точці x_0, де гладка функція має екстремум, її похідна перетворюється на нуль. Разом з такими задачами в математиці при моделюванні різноманітних проблем доводиться визначати максимальне й мінімальне значення складніших математичних об'єктів, які називаються *функціоналами*.

Наведемо кілька прикладів функціоналів.

Приклад 11.1. Нехай $y(x)$ – плоска крива, яка з'єднує точки (a, A) та (b, B). Її довжина є функціоналом (рис. 11.1).

$$l(y(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx\,. \tag{11.1}$$

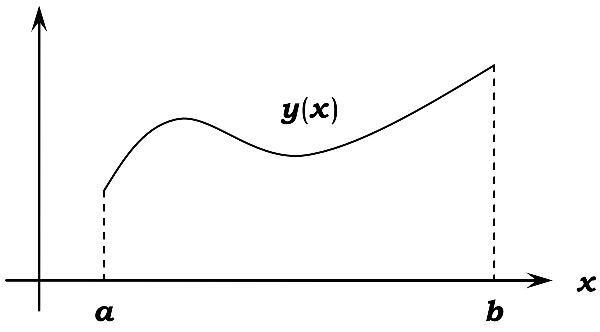

Рис. 11.1

Приклад 11.2. Площа криволінійної трапеції з рис. 11.1 також є функціоналом:

$$S\left(y(x)\right) = \int_a^b y(x)dx \,. \tag{11.2}$$

Приклад 11.3. Розглянемо загальніший випадок. Нехай $F(x, y, z)$ – деяка неперервна функція трьох змінних. Вираз

$$I\left[y\right] = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx \,, \tag{11.3}$$

де $y(x)$ пробігає сукупність можливих неперервно диференційованих функцій, визначених на відрізку $[a, b]$, є функціоналом. Вибираючи ту чи іншу функцію $F(x, y, z)$, отримаємо різні функціонали. Наприклад, якщо $F(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$, то $I = I[y(x)]$ – довжина кривої $y = y(x)$, яка описується виразом (11.1). Головну увагу ми зосередимо на дослідженні функціоналів вигляду (11.3).

Деякі з характеристик твердих тіл, такі, як моменти інерції, координати центра тяжіння деякої однорідної кривої або поверхні, також є функціоналами, оскільки їх значення визначаються вибором кривої або поверхні. Функціоналом є також кінетична енергія матеріального тіла. Багато законів механіки, фізики мають екстремальний характер. Наприклад, серед усіх допустимих траєкторій дійсна траєкторія доставляє екстремум деякому функціоналу.

Варіаційне числення як наукова дисципліна вивчає методи, що дозволяють знаходити максимальні й мінімальні значення функціоналів.

Задачі, у яких необхідно дослідити функціонал на максимум або мінімум, називаються *задачами варіаційного числення.*

Сучасні проблеми науки й техніки часто приводять до набагато складніших варіаційних задач. Типовою проблемою космонавтики є доставка керованого апарата на Місяць або Марс. Відповідна варіаційна задача (або задача оптимального керування) полягає в доставці керованого об'єкта до небесного тіла за найменший час і з найменшими витратами. Іншим прикладом оптимізаційної задачі є створення матеріалів з наперед заданими оптимальними властивостями.

З вищезазначеного зрозуміло, що функціонали – це складніші математичні об'єкти, ніж функції. Перш ніж вивчати їх властивості й досліджувати їх на екстремум, дамо визначення.

Функціоналом називається *відображення* деякої множини функцій X на множину дійсних чисел R. Це можна записати як $I:\ X \to R$, а сенс цього поняття полягає в тому, що кожній функції $f(x)$ із X ставиться у відповідність число $I[x]$ за деяким правилом.

Для розуміння суті й методів варіаційного числення можна встановити зв'язок між задачами про знаходження екстремуму функціонала із задачами про визначення екстремуму функції кількох змінних.

Зазначимо, що множина X, з якої беруться функції $y(x)$, називається *областю визначення функціонала.* Між функціоналами й функціями багатьох змінних є тісний зв'язок. Щоб установити його, розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, x_{n+1} = b$ на $n+1$ рівних частин і розглянемо замість кривої $y(x)$ ламану з вершинами $(x_0, y(a)),\ (x_1, y(x_1)), \dots, (x_{n+1}, y(b))$, а сам функціонал замінимо наближеною сумою

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) h, \tag{11.4}$$

де $h = x_i - x_{i-1}$.

Сума в правій частині (11.4) є функцією змінних $y_1, y_2, \dots, y_n$. Варіаційну задачу можна наближено розглядати як задачу про знаходження екстремуму функції $I(y_1, y_2, \dots, y_n)$ від n змінних. Цей підхід у варіаційному численні був використаний Л. Ейлером, який зводив початкову задачу про екстремум функціонала до задачі дослідження функції n змінних, а потім за допомогою граничного переходу при $n \to \infty$ отримував точний розв'язок.

Таким чином, функціонали можна розглядати як функцію нескінченної кількості змінних.

При аналізі екстремуму функції одне з головних понять – поняття відстані між числами. *Відстань* між двома числами x_1 та x_2 на числовій прямій – це абсолютна величина їх різниці $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

Для функцій також можна ввести до розгляду поняття відстані, щоб оцінювати, наскільки близькі або далекі одна від одної дані функції. Поняття близькості функції залежить від того, яким чином вводиться поняття відстані або, як говорять математики, як вводиться *метрика.*

У ситуації, що найчастіше зустрічається, відстань між двома неперервними функціями $y_1(x)$ та $y_2(x)$ вводиться як

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$$

і є найбільшою різницею між їхніми ординатами, коли x пробігає відрізок $[a,b]$.

11.1.2. Функціонали в лінійних нормованих (банахових) просторах

Лінійний простір X називається *нормованим*, якщо на ньому визначений *функціонал* $\|\cdot\|: X \to R^1$, який називається *нормою* й задовольняє аксіоми:

- $\|x\| \ge 0 \ \forall x \in X$ та $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \forall \alpha \in R, \ x \in X$;
- $\|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\| \ \ \forall x_1, \ x_2 \in X$.

Введена таким чином відстань називається *відстанню в метриці* $C_{[a,b]}$ (неперервних на $[a,b]$ функцій). Клас неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій будемо позначати $C_{[a,b]}$. Згідно зі введеним поняттям для кожної неперервної функції $y(x)$ на відрізку $[a,b]$ можна знайти її норму: $\rho(y,0) = \|y\|_{C_{[a,b]}} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$.

Для неперервних функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ і тих, що мають неперервну першу похідну, відстань визначається таким чином:

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Клас неперервно диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій будемо позначати $C^1{}_{[a,b]}$. Відповідно до введеного поняття відстані близькість функцій у метриці $C^1{}_{[a,b]}$ означає, що малими є не тільки ординати різниці функцій, але й ординати різниці їх похідних. Таким чином, якщо функції близькі в метриці $C^1{}_{[a,b]}$, то вони близькі й у метриці $C_{[a,b]}$, але не навпаки.

Нормований простір X *є метричним простором* з метрикою $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$.

Повний лінійний нормований простір називається *банаховим.*

Поняття неперервності функціонала вводиться так само, як і для функції.

Функціонал $I[y(x)]$ називається *неперервним* у точці $y_0(x)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $\left|I\left(y(x)\right) - I\left(y_0(x)\right)\right| < \varepsilon$ при $\|y(x) - y_0(x)\| < \delta$.

Наведемо приклади деяких банахових просторів, які ми будемо використовувати в даному розділі.

Приклад 11.4. Простір $C_{[a,b]}$ неперервних на $[a,b]$ функцій з нормою $\|y(x)\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$. Збіжність за нормою в просторі $C_{[a,b]}$ – це *рівномірна збіжність* функцій на $[a,b]$.

Приклад 11.5. Простір $C^1_{[a,b]}$ – це простір усіх неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій з нормою $\|y(x)\|_{C^1} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |y'(x)|$.

Якщо послідовність $y_n(x) \to y(x)$ за нормою $C^1_{[a,b]}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n(x) - y(x)\| = 0$, то $y_n(x) \rightrightarrows y(x)$, $y_n'(x) \rightrightarrows y'(x)$ при $n \to \infty$.

Приклад 11.6. Простір $C^n_{[a,b]}$ – це простір функцій, n разів неперервно диференційованих на $[a,b]$. Норма в цьому просторі вводиться таким чином: $\|y(x)\|_{C^n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{x\in[a,b]} \left|y^{(k)}(x)\right| \quad \left(y^{(0)}(x) = y(x)\right)$.

Близькість функцій у просторі $C^n_{[a,b]}$ означає близькість як самих функцій, так і їхніх похідних до n-го порядку включно.

Аналогічно вводиться поняття неперервності в розумінні близькості будь-якого порядку.

При дослідженні функціоналів, як і при дослідженні функцій, найважливішу роль відіграють прості функціонали – лінійні та квадратичні. Їх властивості якоюсь мірою схожі на властивості лінійних і квадратичних функцій.

Функціонал $I[y(x)]$ називається *лінійним* на банаховому просторі B, якщо він неперервний на просторі B і виконується умова

$$I\left[\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\right]=\alpha_1 I\left[y_1(x)\right]+\alpha_2 I\left[y_2(x)\right]$$

для будь-яких $y_1(x), y_2(x)\in B$ і будь-яких чисел α_1, α_2.

Наведемо приклади лінійних функціоналів:

- $I[y(x)]=\int\limits_a^b a(x)y(x)dx$, $a(x)\in C_{[a,b]}$. Це лінійний функціонал у просторі $C_{[a,b]}$.
- $I\left(y(x)\right)=\int\limits_a^b \left[a(x)y(x)+b(x)y'(x)\right]dx$, $a(x), b(x)\in C_{[a,b]}$. Це лінійний функціонал у просторі $C^1_{[a,b]}$.

Функціонал $I[x,y]$, залежний від двох елементів x, y, називається *білінійним*, якщо при фіксованому x він є лінійним від y, а при фіксованому y – від x.

Якщо $I[x,y]$ – білінійний функціонал, то вираз $I[x,x]$ називається квадратичним функціоналом. Як приклад квадратичного функціонала наведемо $I[x,x]=\int\limits_0^1\left[x^2(t)+x'^2(t)\right]dt$.

Близькістю 0-го порядку називають близькість у класі функцій $C_{[a,b]}$.

Тоді близькими в $C^1_{[a,b]}$ називаються такі функції, які не тільки самі мало відрізняються одна від одної, але й їхні похідні також мало відрізняються.

Близькістю 1-го порядку називають близькість у класі функцій $C^1_{[a,b]}$.

Функція $y_0(x)$ називається *точкою мінімуму* функціонала $I[y(x)]$, якщо $\forall y(x)$ з її малого δ-околу виконується умова $I[y(x)]\geq I[y_0(x)]$. Якщо при цьому $\forall y(x)$ виконується строга нерівність, то стверджують, що на функції $y_0(x)$ досягається *строгий мінімум*. Аналогічно дається означення *максимуму* (строгого максимуму) функціонала.

Оскільки ми визначали δ-окіл для конкретного класу функцій, то доцільно говорити про екстремум функціонала у відповідному класі функцій $C_{[a,b]}, C^1_{[a,b]}, \ldots, C^k_{[a,b]}$.

Функція $y_0(x)$ називається *точкою екстремуму* k*-го порядку* функціонала $I[y(x)]$, якщо відповідна умова виконується у δ-околі функції $y_0(x)$ у класі функцій $C^k_{[a,b]}$.

Екстремум 0-го порядку називається *сильним. Екстремум 1-го порядку* називається *слабким. Екстремум* k*-го порядку* називається *слабким екстремумом* k*-го порядку.*

11.1.3. Приклади та класифікація задач варіаційного числення

Великий вплив на розвиток варіаційного числення здійснили такі три задачі.

Задача про брахістохрону (*брахістохрона* – лінія найшвидшого спуску). Ця задача була поставлена ще Галілеєм. Необхідно визначити лінію, яка зв'язує точки *A* та *B*, що не лежать на одній вертикальній прямій. Лінія має ту властивість, що матеріальна точка скочується під дією сили тяжіння за мінімальний час (рис. 11.2). Цю задачу досліджували Бернуллі, Лопіталь та Ньютон.

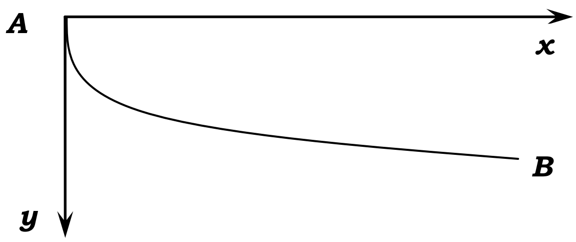

Рис. 11.2

Нехай $A(0,0)$, $B(x_1, y_1)$, $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$ – швидкість руху матеріальної точки, де g – прискорення вільного падіння. Звідси

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2g}\sqrt{y}}.$$

Задача зводиться до пошуку мінімуму функціонала

$$T = T\left(y(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

з крайовими умовами $y(0)=0$, $y\left(x_1\right)=y_1$. Показано, що лінією якнайшвидшого спуску не буде пряма, що сполучає точки А та В, хоча вона – найкоротша відстань між ними. Виявилось, що лінією якнайшвидшого спуску є *циклоїда*, рівняння якої має вигляд

$$x = c(t-\sin t)+d\,,$$

$$y = c(t-\cos t)\,,$$

де c, d – сталі величини.

Задача про геодезичні лінії. Необхідно визначити лінію найменшої довжини, яка з'єднує задані точки A та B на поверхні $\varphi\left(x,y,z\right)=0$ (рис. 11.3). Такі лінії називаються *геодезичними.*

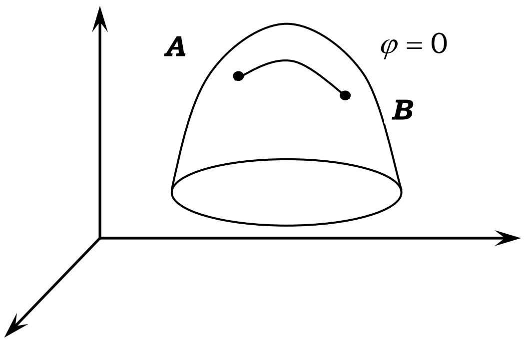

Рис. 11.3

Це типова варіаційна задача на умовний екстремум. Нехай $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $B\left(x_1,y_1,z_1\right)$ – точки на поверхні $\varphi\left(x,y,z\right)=0$. Необхідно мінімізувати $l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)} dx$ за умов $\varphi\left(x,y,z\right)=0$,

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, z(x_0)=z_0\,, \\ y(x_1)=y_1, z(x_1)=z_1\,. \end{cases}$$

Ця задача була поставлена у 1698 р. Бернуллі, а розв'язана Ейлером і Лагранжем.

Ізопериметрична задача. Необхідно знайти замкнену лінію заданої довжини l, яка обмежує максимальну площу S (ще у Стародавній Греції було відомо, що цією лінією буде коло).

Тут необхідно обчислити екстремум функціонала S при обмеженні

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt = l,$$

де l – стала.

Загальний метод для розв'язання цієї задачі запропонував Ейлер.

Класифікувати задачі варіаційного числення можна різними способами. Ми будемо дотримуватися такої класифікації:

1. За типом функціонала:
   - $I = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$;
   - $I = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)dx$;
   - $I = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots,y'_n\right)dx$;
   - $I = \iint_D F\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$.

Тут функції $y,y',y_1,y_2,\ldots,y_n,y'_1,y'_2,\ldots,y'_n,y^{(n)},z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ є аргументами відповідних функціоналів.

2. За типом граничних умов:
   - варіаційні задачі з фіксованими умовами. Наприклад, для функціонала 1 а) граничними умовами є $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$;
   - варіаційні задачі з вільними кінцями – $y(x_0)$ та $y(x_1)$ не фіксуються;
   - варіаційні задачі з рухомими границями (кінцями) $y(x_0)$ та $y(x_1)$ можуть належати деяким лініям чи поверхням.

При цьому x_0 та x_1 можуть бути як фіксованими, так і не фіксованими.

3. Додаткові умови:
   - безумовний екстремум – не задаються додаткові умови;
   - умовний екстремум – задаються додаткові обмеження.

11.1.4. Перша варіація функціонала

При дослідженні функцій на екстремум важливе значення має дослідження її першої та другої похідних. При дослідженні функціонала вводяться аналогічні поняття. Поняттю диференціала функції відповідає *поняття варіації функціонала.*

За допомогою поняття лінійного функціонала введемо поняття першого диференціала (першої варіації функціонала).

Варіацією або приростом аргументу $\delta y = h(x)$ будемо називати різницю між $y(x)$ та $y_0(x)$: $h(x) = y(x) - y_0(x)$.

З математичного аналізу відомо таке означення.

Означення 11.1. Функція $f(x)$ називається диференційованою в точці x_0, якщо її приріст можна зобразити у вигляді

$$\Delta f = f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right) = \varphi(h) + o(h) \quad (h \to 0), \qquad (11.5)$$

де $\varphi(h)$ – лінійна функція, що називається диференціалом (першим диференціалом) функції $f(x)$ у точці x_0.

За аналогією дамо означення диференційованого функціонала.

Означення 11.2. Функціонал $I[y(x)]$ називають диференційованим у точці $y_0(x)$, якщо його приріст можна зобразити у вигляді

$$\Delta I = I[y_0(x) + h(x)] - I[y_0(x)] = \varphi\left(h(x)\right) + o\left(\|h\|\right) \quad \left(\|h\| \to 0\right), \qquad (11.6)$$

де $\varphi(h)$ – лінійний функціонал, який називають першою варіацією (першим диференціалом) функціонала $I[y(x)]$ у точці $y_0(x)$ і позначають $\varphi(h) = \delta I_{y_0}[h]$.

Функціонал $\varphi(h)$ визначається однозначно.

Твердження 11.1. Якщо функціонал $I[y(x)]$ диференційований у точці $y_0(x)$, то його першу варіацію можна обчислити за формулою

$$\varphi(h) = \frac{d}{dt} I[y_0(x) + th(x)] \,\Big|_{t=0}. \qquad (11.7)$$

Доведення. Нехай $\psi(t) = I[y_0(x) + th(x)]$, де $h(x) \in B$ – фіксований елемент. Тоді, згідно з (11.6), маємо $\psi(t) - \psi(0) = \varphi\left(th(x)\right)$, $\psi'(0) = \varphi\left(h(x)\right)$, тобто (11.7) справджується.

Аналогічно вводиться поняття другої варіації

$$\delta^2 I[y] = \varphi^2(h) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I\left[y_0(x) + th(x\right] \,\Big|_{t=0}. \qquad (11.8)$$

Перша і друга варіації функціонала $I[y(x)]$ відіграють важливу роль при дослідженні його на екстремум. Неважко побачити, що перша варіація є лінійним функціоналом, а друга – квадратичним.

Приклад 11.7. Обчислити першу варіацію функціонала $I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (11.7):

$$\delta I_{y_0}(h) = \frac{d}{dt}\int_a^b F\left(x, y_0 + th(x), y'_0 + th'(x)\right)dx\Bigg|_{t=0} = \\ = \int_a^b \left[F'_y\left(x, y_0, y'_0\right)h(x) + F'_{y'}\left(x, y_0, y'_0\right)h'(x)\right]dx. \quad (11.9)$$

Очевидно, що функціонал диференційований у всіх точках простору $C^1_{[a,b]}$.

11.1.5. Необхідні умови екстремуму

Означення 11.3. Говорять, що функціонал $I[y(x)]$ досягає на кривій $y = y_0(x)$ максимуму, якщо на будь-якій близькій до $y = y_0(x)$ кривій виконується нерівність $\Delta I = I[y(x)] - I[y_0(x)] \le 0$.

Якщо $\Delta I \le 0$, причому $\Delta I = 0$ тільки на кривій $y = y_0(x)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається строгий максимум.

Якщо $\Delta I \ge 0$, то на кривій $y = y_0(x)$ досягається мінімум.

Якщо близькість кривих розуміється в смислі нульового порядку $\left(\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x) - y_0(x)|\right)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається *сильний максимум* (*мінімум*).

Якщо близькість кривих розуміється як близькість першого порядку $\left(\max\limits_{x\in[a,b]}|y(x) - y_0(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]}|y'(x) - y'_0(x)|\right)$, то говорять, що на кривій $y = y_0(x)$ досягається *слабий максимум (мінімум).*

Це локальні мінімуми та максимуми. Вони називаються *локальними екстремумами.*

Будь-який сильний екстремум є і слабким, але не навпаки.

Екстремум на всій множині називається *абсолютним.* Визначення локального екстремуму можна подати й мовою $\varepsilon - \delta$.

Теорема 11.1. Нехай функціонал $I[y(x)]$ диференційований у точці $y = y_0(x)$. Якщо в цій точці досягається екстремум, то перша варіація функціонала $I[y(x)]$ в ній дорівнює нулю:

$$\delta I_{y_0}\left(h(x)\right) = 0. \tag{11.10}$$

(Співвідношення (11.10) виконується для будь-яких приростів $h(x)$.)

Доведення. Для визначеності нехай $y_0(x)$ – точка мінімуму. Нехай $\delta I_{y_0}[h] = \varphi(h) \neq 0$. Тоді існує елемент $h_0(x)$ такий, що $\varphi(h_0(x)) \neq 0$. Маємо при малих $|t|$

$$0 \le \Delta I = I[y_0 + th_0(x)] - I[y_0(x)] = t\varphi\left(h_0(x)\right) + o(t). \tag{11.11}$$

Знак останнього виразу при малих $t \neq 0$ збігається зі знаком числа $t\varphi\left(h_0(x)\right)$. Тут t можна вибирати таким чином, щоб це число було від'ємним. Отримане протиріччя й доводить теорему.

11.1.6. Основна лема варіаційного числення

Лема 11.1. Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ функція і

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0 \tag{11.12}$$

для будь-якої функції $h(x) \in C^1_{[a,b]}$ з умовами

$$h(a) = h(b) = 0, \tag{11.13}$$

то $f(x) \equiv 0,\ x \in [a,b]$.

Доведення. Припустимо, що $f(x) \neq 0$. Тоді існує $x_0 \in (a,b)$ така, що $f(x_0) \neq 0$. Це означає, що існує окіл $|x - x_0| < \delta$ такий, у якому $f(x) > 0$, причому δ-окіл лежить в інтервалі $[a,b]$. Побудуємо $h_0(x) \in C^1_{[a,b]}$:

$$h_0(x) = \begin{cases} \left[\left(x - x_0 + \delta\right)\left(x - x_0 - \delta\right)\right]^2, & x \in I_\delta = \left\{x : |x - x_0| < \delta\right\}, \\ 0, & x \notin I_\delta. \end{cases} \tag{11.14}$$

Функція (11.14) задовольняє всі умови леми. Згідно з побудовою

$$\int_a^b f(x)h_0(x)dx = \int_{I_\delta} f(x)h_0(x)dx > 0, \tag{11.15}$$

оскільки $f(x) > 0, h_0(x) > 0,\ x \in I_\delta$. Це протиріччя й доводить лему.

Зауваження 11.1. Лема залишається справедливою, якщо умови (11.13) виконуються для вужчого класу функцій $h(x)$, які мають $n \ge 1$ неперервних похідних на $[a,b]$ і $h^{(j)}(a) = h^{(j)}(b) = 0,\quad 0 \le j \le n-1$.

Для цього достатньо у відповідній лемі побудувати n разів неперервно диференційовану функцію $h_0(x)$ у вигляді

$$h_0(x)=\begin{cases}\left[\left(x-x_0+\delta\right)\left(x-x_0-\delta\right)\right]^{2n}, & x\in I_\delta,\\ 0, \quad x\notin I_\delta.\end{cases} \tag{11.16}$$

11.2. Рівняння Ейлера для різних типів функціоналів

11.2.1. Необхідні умови екстремуму для найпростішої варіаційної задачі

Теорема 11.2. Нехай $y(x)$ – екстремаль задачі із закріпленими кінцями

$$I[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx\,, \tag{11.17}$$

$$y(a)=A,\ y(b)=B\,. \tag{11.18}$$

Тоді $y(x)$ задовольняє рівняння Ейлера

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0,\ a\le x\le b\,. \tag{11.19}$$

Доведення. Якщо $y(x)$ – екстремаль, то $\delta I_y[h]=0$ для будь-яких допустимих приростів $h(x)$. Згідно з рівністю (11.9) перша варіація функціонала має вигляд

$$\delta I_y[h]=\int_a^b\left[F'_y(x,y,y')h(x)+F'_{y'}(x,y,y')h'(x)\right]dx=$$

$$=\int_a^b F_y'(x,y,y')h(x)dx+\int_a^b F'_{y'}(x,y,y')dh(x)=$$

$$=\int_a^b F'_y(x,y,y')h(x)dx+F'_{y'}(x,y,y')\Big|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y')h(x)dx=$$

$$=\int_a^b\left[F'_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y')\right]h(x)dx=0\,.$$

Згідно з лемою маємо необхідні умови (11.19). Теорему доведено.

Рівняння Ейлера – це диференціальне рівняння другого порядку

$$F'_y\left(x,y,y'\right)-F''_{y'x}\left(x,y,y'\right)y'-F''_{y'y}\left(x,y,y'\right)y'-F''_{y'y'}\left(x,y,y'\right)y''=0\,, \tag{11.20}$$

яке доповнюється двома граничними умовами (11.18). Будь-який його розв'язок називається *екстремаллю.* Це крива, на якій може досягатися екстремум функціонала.

Оскільки рівняння Ейлера (11.19) доповнюється не початковими, а граничними умовами (11.18), то теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння в даному випадку не може бути застосована. Іншими словами, екстремаль не обов'язково існує, а якщо існує, то не обов'язково єдина. Усе залежить від вигляду рівняння (11.19) та розв'язності системи рівнянь для граничних умов (11.18).

Приклад 11.8. Знайти екстремум функціонала

$$I(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx$$

при виконанні граничних умов $y(0) = 0,\ y(1) = 1$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні: $F_y' = 12x;\ F_{y'}' = 2y'$. Обчислимо повну похідну за змінною x від $F_{y'}'$: $\frac{dF_{y'}'}{dx} = 2y''$. Складемо рівняння Ейлера вигляду (11.19): $12x - 2y'' = 0$, або, після спрощення, $y'' = 6x$. Його загальний розв'язок має вигляд $y(x) = x^3 + C_1x + C_2$. Для знаходження довільних сталих скористаємося граничними умовами $y(0) = C_2 = 0,\ y(1) = 1 + C_1 + C_2 + 1$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, і тоді рівняння екстремалі має вигляд: $y(x) = x^3$. На отриманій екстремалі досягається сильний мінімум.

Приклад 11.9. Знайти екстремаль функціонала

$$I(y(x)) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx$$

за граничних умов $y(0) = 1,\ y(2\pi) = 1$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні: $F_y' = 2y;\ F_{y'}' = 2y'$. Рівняння Ейлера після спрощень матиме вигляд $y'' + y = 0$. Його загальний розв'язок запишемо так: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Знайдемо довільні сталі з початкових умов $y(0) = C_1 = 1,\ y(2\pi) = C_1 = 1$. Ми визначили лише C_1, а значення C_2 може бути довільним. Це означає, що поставлена варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків вигляду $y(x) = \cos x + C_2 \sin x$. На будь-якій з цих функцій функціонал $I[y(x)]$ отримує стале значення. На екстремалях досягається сильний мінімум.

11.2.2. Частинні випадки рівняння Ейлера

а) Підінтегральна функція F не залежить явно від y'.

У цьому випадку $F_{y'}'$ і рівняння Ейлера стає скінченним, у його розв'язку немає довільних сталих. Воно не обов'язково задовольняє граничні умови (11.18). Якщо умови (11.18) виконуються, то отримуємо екстремаль, якщо ні – варіаційна задача не має розв'язку.

Приклад 11.10. Визначити екстремум функціонала

$$I[y(x)] = \int_0^{2\pi} y^2 dx$$

за заданих граничних умов $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $F(x, y, y') = y^2$, то рівняння Ейлера (11.19) має вигляд $2y = 0$. Його розв'язок: $y = 0$. На неперервних функціях (тобто в класі $C_{[a,b]}$ і в усіх вкладених у нього класах) екстремум (мінімум) досягається лише за граничних умов $y_1 = 0,\ y_2 = 0$. За інших граничних умов екстремуму немає.

б) Підінтегральна функція F лінійно залежить від y'.

Нехай підінтегральна функція F має структуру

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

Випишемо рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{\partial P}{\partial y} + y'\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{dQ}{dx} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + y'\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}y' = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Якщо умова $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ не виконується, то рівняння Ейлера стає скінченним. Якщо лінія, яка визначається цим рівнянням, задовольняє граничні умови, то вона буде екстремаллю; якщо не задовольняє – варіаційна задача не має розв'язку. У протилежному випадку, коли умова $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ виконується, варіаційна задача втрачає сенс.

Приклад 11.11. Визначити екстремум функціонала

$$I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')dx$$

за граничних умов $y(0) = 0$, $y(1) = a$.

Розв'язання. Записуємо рівняння Ейлера $2y - \frac{d(x^2)}{dx} = 0, \quad 2y - 2x = 0$. Його розв'язок $y = x$. Перша гранична умова задовольняється, друга – лише за умови $a = 1$. Якщо $a \neq 1$, то екстремалі, що задовольняє граничні умови, не існує.

в) Функція F залежить лише від y'.

Рівняння Ейлера в цьому випадку матиме вигляд $F''_{y'y'}(y')y'' = 0$. Розв'язками такого рівняння будуть функції $y(x) = C_1x + C_2$. Екстремалями будуть прямі лінії.

г) Функція F залежить лише від x та y'.

Рівняння Ейлера матиме вигляд $\frac{d}{dx}F_{y'}'(x,y') = 0$. Це рівняння має перший інтеграл $F_{y'}'(x,y') = C_1$. Його іноді називають *інтегралом імпульсу*. Таке рівняння можна розв'язати методом введення параметра.

д) Функція F залежить лише від y та y'.

Рівняння Ейлера матиме вигляд

$$F'_y(y,y') - F''_{y'y}(y,y')y' - F''_{y'y'}(y,y')y'' = 0.$$

У такому випадку рівняння Ейлера має перший інтеграл (його називають *інтегралом енергії*) $F(y,y') - F'_{y'}(y,y')y' = C$. Це рівняння першого порядку, яке не містить явно x. Воно може бути проінтегроване відомими методами. Саме до цього типу рівнянь зводиться задача про брахістохрону.

11.2.3. Рівняння Ейлера для функціоналів, залежних від кількох функцій

Розглянемо функціонал

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \qquad (11.21)$$

із закріпленими умовами

$$y(a) = A,\ y(b) = B. \qquad (11.22)$$

Тут $$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

Нехай функція $F(x, y, y')$ двічі неперервно диференційована за своїми змінними в області $a \le x \le b$, $-\infty < y_j < \infty$, $-\infty < y'_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Будемо шукати екстремум функціонала (11.21) у класі $C^1_{[a,b]}$. Нехай $h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix}$ – допустимий приріст із $C^1_{[a,b]}$, який задовольняє крайові умови

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{11.23}$$

Теорема 11.3. Якщо $y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – екстремаль функціонала (11.21) за умови (11.22), то вона задовольняє систему рівнянь Ейлера

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.24}$$

Доведення. Розглянемо варіацію функціонала

$$\delta I[x, y(x), y'(x)] = \frac{d}{dt} \int_a^b [F(x, y_1 + th_1, \ldots, y_n + th_n, y'_1 + th'_1, \ldots, y'_n + th'_n] dx \Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n F'_{y_i}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) h_i(x) + \sum_{i=1}^n F'_{y'_i}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) h'(x) \right] dx =$$

$$= \int_a^b [\sum_{i=1}^n F'_{y_i}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) - \frac{d}{dx} F'_{y'_i}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)] h_i(x) dx = 0,$$

виконавши інтегрування за частинами та врахувавши умови (11.23) $h_i(a) = h_i(b) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Однак кожна з $h_i(x) \in C^1_{[a,b]}]$ – довільна функція. Вибираючи одну з них довільно $h_i(x) \ne 0$, а решту $h_j(x) = 0$, $i \ne j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ отримуємо згідно з основною лемою,

$$F'_{y_i}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) - \frac{d}{dx} F'_{y'_i}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.25}$$

Систему n рівнянь (11.25), кожне з яких є рівнянням другого порядку, розглядаємо з крайовими умовами (11.22).

11.2.4. Принцип найменшої дії

Нехай матеріальна точка масою m у тривимірному просторі $x=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ рухається в потенціальному силовому полі. Введемо функцію Лагранжа $L=T-U$, де $T=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)$ – кінетична енергія, $U(t,x_1,x_2,x_3)$ – потенціальна. Тоді

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-U(t,x_1,x_2,x_3).$$

Інтеграл $S=\int\limits_{t_0}^{t_1} Ldt$ називається дією. Дія S є функціоналом

$$S=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)-U(t,x_1,x_2,x_3)\right]dt.$$

Нехай $x(t_0)=x^{(0)}$, $x(t_1)=x^{(1)}$.

***Принцип найменшої дії**:* матеріальна точка рухається по такій траєкторії, яка відповідає найменшій дії, тобто $\delta S=0$.

Для виведення диференціального рівняння руху з цього принципу необхідно записати рівняння Ейлера

$$m\ddot{x}_1=-\frac{\partial U}{\partial x_1},\ m\ddot{x}_2=-\frac{\partial U}{\partial x_2},\ m\ddot{x}_3=-\frac{\partial U}{\partial x_3}. \qquad (11.26)$$

Рівняння (11.26) – це класичне рівняння Ньютона. Аналогічні рівняння можна записати для систем точок.

11.2.5. Рівняння Ейлера для функціоналів, залежних від функції багатьох змінних

Розглянемо функціонал

$$I[y(x_1,x_2,\ldots,x_n)]=\int\limits_D F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx_1dx_2\ldots dx_n. \qquad (11.27)$$

Тут $y=y(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $dx=dx_1dx_2\ldots dx_n$, D – обмежена область із гладкою границею Γ.

Припустимо, що $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial y}{\partial x_n})$ – двічі неперервно диференційована за сукупністю всіх змінних при $x\in D\cup\Gamma$, а функції $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ змінюються в межах $(-\infty,\infty)$.

Екстремум шукаємо в класі неперервно диференційованих функцій при $x \in D \cup \Gamma$.

Обчислимо варіацію

$$\delta I_y[h] = \frac{d}{dt} I[y + th(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \,\Big|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_D [F'_y(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}) h(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} F'_{y'_{x_i}}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}) h'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)] dx . \qquad (11.28)$$

Як і для одновимірного випадку, справедлива лема.

Лема 11.2. Нехай функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервна при $x \in D \cup \Gamma$ і

$$\int\limits_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) h(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx = 0 \qquad (11.29)$$

для довільної $h(x_1, \ldots, x_n)$ – неперервно диференційованої функції при $x \in D \cup \Gamma$ такої, що

$$h(x)\big|_\Gamma = 0 . \qquad (11.30)$$

Тоді $f(x) \equiv 0$ в області D.

Доведення. Припустимо, що в деякій точці $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ функція $f(\overline{x}) \neq 0$, наприклад $f(\overline{x}) > 0$. Тоді вона додатна й у деякому ε-околі з радіусом ε з області D. Побудуємо

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & (x - \overline{x})^T (x - \overline{x}) \geq \varepsilon^2 , \\ [(x - \overline{x})^T (x - \overline{x}) - \varepsilon^2]^2, & (x - \overline{x})^T (x - \overline{x}) \leq \varepsilon^2 . \end{cases} \qquad (11.31)$$

Тоді інтеграл (11.29) зводиться до обчислення інтеграла по кругу та буде додатним. Це протиріччя й доводить лему.

Теорема 11.4. Якщо $y(x)$ – екстремаль функціонала (11.27) за умови

$$y(x)\big|_\Gamma = \varphi(x) , \qquad (11.32)$$

де $\varphi(x)$ – відома на Γ функція, то $y(x)$ задовольняє в D рівняння Ейлера

$$F'_y - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F'_{y'_{x_i}} = 0 . \qquad (11.33)$$

Доведення. Перетворимо вираз (11.28), інтегруючи за частинами й ураховуючи $h(x)\big|_\Gamma = 0$:

$$\int\limits_D h'_{x_i} F'_{y'_{x_i}} dx =$$

$$= \int_D \frac{\partial}{\partial x_i}[h(x_1,x_2,...,x_n)F'_{y'_{x_i}}(x_1,x_2,...,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2}...,\frac{\partial y}{\partial x_n})]dx -$$

$$-\int_D h(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}(x_1,x_2,...,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2}...,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx =$$

(використовуємо формулу Остроградського

$$\int_D \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i(\cdot)}{\partial x_i}dx_1...dx_n = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} X_i(\cdot)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n\ )$$

$$= \int_\Gamma h(x_1,x_2...,x_n)F'_{y'_{x_i}}(x_1,x_2,...,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2}...,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n -$$

$$\left.-\int_D h(x)\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}(x_1,x_2,...,x_n,y,\frac{\partial y}{\partial x_1},\frac{\partial y}{\partial x_2}...,\frac{\partial y}{\partial x_n})dx\right).$$

Оскільки $h(x_1,x_2,...,x_n)=0$ на Г, то варіацію функціонала запишемо у вигляді $\delta I_y(h)=\int_D h(x_1,x_2,...,x_n)[F'_y(\cdot)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F'_{y'_{x_i}}(\cdot)]dx=0$. Згідно з лемою (11.2) отримаємо (11.33). Теорему доведено.

Приклад 11.12. Визначити екстремалі функціонала

$$I(z(x,y))=\iint_G\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,\ z(x,y)=v(x,y),\ (x,y)\in\partial G.$$

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера вигляду $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ або $\Delta z=0$. Необхідна умова екстремуму функціонала для поставленої задачі перетворилася на рівняння Лапласа. Для знаходження екстремалей функціонала необхідно визначити неперервну функцію $z(x,y)$, яка задовольняє рівняння Лапласа й набуває заданих значень $v(x,y)$ на границі області G. Це одна з основних задач математичної фізики – задача Діріхле. Шукані екстремалі – це розв'язки задачі Діріхле.

11.2.6. Необхідні умови екстремуму для функціоналів, залежних від похідних порядку вище першого

Розглянемо функціонал вигляду

$$I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx \qquad (11.34)$$

і граничні умови

$$\begin{cases} y(a) = A,\ y'(a) = A_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \\ y(b) = B,\ y'(b) = B_1, \ldots., y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}. \end{cases} \qquad 11.35)$$

Припустимо, що функція $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))$ n разів неперервно диференційована за сукупністю своїх змінних в області

$$a \le x \le b,\ -\infty < y, y', \ldots, y^{(n-1)} < \infty\ .$$

Запишемо варіацію функціонала (11.34)

$$\delta I[h(x)] = \frac{d}{dt}\int_a^b [F(x, y + th, \ldots, y' + th', \ldots, y^{(n)} + th^{(n)}]dx\big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b [F'_y(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))h(x) + F'_{y'}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))h'(x) + \ldots +$$

$$+ F'_{y^{(n)}}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))h^{(n)}(x)]dx\ . \qquad (11.36)$$

Оскільки функція $y(x)$ задовольняє крайові умови (11.35), то

$$h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0,\ \ 0 \le k \le n-1. \qquad (11.37)$$

Інтегруючи $(k+1)$-й вираз k разів за частинами в (11.36) і враховуючи (11.37), отримаємо $\int_a^b F'_{y^{(k)}} h^{(k)}(x)dx = (-1)^k \int_a^b h(x)\frac{d^k}{dx^k}F'_{y^{(k)}}dx$. Тому варіацію функціонала (11.36) перепишемо так:

$$\delta I_y(h) = \int_a^b h(x)[F'_y(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) + \ldots +$$

$$+(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))]dx\ . \qquad 11.38)$$

Якщо $y(x)$ – екстремаль функціонала (11.34), то $\delta I_y(h) = 0$ для довільних допустимих приростів $h(x) \in C^n_{[a,b]}$. З (11.38), згідно із зауваженням 11.1, отримаємо рівняння *Ейлера – Пуассона*

$$F'_y(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)) +$$

$$+(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)) = 0\,. \qquad (11.39)$$

Рівняння (11.39) – це диференціальне рівняння порядку $2n$, яке розглядається разом із крайовими умовами (11.35).

Приклад 11.13. Відшукати екстремаль функціонала

$$I(y) = \int_o^{\pi/2} (y''^2 - y^2 - x^2)dx$$

за граничних умов

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0,\ y(\pi/2) = -1\,.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера – Пуассона для даного функціонала має вигляд $y^{IV} - y = 0$. Його загальним розв'язком є $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$. Визначивши невідомі сталі з граничних умов, отримаємо $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$. Допустимою екстремаллю задачі є функція $y(x) = \cos x$.

11.2.7. Канонічна (гамільтонова) форма рівнянь Ейлера

Рівняння Ейлера – це диференціальне рівняння другого порядку для інтегрального функціонала основної задачі варіаційного числення (11.17), (11.18). Його можна записати у вигляді системи двох рівнянь першого порядку, якщо ввести позначення

$$F'_{y'}(x,y,y') = p\,. \qquad (11.40).$$

Тоді рівняння Ейлера матиме вигляд

$$F'_y = p'\,. \qquad (11.41).$$

Якщо друга похідна $F''_{y'y'} \neq 0$, то рівняння (11.40) можна розв'язати відносно y'. Нехай $y' = w(x,y,p)$. Підставимо цей вираз у рівняння (11.41). Отримаємо систему рівнянь відносно невідомих функцій $p(x), y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = w(x,y,p),\quad \frac{dp}{dx} = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,p). \qquad (11.42)$$

Означення.11.4. Функцією Гамільтона, або гамільтоніаном H функціонала $I[y(x)]$, називається функція змінних x, y, p, що визначається співвідношенням $H(x,y,p) = -F(x,y,y') + y'F'_{y'}(x,y,y')$, де

$y' = w(x, y, p)$. За допомогою функції H систему рівнянь (11.42) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{dp}{dx}. \qquad (11.43)$$

Ці рівняння називаються канонічною, або гамільтоновою, системою рівнянь Ейлера функціонала $I[y(x)]$. Змінні x, y, p називаються канонічними. У класичній механіці змінну p називають *імпульсом*, а функцію H – *енергією.*

Теорема 11.5. Рівняння Ейлера (11.19) еквівалентне канонічній системі рівнянь (11.43).

Доведення. Нехай $y(x)$ – розв'язок рівняння Ейлера (11.19). Покажемо, що $y(x)$, $p(x) = F'_{y'}(x, y, y'')$ – розв'язок системи рівнянь (11.43). Перше рівняння в (11.43) – це наслідок визначення функції Гамільтона H. Для отримання другого рівняння запишемо

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = F'_y(x.y, y') = -H'_y .$$

Нехай тепер $y(x)$, $p(x)$ – розв'язок системи (11.43). Тоді

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} = F'_y \, , \; p = F'_{y'} \, , \; \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} F'_{y'} \, .$$

Порівнюючи праві частини рівнянь, отримаємо рівняння Ейлера, що й доводить теорему.

Перевагами канонічної системи є простота й симетричність.

Розглянемо канонічні змінні для функціонала $I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)dt$, де $T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$ – кінетична енергія, $U(t, x_1, x_2, x_3)$ – потенціальна. Запишемо компоненти імпульсу матеріальної точки $p_{x_i} = F'_{x'_i} = mx'_i$, $i = 1, 2, 3$. Тоді гамільтоніан $H = T + U$ – це повна енергія системи.

11.3. Умови екстремуму другого порядку

11.3.1. Друга варіація функціонала

Додаткові умови екстремуму функціоналів можна отримати, дослідивши другу варіацію функціонала.

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення – задачу із закріпленими кінцями (11.17), (11.18), зазначивши, що підінтегральна функція $F(x,y,y')$ два рази неперервно диференційована за своїми аргументами.

Нехай $\hat{y}(x)$ – функція, яка дає мінімум функціоналу $I[y(x)]$ задачі (11.17), (11.18). Позначимо через $h(\cdot)$ допустиму варіацію аргументу функціонала $I[y(x)]$. Функція $h(\cdot)$ належить класу $C^1_{[a,b]}$ неперервно диференційованих функцій на $[a,b]$ з нульовими граничними умовами. Визначимо функцію $\varphi(\lambda)=I[\hat{y}(x)+\lambda h(\cdot)]$ дійсної змінної λ. Другу варіацію функціонала $I[y(x)]$ можна обчислити за формулою $\varphi''(0)=\delta^2 I[\hat{y}(\cdot),h(\cdot)]$. Якщо функція $F(x,y,y')$ неперервна й має неперервні другі похідні, а саме: $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$, $F_{y'y'}(x,y,y')$, то

$$\delta^2 I[y(\cdot),h(\cdot)]=\int_a^b W(x,h(x),h'(x))dx\,, \tag{11.44}$$

де

$$\begin{gathered}W(x,h(x),h'(x))=F_{yy}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)+\\ +2F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x)h'(x)+F_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h'^2(x).\end{gathered} \tag{11.45}$$

Функціонал (11.44) через необхідну умову мінімуму другого порядку набуває невід'ємних значень при всіх допустимих варіаціях $h(\cdot)\in C^1_{[a,b]}$:

$$\delta^2 I[\hat{y}(\cdot),h(\cdot)]\ge 0 \quad \forall\, h(\cdot)\in C^1_{[a,b]}\,. \tag{11.46}$$

Нерівність (11.46) дозволяє сформулювати необхідну умову мінімуму функціонала $I[y(x)]$ варіаційної задачі (11.17), (11.18).

11.3.2. Умови Лежандра та Якобі

Якщо $\hat{y}(x)$ – функція, яка дає слабкий локальний мінімум функціонала $I[y(x)]$ задачі (11.17), (11.18), то виконується *умова Лежандра:*

$$F_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))\ge 0 \quad \forall x\in[a,b]\,. \tag{11.47}$$

Якщо функція $\hat{y}(x)$ надає мінімум функціоналу $I[y(x)]$ у задачі (11.17),(11.18), то для другої варіації виконується умова (11.46).

Спряженою задачею у варіаційному численні називається задача мінімізації функціонала $\delta^2 I(y(\cdot),h(\cdot))$ у класі $C^1_{[a,b]}$:

$$\delta^2 I(y(\cdot),h(\cdot))=\int_a^b W(x,h(x),h'(x))dx\to\min,\quad h(a)=h(b)=0\,, \tag{11.48}$$

де підінтегральна функція $W(x,h(x),h'(x))$ має вигляд (11.45).

Оскільки виконується умова (11.48), то спряжена задача завжди має тривіальний розв'язок: $h(x) \equiv 0$, $\delta^2 I(\hat{y}(\cdot), h(\cdot)) = 0$.

Рівняння Ейлера

$$W_h - \frac{d}{dx} W_{h'} = 0 \tag{11.49}$$

для функціонала $\delta^2 I(y(\cdot), h(\cdot))$ спряженої задачі (11.48) на мінімум називається *рівнянням Якобі.* Ураховуючи позначення (11.45), рівняння (11.49) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Big[F_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h'(x) + F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x)\Big] = \\ &= F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h'(x) + F_{yy}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x). \end{aligned} \tag{11.50}$$

Точку x^* називають спряженою з точкою x_0, якщо існує такий нетривіальний розв'язок $h(x)$ рівняння Якобі (11.49) з початковими умовами

$$h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 1, \tag{11.51}$$

що $h(x_0) = h(x^*) = 0$.

Умова Якобі. Якщо $\hat{y}(x)$ – функція, яка надає мінімум функціоналу $I[y(x)]$ задачі (11.17), (11.18) і виконується *посилена умова Лежандра*

$$F_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a,b], \tag{11.52}$$

то на інтервалі $[a,b]$ не існує точок, спряжених з точкою x_0.

Оскільки жодна з умов (стаціонарності, Лежандра, Якобі) не є достатньою умовою екстремуму функціонала $I[y(x)]$, то в сукупності ці умови близькі до достатніх для перевірки того, чи надає функція $\hat{y}(x)$ слабкий екстремум функціоналу в задачі (11.17), (11.18).

11.4. Достатні умови екстремуму функціоналів

11.4.1. Власне та центральне поле

Розглянемо питання, пов'язані з достатніми умовами екстремуму функціоналів. Обмежимося тільки випадком найпростішої задачі варіаційного числення, розглянутої в підрозділі 11.2.

Нехай $\hat{y}(x)$ – екстремаль задачі із закріпленими кінцями (11.17), (11.18). Припустимо, що така задача розв'язана, тобто знайдена екстремаль, і нам треба перевірити, чи дійсно на цій екстремалі досягається екстремум функціонала $I[y(x)]$, і якщо так, то який (тобто мінімум або максимум, сильний або слабкий, якщо слабкий, то якого порядку).

Розгляд цих питань почнемо з деяких означень.

Нехай задана однопараметрична сім'я кривих $y = y(x,C)$. Стверджують, що ця сім'я утворює *поле* (*власне поле*) у деякій області D, якщо через будь-яку точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходить єдина крива сім'ї. Математично це записується так: $\forall (x_0, y_0) \in D \;\; \exists C_0 : y(x_0, C_0) = y_0$.

Кутовий коефіцієнт дотичної до ліній сім'ї в будь-якій точці поля $p(x,y)$ називається *функцією нахилу поля.*

Приклад 11.14. Область $D : x^2 + y^2 \le 1$. Сім'я кривих: $y = x + C$. Дана сім'я утворить поле. Функція нахилу поля в будь-якій точці $p(x,y) = 1$, тому що всі лінії сім'ї – прямі. Якщо в цій самій області задати однопараметричну сім'ю кривих $y = (x - C)^2 - 1$, то вони поля не утворюють, оскільки через кожну точку області D проходить не одна, а дві криві сім'ї.

Нехай усі лінії сім'ї $y = y(x,C)$ проходять через деяку точку $M_0(x_0, y_0) \in D$. Очевидно, така сім'я не утворить поля в D. Однак, якщо криві сім'ї $y = y(x,C)$ цілком покривають усю область D і ніде більше, крім точки $M_0(x_0, y_0)$, не перетинаються, то така сім'я називається *центральним полем.*

У центральному полі, на відміну від власного, допускається перетинання всіх ліній сім'ї, але тільки в одній точці.

Приклад 11.15. У тій самій області $D : x^2 + y^2 \le 1$ сім'я ліній $y = Cx$, доповнена вертикальною прямою $x = 0$, утворить центральне поле. Лінії сім'ї повністю заповнюють область D і перетинаються всі в єдиній точці $O(0,0)$. Функція нахилу цього поля в кожній точці, крім O, дорівнює: $p(x,y) = y / x$. У точці O функція нахилу поля не визначена.

Якщо розглянути цю саму сім'ю ліній $y = Cx$ в області $(x - 0.5)^2 + y^2 \le 1$, то в ній розглянута сім'я кривих утворить уже власне поле, тому що її центр тепер не потрапляє в область D.

11.4.2. Поле екстремалей

Повернемось до розгляду найпростішої задачі варіаційного числення. Відомо, що розв'язок диференціального рівняння Ейлера – це двопараметрична сім'я кривих, оскільки в нього входять дві довільні сталі: $y = y(x, C_1, C_2)$. Нехай ми одну з них зафіксували (напр., задовольнили одну з граничних умов; тоді в нас залишиться однопараметрична сім'я кривих $y = y(x,C)$, і кожна з її кривих є екстремаллю, тобто задовольняє диференціальне рівняння Ейлера. Ця сім'я може утворювати (не утворювати) поле (власне або центральне) у деякій області D.

Полем екстремалей найпростішої варіаційної задачі називається *власне* або центральне поле $y = y(x,C)$ таке, що виконуються умови:

- $\forall C$ крива $y = y(x,C)$ є екстремаллю, тобто розв'язком диференціального рівняння Ейлера;
- $\forall$ граничних умов (11.18) $\exists C_0$, таке, що крива $y = y(x,C_0)$ задовольняє рівняння Ейлера (11.19);
- крива $y = y(x,C_0)$ не лежить на границі області D, у якій сім'я $y = y(x,C)$ утворить поле.

У цьому випадку стверджують, що екстремаль (розв'язок задачі) включена в поле екстремалей.

11.4.3. Достатні умови Вейєрштрасса

Функцією *Вейєрштрасса* $E(x,y,p,y')$ називається функція, яка визначається рівністю

$$E(x,y,p,y') = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F'_p(x,y,p), \qquad (11.53)$$

де $p = p(x,y)$ – нахил поля екстремалей розглянутої варіаційної задачі (11.17), (11.18) у точці (x,y).

Достатні умови слабкого екстремуму. Крива $y = y(x)$ надає *слабкий екстремум* функціоналу (11.17), якщо:

- крива $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала (11.17) і задовольняє граничні умови (11.18), тобто є розв'язком рівняння Ейлера (11.19);
- екстремаль $\hat{y}(x)$ може бути включена в поле екстремалей (у частинному випадку це буде, коли виконується умова Якобі);
- функція Вейєрштрасса $E(x,y,p,y')$ має зберігати знак у всіх точках (x,y), близьких до екстремалі $\hat{y}(x)$, і для близьких до $p(x,y)$ значень y'. Функціонал $I[y]$ буде мати максимум на $\hat{y}(x)$, якщо $E \le 0$, і мінімум, якщо $E \ge 0$.

Достатні умови сильного екстремуму. Крива $y = y(x)$ надає *сильний екстремум* функціоналу (11.17), якщо:

- крива $y = y(x)$ є екстремаллю функціонала (11.17), яка задовольняє граничні умови (11.18);
- екстремаль $\hat{y}(x)$ може бути включена в поле екстремалей;

🗐 функція Вейєрштрасса $E(x,y,p,y')$ зберігає знак у всіх точках (x,y), близьких до екстремалі $\hat{y}(x)$, і для довільних значень y'. При $E \le 0$ буде максимум, при $E \ge 0$ – мінімум.

Зауваження. Умова *Вейєрштрасса* необхідна для наявності екстремуму в такому розумінні: якщо в точках екстремалі для деяких значень y' функція E має протилежні знаки, то сильний екстремум не досягається. Якщо ця властивість має місце при як завгодно близьких до p значеннях y', то не досягається і слабкий екстремум.

Приклад 11.16. Дослідити на екстремум функціонал

$$I(y) = \int_0^1 (y'^3 + y')dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2 .$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера для даного функціонала має вигляд $y'y'' = 0$, так що екстремалями будуть прямі $y(x) = C_1x + C_2$. Екстремаллю, що задовольняє задані граничні умови, є пряма $y = 2x$. Нахил поля в точках цієї екстремалі $p = 2$. Очевидно, що дана екстремаль $y = 2x$ включається в центральне поле екстремалей із центром у точці $(0,0)$. Неважко перевірити, що в даному випадку виконується умова Якобі. Рівняння Якобі тут має вигляд $\frac{d}{dx}(6y'u') = 0$, звідки $y' = 2$. Рівняння Якобі набуває вигляду $u''(x) = 0$, звідки отримаємо $u(x) = C_1x + C_2$. З умови $u(0) = 0$ випливає $C_2 = 0$. Оскільки розв'язок $u = C_1x$ при $C_1 \ne 0$, крім точки $x = 0$, на нуль не перетворюється, то умова Якобі виконана. Запишемо *функцію Вейєрштрасса*

$$E(x,y,p,y') = y'^3 + y' - p^3 - p - (y' - p)(3p^2 + 1) = (y' - p)^2(y' + 2p) .$$

Перший множник завжди додатний для будь-яких y', а другий додатний при значеннях y', близьких до 2. Отже, виконуються всі умови існування слабкого мінімуму. Якщо $y' < -4$, то функція E буде від'ємною і достатні умови сильного екстремуму не виконуватимуться. Для даного випадку сильного екстремуму немає.

11.4.4. Достатні умови Лежандра

Нехай функція $F(x,y,y')$ має неперервну частинну похідну $F_{y'y'}(x,y,y')$, а екстремаль C включена в поле екстремалей.

Якщо на екстремалі C має місце умова $F_{y'y'} > 0$, то на кривій C досягається *слабкий мінімум,* якщо $F_{y'y'} < 0$ на екстремалі C, то на ній досягається *слабкий максимум* функціонала (11.42). Ці умови називаються *підсиленими умовами Лежандра.*

У випадку, коли $F_{y'y'}(x,y,y') \geq 0$ у точках (x,y), близьких до екстремалі C при довільних значеннях y', маємо *сильний мінімум;* коли для вказаних значень аргументів $F_{y'y'}(x,y,y') \leq 0$ – *сильний максимум.*

Приклад 11.17. Дослідити на екстремум функціонал

$$I(y) = \int\limits_0^2 (e^{y'} + 3)dx, \quad y(0) = 0,\ y(2) = 1\,.$$

Розв'язання. У даному прикладі екстремалями є прямі $y = C_1 x + C_2$. Екстремаллю, що задовольняє граничні умови, є пряма $y = \dfrac{x}{2}$. Вона може бути включена в центральне поле екстремалей $y = Cx$. У даному випадку $F_{y'y'}(x,y,y') = e^{y'} > 0$ при будь-яких значеннях y'. Отже, на екстремалі $y = \dfrac{x}{2}$ функціонал має сильний мінімум.

РОЗДІЛ 12

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ СИСТЕМАМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ПАРАМЕТРІВ

12.1. Структурно-параметричний підхід у задачах оптимізації динамічних систем

Розглянемо загальну методику оптимізації динамічних систем, функція керування яких задається в параметричному вигляді. Такий підхід може ефективно використовуватися в розв'язанні прикладних задач.

Нехай рух об'єкта описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t,\alpha), x(t_0) = x_0, t \in [t_0, T], \tag{12.1}$$

де x – вектор стану розмірністю n, $f(x,u,t,\alpha)$ – n-вимірна вектор-функція, визначена й неперервно диференційована за своїми аргументами; $u(t)$ – функція керування розмірністю m, α – вектор параметрів розмірністю r, що оптимізуються.

Керування на кожному з підінтервалів $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $t_N = T$ часто визначається у вигляді

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{k_i^l} a_{ij}^l \varphi_{ij}^l(t), t \in [t_i, t_{i+1}], l = 1,2,\ldots,m \tag{12.2}$$

за системою базисних функцій $\{\varphi_{ij}^{l}(t)\}_{j=1}^{k_i^l}, t \in [t_i, t_{i+1})$.

Наближений розв'язок оптимізаційних задач шукають у класі структурно заданих функцій

$$u(t) = \psi_i(t, b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ik_i}), t \in [t_i, t_{i+1}), \qquad (12.3)$$

де $\psi_i(t, b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ik_i})$ – задані неперервні функції на $[t_i, t_{i+1})$ з неперервними похідними за своїми аргументами. Об'єднуючи випадки (12.2), (12.3), функцію керування шукаємо у вигляді

$$u_l(t) = \sum_{j=1}^{k_i^l} q_{ij}^l \varphi_{ij}^l(t, r_{i1}^l, r_{i2}^l, \ldots, r_{il_i}^l), t \in [t_i, t_{i+1}], l = 1, \ldots, m, \qquad (12.4)$$

де $q_{ij}, r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{il_i}$ – невідомі параметри, що задають структуру функції керування, $\varphi_{ij}^l(t, r_{i1}^l, r_{i1}^l, \ldots, r_{il_i}^l)$ – невідомі функції, що задовольняють умови, викладені вище. У таких випадках оптимізаційна задача скінченновимірна, тому, по суті, вона буде полягати в мінімізації деякої функції цілі від заданих параметрів:

$$\min_{\alpha, t_i, q_{ij}, r_{ik}} \Phi(x(T, \alpha, t_i, q_{ij}, r_{ik})). \qquad (12.5)$$

Для системи (12.1) розглянемо спряжену систему

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x, \psi, u, \alpha, t)}{\partial x}, \ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, \qquad (12.6)$$

де $H(x, \psi, u, \alpha, t) = \psi^T(t) f(x, u, t, \alpha)$ – функція Гамільтона. Для розв'язання задачі мінімізації (12.5) можна використовувати методи градієнтного спуску. Для цього необхідно визначити вектор-градієнт функції, компонентами якого будуть частинні похідні за введеними параметрами $\alpha, t_i, q_{ij}, r_{ik}$.

Варіацію функції за вектором α можна записати таким чином:

$$\Delta\Phi = -\int_{t_0}^{T} \psi^T(t) d\Delta x(t) - \int_{t_0}^{T} \Delta x^T(t) d\psi(t) + 0_1(\|\Delta x(T)\|) =$$

$$-\int_{t_0}^{T} [H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)] dt -$$

$$-\int_{t_0}^{T} \Delta x^*(t) \frac{\partial}{\partial x} [H(x, \psi, u, \alpha + \Delta\alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)] dt -$$

$$-\int_{t_0}^{T} 0_2(\|\Delta x(t)\|) + 0_1(\|\Delta x(T)\|).$$

Використовуючи теореми про інтегральну неперервність розв'язків диференціальних рівнянь і неперервну залежність розв'язків від параметрів, з отриманого співвідношення матимемо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x, \psi, u, \alpha, t)}{\partial \alpha} dt. \quad (12.7)$$

На основі наведеного співвідношення можна записати й варіацію функціонала за точками t_i. При цьому враховуємо, що $\Delta u(t) \neq 0$ на $[t_i, t_i + \Delta t_i)$. Тоді

$$\Delta \Phi = -\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} [H(x, \psi, u + \Delta u, \alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)]dt -$$

$$-\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} \Delta x^T(t) \frac{\partial}{\partial x}[H(x, \psi, u + \Delta u, \alpha, t) - H(x, \psi, u, \alpha, t)]dt -$$

$$-\int_{t_i}^{T} 0_2(\|\Delta x(t)\|) + 0_1(\|\Delta x(T)\|).$$

Звідси частинні похідні функціонала за точками перемикання t_i запишуться у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = H(x(t_i), \psi(t_i), u(t_i + 0), \alpha, t_i) - H(x(t_i), \psi(t_i), u(t_i - 0), \alpha, t_i),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N - 1. \quad (12.8)$$

Розглянемо задачі релейного керування та їх оптимізацію. Припустимо, що об'єкт керування описується нелінійною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t)u, x(t_0) = x_0, t \in [0, T]. \quad (12.9)$$

Тут u – скалярна кусково-неперервна функція, що задовольняє обмеження

$$u(t) \in \Omega_u = \{u(t) : |u(t)| \leq 1\}, t \in [0, T]. \quad (12.10)$$

Розглянемо задачу мінімізації функціонала $\mathrm{I}(u) = \Phi(x(T))$ на траєкторіях системи (12.9). Принцип максимуму стверджує, що оптимальне керування для даної задачі має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} 1, \psi^T(t) g(x(t), t) > 0, \\ -1, \psi^T(t) g(x(t), t) < 0. \end{cases} \quad (12.11)$$

Наведемо конструктивний алгоритм вибору оптимальних точок перемикання. Приріст $\Delta x(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)+\Delta x(t),t) - f(x(t),t) +$$
$$+(g(x(t)+\Delta x(t),t) - g(x(t)+\Delta x(t),t))u, \Delta x(0) = 0\,. \qquad (12.12)$$

Інтегруючи за частинами і підставляючи значення $\Delta x(0)$ і $\psi(T)$, отримаємо

$$\Delta\mathrm{I}(u) = -\int_{t_{i0}}^{t_i+\Delta t_i}[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t) - H(x,\psi,u,\alpha,t)]dt -$$
$$-\int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i}\Delta x^T(t)\frac{\partial}{\partial x}[H(x,\psi,u+\Delta u,\alpha,t) - H(x,\psi,u,\alpha,t)]dt -$$
$$-\int_{t_i}^{T} 0_2(\|\Delta x(t)\|) + 0_1(\|\Delta x(T)\|)\,.$$

Звідси

$$\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial t_i} = H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i+0),\alpha,t_i) - H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i-0),\alpha,t_i)\,, \qquad (12.13)$$

або

$$\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial t_i} = 2(-1)^{i+1}\frac{\partial H(x(t_i),\psi(t_i),u(t_i),t_i)}{\partial u} = 2(-1)^{i+1}\psi^T(t_i)g(x(t_i),t_i),$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1\,. \qquad (12.14)$$

Дана формула виводилась у припущенні, що на першому інтервалі $[t_0,t_1)$ функція $u(t) = -1$. У протилежному випадку формула матиме вигляд $\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial t_i} = 2(-1)^i\psi^T(t_i)g(x(t_i),t_i), i = 1,2,\ldots,N$.

Подальша задача полягає в мінімізації критерію якості методами типу градієнтного спуску. Для цього на першому кроці задаються точки перемикання $t_i^{(1)}, i = 1,\ldots,N$. Потім будується ітеративна процедура

$$t_i^{(j+1)} = P\{t_i^{(j)} - \rho_j 2(-1)^{i+1}\psi^*(t_i^{(j)})g(x(t_i^{(j)}),t_i^{(j)})\},$$
$$i = 1,\ldots,N, j = 1,2,\ldots \qquad (12.15)$$

Тут ρ_j – послідовність чисел, що задовольняє умови

$$\rho_j > 0,\ \sum_{j=1}^{\infty}\rho_j > \infty,\ \sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2 < \infty\,,$$

$P\{\cdot\}$ – операція впорядкування точок перемикання.

12.2. Ітераційна процедура оптимізації систем зі змінною структурою, що використовують частинні похідні першого порядку

Необхідні умови оптимальності для реальних задач оптимального керування отримати, як правило, нескладно. У деяких простих випадках можна сформулювати й достатні умови оптимальності. Найчастіше такі умови не дають оптимальних розв'язків задач, але можуть стати основою побудови конструктивних алгоритмів ітераційного характеру для визначення оптимальних режимів функціонування об'єктів керування.

Алгоритми керування з використанням градієнтних методів у класі кусково-неперервних функцій для багатьох прикладних задач важко використати через погану збіжність ітераційних процедур. Тому застосовують методику параметризації керування і таким чином переходять до скінченновимірних оптимізаційних задач. Розв'язати останні через неявну залежність розв'язків від параметрів також непросто, особливо у випадку великої кількості оптимізаційних параметрів. Тому для конкретних задач на першому етапі намагаються ввести щонайменше таких параметрів, можливо і формальних, які б наближено визначали більшу кількість реальних параметрів і з достатньою адекватністю описували функціонування об'єкта. Далі знаходять оптимальний режим у просторі меншої кількості параметрів, який дає можливість визначити наближення для більшої кількості. Більша кількість оптимальних параметрів може стати основою для визначення початкового наближення функції керування, наприклад у класі кусково-неперервних функцій і т. д. Такий підхід є конструктивним і пов'язаний з ускладненням математичної моделі як за керуванням, так і за структурою. З іншого боку, такий підхід дає можливість визначити оптимальні фізично реалізовні режими.

Розглянемо досить загальну постановку задачі обчислення частинних похідних першого порядку. Отримаємо загальні формули, які будемо використовувати для простіших задач.

Припустимо, що рух об'єкта описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x,t,\alpha), \qquad t_{i-1} < t < t_i, \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{12.16}$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x(t_0 + 0) = x^{(0)}(\alpha). \tag{12.17}$$

Тут x – n-вимірний вектор стану об'єкта; α – вектор оптимізаційних параметрів розмірністю r, $f^{(i)}(x,t,\alpha)$ – вектор-функції розмірністю n, неперервні разом зі своїми частинними похідними за елементами векторів x,α та t, $t_N = T$, t_i, $i = 1,2,\ldots,N-1$ – точки перемикання, у яких траєкторії системи мають стрибки

$$x(t_i + 0) = \Phi_i(x(t_i - 0), t_i, \alpha), \qquad i = 1,2,\ldots,N-1. \tag{12.18}$$

Вважаємо, що точки перемикання та початковий момент t_0 залежать від елементів вектора α:

$$t_i = t_i(\alpha), \qquad i = 0,1,2,\ldots,N-1. \tag{12.19}$$

Задача полягає в тому, щоб обчислити похідні від критерію якості

$$I(\alpha) = \Phi(x(T,\alpha)) \tag{12.20}$$

за елементами вектора α на деякому режимі $\alpha = \overline{\alpha}$.

Зауважимо, що функціонал (12.20) може бути і складнішим, але відомими перетвореннями його зводять до розглянутого випадку.

Знайдемо похідну від функції (12.20) по α_j при $\alpha = \overline{\alpha}$:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} = grad_x^T \Phi(x(T,\overline{\alpha})) \frac{\partial x(T,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j}. \tag{12.21}$$

Зрозуміло, що вектор-функції $y^{(j)}(t,\alpha) = \dfrac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha_j}$ задовольняють лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy^{(j)}}{dt} = \frac{\partial f^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial x} y^{(j)} + \frac{\partial f^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \tag{12.22}$$

$$t \in (t_{s-1}, t_s), \qquad s = 1,2,\ldots,N, \qquad j = 1,2,\ldots,r$$

з відповідними початковими умовами

$$y^{(j)}(t_0) = \frac{\partial x_0^{(0)}(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} - f^{(1)}(x^{(0)}(\overline{\alpha}), t_0(\overline{\alpha}), \overline{\alpha}) \frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \tag{12.23}$$

$$j = 1,2,..,r.$$

Дійсно, системи рівнянь (12.22) отримуємо простим диференціюванням лівої та правої частин системи рівнянь (12.16) для будь-яких $t \in (t_{s-1}, t_s)$, $s = 1,2,\ldots,N$, $j = 1,2,\ldots,r$.

Щоб показати справедливість формули (12.23), подамо розв'язки системи (12.16) на першому інтервалі $[t_0, t_1)$ в інтегральній формі

$$x(t,\alpha) = x^{(0)}(\alpha) + \int_{t_0(\alpha)}^{t} f^{(1)}(x(\tau,\alpha),\tau,\alpha)d\tau. \tag{12.24}$$

Продиференціюємо ліву і праву частини співвідношення (12.24) за параметром α_j:

$$y^{(j)}(t,\alpha)=\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial x^{(0)}(\alpha)}{\partial \alpha_j}+$$
$$+\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t}\left[\frac{\partial f^{(1)}(x(\tau,\alpha),\tau,\alpha)}{\partial x}y^{(j)}(\tau,\alpha)+\frac{\partial f^{(1)}(x(\tau,\alpha),\tau,\alpha)}{\partial \alpha_j}\right]d\tau-$$
$$-f^{(1)}(x^{(0)}(\alpha),t_0(\alpha),\alpha)\frac{\partial t_0(\alpha)}{\partial \alpha_j}. \qquad (12.25)$$

Узявши в (12.25) $t=t_0(\alpha)$ при $\alpha=\overline{\alpha}$, ми переконаємось у справедливості формули (12.23).

Визначимо величини стрибків для вектор-функцій $y^{(i)}(t,\alpha)$ у точках перемикання. Для цього продиференціюємо розв'язки $x(t_s+0)=x(t_s+0,\alpha)$ по α_j:

$$\frac{dx(t_s+0)}{d\alpha_j}=y^{(j)}(t_s+0,\alpha)+f^{(s+1)}(x(t_s+0),t_s+0,\alpha)\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}.$$

З отриманого співвідношення знаходимо

$$y^{(j)}(t_s+0,\alpha)=\frac{dx(t_s+0)}{d\alpha_j}-f^{(s+1)}(x(t_s+0),t_s+0,\alpha)\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}. \qquad (12.26)$$

Продиференціюємо (12.18) при $i=s$ по α_j у точці t_s+0:

$$\frac{dx(t_s+0)}{d\alpha_j}=\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)}{\partial x}\frac{dx(t_s-0)}{\partial \alpha_j}+$$
$$+\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s,\alpha)}{\partial t}\frac{dt_s}{\partial \alpha_j}+\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s,\alpha)}{\partial \alpha_j}. \qquad 12.27)$$

За аналогією з вищеописаним має місце формула

$$\frac{dx(t_s-0)}{d\alpha_j}=y^{(j)}(t_s-0,\alpha)+f^{(s)}(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}. \qquad (12.28)$$

Ураховуючи співвідношення (12.16), (12.28), згідно з формулою (12.26) запишемо стрибки для вектор-функцій $y^{(j)}(t,\alpha)$ у точках t_s:

$$y^{(j)}(t_s+0,\alpha)=$$
$$=\left[\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)}{\partial x}f^{(s)}(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)-f^{(s+1)}(x(t_s+0),t_s,\alpha)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)}{\partial t}\right]\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}+$$
$$+\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)}{\partial x}y^{(j)}(t_s-0,\alpha)+\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0),t_s-0,\alpha)}{\partial \alpha_j}. \qquad (12.29)$$

Тепер у нас повністю визначені задачі Коші (12.22), (12.23) зі стрибками в точках перемикання (12.29) при $\alpha = \overline{\alpha}$.

Введемо до розгляду вектор спряжених змінних $\psi(t)$ розмірністю n на інтервалі неперервності

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial f^{(s)T}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial x}\psi, \qquad t_{s-1} < t < t_s,\ s = 1,2,\dots,N \tag{12.30}$$

з початковими умовами в момент $t = T$

$$\psi(T) = -grad_x \Phi(x(t,\overline{\alpha})). \tag{12.31}$$

Тоді похідна за параметром α_j від критерію якості (12.5) за допомогою спряжених змінних запишеться так:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_j} = -\psi^T(T)y^{(j)}(T,\overline{\alpha}). \tag{12.32}$$

Розглянемо похідну від скалярного добутку $\psi^T(t)y^{(j)}(t,\overline{\alpha})$ на інтервалі неперервності (t_{s-1},t_s):

$$\frac{d}{dt}[\psi^T(t)y^{(j)}(t,\overline{\alpha})] = \frac{d\psi^T(t)}{dt}y^{(j)}(t,\overline{\alpha}) + \psi^T(t)\frac{dy^{(j)}(t,\overline{\alpha})}{dt} =$$

$$= -\psi^T(t)\frac{\partial f^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t,\overline{\alpha}) +$$

$$+\psi^T(t)\frac{\partial f^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t,\overline{\alpha}) + \psi^T(t)\frac{\partial f^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} =$$

$$= \psi^T(t)\frac{\partial f^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial H(x,\psi,t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j},$$

де $H(x,\psi,t,\alpha) = \psi^T(t)f^{(s)}(x,t,\alpha), \quad t_{s-1} < t < t_s$ – функція Гамільтона.

З останнього співвідношення шляхом інтегрування отримаємо

$$\psi^T(t_s - 0)y^{(j)}(t_s - 0,\overline{\alpha}) - \psi^T(t_{s-1} + 0)y^{(j)}(t_{s-1} + 0,\overline{\alpha}) =$$

$$= \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial H(x,\psi,t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j}dt. \tag{12.33}$$

Підсумувавши за s ліві та праві частини (12.33) і згрупувавши відповідно доданки, отримаємо

$$\psi^T(T)y^{(j)}(T,\overline{\alpha}) = \sum_{s=1}^{N-1}\left[\psi^T(t_s+0)y^{(j)}(t_s+0,\overline{\alpha}) - \psi^T(t_s-0)y^{(j)}(t_s-0,\overline{\alpha})\right] +$$

$$+\psi^T(t_0)y^{(j)}(t_0,\overline{\alpha}) + \int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x,\psi,t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j}dt. \tag{12.34}$$

Зобразимо один з доданків суми, яка входить у праву частину (12.34), з урахуванням (12.29):

$$\psi^T(t_s+0)y^{(j)}(t_s+0,\bar{\alpha})-\psi^T(t_s-0)y^{(j)}(t_s-0,\bar{\alpha})=$$

$$=\left[\psi^T(t_s+0)\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}-\psi^T(t_s-0)\right]\times$$

$$\times y^{(j)}(t_s-0,\bar{\alpha})+\psi^T(t_s+0)\left\{\left[\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(s)}(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})-\right.\right.$$

$$\left.-f^{(s+1)}(x(t_s+0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})+\quad\frac{\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\frac{\partial t_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$\left.+\frac{\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha}}{\partial\alpha_j}\right\}. \qquad (12.35)$$

Якщо ми виберемо стрибки в точках перемикання для спряженої системи у вигляді

$$\psi(t_s-0)=\left(\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\right)^T\psi(t_s+0), \qquad (12.36)$$

то вираз (12.34), з урахуванням (12.23), (12.35) та (12.36), можна переписати таким чином:

$$\psi^T(T)y^{(j)}(T,\bar{\alpha})=\sum_{s=1}^{N-1}\quad\psi^T(t_s+0)\times$$

$$\times\left\{\left[\quad\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(s)}\quad(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})-\right.\right.$$

$$\left.-f^{(s+1)}(x(t_s+0),t_s,\bar{\alpha})+\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\quad\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\partial t_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\quad\right\}+\psi^T(t_0)\left[\frac{\partial x^0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}-\right.$$

$$\left.-f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial t^0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\quad\right]+\int_{t_0}^{T}\frac{\partial H(x,\psi,t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}dt. \qquad (12.37)$$

Ураховуючи (12.32) та (12.37), отримаємо формулу для обчислень частинної похідної за параметром α_j у загальному випадку

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -\sum_{S=1}^{N-1} \psi^T(t_s+0)\left\{\left[\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0,\bar{a}),t_s,\bar{a})}{\partial x} f^{(s)}(x(t_s-0,\bar{a}),t_s,\bar{a}) - \right.\right.$$

$$\left. -f^{(s+1)}(x(t_s+0,\bar{a}),t_s,\bar{a}),t_s,\bar{a}) + \frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0,\bar{a}),t_s,\bar{a})}{\partial t}\right]\frac{\partial t_s(\bar{a})}{\partial a_j} +$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0,\bar{a}),t_s,\bar{a})}{\partial a_j}\right\} -$$

$$-\psi^T(t_0)\left[\frac{\partial x^{(0)}(\bar{a})}{\partial a_j} - f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{a}),t_0(\bar{a}),\bar{a})\frac{\partial t_0(\bar{a})}{\partial a_j}\right] -$$

$$-\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x(t,\bar{a}),\psi(t),t,\bar{a}}{\partial a_j}\partial t. \qquad (12.38)$$

Як відмічалося вище, формула (12.38) досить загальна і нею можна користуватися при розв'язанні багатьох прикладних задач. Зокрема, якщо точки перемикання та момент t_0 не залежать від α, то співвідношення (12.38) набуває простішого вигляду:

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -\sum_{s=1}^{N-1} \psi^T(t_s+0)\frac{\partial \Phi(x(t_s-0,\bar{a}),t_s,\bar{a})}{\partial a_j} -$$

$$-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial H(x(t,\bar{a}),\psi(t),t,\bar{a})}{\partial a_j}\partial t. \qquad (12.39)$$

Якщо α – вектор точок перемикання, то частинні похідні критерію якості за точками перемикання обчислюються за формулами

$$\frac{\partial I}{\partial t_i} = -\psi^T(t_i+0)\left\{ \frac{\partial \Phi_i(x(t_i-0),t_i)}{\partial x} f^{(i)}(x(t_i-0),t_i) - \right.$$

$$\left. -f^{(i+1)}(x(t_i+0),t_i) + \frac{\partial \Phi_i(x(t_i-0),t_i)}{\partial t_i} \right\}. \qquad (12.40)$$

У випадку, коли $\alpha = x^{(0)}$ – n-вимірний вектор параметрів,

$$\frac{\partial I}{\partial x_j^{(0)}} = -\psi_j(t_0), \qquad j = 1,2,\ldots,n. \qquad (12.41)$$

Якщо ж $\alpha = t_0$ – скалярний параметр, а $x^{(0)}$ не залежить від α, то, згідно з формулою (12.38), маємо

$$\frac{\partial I}{\partial t_0} = \psi^T(t_0) f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{t}_0),\bar{t}_0). \qquad (12.42)$$

У випадку неперервності траєкторій

$$x(t_i+0)=x(t_i-0)=x(t_i), \qquad i=1,2,\dots,N-1$$

формула (12.35) спрощується:

$$\frac{\partial I}{\partial t_i}=-\psi^T(t_i)[f^{(i)}(x(t_i),t_i)-f^{(i+1)}(x(t_i),t_i)]. \qquad (12.43)$$

Згідно з формулою (12.38) можна отримати частинні похідні за точками перемикання і для релейних систем керування, оптимізації імпульсних систем тощо.

Умови перемикання (12.19) можуть визначатися більш складними співвідношеннями

$$\varphi_s(x(t_s-0,\alpha),t_s,\alpha)=0, \qquad s=1,2,\dots,N-1. \qquad (12.44)$$

У випадку диференційованості функцій $\varphi_s(x(t_s-0,\alpha),t_s,\alpha)$ за своїми аргументами визначимо похідні $\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}$. Для цього продиференціюємо ліву частину співвідношення (12.44) за α_j і розв'яжемо отримане рівняння відносно $\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}$, отримаємо

$$\frac{\partial t_s}{\partial \alpha_j}=\frac{Q_s^{xT}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)y^{(j)}(t_s-0)+Q_s^{\alpha_j}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)}{Q_s^{xT}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)f^{(s)}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)+Q_s^{t}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)}. \qquad (12.45)$$

Для існування розв'язків (12.45) необхідно припустити, щоб знаменники в цьому співвідношенні не дорівнювали нулю. Тут

$$Q_s^{x}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)=\frac{\partial\varphi_s(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)}{\partial x},$$

$$Q_s^{\alpha_j}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)=\frac{\partial\varphi_s(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)}{\partial \alpha_j},$$

$$Q_s^{t}(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)=\frac{\partial\varphi_s(x(t_s-0,\bar\alpha),t_s,\bar\alpha)}{\partial t}.$$

Здійснюючи необхідні обчислення, аналогічні вищеописаним, ми прийдемо до формули

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_j}=-\sum_{s=1}^{N-1}\psi^T(t_s+0)\left\{\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar\alpha)}{\partial \alpha_j}-\right.$$

$$-\left[\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar a)}{\partial x}f^{(s)}(x(t_s)-0),t_s,\bar a)-\right.$$

$$-f^{(s+1)}(x(t_s+0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})+\frac{\partial\Phi_s(x(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t}\Bigg]\times$$

$$\times\frac{Q_s^{\alpha_j}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{Q_s^{xT}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})f^{(s)}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})+Q_s^t(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}-$$

$$-\psi^T(t_0)\left[\frac{\partial x^{(0)}(\bar{a})}{\partial a_j}-f^{(1)}(x^{(0)}(\bar{a}),t_0(\bar{a}),t_0(\bar{a}),\bar{a})\frac{\partial t_0(\bar{a})}{\partial a_j}\right]-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\frac{\partial H(x(t,\bar{a}),\psi(t),t,\bar{a})}{\partial a_j}dt. \qquad (12.46)$$

При цьому вектор спряжених змінних у точках перемикання має стрибки

$$\psi(t_s-0)=\left\{\frac{\partial\Phi_s^T(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}-\right.$$

$$-\frac{Q_s^x(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{Q_s^{xT}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})f^{(s)}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})+Q_s^t(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}\times$$

$$\times\left[f^{(s)T}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})\frac{\partial\Phi_s^T(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}-\right.$$

$$\left.\left.-f^{(s+1)T}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})+\frac{\partial\Phi_s^T(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\right\}\psi(t_s+0), \qquad (12.47)$$

$$s=1,2,\ldots,N-1 .$$

Умови стрибків (12.18) у точках перемикання можуть задаватися неявно:

$$R_s(x(t_i+0),x(t_i-0),t_i,\alpha)=0\,,\ s=1,2,\ldots,N-1, \qquad (12.48)$$

де $R_s(\cdot)-n$-вимірні вектор-функції, неперервно диференційовані за своїми аргументами.

Використовуючи ту саму схему, нескладно вивести формули для обчислення частинних похідних критерію якості за параметром α_j для випадку (12.48):

$$\frac{\partial I}{\partial a_j}=-\sum_{s=1}^{N-1}\psi^T(t_s+0)\Big\{Q_s^{(1)}(x(t_s+0,\bar{a}),x(t_s-0,\bar{a}),t_s,\bar{a})$$

$$\times\left[Q_s^{(2)}(x(t_s+0,\bar{\alpha}),x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})f^{(s)}(x(t_s-0,\bar{\alpha}),t_s,\bar{\alpha})\frac{\partial\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+\right.$$

$$+q_s(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})+$$
$$\left.+q_s^{(j)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})\right]-$$
$$\left.-f^{(s+1)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right\}-$$
$$-\psi^T(t_0)\left[\frac{\partial x^{(0)}(\alpha)}{\partial\alpha_j}-f^{(1)}(x^{(0)}(\overline{\alpha}),t_0(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right]-$$
$$-\int_{t_0}^{T}\frac{\partial H(x(t,\overline{\alpha}),\psi(t),t,\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}dt\,. \qquad (12.49)$$

У формулі (12.49) введено такі позначення:

$$Q_s^{(1)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})=$$
$$=-\left(\frac{R_s(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\alpha)}{\partial x(t_s+0,\overline{\alpha})}\right)^{-1},$$
$$Q_s^{(2)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})=$$
$$=\frac{R_s(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\alpha)}{\partial x(t_s-0,\overline{\alpha})},$$
$$q_s(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})=\frac{R_s(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\alpha)}{\partial t},$$
$$q_s^{(j)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})=\frac{R_s(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\alpha)}{\partial\alpha_j},$$
$$s=1,2,\ldots,N-1$$

Припустимо, що відповідні обернені матриці $Q_s^{(1)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})$, $s=1,2,\ldots,N-1$ існують. У цьому випадку спряжені вектор-функції в точках перемикання мають стрибки

$$\psi(t_s-0)=Q_s^{(2)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})\times$$
$$\times Q_s^{(1)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})\psi(t_s+0),$$
$$s=1,2,\ldots,N-1\,. \qquad (12.50)$$

Як приклад розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)+g(x,t)u \qquad (12.51)$$

з фіксованими початковими умовами

$$x(t_0) = x(t_0 + 0) = x_0 . \qquad (12.52)$$

Припустимо, що $u(t)$ – скалярна функція керування, що набуває значення $u(t) = u_i$, $t \in (t_{i-1}, t_i)$, x – як і раніше, n-вимірний вектор стану об'єкта, $f(x,t), g(x,t)$ – n-вимірні вектор-функції необхідного степеня гладкості. Як оптимізаційні параметри виберемо точки перемикання t_i, $i = 1,2,\dots,N-1$, а траєкторії вважатимемо неперервними в цих точках:

$$x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i) . \qquad (12.53)$$

Тоді, згідно з формулою (12.43), частинні похідні критерію якості (12.20) за точками перемикання для нашого випадку обчислюються за формулами

$$\frac{\partial I}{\partial t_i} = -\psi^T(t_i)[f(x(t_i),t_i) + g(x(t_i),t_i)u_i - f(x(t_i),t_i) - g(x(t_i),t_i)u_{i+1}] =$$

$$= (u_{i+1} - u_i)\psi^T(t_i)g(x(t_i),t_i) . \qquad (12.54)$$

Отримані формули для обчислення частинних похідних першого порядку використовуються для побудови різних ітераційних процедур знаходження мінімізуючих послідовностей. Питання дослідження збіжності таких алгоритмів надзвичайно актуальне. Оскільки критерії якості типу (12.20) неявно залежать від параметрів оптимізації, то сказати про їх опуклість неможливо. Однак диференційованість цільових функцій досліджується згідно з відповідними теоремами про диференційованість розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь, залежних від параметрів.

У практичних задачах дуже часто кінцевий момент $T = t_N$ не задано, а він є параметром оптимізації або ж залежить від α. Тому замість критерію якості (12.20) доцільно розглянути

$$I_1(\alpha) = \Phi(x(T(\alpha),\alpha), T(\alpha), \alpha). \qquad (12.55)$$

У цьому випадку

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Phi(x(T(\bar\alpha),\bar\alpha), T(\bar\alpha), \bar\alpha)}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \Phi(x(T(\bar\alpha),\bar\alpha), T(\bar\alpha), \bar\alpha)}{\partial T}\frac{\partial T(\bar\alpha)}{\partial \alpha_j} +$$

$$+ grad_x^T \Phi(x(T(\bar\alpha),\bar\alpha), T(\bar\alpha), \bar\alpha) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial x(T(\bar\alpha),\bar\alpha)}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial x(T(\bar\alpha),\bar\alpha)}{\partial T}\frac{\partial T(\bar\alpha)}{\partial \alpha_j} \right].$$

Припускаючи, що $x(T,\alpha) = x(T-0,\alpha)$, отримаємо

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Phi(x(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}),T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \Phi(x(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}),T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})}{\partial T}\frac{\partial T(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} +$$

$$+grad_x^T \Phi(x(T(\overline{a}),\overline{a}),T(\overline{a}),\overline{a}) \times$$

$$\times \left[y^{(j)}(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}) + f^{(N)}(x(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}),T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})\frac{\partial T(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right] .$$

Останні співвідношення очевидно випливають з інтегрального зображення розв'язків системи (12.16).

Загальна формула для обчислення частинних похідних за параметром α_j від критерію якості (12.55) буде мати такий вигляд:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Phi(x(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}),T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \Phi(x(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}),T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})}{\partial T}\frac{\partial T(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} -$$

$$-\psi^T(T) f^{(N)}(x(T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}),T(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})\frac{\partial T(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} -$$

$$-\sum_{s=1}^{N-1} \psi^T(t_s+0)\left\{\left[\frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x} f^{(s)}(x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha}) -\right.\right.$$

$$\left. -f^{(s+1)}(x(t_s+0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha}) + \frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})}{\partial t} \right]\frac{\partial t_s(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} +$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi_s(x(t_s-0,\overline{\alpha}),t_s,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\} -$$

$$-\psi^T(t_0)\left[\frac{\partial x^{(0)}(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} - f^{(1)}(x^{(0)}(\overline{\alpha}),t_0(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j}\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H(x(t,\overline{\alpha}),\psi(t),t,\overline{\alpha})}{\partial \alpha_j} dt. \qquad (12.56)$$

Формула (12.56) загальніша, ніж формула (12.38). Зокрема, згідно з (12.56) можна отримати частинні похідні за моментом T і т. д. Її повне доведення аналогічне наведеному вище.

12.3. Методи оптимізації систем зі змінною структурою, що використовують матрицю других похідних

Для розв'язання задач оптимізації часто використовуються методи типу Ньютона, які дають кращу збіжність ітераційних процедур. Матриця других похідних може використовуватись і для аналізу точки екстремуму. Тому для задач траєкторної параметричної оптимізації важлива розробка алгоритмічного та програмного забезпечення обчислення частинних похідних другого порядку від критерію якості за параметрами оптимізації.

Наведемо формулу обчислення матриць других похідних, якою можна користуватися для розв'язання конкретних задач. Припустимо, що об'єкт керування описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x,t,\alpha), \qquad t_{i-1} < t < t_i, \qquad i = 1,2,,\ldots,N \tag{12.57}$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x(t_0+0) = x^{(0)}(\alpha). \tag{12.58}$$

Розглянемо випадок, коли в точках перемикання $t_i, \quad i = 1,2,\ldots,N-1$ траєкторії системи (12.57) мають стрибки

$$x(t_i+0) = \Phi_i(x(t_i-0),t_i,\alpha), \qquad i = 1,2,\ldots,N-1, \tag{12.59}$$

а самі точки перемикання й початковий момент t_0 залежать від елементів вектора α:

$$t_0 = t_0(\alpha), \quad t_i = \varphi_i(\alpha), \quad i = 1,2,\ldots,N-1. \tag{12.60}$$

Тут x – n-вимірний вектор стану об'єкта; α – вектор параметрів оптимізації розмірністю r, $f^{(i)}(x,t,\alpha)$ – вектор-функції розмірністю n, неперервні за своїми аргументами та неперервно диференційовані за елементами x,α до другого порядку включно, $\Phi_i(x,t,\alpha)$ – векторні функції розмірністю n, двічі неперервно диференційовані за своїми аргументами, $\varphi_i(\alpha)$ – скалярні двічі неперервно диференційовані функції, $t_N = T$.

Задача полягає в тому, щоб обчислити другі похідні від критерію якості

$$I(\alpha) = \Phi(x(T,\alpha)) \tag{12.61}$$

за елементами вектора α на деякому розрахунковому режимі $\alpha = \bar{\alpha}$. При цьому $\bar{x} = x(t,t_0(\bar{\alpha}),x_0(\bar{\alpha}))$.

Другі похідні від критерію (12.61) за компонентами вектора α обчислюються за формулою

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} = grad_x^T\Phi(x(T,\alpha))\frac{\partial^2 x(T,\alpha)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} + \frac{\partial x^T(T,\alpha)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial^2\Phi(x(T,\alpha))}{\partial^2 x}\frac{\partial x\ (T,\alpha)}{\partial\alpha_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi(x(T,\alpha))}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i(T,\alpha)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} + \sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x(T,\alpha))}{\partial x_i\partial x_l}\frac{\partial x_i(T,\alpha)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial x_l(T,\alpha)}{\partial\alpha_k}. \quad (12.62)$$

Тут T – знак транспонування.

Функції $y_i^{(j)}(t) = \dfrac{\partial x_i(t,\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}$, $y_i^{(j,k)}(t) = \dfrac{\partial^2 x_i(t,\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}$ на відрізках неперервності задовольняють відповідні системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i^{(j)}(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i^{(s)}(x(t,\overline{\alpha}),t,\overline{\alpha})}{\partial x_l}y_l^{(j)}(t) + \frac{\partial f_i^{(s)}x(t,\overline{a}),t,\overline{a})}{\partial a_j}, \quad (12.63)$$

$$t\in(t_{s-1},t_s), \quad s=1,2,\ldots,N, \quad j=1,2,\ldots,r, \quad i=1,2,\ldots n.$$

$$\frac{dy_i^{(j,k)}(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i^{(s)}(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial x_l}y_l^{(j,k)}(t) + \sum_{p=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i^{(s)}(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial x_p\partial x_l}y_p^{(j)}(t)y_l^{(k)}(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 f_i^{(s)}(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial x_l\partial\alpha_k}y_l^{(j)}(t) + \frac{\partial^2 f_i^{(s)}(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial x_l\partial\alpha_j}y_l^{(k)}(t)\right] + \frac{\partial^2 f_i^{(s)}(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}, \quad (12.64)$$

$$t\in(t_{s-1},t_s), \quad s=1,2,\ldots,N, \quad j,k=1,2,\ldots,r, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Оскільки вектор $x_0 = x(t_0) = x_0(\alpha)$ і момент $t_0 = t_0(\alpha)$ залежать від вектора α, то початкові умови для систем (12.63) і (12.64) мають вигляд

$$y^{(j)}(t_0) = \frac{\partial x_0^{(0)}(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j} - f^{(1)}(x_0(\overline{\alpha}),t_0(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}, \quad j=1,2,..,r, \quad (12.65)$$

$$y^{(j,k)}(t_0) = \frac{\partial^2(x_0(\overline{\alpha}))}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} - \dot{y}^{(j)}(t_0)\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k} -$$

$$-\dot{y}^{(k)}(t_0)\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j} - \frac{d^2 x(t_0,\overline{\alpha})}{dt^2}\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k} -$$

$$-f^{(1)}(x_0(\overline{\alpha}),t_0(\overline{\alpha}),\overline{\alpha})\frac{\partial^2 t_0(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}, \quad j,k=1,2,\ldots,r. \quad (12.66)$$

Система рівнянь (12.63) з початковими умовами (12.65) розв'язується на відрізках неперервності вектора $x(t)$. У точках розриву траєкторії $x(t)$ вектори $y^{(j)}(t)$ мають стрибки

$$y^{(i)}(t_s+0)-y^{(i)}(t_s-0)=\left[\frac{\partial \Phi(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(s)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})-\right.$$

$$\left.-f^{(s+1)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})+\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\frac{\partial \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t_s-0)+\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \qquad (12.67)$$

$$j=1,2,..,r,\ \ s=1,2,..,N-1.$$

Акцентуємо увагу на виведенні умов стрибка в точках t_s для вектор-функції $y^{(j,k)}(t)$. Запишемо очевидне співвідношення

$$y^{(j,k)}(t_s+0)=\frac{d^2x(t_s+0)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}-\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s+0)\frac{\partial \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_k}-\frac{d}{dt}y^{(k)}(t_s+0)\frac{\partial \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}-$$

$$-\frac{d^2x(t_s+0,\bar{\alpha})}{dt^2}\frac{\partial \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}\frac{\partial \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_k}-\frac{dx(t_s+0,\bar{\alpha})}{\partial t}\frac{\partial^2 \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}. \qquad (12.68)$$

Тут наведено такі позначення: $\dfrac{dx}{\partial \alpha_j}$ – повна похідна вектора x по j-й компоненті вектора α; $\dfrac{d^2x}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}$ – повна похідна другого порядку вектора x за скалярними аргументами α_j, α_k.

Визначимо вектор $\dfrac{d^2x(t_s+0)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k}$ шляхом диференціювання співвідношення (12.59):

$$\frac{dx(t_s+0)}{\partial \alpha_j}=\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\frac{dx(t_s-0)}{\partial \alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t}\frac{\partial \varphi(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}+\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \qquad (12.69)$$

$$\frac{d^2x(t_s+0)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}=\frac{\partial\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x}\frac{d^2x(t_s-0)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+$$

$$+\frac{d}{\partial\alpha_k}\left[\frac{\partial\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x}\right]\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{d}{\partial\alpha_k}\left[\frac{\partial\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x}\right]\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+\frac{d}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}. \qquad (12.70)$$

Ураховуючи співвідношення

$$\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_j}=y^{(j)}(t_s-0)+f^{(s)}(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j},$$

$$\frac{d^2x(t_s-0)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}=y^{(j,k)}(t_s-0)+\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s-0)\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k}+$$

$$+\frac{d}{dt}y^{(k)}(t_s-0)\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}+\frac{d^2x(t_s-0,\overline{\alpha})}{dt^2}\times$$

$$\times\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial x(t_s-0,\overline{\alpha})}{dt}\frac{\partial^2\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} \qquad (12.71)$$

і позначивши через $\Phi_{si}(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})$ i-ту компоненту вектора Φ_s, вираз (12.70) перепишемо таким чином:

$$\frac{d^2x(t_s+0)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}=\frac{\partial\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x}\Big[y^{(j,k)}(t_s-0)+$$

$$+\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s-0)\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\frac{d}{dt}y^{(k)}(t_s-0)\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{d^2x(t_s-0,\overline{\alpha})}{dt^2}\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\frac{dx(t_s-0,\overline{\alpha})}{dt}\frac{\partial^2\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}\Bigg]+$$

$$+R+\frac{\partial^2\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_k}\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_s(\overline{x}(t_s-0),t_s,\overline{\alpha})}{\partial x\partial t}\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\varphi_s(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_k}+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x\partial t}\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_k}\frac{\partial\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t^2}\frac{\partial\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t\partial\alpha_k}\frac{\partial\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_j}\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_k}+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t\partial a_j}\frac{\partial\varphi(\bar{a})}{\partial a_k}+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t\partial a_j}+$$

$$+\frac{\partial\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+\frac{\partial^2\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_j}\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_k}, \quad (12.72)$$

де компоненти вектора R обчислюються за формулою

$$R_i=\frac{dx^T(t_s-0)}{\partial a_k}\frac{\partial^2\Phi_{si}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{a})}{\partial x^2}\frac{dx(t_s-0)}{\partial a_j}.$$

З урахуванням (12.71) рівність (12.68) матиме вигляд

$$y^{(j,k)}(t_s+0)=\frac{\partial\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(j,k)}(t_s-0)+$$

$$+\left[\frac{\partial\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s-0)+\right.$$

$$+\frac{\partial\Phi^2{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x\partial t}\frac{dx(t_s-0)}{\partial\alpha_j}+$$

$$\left.+\frac{\partial\Phi^2{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t\partial\alpha_j}-\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s-0)\right]\times\frac{\partial\varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+$$

$$+\left[\frac{\partial\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s-0)+\right.$$

$$+\frac{\partial \Phi^2{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{a})}{\partial t\partial a_k}-\frac{d}{dt}y^{(k)}(t_s)-\Bigg]\frac{\partial \varphi_s(\bar{a})}{\partial a_j}+$$

$$+\Bigg[\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\frac{d^2x(t_s-0,\bar{\alpha})}{dt^2}+\frac{\partial^2 \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{d^2x(t_s+0,\bar{a})}{dt^2}\Bigg]\frac{\partial \varphi(\bar{a})}{\partial a_j}\frac{\partial \varphi(\bar{a})}{\partial a_k}+\Bigg[\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{a})}{\partial x}\frac{dx(t_s-0,\bar{a})}{dt}+$$

$$+\frac{\partial \Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t}-\frac{dx(t_s+0,\bar{\alpha})}{dt}\Bigg]\frac{\partial^2 \varphi_s(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j\partial \alpha_k}+$$

$$+\frac{\partial \Phi^2{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{a})}{\partial x\partial a_j}\frac{dx(t_s-0,\bar{a})}{\partial a_k}+\frac{\partial \Phi^2{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{a})}{\partial x\partial a_k}\frac{dx(t_s-0,\bar{a})}{\partial a_j}+$$

$$+\frac{\partial \Phi^2{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{a})}{\partial a_j\partial a_k}+R. \tag{12.73}$$

Використовуючи очевидні співвідношення

$$\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s-0)=\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t_s-0)+\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j},$$

$$\frac{d}{dt}y^{(j)}(t_s+0)=\frac{\partial f^{(s+1)}(\bar{x}(t_s+0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t_s+0)+\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t_s+0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j},$$

$$\frac{d^2x(t_s+0)}{dt^2}=\frac{\partial f^{(s+1)}(\bar{x}(t_s+0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(s+1)}(\bar{x}(t_s+0),t_s,\bar{\alpha})+$$

$$+\frac{\partial f^{(s+1)}(\bar{x}(t_s+0),t_s,\bar{a})}{\partial t},$$

$$\frac{d^2x(t_s-0)}{dt^2}=\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(s)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})+$$

$$+\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial t} \tag{12.74}$$

і формули (12.67), (12.71), умови стрибка обчислюємо за (12.73).

Вище використані такі позначення:

$$y^{(j)}(\cdot)=\left\{\frac{\partial x_i(\cdot)}{\partial \alpha_j}\right\}_{i=1}^{n},\qquad y^{(j,k)}(\cdot)=\left\{\frac{\partial^2 x_i(\cdot)}{\partial \alpha_j\partial \alpha_k}\right\}_{i=1}^{n}$$ – n-вимірні вектори.

Для запису частинних похідних другого порядку функціонала за параметрами оптимізації для систем (12.63), (12.64) введемо до розгляду вектор і матрицю спряжених змінних

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial f^{(s)T}(\overline{x}(t),t,\overline{\alpha})}{\partial x}\psi(t), \qquad \psi(T) = -\frac{\partial\Phi(\overline{x}(T)}{\partial x}, \tag{12.75}$$

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial f^{(s)}(\overline{x}(t),t,\overline{\alpha})}{\partial x}^T \Psi(t) - \Psi^T(t)\frac{\partial f^{(s)}(\overline{x}(t),t,\overline{\alpha})}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(\psi(t),\overline{x}(t),\overline{\alpha},t)}{\partial^2 x},$$

$$\Psi(T) = -\frac{\partial^2\Phi(\overline{x}(T)}{\partial x^2}, \tag{12.76}$$

де $H(\psi(t),\overline{x}(t),\overline{\alpha},t) = \psi^T(t) f^{(s)}(\overline{x}(t),\overline{\alpha},t)$ – функція Гамільтона для вихідної системи.

На основі співвідношень (12.75), (12.76) похідну функціонала (12.61) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2\Phi(\overline{x}(T)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k} = -\psi^T(T)y^{(j,k)}(T) - y^{(j)^T}(T)\ \Psi(T)y^{(k)}(T), \tag{12.77}$$

причому $\psi(t)$ та $\Psi(t)$ у точках перемикання t_s, $s = 1,2,\ldots,N-1$ будуть мати стрибки, записані нижче.

Доданки у співвідношенні (12.77) зобразимо у вигляді

$$\psi^T(T)y^{(j,k)}(T) = -\sum_{l=1}^{N-1}\left[\psi^T(t_l-0)y^{(j,k)}(t_l-0) - \psi^{\mathrm{T}}(t_l+0)y^{(j,k)}(t_l+0)\right] +$$

$$+\psi^T(t_0)y^{(j,k)}(t_0) + \sum_{l=1}^{N}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left[\frac{d\varphi^T(t)}{dt}y^{(j,k)}(t) + \psi^T(t)\frac{dy^{(j,k)}(t)}{dt}\right]dt, \tag{12.78}$$

$$y^{(j)^T}(T)\ \Psi(T)y^{(k)}(T) =$$

$$= -\sum_{l=1}^{N-1}\left[y^{(j)^T}(t_l-0)\ \Psi(t_l-0)y^{(k)}(t_l-0) - y^{(j)^T}(t_l+0)\ \Psi(t_l+0)y^{(k)}(t_l+0)\right] +$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left[\frac{dy^{(j)^T}(t)}{dt}\Psi(t)y^{(k)}(t) + y^{(j)^T}(t)\Psi(t)\frac{dy^{(k)}(t)}{dt} + y^{(j)^T}(t)\Psi(t)\frac{dy^{(k)}(t)}{dt}\right]dt +$$

$$+y^{(j)^T}(t_0)\Psi(t_0)y^{(k)}(t_0). \tag{12.79}$$

Формулу (12.77), з урахуванням (12.78), (12.79) і диференціальних рівнянь (12.63), (12.64), перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2\Phi(\bar{x}(T))}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}=\sum_{l=1}^{N-1}\left[\psi^T(t_l-0)y^{(j,k)}(t_l-0)-\psi^T(t_l+0)y^{(j,k)}(t_l+0)\right]+$$

$$+\psi^T(t_0)\left\{\frac{d^2x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial x}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{dx_0(\bar{a})}{\partial a_j}+\frac{dx_0(\bar{a})}{\partial a_k}-f^{(1)}(x_0(\bar{a}),t_0(\bar{a}),\bar{a})\right]\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-$$

$$-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}-$$

$$\left.-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial t}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial^2 t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}\right\}+$$

$$+\sum_{l=1}^{N-1}\left[y^{(j)^T}(t_l-0)\Psi(t_l-0)y^{(k)}(t_l-0)-y^{(j)^T}(t_l+0)\Psi(t_l+0)y^{(k)}(t_l+0)\right]-$$

$$-\left(\frac{\partial x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right)^T$$

$$\times\Psi(t_0)\left(\frac{dx_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{N}\int_{t_s-1}^{t_s}\left[\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_k}y^{(j)}(t)+\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_j}y^{(k)}(t)+\right.$$

$$+\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+\frac{\partial f^{(s)^T}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\Psi(t)y^{(k)}(t)+$$

$$\left.+y^{(j)^T}\Psi(t)\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right]dt,\qquad j,\,k=1,2,\ldots,r\,. \qquad (12.80)$$

За формулою (12.80) можна обчислювати частинні похідні другого порядку функціонала від кінцевого стану системи. При цьому вектори $y^{(j,k)}(t)$ та $y^{(j)}(t)$ у точках перемикання мають стрибки, що обчислюються за формулами (12.67), (12.73), причому

$$\Psi(t_s-0)=\frac{\partial\Phi_s^T(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\Psi(t_s+0)\frac{\partial\Phi_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}, \qquad (12.81)$$

$$\psi(t_s-0)=\frac{\partial\Phi^T{}_s(\bar{x}(t_s-0),t_s,\bar{\alpha})}{\partial x}\psi(t_s+0), \quad s=1,2,\ldots,N-1\,. \quad (12.82)$$

З урахуванням стрибків (12.81), (12.82) співвідношення для похідної (12.80) запишемо в остаточному вигляді:

$$\frac{\partial^2\Phi(\bar{x}(T)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}=-\sum_{l=1}^{N-1}\left\{\left[\left[\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})-\right.\right.\right.$$

$$-f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})+$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right]^T\times$$

$$\times\Psi(t_l+0)\left[\left[\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\times\right.\right.$$

$$\left.\times f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})-f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})+\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial\Phi_l\,(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(k)}(t_l-0)\right]+$$

$$+y^{j^T}(t_l-0)\frac{\partial\Phi_l^T\,(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\Psi(t_l+0)\left[\left[\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\times\right.\right.$$

$$\left.\times f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})-f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})+\frac{\partial\Phi\ {}_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right]\right\}-\sum_{l=1}^{N-1}\psi^T(t_l+0)\left\{\left[\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t_l-0)+\frac{\partial f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right)+$$

$$+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t\partial\alpha_j}-\frac{\partial f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(j)}(t_l+0)-$$

$$\left.-\frac{\partial f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right]\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\left[\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(k)}(t_l-0)+\frac{\partial f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial \alpha_k}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x\partial t}\left(y^{(j)}(t_l-0)+f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})\right)\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x\partial t}\left(y^{(k)}(t_l-0)+f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})\right)\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k})+$$

$$+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(k)}(t_l+0)-$$

$$-\left.\frac{\partial f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right]\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+$$

$$+\left[\frac{\partial\Phi\ _l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\left(\frac{\partial f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0,t_l,\bar{\alpha})+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2\Phi\ _l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{\partial f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(l+1`)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})-$$

$$-\left.\frac{\partial f^{(l+1)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t}\right]\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+$$

$$+\left[\frac{\partial\Phi\ _l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0,t_l,\bar{\alpha})+\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-f^{(l+1`)}(\bar{x}(t_l+0),t_l,\bar{\alpha})\right]\frac{\partial^2\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+$$

$$+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_j}\left(y^{(k)}(t_l-0)+f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right)+$$

$$+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_k}\left(y^{(j)}(t_l-0)+f^{(l)}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})\frac{\partial\varphi_l(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+R(t_l-0)\right\}-$$

$$-\psi^T(t_0)\left\{\frac{\partial^2 x_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)}{\partial x}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\partial x_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial x_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}-f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)\right]\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}-$$

$$-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}-$$

$$\left.-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)}{\partial t}\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}--f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)\frac{\partial^2 t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}\right\}-$$

$$-\left(\frac{\partial x_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}-f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}\right)^T\times$$

$$\Psi(t_0)\left(\frac{\partial x_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}-f^{(1)}(x_0(\bar\alpha),t_0(\bar\alpha),\bar\alpha)\frac{\partial t_0(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{N}\int_{t_s-1}^{t_s}\left[\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar x(t),t,\bar\alpha)}{\partial x\partial\alpha_k}y^{(j)}(t)+\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar x(t),t,\bar\alpha)}{\partial x\partial\alpha_j}y^{(k)}(t)+\right.$$

$$+\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar x(t),t,\bar\alpha)}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+\frac{\partial f^{(s)^T}(\bar x(t),t,\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}\Psi(t)y^{(k)}(t)+$$

$$\left.y^{(j)^T}\Psi(t)\frac{\partial f^{(s)}(\bar x(t),t,\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}\right]dt,\qquad j,k=1,2,\ldots,r, \tag{12.83}$$

де $R(t_l-0)$ – n-вимірний вектор, i-та компонента якого обчислюється за формулою

$$R_i(t_l-0)=\left(y^{(k)}(t_l-0)+f^{(l)}(\bar x(t_l-0),t_l,\bar\alpha)\frac{\partial\varphi_l(\bar\alpha)}{\partial\alpha_k}\right)^T\times$$

$$+\frac{\partial\Phi_l^2(\bar x(t_l-0),t_l,\bar\alpha)}{\partial x\partial\alpha_j}\left(y^{(j)}(t_l-0)+f^{(l)}(\bar x(t_l-0),t_l,\bar\alpha)\frac{\partial\varphi_l(\bar\alpha)}{\partial\alpha_j}\right), \tag{12.84}$$

$$i=1,2,\ldots,n.$$

Формула (12.83) досить загальна, тому її можна використовувати для різних систем зі структурно заданими функціями керування. Без особливих труднощів за нею обчислюються частинні похідні за відповідними параметрами для функцій керування релейного вигляду. У випадку, коли точки перемикання не залежать від оптимізуючого параметра α, формула (12.83) спрощується:

$$\frac{\partial^2\Phi(x(T))}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}=-\sum_{l=1}^{N-1}\left\{\frac{\partial\Phi_l^T(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\Psi(t_l+0)\left[\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}y^{(k)}(t_l-0)\right]+y^{(j)^T}(t_l-0)\frac{\partial\Phi_l^T(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x}\times$$

$$\left.\times\Psi(t_l+0)\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right\}-\sum_{l=1}^{N-1}\Psi^T(t_l+0)\times$$

$$\left[\frac{\partial^2\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_i,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_j}y^{(k)}(t_l-0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_k}y^{(j)}(t_l-0)+\frac{\partial^2\Phi_l(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+R(t_l-0)\right]-$$

$$-\psi^T(t_0)\left\{\frac{\partial^2 x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial x}\left[\frac{\partial x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-\right.\right.$$

$$\left.-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\right]\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-$$

$$-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-$$

$$\left.-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial^2 t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}\right\}-$$

$$\left(\frac{\partial x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right)^T\times$$

$$\times\Psi(t_0)\left(\frac{\partial x_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}-f^{(1)}(x_0(\bar{\alpha}),t_0(\bar{\alpha}),\bar{\alpha})\frac{\partial t_0(\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{N}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left[\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_k}y^{(j)}(t)+\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial x\partial\alpha_j}y^{(k)}(t)+\right.$$

$$+\psi^T(t)\frac{\partial^2 f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_j\partial\alpha_k}+\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\Psi(t)y^{(k)}(t)+$$

$$\left.+y^{(j)^T}(t)\Psi(t)\frac{\partial f^{(s)}(\bar{x}(t),t,\bar{\alpha})}{\partial\alpha_k}\right]dt, \tag{12.85}$$

$$j,k=1,2,\ldots,r,$$

де

$$R(t_l-0)=\left\{y^{(k)^T}(t_l-0)\frac{\partial^2\Phi_{li}(\bar{x}(t_l-0),t_l,\bar{\alpha})}{\partial x^2}y^{(j)}(t_l-0)\right\}_{i=1}^{n}.$$

Розглянемо випадок, що часто вживається на практиці, коли компонентами вектора α будуть точки перемикання і права частина співвідношення (12.60) при $i=k$ є k-ю точкою перемикання. Окрім того, ураховуємо, що вектор-функція $f^{(i)}(x,t)$ системи (12.57), а також x_0 та t_0 явно не залежать від точок перемикання. Тоді формулу (12.83) перепишемо так:

$$\frac{\partial^2\Phi(x(T))}{\partial t_j\partial t_k}=-\Bigg[\Bigg(\frac{\partial\Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)-$$

$$-f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j),t_j)+\frac{\partial\Phi_l(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j}\Bigg)^T\Psi(t_j+0)\times$$

$$\times\frac{\partial\Phi_j(\bar{x}(t_l-0),t_j)}{\partial x}y^{(k)}(t_j-0)-y^{(j)T}(t_k-0)\times$$

$$\times\frac{\partial\Phi_k^T(\bar{x}(t_k-0),t_k)}{\partial x}\Psi(t_k+0)\Bigg(\frac{\partial\Phi_k^T(\bar{x}(t_k-0),t_k)}{\partial x}f^{(k)}(\bar{x}(t_k-0),t_k)-$$

$$-f^{(k+1)}(\bar{x}(t_k+0),t_k)+\frac{\partial\Phi_k(\bar{x}(t_k-0),t_k)}{\partial t_k}\Bigg)\Bigg]-\psi^T(t_k+0)\Bigg[\frac{\partial\Phi_k^T(\bar{x}(t_k-0),t_k)}{\partial x}\times$$

$$\times\frac{\partial f^{(k)}(\bar{x}(t_k-0),t_k)}{\partial x}y^{(j)}(t_k-0)+\frac{\partial^2\Phi_k(\bar{x}(t_k-0),t_k)}{\partial x\partial t_k}\times$$

$$\times y^{(j)}(t_k-0)-\frac{\partial f^{(k+1)}(\bar{x}(t_k+0),t_k)}{\partial x}y^{(j)}(t_k+0)\Bigg]-$$

$$-\psi^T(t_j+0)\Bigg[\frac{\partial\Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}\frac{\partial f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}y^{(k)}(t_j-0)+$$

$$\times\frac{\partial^2\Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x\partial t_j}y^{(k)}(t_j-0)-\frac{\partial f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x}y^{(k)}(t_j+0)\Bigg]-$$

$$-\psi^T(t_j+0)R^{(1)}(t_j-0)-\psi^T(t_k+0)R^{(1)}(t_k-0) \qquad (12.86)$$

при $j \neq k$ і

$$\frac{\partial^2 \Phi(x(T))}{\partial t_j^2} = -\left(\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j) - \right.$$

$$\left. - f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j) + \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j} \right)^T \Psi(t_j+0) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j) - f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j} + \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} y^{(j)}(t_j-0) \right) +$$

$$y^{T(j)}(t_j-0) \frac{\partial \Phi_j^T(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} \Psi(t_j+0) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j) - f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j) + \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j} \right) -$$

$$-2\psi^T(t_j+0) \times \left[\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} \frac{\partial f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} y^{(j)}(t_j-0) + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x \partial t_j} (y^{(j)}(t_j-0) +$$

$$\left. + f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)) - \frac{\partial f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x} y^{(j)}(t_j+0) \right] -$$

$$-\psi^T(t_j+0) \left[\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{\partial f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j) + \frac{\partial f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j^2} -$$

$$-\frac{\partial f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x} f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j) - \frac{\partial f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j)}{\partial t_j}\Bigg] -$$

$$-\psi^T(t_j+0)R^{(2)}(t_j-0) \tag{12.87}$$

при $j=k$.

Тут $R_i^{(1)}(t_j-0) = y^{T(k)}(t_j-0)\dfrac{\partial^2 \Phi_{ji}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x^2} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)$, $R_i^{(2)}(t_j-0) =$ $f^{T(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)\dfrac{\partial^2 \Phi_{ji}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x^2} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)$, $R_i^{(1)}(t_j-0)$, $R_i^{(2)}(t_j-0)$ – i-ті компоненти векторів $R^{(1)}(t_j-0)$, $R^{(2)}(t_j-0)$ відповідно.

Якщо припустити, що $j>k$ і точки перемикання розміщені за зростанням, то формула (12.86) спрощується:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x(T))}{\partial t_j \partial t_k} = -\left[\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j) - f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j}\right]^T \times$$

$$\times \Psi(t_j+0)\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} y^{(k)}(t_j-0) - \psi^T(t_j+0) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} \times \frac{\partial f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} y^{(k)}(t_j-0) + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2 \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x \partial t_j} y^{(k)}(t_j-0) - \frac{\partial f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x} \times$$

$$\times \frac{\partial f^{(j)}(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x} y^{(k)}(t_j-0) + \frac{\partial^2 \Phi_j(\bar{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x \partial t_j} y^{(k)}(t_j-0) -$$

$$\left. - \frac{\partial f^{(j+1)}(\bar{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x} \times y^{(k)}(t_j+0) + R_i^{(1)}(t_j-0)\right], \tag{12.88}$$

$$k = 1,2,\ldots N-1, \quad j = k+1,\ldots,N-1,$$

а співвідношення (12.87), з урахуванням рівності $y^{(j)}(t_j-0)=0$, перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2\Phi(x(T))}{\partial t_j^{\,2}}=-\left[\frac{\partial\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j)-\right.$$

$$\left.-f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j)+\frac{\partial\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j}\right]^T\times$$

$$\times\Psi(t_j+0)\left[\frac{\partial\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j)-\right.$$

$$\left.-f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j)+\frac{\partial\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j}\right]-$$

$$-2\psi^T(t_j+0)\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x\partial t_j}f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j)-\frac{\partial f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x}y^{(j)}(t_j+0)\right]-$$

$$-\psi^T(t_j+0)\left[\frac{\partial\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j)+\frac{\partial f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2\Phi_j(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial t_j^{\,2}}-$$

$$-\frac{\partial f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j)}{\partial x}f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j)-\frac{\partial f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j)}{\partial t_j}+$$

$$\left.+R^{(2)}(t_j-0)\right], \qquad (12.89)$$

$$j=1,2,\ldots,N-1.$$

Нехай права частина системи (12.57) має вигляд $f^{(i)}(x,t,\alpha)=f(x,t,u)$, $i=1,2,\ldots,N+1$, $u(t)$ – r-вимірна функція керування, що набуває сталого значення $u(t)=u_i$ на інтервалі $[t_{i-1},t_i)$, а траєкторії системи неперервні, тобто $x(t_i) = x(t_i - 0)$. Тоді формули (12.88) і (12.89) запишуться у вигляді

$$\frac{\partial^2 \Phi(x(T))}{\partial t_j \partial t_k} = -\left[f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0)) - f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))\right]^T \times$$

$$\times \Psi(t_j) y^{(k)}(t_j - 0) - \psi^T(t_j) \left[\frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0))}{\partial x} y^{(k)}(t_j - 0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))}{\partial x} y^{(k)}(t_j)\right], \qquad (12.90)$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = k+1, \ldots, N-1,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x(T))}{\partial t_j^2} = -\left[f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0)) - f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))\right]^T \times$$

$$\times \Psi(t_j)\left[f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0)) - f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))\right] +$$

$$+ 2\psi^T(t_j) \frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))}{\partial x} y^{(j)}(t_j + 0) -$$

$$-\psi^T(t_j)\left[\frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))}{\partial x} f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0)) + \frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0))}{\partial t_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))}{\partial x} f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j)) - \frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j))}{\partial t_j}\right], \qquad (12.91)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

При цьому для формул (12.90), (12.91) справедливе співвідношення

$$y^{(k)}(t_j) = y^{(k)}(t_j - 0) + f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j - 0)) - f(\bar{x}(t_j), t_j, u(t_j)). \qquad (12.92)$$

Якщо $f(x, t, u) = f_1(x, t) + g(x, t)u$, де $f_1(x, t)$ та $g(x, t)$ – n-вимірні вектор-функції, u – скалярна функція керування, що набуває сталих значень на інтервалах (t_{j-1}, t_j), то формули (12.90), (12.91) запишемо у зручному для обчислення вигляді:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x(T))}{\partial t_j \partial t_k} = -\left(u_j - u_{j+1}\right) g^T(\bar{x}(t_j), t_j) \Psi(t_j) y^{(k)}(t_j - 0) -$$

$$-\psi^T(t_j) \frac{\partial g(\bar{x}(t_j), t_j)}{\partial x}\left(y^{(k)}(t_j - 0) u_j - y^{(k)}(t_j) u_{j+1}\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = k+1, \ldots, N-1, \qquad (12.93)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x(T))}{\partial t_j^2} = -\left(u_j - u_{j+1}\right)^2 g^T(\bar{x}(t_j), t_j)\Psi(t_j) g(\bar{x}(t_j), t_j) +$$

$$+2\psi^T(t_j)\frac{\partial f(\bar{x}(t_j), t_j)}{\partial x} y^{(j)}(t_j) - \psi^T(t_j)\left[\left(\frac{\partial f_1(\bar{x}(t_j), t_j)}{\partial x} g(\bar{x}(t_j), t_j) +\right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial g(\bar{x}(t_j), t_j)}{\partial x} f_1(\bar{x}(t_j), t_j) + \frac{\partial g(\bar{x}(t_j), t_j)}{\partial t_j}\right)\left(u_j - u_{j+1}\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial g(\bar{x}(t_j), t_j)}{\partial x} g(\bar{x}(t_j), t_j)\left(u_j^2 - u_{j+1}^2\right)\right], \qquad (12.94)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Аналогічно можна розглянути й загальніші умови перемикання:

$$\bar{\varphi}_s(x(t_s - 0), t_s, \alpha) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, N-1,$$

а також неявно задані стрибки

$$\bar{\Phi}_s(x(t_s+), x(t_s - 0), t_s, \alpha) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Оскільки аналітичні вирази для стрибків ще більш громіздкі, то наводити їх не будемо.

Нехай рух описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)u + r(x,t)\frac{du}{dt}, \quad t \in [t_0, T] \qquad (12.95)$$

з релейною скалярною (для спрощення) функцією керування. Знайдемо для неї частинні похідні другого порядку. Як відмічалося раніше, динаміку системи (12.95) можна вивчати без третього доданка, але з розривами траєкторії в точках t_i:

$$x(t_i + 0) = x(t_i - 0) + \left(u_{i+1} - u_{i1}\right) r(x(t_i - 0), t_i). \qquad (12.96)$$

Для такої задачі стрибки за спряженими змінними (12.81), (12.82) у точці t_s набудуть вигляду

$$\Psi(t_s - 0) = \Psi(t_s + 0) +$$

$$+ \frac{\partial r^T(\bar{x}(t_s - 0), t_s)}{\partial x}\Psi(t_s + 0)\frac{\partial r(\bar{x}(t_s - 0), t_s)}{\partial x}(u_{s+1} - u_s)^2 +$$

$$+(u_{s+1} - u_s)\left[\frac{\partial r^T(\bar{x}(t_s - 0), t_s)}{\partial x}\Psi(t_s + 0) + \Psi(t_s + 0)\frac{\partial r(\bar{x}(t_s - 0), t_s)}{\partial x}\right], \qquad (12.97)$$

$$\psi(t_s - 0) = \psi(t_s + 0) + (u_{s+1} - u_s)\frac{\partial r^T(\bar{x}(t_s - 0), t_s)}{\partial x}\psi(t_s + 0). \qquad (12.98)$$

При цьому частинні похідні обчислюються відповідно за формулами (12.88), (12.89), причому

$$\frac{\partial \Phi_j(\overline{x}(t_j-0)}{\partial x} = E + (u_{j+1}-u_j)\frac{\partial r(\overline{x}(t_j-0),t_j)}{\partial x}\psi(t_j+0),$$

$$f^{(j)}(\overline{x}(t_j-0),t_j) = f(\overline{x}(t_j-0),t_j) + g(\overline{x}(t_j-0),t_j)u_j,$$

$$f^{(j+1)}(\overline{x}(t_j+0),t_j) = f(\overline{x}(t_j+0),t_j) + g(\overline{x}(t_j+0),t_j)u_{j+1}.$$

Стрибки траєкторії системи іноді доцільно розглядати у формі

$$x(t_i+0) = x(t_i-0) + u_{i+1}r(x(t_i+0),t_i) - u_i r(x(t_i-0),t_i). \qquad (12.99)$$

Наприклад, для співвідношення (12.99) похідна $\frac{dx(t_i+0)}{dt_i}$ обчислюється за формулою

$$\frac{dx(t_i+0)}{dt_i} = \left(E - \frac{\partial r(\overline{x}(t_i-0),t_i)}{\partial x}u_{i+1}\right)^{-1}\left[\left(E - \frac{\partial r(\overline{x}(t_i-0),t_i)}{\partial x}u_i\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{dx(t_i-0)}{\partial t_i} + u_{i+1}\frac{\partial r(\overline{x}(t_i+0),t_i)}{\partial t_i} - u_i\frac{\partial r(\overline{x}(t_i-0),t_i)}{\partial t_i}\right], \qquad (12.100)$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1$$

за умови, що матриця $E - \frac{\partial r(\overline{x}(t_i+0),t_i)}{\partial x}u_{i+1}$ невироджена для будь-якого i. Підставляючи в (12.100) значення для $\frac{dx(t_i+0)}{\partial t_i}$ та $\frac{dx(t_i-0)}{\partial t_i}$, отримаємо формулу для стрибків функції $y^{(i)}(t)$.

Якщо як параметр оптимізації вибрати $\alpha = t_0$, то

$$\frac{d^2I}{dt_0^2} = -f^{(1)}(x_0,t_0)\Psi(t_0)f^{(1)}(x_0,t_0) -$$

$$-\psi^T(t_0)\frac{\partial f^{(1)}(x_0,t_0)}{\partial x}f^{(1)}(x_0,t_0) + \frac{\partial f^{(1)}(x_0,t_0)}{\partial t}. \qquad (12.101)$$

У випадку $\alpha = x_0$ матриці других похідних від критерію якості за початковими умовами обчислюються за формулою

$$\frac{d^2I}{dx_0^2} = -\Psi(t_0). \qquad (12.102)$$

На основі наведених алгоритмів можна сформулювати необхідні й достатні умови локального екстремуму функціонала від скінченного стану системи за оптимальними параметрами. Нехай

$\alpha^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_r^{(0)})^T$ – оптимальне значення параметра, яке мінімізує функціонал $I(\alpha) = \Phi(x(T, \alpha))$. Тоді похідні першого порядку в точці $\alpha^{(0)}$ рівні нулю – це необхідна умова. Якщо ж у точці $\alpha^{(0)}$, крім указаної властивості, матриця других похідних додатно визначена, то $\alpha^{(0)}$ є точкою мінімуму.

Інформацію про другі похідні використовують і для побудови ітераційного процесу. Нехай $\alpha^{(n)}$ – значення вектора параметрів на n-й ітерації. Розкладемо функцію $I(\alpha)$ в околі точки $\alpha^{(n)}$:

$$I(\alpha) = I(\alpha^{(n)}) + grad_\alpha^T I(\alpha^{(n)})(\alpha - \alpha^{(n)}) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{(n)})^T \times$$
$$\times \frac{\partial^2 I(\alpha^{(n)})}{\partial \alpha^2}(\alpha - \alpha^{(n)}) + o(\|\alpha - \alpha^{(n)}\|^2). \qquad (12.103)$$

Використовуючи (12.103), можна визначити найкраще наближення параметра α на $(n+1)$-й ітерації. Це приведе до ітераційної процедури типу Ньютона

$$\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} - \left[\frac{\partial^2 I(\alpha^{(n)})}{\partial \alpha^2}\right]^{-1} grad_\alpha I(\alpha^{(n)}), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (12.104)$$

РОЗДІЛ 13

Чисельні методи розв'язання задачі Коші

При інтегруванні конкретних систем звичайних диференціальних рівнянь, як правило, досить рідко вдається отримати розв'язок у квадратурах, виражений через елементарні або спеціальні функції. У той же час, інтенсивне застосування диференціальних рівнянь як математичних моделей для широкого кола природничих і наукових задач вимагає застосування швидкодіючих чисельних методів. Завдяки бурхливому розвитку обчислювальної техніки чисельні методи знаходять надзвичайно широке застосування в різних галузях прикладної математики. У цьому розділі будуть викладені лише головні питання, що стосуються чисельних методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.

13.1. Чисельні методи розв'язання задачі Коші

Шукати наближені розв'язки можна різними способами. Наприклад, для відшукання наближеного розв'язку можна скористатися якою-небудь квадратурною формулою (можливість такої заміни вимагає, звичайно, обґрунтування). Однак, оскільки цей метод вимагає великого обсягу обчислювальної роботи (на кожній ітерації доводиться неодноразово обчислювати значення правої частини рівняння), він відіграє, в основному, теоретичну роль – наприклад, він корисний при доведенні теореми Пікара про існування та єдиність розв'язку.

Можна також намагатися розкласти шуканий розв'язок у степеневі або тригонометричні ряди (напр., у ряди Тейлора або Фур'є). Це потребує тривалої аналітичної роботи, яка є процесом, що погано алгоритмізується. Наприклад, для визначення коефіцієнтів ряду Тейлора при знаходженні наближеного розв'язку треба обчислювати похідні високих порядків від правої частини рівняння. Через це застосування такого підходу є поки що мало придатним для практичного використання на ЕОМ. Правда, останнім часом з'явилися ефективні пакети програм для символьних перетворень на ЕОМ і, можливо, вони виявляться корисними в цьому напрямі.

У даний час найбільш універсальними і ефективними методами відшукання наближеного розв'язку диференціальних рівнянь є так звані с*кінченно-різницеві* (їх ще називають *різницевими* або *сітковими*) *методи.*

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) . \tag{13.1}$$

Шукаємо розв'язок, що задовольняє початкові умови, які записуються у вигляді

$$y(x_0) = y_0 . \tag{13.2}$$

Наближений розв'язок шукаємо на відрізку $[x_0, X]$, який обов'язково має міститися в інтервалі існування точного розв'язку $y = y(x)$.

Означення 13.1. *Чисельним наближенням розв'язку* задачі Коші (13.1), (13.2) називається функція, яка задається таблицею чисел (табл. 13.1) за умови, що y_k розглядається як наближене значення точного розв'язку $y = y(x)$ при $x = x_k$.

Таблиця 13.1

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	$x_n = X$
y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_0

Зазначимо, що табл. 13.1 може будуватися так, що числа x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ знаходяться на однаковій відстані одне від одного. При цьому число h, яке визначається формулою

$$h = \frac{X - x_0}{n} = x_k - x_{k-1} ,$$

називається *кроком інтегрування.*

Чисельні методи розрізняються за способом обчислення послідовності значень y_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Наведемо коротку інформацію про деякі з чисельних методів знаходження наближеного розв'язку, що найчастіше використовуються.

13.2. Метод Ейлера

Для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (13.1), (13.2) виберемо досить малий крок інтегрування h і побудуємо послідовність рівновіддалених точок на заданому відрізку $[a,b]$:

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,2,\ldots\ .$$

Шукану інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$, наближено замінимо ламаною $M_0M_1M_2\ldots$ з вершинами $M_i(x_i,y_i)$, $i = 0,1,2,\ldots$, ланки якої M_iM_{i+1} – прямолінійні між прямими $x = x_i$, $x = x_{i+1}$. Тоді рівняння (13.1) можна замінити таким:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x_i,y_i) \qquad (13.3)$$

для точки $M_i(x_i,y_i)$. Прямі $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$, які апроксимують розв'язок задачі Коші (13.1), (13.2), називаються ламаними Ейлера.

Користуючись співвідношенням (13.3), можна записати $y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i,y_i)$ або, при $\Delta y_i = h\,f(x_i,y_i)$,

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\ ,\ i = 0,1,2,\ldots\ . \qquad (13.4)$$

Формула (13.4) дозволяє за заданої початкової умови (13.2) чисельно розв'язувати рівняння (13.1). Головними недоліками наведеного методу є мала точність і накопичення похибок.

13.3. Модифікації методу Ейлера

Розглянемо деякі з модифікацій методу Ейлера, які дещо поліпшують указані вище недоліки.

1) Згідно з методом Ейлера шукаємо розв'язок рівняння (13.1) за формулою (13.4). Точнішим є удосконалений метод ламаних, у якому спочатку обчислюють проміжні значення

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2},\ \ y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i,y_i)$$

і значення правої частини у середній точці $\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$, тобто $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$, а потім покладають, що $y_{i+1} = y_i + h f_{i+\frac{1}{2}}$.

2) Іншою модифікацією методу Ейлера є удосконалений метод Ейлера – Коші, у якому спочатку визначають

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f_i, \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,2,\dots,$$

виходячи з якого знаходять напрямок поля інтегральних кривих $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, а потім наближено обчислюють

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + f_{i+1}}{2}.$$

3) Метод Ейлера – Коші можна ще поліпшити, застосувавши ітераційну обробку

$$y_{i+1}{}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_{i)}) = f(x_{i+1}, y_{i+1}{}^{(k-1)})\right], \; k = 1,2,\dots;\; i = 0,1,2,\dots,$$

$$x_i = x_0 + ih.$$

Ітерація завершується при виконанні умови $\left|y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}\right| < \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Метод Ейлера має перший порядок точності. Практичну оцінку похибки розв'язку, знайденого на сітці з кроком $h/2$, у точці $x_i \in [a,b]$ здійснюють, скориставшись наближеною рівністю – правилом Рунге:

$$\left|f(x_i) - y_i(h/2)\right| \approx \frac{\left|y_i(h) - y_i(h/2)\right|}{2^p - 1}, \tag{13.5}$$

де p – порядок точності чисельного методу. Отже, оцінка отриманого результату за формулою (13.5) зобов'язує виконувати обчислення двічі: перший раз – з кроком h, другий – з кроком $h/2$.

Модифікований метод Ейлера належить до класу чисельних методів, які називаються методами *предиктор-коректор*, або методами прогнозу та корекції.

13.4. Методи Рунге – Кутта

Методи розв'язання задачі Коші (13.1), (13.2) на рівномірній сітці $\{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_m = b\}$ відрізка $[a,b]$ з кроком $h = (b-a)/m$ є методами Рунге – Кутта, якщо, починаючи із заданих (x_0, y_0), розрахунки здійснюються за рекурентними формулами

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h, \ \ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta y_{i-1} = \sum d_j k_j^{(i-1)}, \quad k_j^{(i-1)} = h f(x_{i-1} + c_j h, y_{i-1} + c_j k_{j-1}^{(i-1)}). \end{cases} \qquad (13.6)$$

Метод називають методом Рунге – Кутта порядку p, якщо він має порядок точності p за кроком h на сітці. Порядок точності p досягається за допомогою формул (13.6) при певних значеннях коефіцієнтів c_j та d_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. При цьому коефіцієнт $c_1 = 0$ завжди. Ці коефіцієнти обчислюються за такою схемою:

1. Точний розв'язок $f(x_0 + h)$ та його наближення $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ зображують у вигляді розвинення за формулою Тейлора з центром у точці x_0 порівняно з доданком порядку h^{p+1}.
2. З рівності подібних членів при однакових степенях h у двох розкладах отримують рівняння, розв'язуючи які, знаходять коефіцієнти c_j та d_j.

Метод Ейлера можна назвати методом Рунге – Кутта першого порядку. Дійсно, для $p = 1$, $c_1 = 0, d_1 = 1$ формули (13.6) перетворюються на співвідношення

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h, \ \ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \Delta y_{i-1} = d_1 k_1^{(i-1)} = k_1^{(i-1)}, \ k_1^{(i-1)} = h f(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{cases}$$

або формули Ейлера $x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1})$.

Формули методу Рунге – Кутта другого порядку збігаються з формулами методу Ейлера – Коші.

Метод Рунге – Кутта четвертого порядку називають класичним методом Рунге – Кутта. При $p = 4$, $c_1 = 0, c_2 = c_3 = \dfrac{1}{2}, c_4 = 1, d_1 = d_4 = \dfrac{1}{6}$, $d_2 = d_3 = \dfrac{1}{3}$ з формул (13.6) отримаємо алгоритм розв'язання задачі Коші класичним методом Рунге – Кутта:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + h, \quad y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}, \; i = 1,2,\dots,m, \\ \Delta y_{i-1} = \dfrac{1}{6}[k_1^{(i-1)} + 2k_2^{(i-1)} + 2k_3^{(i-1)} + k_4^{(i-1)}], \\ k_1^{(i-1)} = h\,f(x_{i-1}, y_{i-1}), \\ k_2^{(i-1)} = h\,f(x_{i-1} + \dfrac{1}{2}h, y_{i-1} + \dfrac{1}{2}k_1^{(i-1)}), \\ k_3^{(i-1)} = h\,f(x_{i-1} + \dfrac{1}{2}h, y_{i-1} + \dfrac{1}{2}k_2^{(i-1)}), \\ k_4^{(i-1)} = h\,f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + k_3^{(i-1)}) . \end{cases} \tag{13.7}$$

Правило Рунге для практичної оцінки похибки розв'язку для чисельного методу четвертого порядку має вигляд

$$\left| f(x_i) - y_i(h/2) \right| \approx \frac{\left| y_i(h) - y_i(h/2) \right|}{15} .$$

Метод Рунге – Кутта допускає обчислення також зі змінним кроком. Починаючи з довільного індексу i, можна зменшити або збільшити наступний крок сітки.

13.5. Метод Адамса

Одним з недоліків методів Рунге – Кутта є необхідність обчислювати p разів праву частину рівняння (13.1). Від цього недоліку позбавлені багатокрокові методи, які для обчислення значення розв'язку y_{i+1} використовують значення розв'язку не в одній точці y_i, як це робиться в однокрокових методах, а в кількох попередніх точках $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k+1}$.

Розглянемо два багатокрокові методи – Адамса та Мілна.

Для задачі Коші (13.1), (13.2) розглянемо x_i, $i = 0,1,2,\dots$ – послідовність рівновіддалених значень із кроком h та $y_i = y(x_i)$. Очевидно, що

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx . \tag{13.8}$$

За другою інтерполяційною формулою Ньютона з точністю до різниць четвертого порядку отримаємо

$$y' = y_i' + q\Delta y_{i-1}' + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{i-3}' ,$$

де $$q = (x - x_i)/h .$$

Підставивши отримане значення y' у вираз (13.8) і врахувавши, що $dx = hdq$, отримаємо

$$\Delta y_i = h\int_0^1\left(y_i' + q\Delta y_{i-1}' + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y_{i-2}' + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_{i-3}'\right)dq .$$

Звідси отримаємо екстраполяційну формулу Адамса

$$Dy_i = hy_i' + \frac{1}{2}D(hy_{i-1}') + \frac{5}{12}D^2(hy_{i-2}') + \frac{3}{8}D^3(hy_{i-3}') . \qquad (13.9)$$

Для користування формулою (13.9) потрібні чотири початкових значення: y_0, y_1, y_2, y_3 – початковий відрізок, що визначають з початкової умови (13.2) довільним чисельним методом. Визначивши y_0, y_1, y_2, y_3 з (13.1), можна знайти похідні y_0', y_1', y_2', y_3' і скласти таблицю різниць:

$$D(hy_0'), D(hy_1'), D(hy_2'), D^2(hy_0'), D^2(hy_1'), D^3(hy_0') . \qquad (13.10)$$

Подальші значення y_i, $i = 4,5,\ldots$ шуканого розв'язку можна обчислити за формулою (13.9), поповнюючи, за необхідністю, таблицю різниць (13.10).

13.6. Метод Мілна

Одним з найпростіших і зручніших для практичного використання чисельних методів при розв'язанні диференціальних рівнянь є метод Мілна. Нехай дано рівняння

$$y' = f(x,y) \qquad (13.11)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0 . \qquad (13.12)$$

Вибравши крок h, покладемо

$$x_i = x_0 + ih,\ y_i = y(x_i),\ y_i' = f(x_i, y_i)\ ,\ i = 0,1,2,\ldots .$$

Перші чотири значення початкового відрізка y_0, y_1, y_2, y_3 знаходимо, застосувавши метод Рунге – Кутта. Те саме дозволяє знайти y_i' , $i = 0,1,2,3$. Подальші значення $y_i = y(x_i)$, $i = 4,5,6,\ldots$ визначаються за такою схемою:

1. Обчислюємо перше наближення $y_i^{(1)}$ за формулою

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}\left(2y_{i-3}' - y_{i-2}' + 2y_{i-1}'\right),\ i = 4,5,6,\ldots \qquad (13.13)$$

2. Значення $y_i^{(1)}$ підставляємо в (13.11) і визначаємо

$$y_i'^{(1)} = f(x_i, y_i^{(1)}).$$

3. Знаходимо друге наближення $y_i^{(2)}$ за формулою

$$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}\left(y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y_i'^{(1)}\right),\ i = 4,5,6,\dots. \tag{13.14}$$

Далі переходимо до обчислення наступного значення y_{i+1}, повторюючи вказану вище схему. У випадку, коли точність не забезпечується, слід зменшити крок h і виконати перерахунок.

Сумарна похибка методу Мілна є величиною порядку h^4. Серед недоліків цього методу зазначають його нестійкість, тому його рекомендують використовувати, коли кількість кроків невелика.

Зауваження 13.1. У даному розділі ми зосередили увагу на чисельних методах розв'язання задачі Коші для одного скалярного рівняння першого порядку. Без суттєвих змін розглянуті методи можна перенести на випадок розв'язання задач Коші для нормальної системи рівнянь першого порядку.

13.7. Приклади розв'язання диференціальних рівнянь у середовищі Matlab

У середовищі Matlab існує набір стандартних функцій для чисельного розв'язання систем диференціальних рівнянь першого порядку. Крім того, для розв'язання диференціальних рівнянь застосовується потужний пакет моделювання динамічних систем Simulink.

Приклад 13.1. Знайти чисельний розв'язок рівняння $\frac{dy}{dt} = -2yt$ на інтервалі $[0,3]$ з початковою умовою $y(0) = 1$.

Текст програми:

```
clear
clc
[T,Y]=ode45('vdp',[0 3],[1]);
plot(T,Y),grid
xlabel('t')
ylabel('y')

function f=vdp(t,y)
f=-2*y*t;
```

Стандартна функція ode45 реалізує метод Рунге – Кутта четвертого і п'ятого порядку. На рис. 13.1 відображено розв'язок прикладу 13.1.

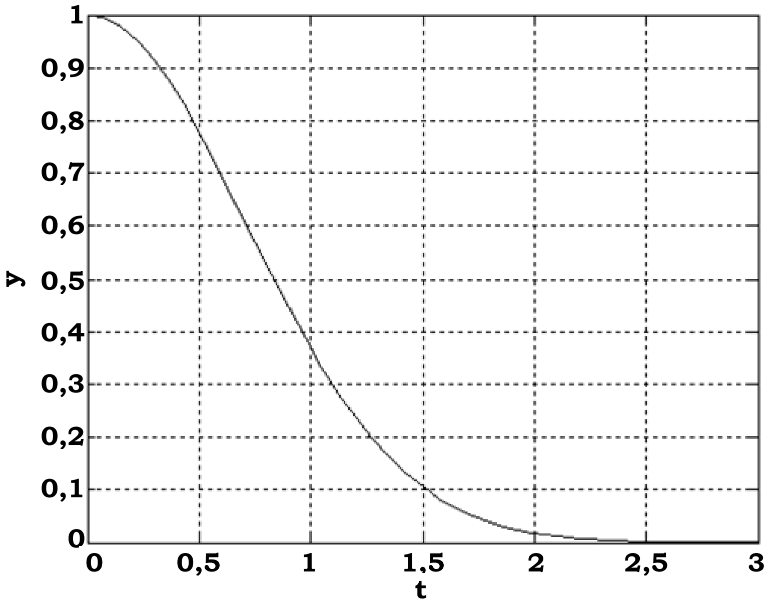

Рис. 13.1

Приклад 13.2. Знайти чисельний розв'язок рівняння $\frac{dy}{dt} = \sin(t - y)$ на інтервалі $[0,3]$ з початковою умовою $y(0) = 1$.

Текст програми:

```
clear
clc
[T,Y]=ode45('vdp',[0 3],[1]);
plot(T,Y),grid
xlabel('t')
ylabel('y')

function f=vdp(t,y)
f=sin(t - y);
```

На рис. 13.2 відображено розв'язок прикладу 13.2.

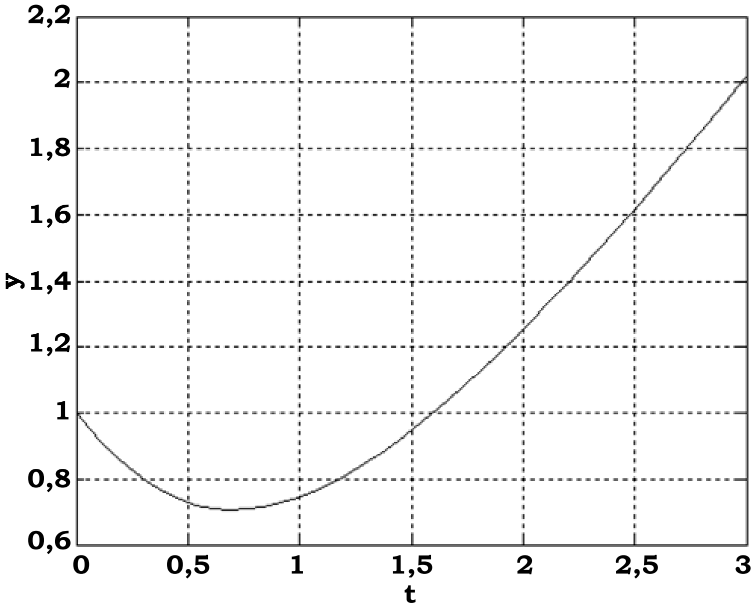

Рис. 13.2

РОЗДІЛ 14

Розв'язання прикладних задач, що описуються математичними моделями у формі систем звичайних диференціальних рівнянь

14.1. Оцінка часу регулювання перехідного процесу в системах автоматичного керування за допомогою функцій Ляпунова

Розглянемо задачу стабілізації лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Fu, \quad t \geq t_0, \qquad (14.1)$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор стану розмірністю n, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T = Cx$ – керування з оберненим зв'язком розмірністю m, A, F, C – сталі матриці відповідно розмірністю $(n \times n)$, $(n \times m)$ та $(m \times n)$.

Припустимо, що система (14.1) керована, тобто

$$rank\{F, AF, \ldots, A^{n-1}F\} = n. \qquad (14.2)$$

Тоді матрицю C можна вибрати так, щоб корені характеристичного рівняння

$$|\lambda E - A - FC| = 0 \qquad (14.3)$$

всі були з від'ємними дійсними частинами. Позначивши $A + FC = P$, приходимо до асимптотично стійкої лінійної стаціонарної системи

$$\frac{dx}{dt} = Px, \quad t \geq t_0. \qquad (14.4)$$

Припустимо, що для системи (14.4) ми побудували функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми $V(x) = x^T Bx$ згідно з умовою

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x^T x\,, \qquad (14.5)$$

тобто матриця B знаходиться з матричного рівняння

$$A^T B + BA = -E\,. \qquad (14.6)$$

Для матриці B виконуються співвідношення

$$\rho_{\min}^{(B)} \le \frac{x^T Bx}{x^T x} \le \rho_{\max}^{(B)}\,. \qquad (14.7)$$

Звідси

$$\frac{x^T Bx}{\rho_{\max}^{(B)}} \le x^T x \le \frac{x^T Bx}{\rho_{\min}^{(B)}}\,. \qquad (14.8)$$

Отже,

$$-\frac{x^T Bx}{\rho_{\min}^{(B)}} \le -x^T x \le -\frac{x^T Bx}{\rho_{\max}^{(B)}}\,. \qquad (14.9)$$

З (14.5) та (14.9) маємо

$$-\frac{V}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \frac{dV}{dt} \le -\frac{V}{\rho_{\max}^{(B)}}\,. \qquad (14.10)$$

Нерівність (14.10) можна записати в диференціалах і проінтегрувати від t_0 до t:

$$-\frac{dt}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \frac{dV}{V} \le -\frac{dt}{\rho_{\max}^{(B)}}\,,$$

$$-\frac{t - t_0}{\rho_{\min}^{(B)}} \le \ln V - \ln V_0 \le -\frac{t - t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}\,.$$

Пропотенціювавши останнє співвідношення, отримаємо

$$V_0 e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}}} \le V \le V_0 e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}}\,. \qquad (14.11)$$

Тут $V_0 = V(x_0)$, x_0 – положення об'єкта в момент $t = t_0$.

Використовуючи (14.8), запишемо

$$\frac{V_0}{\rho_{\max}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\min}^{(B)}}} \le x^T x \le \frac{V_0}{\rho_{\min}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}}\,. \qquad (14.12)$$

З (14.12), поклавши $x^T x \le \varepsilon^2$, можна отримати оцінку часу перехідного процесу згідно з нерівністю

$$\frac{V_0}{\rho_{\min}^{(B)}} e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}} \le \varepsilon^2. \qquad (14.13)$$

Узявши в (14.13) рівність, визначимо $t(x_0, \varepsilon)$:

$$e^{-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}}} = \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0} \quad (V_0 = x_0^* B x_0),$$

$$-\frac{t-t_0}{\rho_{\max}^{(B)}} = \ln \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0},$$

$$t(x_0, \varepsilon) = t_0 - \rho_{\max}^{(B)} \ln \frac{\varepsilon^2 \rho_{\min}^{(B)}}{V_0}. \qquad (14.14)$$

У (14.14) час перехідного процесу залежить від матриці $C \in \Omega_C$, де $\Omega_C = \{C : \operatorname{Re} \lambda_i(C) < 0, i = 1, 2, \ldots, n\}$, $\lambda_i(C)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – корені характеристичного рівняння (14.3). Тоді в реальних ситуаціях можуть виникнути задачі недиференційованої оптимізації

$$\min_{C \in \Omega_C} t(x_0, \varepsilon, C). \qquad (14.15)$$

14.2. Алгоритм параметричної оптимізації руху заряджених частинок ("E-g" задача)

Алгоритми керування з використанням градієнтних методів у класі кусково-неперервних функцій для багатьох прикладних задач використовувати складно через погану збіжність ітераційних процедур. Тому застосовують методику параметризації функції керування і таким чином переходять до скінченновимірних оптимізаційних задач. Розв'язати останні через неявну залежність розв'язків від параметрів також непросто, особливо у випадку великої кількості оптимізаційних параметрів. У зв'язку з цим для конкретних задач, вивчивши їх природу, на першому етапі вводять невелику кількість параметрів, можливо і формальних, які б визначали більшу кількість реальних параметрів і з достатньою адекватністю описували функціонування об'єкта. Більша кількість оптимальних параметрів може стати підставою для визначення початкового наближення функції керування, наприклад, у класі кусково-неперервних функцій. Такий підхід є конструктивним і пов'язаний з ускладненням математичної моделі як за керуванням, так і за структурою. З іншого боку, він дає можливість визначити оптимальні фізично реалізовні режими.

Розглянемо рівняння руху частинки в лінійному прискорювачі без урахування кулонівської взаємодії, а саме повздовжній і радіальний рух:

$$\frac{d\gamma}{d\xi}=\alpha(\xi)\cos\varphi\,,\quad \frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,,$$

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi}+g(\xi)\right)x-\alpha(\xi)\frac{dx}{d\xi}\right]\cos\varphi\,, \tag{14.16}$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi}-g(\xi)\right)y-\alpha(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right]\cos\varphi\,.$$

Лінійний прискорювач складається із системи трубок і зазорів різної довжини. У зазорах на частинку діють прискорювальне та фокусувальне поля. Будемо вважати, що відомі точки перемикання ξ_i і амплітуда напруженості $\alpha(\xi_i)$ (кусково-стала функція) прискорювального поля.

Розглянемо задачу вибору фокусувального поля $g(\xi)$ такого, щоб для початкових умов $\gamma_0,\varphi_0,x_0,y_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0$ задовольнявся критерій якості

$$\min_{g(\xi)}\left(x^2(T)+y^2(T)\right). \tag{14.17}$$

Вважатимемо, що функція $g(\xi)$ належить класу кусково-сталих функцій. Тоді нормалізовані рівняння руху частинки в зазорі мають вигляд

$$\frac{d\gamma}{d\xi}=\alpha(\xi)\cos\varphi\,,\ \frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,,\ \frac{dx_1}{d\xi}=x_2\,,$$

$$\frac{dx_2}{d\xi}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[g(\xi)x_1-\alpha(\xi)\frac{dx_1}{d\xi}\right]\cos\varphi\,,$$

$$\frac{dy_1}{d\xi}=y_2\,,\ \frac{dy_2}{d\xi}=\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[-g(\xi)y_1-\alpha(\xi)\frac{dy_1}{d\xi}\right]\cos\varphi\,,$$

а рівняння руху частинки в трубці –

$$\frac{d\gamma}{d\xi}=\alpha(\xi)\cos\varphi\,,\ \frac{d\varphi}{d\xi}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,,\ \frac{dx_1}{d\xi}=x_2\,,\ \frac{dx_2}{d\xi}=0\,,\ \frac{dy_1}{d\xi}=y_2\,,\ \frac{dy_2}{d\xi}=0\,.$$

В останньому випадку необхідно додати стрибки в точках перемикання

$$x_2(\xi_i+0)=x_2(\xi_i)-\frac{1}{2}\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i)-1}\cos\varphi(\xi_i)x_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right],$$

$$y_2(\xi_i+0)=y_2(\xi_i)-\frac{1}{2}\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i)-1}\cos\varphi(\xi_i)y_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i+0)-\alpha(\xi_i)\right].$$

З метою оптимізації критерію якості (14.17) поставленої задачі запишемо функцію Гамільтона

$$H(\psi,x,y,\alpha,g,\gamma,\varphi,\xi)=\psi_1(\xi)\alpha(\xi)\cos(\varphi)+\psi_2(\xi)\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}+\psi_3(\xi)x_2+$$

$$+\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi}+g(\xi)\right)x_1-\alpha(\xi)x_2\right]\cos\varphi+\psi_5(\xi)y_2+$$

$$+\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{d\xi}-g(\xi)\right)y_1-\alpha(\xi)y_2\right]\cos\varphi.$$

При цьому система для спряжених змінних у зазорі $\psi(\xi)=\left(\psi_1(\xi),\psi_2(\xi),\psi_3(\xi),\psi_4(\xi),\psi_5(\xi),\psi_6(\xi)\right)^T$ має вигляд

$$\frac{d\psi}{d\xi}=-grad_z H(\psi,x,y,\alpha,g,\gamma,\varphi,\xi),\ z=\left(\gamma,\varphi,x_1,x_2,y_1,y_2\right)^T.$$

Останнє векторне рівняння для нашого випадку в покомпонентній формі запишеться таким чином:

$$\frac{d\psi_1}{d\xi}=\frac{2\pi}{\left(\gamma^2-1\right)^{3/2}}\psi_2(\xi)+\psi_2(\xi)\frac{\gamma^2+1}{\left(\gamma^2-1\right)^2}\left[g(\xi)x_1-\alpha(\xi)x_2\right]\cos\varphi+$$

$$+\psi_6(\xi)\frac{\gamma^2+1}{\left(\gamma^2-1\right)^2}\left[-g(\xi)y_1-\alpha(\xi)y_2\right]\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_2}{d\xi}=\psi_1(\xi)\alpha(\xi)\sin\varphi+\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[g(\xi)x_1-\alpha(\xi)x_2\right]\sin\varphi+$$

$$+\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\left[-g(\xi)y_1-\alpha(\xi)y_2\right]\sin\varphi,\ \frac{d\psi_3}{d\xi}=-\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}g(\xi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_4}{d\xi}=-\psi_3(\xi)+\psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\alpha(\xi)\cos\varphi,\ \frac{d\psi_5}{d\xi}=\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}g(\xi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d\psi_6}{d\xi}=-\psi_5(\xi)+\psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\alpha(\xi)\cos\varphi$$

з початковими умовами $\psi(T) = -\left(0,0,2x_1(T),0,2y_1(T),0\right)^T$.

Система для спряжених змінних у трубці має вигляд

$$\frac{d\psi_1}{d\xi} = \frac{2\pi}{\left(\gamma^2 - 1\right)^{3/2}}\psi_2(\xi), \quad \frac{d\psi_2}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\psi_3}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\psi_4}{d\xi} = \psi_3(\xi), \quad \frac{d\psi_5}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{d\psi_6}{d\xi} = \psi_5(\xi)$$

з початковими умовами $\psi(T) = -\left(0,0,2x_1(T),0,2y_1(T),0\right)^T$.

Запишемо стрибки в точках перемикання для спряженої системи змінних:

$$\psi_1(\xi_i + 0) = \psi_1(\xi_i) - \frac{1}{2}\psi_4(\xi_i)\frac{\gamma^2(\xi_i) + 1}{\left(\gamma^2(\xi_i) - 1\right)^2}\cos\varphi(\xi_i)x_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\psi_6(\xi_i)\frac{\gamma^2(\xi_i) + 1}{\left(\gamma^2(\xi_i) - 1\right)^{3/2}}\cos\varphi(\xi_i)y_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right],$$

$$\psi_2(\xi_i + 0) = \psi_2(\xi_i) - \frac{1}{2}\psi_4(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1}\sin\varphi(\xi_i)x_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\psi_6(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1}\sin\varphi(\xi_i)y_1(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right],$$

$$\psi_3(\xi_i + 0) = \psi_3(\xi_i) + \frac{1}{2}\psi_4(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1}\cos\varphi(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right],$$

$$\psi_5(\xi_i + 0) = \psi_5(\xi_i) + \frac{1}{2}\psi_6(\xi_i)\frac{\gamma(\xi_i)}{\gamma^2(\xi_i) - 1}\cos\varphi(\xi_i)\left[\alpha(\xi_i + 0) - \alpha(\xi_i)\right].$$

З метою мінімізації функціонала (14.17) градієнт від критерію якості за параметрами g_i поставленої задачі запишемо у вигляді

$$grad_{g_i} I = -\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} grad_{g_i} H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi)d\xi,$$

де $$grad_{g_i} H(\psi, x, y, \alpha, g, \gamma, \varphi, \xi) = \psi_4(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}x_1\cos\varphi - \psi_6(\xi)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1}y_1\cos\varphi.$$

Для пошуку оптимального фокусувального поля можна записати оптимізаційну процедуру градієнтного типу

$$g_i^{(n+1)} = g_i^{(n)} - \rho_n grad_{g_i^{(n)}} I . \qquad (14.18)$$

Обчислювальний експеримент проводився за початкових умов

$$\gamma_0 = 1.0007076 (\approx 665 \text{ кеВ}), c = 0.03 ,$$

$$\varphi_0 = 1.4, x_0 = 0.005, y_0 = -0.005, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0 .$$

Початкове значення критерію (14.17) мало значення $2.7689 \cdot 10^{-4}$, після оптимізації $-2.532 \cdot 10^{-8}$.

Результати обчислювального експерименту зображено на графіках.

Графік радіального руху зарядженої частинки по координаті $x(\xi)$, $\xi \in [0, T]$ наведено на рис. 14.1.

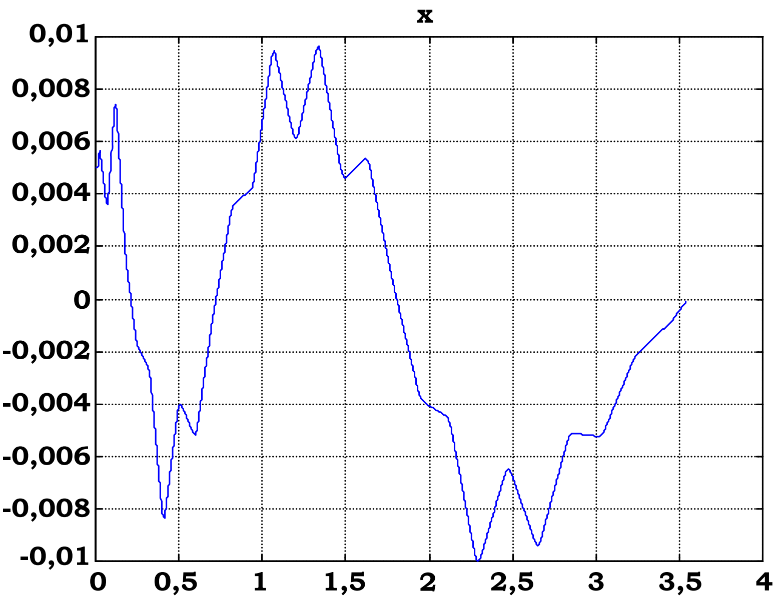

Рис. 14.1

Графік радіального руху зарядженої частинки по координаті $y(\xi)$, $\xi \in [0, T]$ наведено на рис. 14.2.

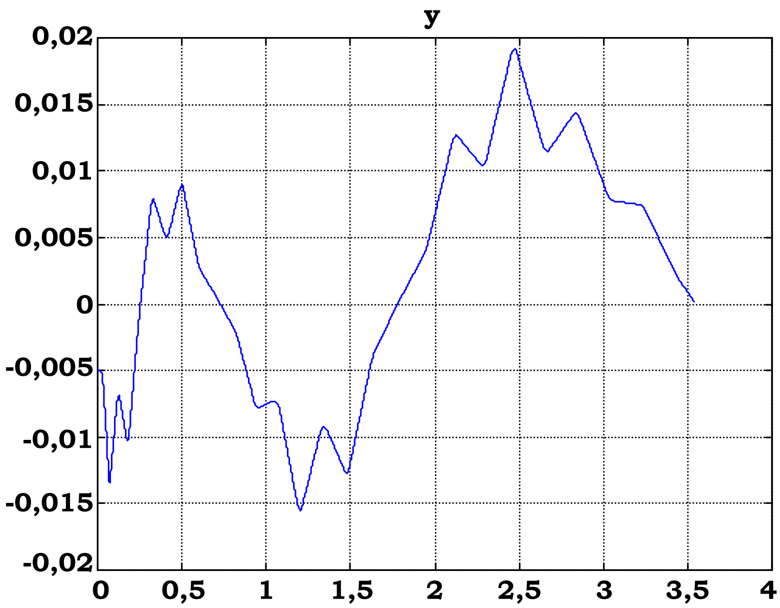

Рис. 14.2

На рис. 14.3 відображено оптимальне прискорювальне поле $g(\xi)$.

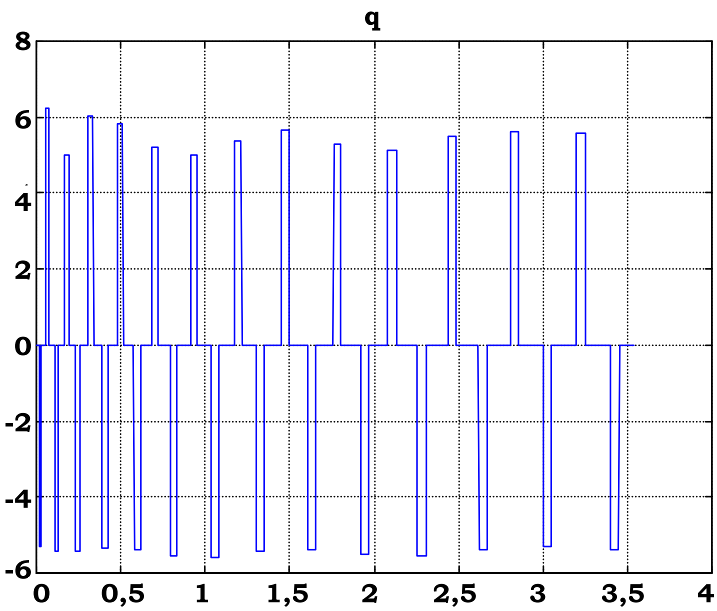

Рис. 14.3

14.3. Оптимізація систем керування мікросупутників

Для моделі обертового руху мікросупутника з мінімально-надлишковою структурою розміщення керуючих органів без урахування їх динаміки розглядаються задачі визначення функції керування.

14.3.1. Задача оптимального за швидкодією синтезу керування, що здійснює гасіння кутових швидкостей твердого тіла

Розглянемо динамічну систему

$$J\frac{d\omega}{dt}+\omega\times J\omega=u\,. \tag{14.19}$$

Тут $\omega=\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)^T$ – вектор кутової швидкості твердого тіла, $J=J^T$ – тензор інерції твердого тіла, $u=M_u=\left(u_1,u_2,u_3\right)^T$ – вектор керуючих параметрів, $\times$ – знак векторного добутку. Припустимо, що функція керування u розглядається у класі кусково-неперервних функцій з оберненим зв'язком, що задовольняють умову

$$\|u\|^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2\le\rho^2\,,\ \rho>0\,.$$

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати час переходу твердого тіла з положення $\omega(0)=\omega^{(0)}$ у множину, що задається нерівністю

$$\|J\omega\|\le\varepsilon\,. \tag{14.20}$$

На основі диференціального рівняння Беллмана отримуємо функцію Беллмана у вигляді $V(\omega)=\frac{1}{\rho}\left(\|J\omega\|-\varepsilon\right)$, при цьому оптимальна функція керування записується таким чином:

$$u^*=-\rho\frac{J\omega}{\|J\omega\|}\,. \tag{14.21}$$

З властивостей функції Беллмана випливає, що мінімальний час перехідного процесу $T^*=\frac{1}{\rho}\left(\left\|J\omega^{(0)}\right\|-\varepsilon\right)$.

Алгоритм.

Задаємо $\varepsilon>0$, початкові умови $\omega(0)=\omega^{(0)}$.

Крок 1. Якщо $\|J\omega_0\|\le\varepsilon$, то переходимо на крок 4.

Крок 2. Оцінюємо час перехідного процесу $T^*=\frac{1}{\rho}\left(\left\|J\omega^{(0)}\right\|-\varepsilon\right)$.

Крок 3. Інтегруємо систему (14.19), $\omega(0)=\omega^{(0)}$, $t\in[0,T]$. При цьому керування вибираємо згідно з (14.21). Таким чином, будуємо оптимальну траєкторію та оптимальне керування.

Крок 4. Вихід.

Загалом керування, яке здійснює гасіння кутових швидкостей за час T^*, можна подати у вигляді $u^*=-\rho\dfrac{J\omega}{\|J\omega\|}+DJ\omega\times J\omega$, де D – довільна матриця розмірністю 3×3.

Нехай замість (14.20) розглядається термінальна множина, що задається нерівністю

$$\left\{\omega:\|J(\omega-\omega_1)\|\le\varepsilon\right\}, \tag{14.22}$$

де $\varepsilon>0$, $\omega^{(1)}=\left(\omega_1^{(1)},\omega_2^{(1)},\omega_3^{(1)}\right)^T$. Тоді час перехідного процесу $T=\dfrac{1}{\rho}\left(\left\|J\left(\omega^{(0)}-\omega^{(1)}\right)\right\|-\varepsilon\right)$ і синтезуюче керування має вигляд

$$u^*=\omega_1\times J\left(\omega-\omega^{(1)}\right)+\omega\times J\omega^{(1)}-\rho\frac{J\left(\omega-\omega^{(1)}\right)}{\left\|J\left(\omega-\omega^{(1)}\right)\right\|}.$$

Клас керувань, який здійснює перехід на множину (14.22) для системи (14.19) за час $T=\dfrac{1}{\rho}\left(\left\|J\left(\omega^{(0)}-\omega^{(1)}\right)\right\|-\varepsilon\right)$, можна подати у вигляді

$$u^*=\omega\times J\omega^{(1)}-\rho\frac{J\left(\omega-\omega^{(1)}\right)}{\left\|J\left(\omega-\omega^{(1)}\right)\right\|}+\left(\omega^{(1)}+DJ\left(\omega-\omega^{(1)}\right)\right)\times J\left(\omega-\omega^{(1)}\right),$$

де D – довільна матриця розмірністю 3×3.

14.3.2. Задача переорієнтації та стабілізації мікросупутника з маховичними виконавчими органами

Розглянемо рівняння обертового руху мікросупутника з маховичними виконавчими органами

$$\begin{cases} J\dfrac{d\omega}{dt}+\omega\times(Gh+J\omega)=-Gu,\\ \dfrac{d\lambda}{dt}=\dfrac{1}{2}\Omega(\omega)\lambda,\\ \dfrac{dh}{dt}=u. \end{cases} \tag{14.23}$$

Тут $u=(u_1,u_2,u_3,u_4)^T$ – вектор керуючих параметрів, $u \in U$ – множина допустимих керувань, $t \geq 0$, $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T$ – кватерніони, $\|\lambda\|=1$,

$$\Omega(\omega)=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1^*-\omega_1 & \omega_2^*-\omega_2 & \omega_3^*-\omega_3 \\ \omega_1-\omega_1^* & 0 & \omega_3+\omega_3^* & -\omega_2-\omega_2^* \\ \omega_2-\omega_2^* & -\omega_3-\omega_3^* & 0 & \omega_1+\omega_1^* \\ \omega_3-\omega_3^* & \omega_2+\omega_2^* & -\omega_1-\omega_1^* & 0 \end{pmatrix},$$

$\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*,\omega_3^*)^T$ – орбітальна кутова швидкість (у випадку кругової орбіти приблизно дорівнює $(0,0,0.061)^T$ град/с), $h=(h_1,h_2,h_3,h_4)^T$ – кінетичні моменти маховиків. Зв'язана система координат будується на головних осях інерції апарата. Зафіксуємо умову Коші $\omega(0)=\omega^{(0)}$, $\lambda(0)=\lambda^{(0)}$, $h(0)=h^{(0)}$. Задача полягає в тому, щоб найшвидше перевести кватерніони λ у стан $\lambda(T^*)=(\alpha,0,0,0)^T$, де $\alpha=\pm1$, і при цьому стабілізувати кутові швидкості відносно орбітальної кутової, тобто $\omega(T^*)=-\omega^*$. Фізично це означає, що, починаючи з моменту часу T^*, бінормаль зв'язаної системи координат збігається з бінормаллю орбітальної системи координат, а інші дві осі зв'язаної системи нерухомі відносно відповідних осей орбітальної системи.

Для розв'язання задачі застосовується метод оптимального демпфірування відносно функції

$$V(t,\omega,\lambda)=1-\lambda_0^2+\frac{a}{2}\int_0^t\left(\omega(\tau)-\omega^*\right)^T Q\left(\omega(\tau)-\omega^*\right)d\tau .$$

Тут $a \geq 0$, Q – додатно визначена симетрична матриця. Шукане керування обчислюється за формулою

$$u^*(t)=P_U\left\{v(t)\right\}, \tag{14.24}$$

де $v(t)=-G^+\left[\omega\times\left(Gh+J\omega\right)+J\left(\lambda_0\tilde{\lambda}-aQ(\omega-\omega^*)\right)\right]$, $P_U\{\cdot\}$ – операція проектування на допустиму множину керувань U. Наприклад, якщо множина керувань є кулею

$$U=\left\{z\in R^3:\|z\|\leq\rho\right\},$$

то у випадку $\|v(t)\|>\rho$ визначимо $u^*(t)=\rho\dfrac{v(t)}{\|v(t)\|}$.

На рис. 14.4–14.6 зображено графіки відповідно кутових швидкостей, кінетичних моментів маховиків і кватерніонів, обчислені при значеннях параметрів: $J = \begin{pmatrix} 40 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 2 & 0 \\ 0.02 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $\omega^{(0)} = (1, 1, -1)^T$, $h^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$, $\lambda^{(0)} = (0, 1, 0, 0)^T$, $\rho = 0.01$. Отримане при цьому керування наведено на рис. 14.7.

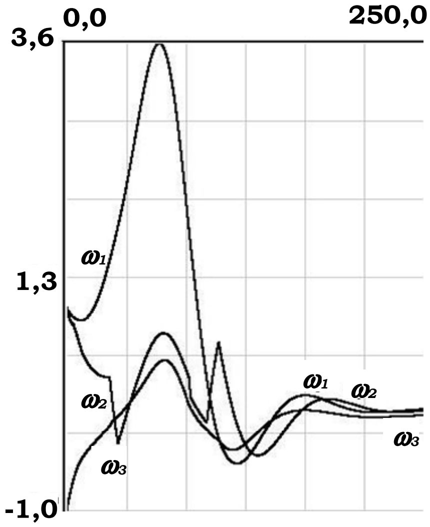

Рис. 14.4

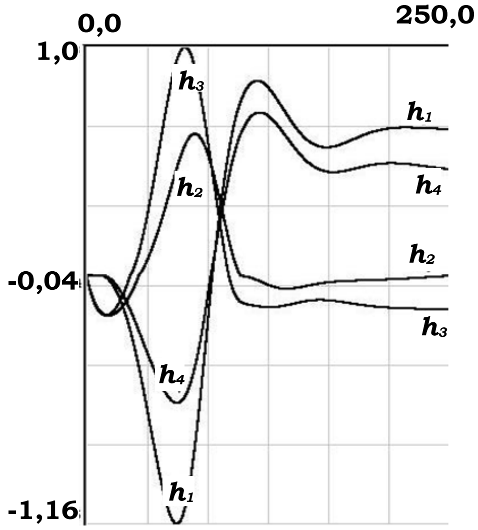

Рис. 14.5

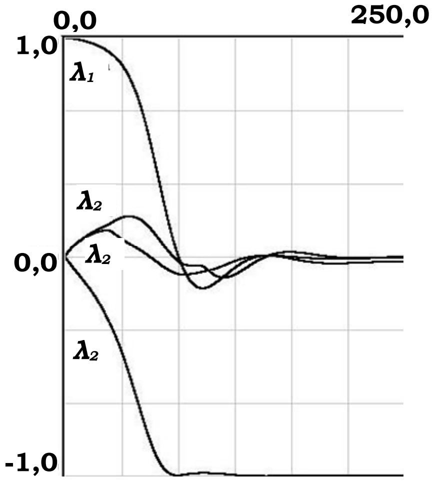

Рис. 14.6

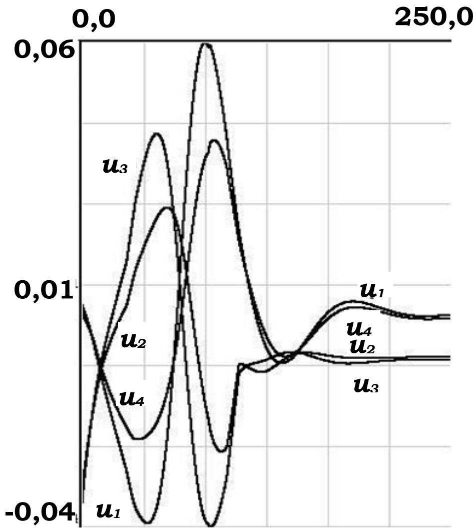

Рис. 14.7

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1971.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.
5. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2000.
6. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. школа, 1991.
7. Бойчук А.А., Самойленко А.М., Журавлев В.Ф. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995.
8. Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Изд-во "УРСС", 1998.
9. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наук. думка, 1985.
10. Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т. Диференціальні рівняння : Навч. посіб. для студентів факультету кібернетики (спеціальність "Інформатика"). – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002.
11. Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Аналіз та оптимізація динамічних систем. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2000.
12. Гаращенко Ф.Г., Харченко І.І. Збірник задач і вправ з диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004.
13. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006.

14. Гаращенко Д.Ф., Матвиенко В.Т. Вычисление частных производных первого порядка в задачах структурно-параметрической оптимизации систем с переменной структурой // Механика, автоматизация, управление. – 2004. – № 6. – С. 15–20.
15. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961.
16. Головач Г.П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. – К.: Техніка, 1997.
17. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – Л.: Гостехиздат, 1950.
18. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А, Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вища школа, 1972.
19. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
20. Диференціальні моделі. Стійкість / За ред. А.М. Самойленка – К.: Вища школа, 2000.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.
22. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.
23. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Вища школа, 1974.
24. Киселев А.И., Краснов М.А., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. школа, 1965.
25. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974.
26. Краснов М.П., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973.
27. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Н.П. Еругина. – К.: Вища школа, 1974.
28. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950.
29. Ляшко І.І., Боярчук О.К, Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981.
30. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
31. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск: Вышейшая школа, 1970.
32. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышейшая школа, 1974.

33. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976.
34. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – К.: Либідь, 1994.
35. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь : Навч. посіб. – К.: Либідь, 1997.
36. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.
37. Понтрягин Л.С. 0быкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
38. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974.
39. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. – К.: Либідь, 2003.
40. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.
41. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – К.: Наукова думка, 2002.
42. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гиз. физ.-мат. лит-ры, 1958.
43. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1979.
44. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1962.
45. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
46. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992.
47. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970.
48. Хусаїнов Д.Я., Бичков О.С. Диференціальні рівняння : Навч. посіб. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2001.
49. Четаев Н.Г. Устойчивость движения: Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.
50. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003.
51. Штокало И.З. Операционное исчисление. – К: Наук. думка, 1972.
52. Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Е. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. – 3-е изд. – М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2008.
53. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

ЗМІСТ

Передмова ....

Вступ...

Розділ 1
Проблеми математичного моделювання та інформатики.
Їх зв'язок з методами та теорією диференціальних рівнянь..............
1.1. Поняття математичного моделювання ....
1.2. Математичні моделі процесів та систем...............................
1.3. Приклади використання диференціальних рівнянь..............
1.3.1. Диференціальні рівняння в екології ....
1.3.2. Закони Кеплера руху планет..
1.3.1. Диференціальні рівняння закону попиту і пропозиції в економічних дослідженнях ....
1.3.2. Найпростіші рівняння руху частинок в електромагнітних полях...
1.3.3. Використання диференціальних рівнянь в біології і математичних дослідженнях...........................
1.3.4. Тенденції і перспективи розвитку комп'ютерного моделювання та застосування сучасних інформаційних технологій в економіці..............
1.3.5. Модель макроекономічної динаміки. Модель Харрода–Домара...
1.3.6. Модель економічного росту Солоу..................................
1.4. Побудова диференціальних рівнянь з заданими параметричними сімействами кривих ....

Розділ 2
Диференціальні рівняння першого порядку,
розв'язані відносно похідної..
2.1. Поняття диференціального рівняння, його порядок ....
2.2. Задача Коші ....
2.3. Поняття загального розв'язку, форми його запису ....
2.4. Частинні і особливі розв'зки.
Знаходження кривих, підозрілих на особливість розв'язку,
по диференціальному рівнянню ......
2.5. Два означення інтегралу.
Теореми про загальний вигляд інтегралу
та залежність двох інтегралів
одного диференціального рівняння ....
2.6. Інтегровні типи диференціальних рівнянь
першого порядку, розв'язаних відносно похідної ....
2.7. Рівняння Ріккаті...
2.8. Рівняння в повних диференціалах ....
2.9. Інтегрувальний множник.
Теореми про існування, неєдиність та загальний вигляд
інтегрувального множника ....

Розділ 3
Диференціальні рівняння першого порядку,
не розв'язані відносно похідної ....
3.1. Основні поняття та означення.
Теорема про достатні умови існування
і єдиності розв'язку ....
3.2. Знаходження кривих, підозрілих на особливий розв'язок.......
3.3. Загальний метод введення параметру ....
3.4. Неповні рівняння ....

Розділ 4
Диференціальні рівняння вищих порядків ....
4.1. Основні поняття та означення.
Динамічна інтерпретація диференціальних рівнянь
другого порядку. Консервативні системи ....
4.2. Задача Коші. Достатні умови існування
та єдиності розв'язку задачі Коші ....

4.3. Загальний розв'язок та загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли ....
4.4. Крайова задача ....
4.5. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними ....
4.5.1. Диференціальні рівняння, які містять n-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну ....
4.5.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції і (k-1)-их перших похідних ....
4.5.3. Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної ....
4.5.4. Однорідні диференціальні рівняння відносно шуканої функції і її похідних ....
4.5.5. Диференціальні рівняння, ліва частина яких є точна похідна ....

Розділ 5

Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку..............
5.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку ....
5.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора .....
5.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного дифферентціального рівняння n-го порядку ....
5.1.3. Необхідні і достатні умови лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку ....
5.1.4. Формула Остроградського-Ліувілля ....
5.1.5. Фундаментальна система розв'язків та її існування ......
5.1.6. Загальний розв'язок. Число лінійно незалежних розв'язків ....
5.2. Лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами ....
5.2.1. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами ....

5.2.2. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів ....
5.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку 128
5.3.1. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння ....
5.3.2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) ....
5.3.3. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку методом Коші ....
5.4. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь з постійними коефіцієнтами ....
5.5. Деякі питання теорії лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку. Задача Штурма-Ліувілля ....
5.5.1. Зведення диференціального рівняння другого порядку до рівняння, яке не містить члена з першою похідною, з допомогою заміни шуканої функції ....
5.5.2. Зведення диференціальних рівнянь другого порядку до рівнянь, які не містять члена з першою похідною з допомогою заміни незалежної змінної ....
5.5.3. Спряжені, самоспряжені диференціальні оператори, крайові умови і крайові задачі ....
5.5.4. Зведення лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку до самоспряженого вигляду ....
5.5.5. Задача Штурма-Ліувілля ....
5.5.6. Функція Гріна ....
5.5.7. Поняття повноти системи функцій. Зв'язок збіжності в середньому і повноти ....

Розділ 6

Системи звичайних диференціальних рівнянь ....
6.1. Основні поняття та загальні властивості розв'язків ....
6.1.1. Основні поняття та означення. Задача Коші ....

6.1.2. Теореми про достатні умови існування
та єдиності розв'язку задачі Коші
та неперервну залежність розв'язку системи
від початкових даних і параметрів ....
6.1.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки ....
6.1.4. Інтеграл. Перший та загальний інтеграли.
Число незалежних інтегралів ....
6.1.5. Пониження порядку систем
з допомогою перших інтегралів ....
6.1.6. Системи диференціальних рівнянь
в симетричній формі ....
6.2. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь ....
6.2.1. Однорідні системи ....
6.2.2. Лінійно незалежні розв'язки.
Теореми про лінійно залежні
і незалежні розв'язки ....
6.2.3. Інтегральна (фундаментальна) матриця ....
6.2.4. Визначник Вронського. Формула Якобі ....
6.2.5. Спряжені системи ....
6.2.6. Неоднорідні системи ....
6.2.7. Метод варіації довільної сталої ....
6.2.8. Формула Коші ....
6.3. Однорідні лінійні системи диференціальних рівнянь
з сталими коефіцієнтами ....
6.3.1. Випадки інтегрованості лінійних систем
в квадратурах ....
6.3.2. Матричний метод інтегрування однорідних
стаціонарних систем ....
6.3.3. Структура фундаментальної системи
розв'язків. Метод Ейлера ....

Розділ 7
Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь
на основі методу степеневих рядів та малого параметра ....
7.1. Розклад розв'язку в степеневий ряд ....
7.2. Розклад розв'язку в узагальнений степеневий ряд ....
7.3. Поняття про рівняння Бесселя ....
7.4. Метод малого параметра ....

Розділ 8
Метод інтегральних перетворень лапласа для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь......................
8.1. Основні поняття ....
8.2. Властивості перетворення Лапласа ....
8.3. Таблиця зображень деяких оригіналів ....
8.4. Знаходження зображень функцій-оригіналів ....
8.5. Знаходження оригіналу за зображенням ....
8.6. Розв'язування диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами з використанням операційного числення ....
8.7. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами методом інтегральних перетворень Лапласа ....

Розділ 9
Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Вибрані питання теорії стійкості..
9.1. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині ....
9.2. Стійкість розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший метод Ляпунова ....
9.2.1. Основні поняття та означення стійкості за Ляпуновим ....
9.2.2. Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем ....
9.2.3. Стійкість розв'язку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца ....
9.2.4. Дослідження стійкості за першим наближенням ....
9.3. Другий метод Ляпунова ....
9.3.1. Функції Ляпунова ....
9.3.2. Геометрична інтерпретація умов стійкості ....
9.3.3. Теореми Ляпунова про стійкість і асимптотичну стійкість ....
9.3.4. Теореми Четаєва і Ляпунова про нестійкість ....
9.3.5. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем ....

9.4. Елементи теорії практичної стійкості систем звичайних диференціальних рівнянь ....
9.4.1. Основні поняття та означення практичної стійкості. Внутрішня і зовнішня стійкості ....
9.4.2. Прикладні постановки деяких задач практичної стійкості ....
9.4.3. Теореми про практичну стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь ....
9.4.4. Оптимальні оцінки в задачах практичної стійкості лінійних однорідних систем ....
9.4.5. Критерії практичної стійкості лінійних неоднорідних систем ....
9.4.6. Дослідження задач практичної стійкості нелінійних систем

Розділ 10
Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними ....
10.1. Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними ....
10.1.1. Зв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі ....
10.1.2. Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння з частинними похідними. Розв'язування задачі Коші ....
10.2. Розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними ....

Розділ 11
Елементи варіаційного числення ....
11.1. Основні поняття варіаційного числення ....
11.1.1. Функціонали та деякі їх властивості ....
11.1.2. Функціонали в лінійних нормованих (банахових) просторах ....
11.1.3. Приклади і класифікація задач варіаційного числення ....
11.1.4. Перша варіація функціоналу ....

11.1.5. Необхідні умови екстремуму ....
11.1.6. Основна лема варіаційного числення ....
11.2. Рівняння Ейлера для різних типів функціоналів ....
11.2.1. Необхідні умови екстремуму для найпростішої варіаційної задачі...
11.2.2. Частинні випадки рівняння Ейлера ....
11.2.3. Рівняння Ейлера для функціоналів, залежних від декількох функцій ....
11.2.4. Принцип найменшої дії ....
11.2.5. Рівняння Ейлера для функціоналів, залежних від багатьох змінних ....
11.2.6. Необхідні умови екстремуму для функціоналів, які залежні від похідних порядку вище першого 288
11.2.7. Канонічна (Гамільтонова) форма рівнянь Ейлера ....
11.3. Умови екстремуму другого порядку ....
11.3.1. Друга варіація функціонала ....
11.3.2. Умови Лежандра та Якобі ....
11.4. Достатні умови екстремуму функціоналів ....
11.4.1. Власне і центральне поле ....
11.4.2. Поле екстремалей ....
11.4.3. Достатні умови Вейєрштрасса ....
11.4.4. Достатні умови Лежандра ....

Розділ 12
Структурно-параметрична оптимізація динамічних процесів, які описуються системами звичайних диференціальних рівнянь, залежними від параметрів ....
12.1. Структурно-параметричний підхід в задачах оптимізації динамічних систем ....
12.2. Ітераційна процедура оптимізації систем зі змінною структурою, які використовують частинні похідні першого порядку.........
12.3. Методи оптимізації систем зі змінною структурою, які використовують матрицю других похідних .....

Розділ 13
Чисельні методи розв'язування задач коші ....
13.1. Чисельні методи розв'язування задачі Коші ....
13.2. Метод Ейлера ....
13.3. Модифікації методу Ейлера ....
13.4. Методи Рунге-Кутта ....
13.5. Метод Адамса ....
13.6. Метод Мілна ....
13.7. Приклади розв'язування диференціальних рівнянь у середовищі Matlab ....

Розділ 14
Розв'язання прикладних задач, які описуються мarематичними моделями
у формі систем звичайних диференціальних рівнянь................
14.1. Оцінка часу регулювання перехідного процессу в системах автоматичного керування за допомогою функцій Ляпунова ....
14.2. Алгоритм параметричної оптимізації руху заряджених частинок ("E-g" задача) ....
14.3. Оптимізація систем керування мікро супутників ....
14.3.1. Задача оптимального за швидкодією синтезу керування, що здійснює гасіння кутових швидкостей твердого тіла ....
14.3.2. Задача переорієнтації та стабілізації мікросупутника з маховичними виконавчими органами ....

Список літератури ....

ЗМІСТ

Навчальне видання

ГАРАЩЕНКО Федір Георгійович
МАТВІЄНКО Володимир Тихонович
ХАРЧЕНКО Ігор Іванович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ІНФОРМАТИКІВ

ПІДРУЧНИК

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 26.01.09. Формат $70x100^{1/16}$. Вид. № 665. Гарнітура Bookman Old Style.
Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 200. Ум. друк. арк. 28,4. Обл.-вид. арк. 21,14. Зам. № 28-4664

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 61; тел./факс (38044) 239 31 28
Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02