Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Пічкур В. В.

Збірник задач
з
теорії керування

для студентів факультету
комп'ютерних наук та кібернетики
спеціальність – Прикладна математика

2020

Вчителі відчиняють двері.
Заходите ви самостійно.

Китайське прислів'я.

Зміст

Частина I

Задачі, питання і тести

Тема 1

Системи керування

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 1.1. Задана система керування, яка описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ \ x(0) = 1, \tag{1.1}$$

де x – стан системи, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x) = ax. \tag{1.2}$$

Тут a – скалярний параметр.

1. До якого класу належить керування (1.2) (програмне керування, керування з оберненим зв'язком)?
2. Знайти траєкторію системи (1.1) при керуванні (1.2).
3. Знайти програмне керування $u(t) = ax(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
4. Оцінити, при якому значенні параметра $a \in \{2, 4, -3\}$ критерій якості
$$\mathcal{I}(u) = x^2(1)$$
буде мати найменше значення.

Задача 1.2. Задана система керування, яка описується рівнянням

$$x'' = u, \tag{1.3}$$

де u – керування, $t \in [0, 1]$.

Нехай керування задане у вигляді

$$u(t) = \cos t. \tag{1.4}$$

1. До якого класу належить керування (1.4) (програмне керування, керування з оберненим зв'язком)?
2. Знайдіть траєкторію системи (1.3) при керуванні (1.4) за умови, що $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Задача 1.3. Задана система керування, яка описується рівнянням (1.3).

1. Який вектор визначає вектор стану системи (1.3)?
2. Запишіть (1.3) у формі системи другого порядку в нормальній формі

Нехай керування задане у вигляді

$$u(x, x') = x. \tag{1.5}$$

1. До якого класу належить керування (1.5) (програмне керування, керування з оберненим зв'язком)?
2. Запишіть (1.3) з керуванням (1.5) у формі системи другого порядку в нормальній формі. Знайдіть фундаментальну матрицю цієї системи.
3. Запишіть спряжену систему до системи, що записана на попередньому кроці і її фундаментальну матрицю.

Задача 1.4. Розглядається задача

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 u^2(s)ds + (x(1) - 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x^2(t) + u(t), \; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ задана. До якого типу функціоналів належить критерій якості задачі: Лагранжа, Майєра, Больца? Звести цю задачу до задачі з функціоналом Майєра.

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Наведіть означення системи керування і її ознаки.
2. Поясніть такі поняття:

(а) вектор стану системи (вектор фазових координат);
(б) вектор керування;
(в) критерій якості;
(г) обмеження на вектор керування;
(д) обмеження на стан системи;
(е) оптимальне керування;
(ж) система з фіксованим лівим кінцем;
(и) система з фіксованим правим кінцем;
(к) вектор спостережень;
(л) термінальний критерій якості.

3. Які є основні принципи керування? Чим вони відрізняються?
4. Сформулюйте означення програмного керування (керування без оберненого зв'язку).
5. Наведіть означення керування з оберненим зв'язком.
6. Які є види обмежень на керування?
7. Які Вам відомі обмеження на вектор стану системи?
8. Наведіть задачі, характерні для теорії керування.
9. Сформулюйте означення функціоналів Лагранжа, Майєра, Больца.
10. Наведіть означення задачі оптимального керування.
11. Наведіть означення абсолютно неперервної функції.
12. Які властивості абсолютно неперервних функцій Ви знаєте?
13. Сформулюйте означення системи Каратеодорі.
14. Наведіть означення фундаментальної матриці, нормованої за моментом.
15. Наведіть означення спряженої системи.
16. Сформулюйте теорему про фундаментальну матрицю спряженої системи.
17. Запишіть формулу Коші для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку.
18. Сформулюйте основні положення методу Ейлера знаходження загального розв'язку лінійної системи з постійними коефіцієнтами.

19. Наведіть алгоритм побудови фундаментальної матриці лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.
20. Запишіть формулу Коші для знаходження загального розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь.
21. Наведіть алгоритм побудови загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами.

Домашня робота

Задача 1.5. Задана система керування, яка описується скалярним рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + u(t),\ \ x(0) = 1. \tag{1.6}$$

Тут x – стан системи, $t \in [0, 2]$. Знайти траєкторії системи (1.6), які відповідають таким керуванням:

1. $u(t) = ax(t)$, де a – деяке число;
2. $u(t) = \sin t$;
3. $u(t) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } t \in [0,1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1,2]. \end{cases}$

Задача 1.6. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2,\ \ x_2(0) = 1. \tag{1.7}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \tag{1.8}$$

1. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.8).
2. Знайти програмне керування $u(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи, що одержана при підстановці керування (1.8) в систему (1.7)?

4. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.8) в систему (1.7), та її фундаментальну матрицю.

Задача 1.7. Розглядається задача

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t)x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. До якого типу функціоналів належить критерій якості задачі: Лагранжа, Майєра, Больца? Звести цю задачу до задачі з функціоналом Майєра.

Додаткові завдання

Задача 1.8. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} , x_1(0) = -2, \ x_2(0) = 1. \tag{1.9}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2. \tag{1.10}$$

1. До якого класу керувань належить керування (1.10): програмних керувань чи з оберненим зв'язком?
2. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.10).
3. Знайти програмне керування $u(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
4. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи, що одержана при підстановці керування (1.10) в систему (1.9)?
5. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.10) в систему (1.9), та її фундаментальну матрицю.

Задача 1.9. Задана система керування
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1.$$
Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді
$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1]\,, \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]\,. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?
3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням
$$u(t) = 0,\ t \in [0, 2]$$
за умови, що критерій якості має вигляд
$$\mathcal{J}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min\,.$$

Задача 1.10. Задана система керування
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) - 5x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1.$$
Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді
$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1]\,, \\ t, & \text{якщо } t \in (1, 2]\,. \end{cases}$$

1. До якого класу керувань належить таке керування: програмних керувань чи з оберненим зв'язком?
2. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
3. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?
4. Проаналізувати, чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1]\,, \\ t^2 & t \in [1, 2]\,. \end{cases}$$
за умови, що критерій якості має вигляд
$$\mathcal{J}(u) = \int_0^2 u^2(s)ds + x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min\,.$$

Література: [4]

Тема 2

Елементи багатозначного аналізу

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 2.1. Знайти $A + B$ і λA, якщо:

1. $A = \{-3, 2, -1\}$, $B = \{-2, 5, 1\}$, $\lambda = 3$;
2. $A = \{4, 2, -4\}$, $B = [-2, 3]$, $\lambda = -1$;
3. $A = [-1, 2]$, $B = [3, 7]$, $\lambda = -2$.

Задача 2.2. Знайти MA, якщо

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 2.3. Знайти r - окіл множини:

1. $A = \{-3, 2, -1\}$, $r = 1$;
2. $A = [-2, 3]$, $r = 2$;
3. $A = [-1, 2] \; \cup 4$, $r = 1$.

Задача 2.4. Знайти метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{-3, 2, -1\}$, $B = \{-2, 5, 1\}$;
2. $A = \{4, 2, -4\}$, $B = [-2, 3]$;

3. $A = [-1, 2]$, $B = [3, 7]$.

Задача 2.5. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = [0, r]$;
2. $A = [-r, r]$;
3. $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| \le 1, |x_2| \le 2\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le r\}$;
5. $A = \mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$.

Задача 2.6. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^1 F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, x]\,, x \in [0, 1]$;
2. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le x\}\,, x \in [0, 1]$.

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Сформулюйте означення опуклої множини, опуклої оболонки множини, опуклої функції.
2. Сформулюйте теорему про строгу віддільність точки від множини.
3. Наведіть означення суми двох множин.
4. Наведіть означення добутку скалярної величини на множину.
5. Наведіть означення добутку матриці на множину.
6. Наведіть означення відстані від точки до множини.
7. Наведіть означення околу множини.
8. Наведіть означення відхилення між множинами (напівметрики Хаусдорфа).
9. Наведіть означення метрики Хаусдорфа.
10. Сформулюйте теорему про геометричну властивість метрики Хаусдорфа.
11. Сформулюйте означення опорної функції.

12. Наведіть приклади опорних функцій для точки, кулі, еліпсоїда.
13. Наведіть основні властивості опорної фунції.
14. Сформулюйте теорему про знаходження метрики Хаусдорфа за допомогою опорної функції для опуклих компактів. Яка геометрична інтерпритація цієї теореми?
15. Сформулюйте означення багатозначної функції.
16. В чому полягає відмінність між багатозначною функцією і однозначною функцією.
17. Сформулюйте означення вимірного селектора багатозначного відображення.
18. Наведіть означення інтеграла від багатозначного відображення (інтеграл Аумана).
19. Наведіть формулювання теореми Ляпунова про інтеграл багатозначного відображення.
20. Чому дорівнює опорна функція від інтеграла багатозначного відображення?

Домашня робота

Задача 2.7. Знайти $A + B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$, $\lambda = 2$;
2. $A = \{5, -5, 2\}$, $B = [1, 3]$, $\lambda = -1$;
3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$, $\lambda = 3$.

Задача 2.8. Знайти MA, якщо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \ A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 2.9. Знайти r - окіл множини:

1. $A = \{4, -2, 3\}$, $r = 1$;
2. $A = [1, 3]$, $r = 4$;
3. $A = [-4, -2] \ \cup -8$, $r = 2$;

4. $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2\}$, $r = 2$.

Задача 2.10. Знайти метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$;
2. $A = \{5, -5, 2\}$, $B = [1, 3]$;
3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$.

Задача 2.11. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = \{-1, 1\}$;
2. $A = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq 2, |x_2| \leq 4, |x_3| \leq 1\}$;
3. $A = \{a\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$.

Задача 2.12. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, \sin x]\,, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
2. $F(x) = [-\sin x, \sin x]\,, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
3. $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq \sin x\}\,,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Література: [3]

Тема 3

Множина досяжності

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 3.1. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + u,$$

де $x(0) = x_0 \in [-1, 1]$, $u(t) \in [-1, 1]$, $t \geq 0$.

Задача 3.2. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in M_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Наведіть означення множини досяжності системи керування.
2. У чому полягає геометричний зміст множини досяжності.
3. Як знайти множину досяжності лінійної системи керування?
4. Як знайти опорну функцію множини досяжності лінійної системи керування?
5. Наведіть основні властивості множини досяжності лінійної системи керування.

Домашня робота

Задача 3.3. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + bu,$$

де $x(0) = x_0 \in [-2, 2]$, $u(t) \in [-3, 3]$, $t \geq 0$, b – деяке ненульове число.

Задача 3.4. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in M_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \left\{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq 4\right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\right\}.$$

Література: [3]

Тема 4

Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 4.1. Розв'язати задачу про переведення системи

$$\frac{dx}{dt} = u,\ t \in [0, T]$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$. Тут x – стан системи, u – скалярне керування, x_0, y_0 – задані точки, $t \in [0, T]$, $T > 0$ – задане число. Для цього припустити, що керування належить одному з таких класів:

1. постійних функцій $u(t) = c$, c –константа;
2. програмних керувань вигляду $u(t) = ct$, c –константа;
3. керувань з оберненим зв'язком $u(x) = cx$, c –константа;
4. кусково-постійних функцій

$$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1], \\ c_2 & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

   Тут c_1, c_2 –константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$.

Задача 4.2. Для системи керування

$$\frac{dx}{dt} = x + u, \ t \in [0, T]$$

знайти граміан керованості. Тут x – стан системи, u – скалярне керування, $t \in [0, T]$, $T > 0$. За допомогою граміана розв'язати задачу про переведення вказаної системи з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = x_T$, де x_0, x_T – задані.

Задача 4.3. За допомогою граміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),$$
$$x(0) = x_0, \ x'(0) = y_0, \ x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системи, u – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Задача 4.4. Дослідити системи на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1.
$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u;$$

2.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 4x_2 + u; \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_3 + u_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + u_2. \end{cases}$$

Домашня робота

Задача 4.5. Розв'язати задачу про переведення системи

$$\frac{dx}{dt} = 2tx + u, \ t \in [0, T]$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$. Тут x – стан системи, u – скалярне керування, x_0, y_0 – задані точки, $t \in [0, T]$, $T > 0$ – задане число. Для цього припустити, що керування належить одному з таких класів:

1. постійних функцій $u(t) = c$, c –константа;

2. програмних керувань вигляду $u(t) = ct$, c –константа;

3. керувань з оберненим зв'язком $u(x) = cx$, c –константа;

4. кусково-постійних функцій

$$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1], \\ c_2 & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Тут c_1, c_2 –константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$.

Задача 4.6. 1. Знайти граміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t)$$

і дослідити її на керованість, використовуючи перший критерій керованості.

2. За допомогою граміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t), \; x(0) = x_0, \; x(T) = x_T.$$

Тут x – стан системи, u – скалярне керування, x_0, x_T – задані точки, $t \in [0, T]$.

Задача 4.7. За допомогою граміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0, \; x'(0) = y_0, \; x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системи, u – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Задача 4.8. За допомогою граміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T \left(u_1^2(s) + u_2^2(s)\right) ds$$

за умов

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 5x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},$$

$$x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $x = (x_{10}, x_{20})^*$ – відома точка, $t \in [0, T]$.

Задача 4.9. Дослідити системи на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1. $$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}; \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}; \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3 + u_1 - u_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 3x_3 + u_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + 2u_2. \end{cases}$$

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Наведіть означення повної керованості лінійної системи керування на ітервалі.

2. Сформулюйте постановку задачі про переведення лінійної системи керування з початкового положення в задане кінцеве положення.

3. Як записуються моментні рівності для лінійної системи керування?

4. Чому розв'язок моментних рівностей еквівалентний розв'язку задачі про переведення лінійної системи керування з початкового положення в задане кінцеве положення?

5. Наведіть означення повної керованості лінійної системи керування.

6. Сформулюйте перший критерій керованості.

7. Яким є клас допустимих керувань при обгрунтуванні першого критерія керованості?

8. Наведіть означення граміана керованості. Якими є його властивості?

9. Запишіть диференціальне рівняння, якому задовольняє граміан керованості.

10. Сформулюйте теорему про розв'язок задачі переведення лінійної системи керування з початкового положення в задане кінцеве положення.

11. Наведіть означення матриці керованості другого роду.

12. Для якого виду лінійних систем керування може бути застосований другий критерій керованості?

13. Сформулюйте другий критерій керованості.

14. Яким є клас допустимих керувань при обгрунтуванні другого критерія керованості?

15. Як пов'язані поняття повної керованості і множини досяжності лінійної системи керування?

16. Що відбувається з множиною досяжності лінійної стаціонарної системи керування при обмеженні керування у формі кулі, якщо для цієї системи не виконується другий критерій керованості?

Додаткові завдання

Задача 4.10. За допомогою граміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin(t)x(t) + u(t),\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T.$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, x_0, x_T – задані точки, $t \in [0, T]$.

Задача 4.11. За допомогою граміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0,\ x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системи, u – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Задача 4.12. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (граміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + tx(t) = u(t).$$

Тут x – стан системи, u – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Задача 4.13. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (граміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

1.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = tx_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + t^2u_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.

2.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \sin(t)x(t) = u(t).$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Задача 4.14. Записати диференціальне рівняння граміана керованості для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \cos(t)x_1(t) - \sin(t)x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \sin(t)x_1(t) + \cos(t)x_2(t) - 3u_1(t) + 4u_2(t). \end{cases}$$

Задача 4.15. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (граміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = tx_1(t) + t^2 x_2 + u_1(t) - u_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.

Задача 4.16. Дослідити системи на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + a^2 u; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - au, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + au; \end{cases}$$

3.
$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = u(t).$$

Література: [1, 4]

Тема 5

Оцінка стану системи. Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості. Задача фільтрації

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 5.1. Оцінити стан $x(T)$, $x'(T)$ системи в момент часу $t = T$ за спостереженнями $y(t)$, $t \in [0, T]$, якщо

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y = x. \end{cases}$$

Задача 5.2. Чи буде система цілком спостережуваною?

1.
$$\ddot{x} = a^2 x, \ y(t) = x(t);$$

2.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_2, \\ y(t) = \beta x_1 + x_2. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Задача 5.3. Дослідити на спостережуваність, використовуючи

- другий критерій керованості;
- критерій двоїстості і відповідний критерій керованості

системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1, \\ \dot{x}_2 = bx_2, \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Задача 5.4. Побудувати спостерігач такої системи у загальному вигляді, використовуючи теорему про структуру спостерігача

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ y(t) = x_1(t) + bx_2(t). \end{cases}$$

Задача 5.5. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + v(t), \\ y(t) = px(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати фільтр за умови, що

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + x^2(0) \leq 1, \ \tau \in [0, T] \, .$$

Питання, тести для самоконтролю

1. Наведіть постановку задачі оцінювання стану лінійної системи за спостереженнями.
2. Наведіть означення повної спостережуваності лінійної системи на інтервалі.
3. Наведіть означення повної спостережуваності лінійної системи.
4. Сформулюйте означення граміана спостережуваності.
5. Наведіть формулювання першого критерія спостережуваності.
6. Наведіть основні властивості граміана спостережуваності.

7. Наведіть формулювання принципу двоїстості Калмана.
8. В чому полягає ідея обгрунтування принципу двоїстості Калмана?
9. Наведіть означення матриці спостережуваності другого роду.
10. Наведіть формулювання другого критерія спостережуваності.
11. Наведіть означення спостерігача.
12. Сформулюйте теорему про структуру спостерігача.
13. Сформулюйте постановку задачі фільтрації.
14. Чим задача фільтрації відрізняється від задачі оцінки стану системи.
15. Сформулюйте означення чебишевського центру множини.
16. Наведіть означення інформаційної множини.
17. У чому полягає множинний підхід до розв'язування задачі фільтрації?
18. Сформулюйте теорему про розв'язок задачі фільтрації лінійної системи
19. Наведіть алгоритм розв'язування задачі фільтрації в задачі лінійної фільтрації на основі множинного підходу.

Домашня робота

Задача 5.6. Оцінити стан $x(T)$, $x'(T)$ системи в момент часу $t = T$ за спостереженнями $y(t)$, $t \in [0, T]$, якщо

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y = x + x'. \end{cases}$$

Задача 5.7. Оцінити стан $x(T)$, $x'(T)$ системи в момент часу $t = T$ за спостереженнями $y(t)$, $t \in [0, T]$, якщо

$$\begin{cases} x'' = x, \\ y = x. \end{cases}$$

Задача 5.8. Побудувати матричне диференціальне рівняння для знаходження граміана спостережуваності і записати умову спостережуваності на інтервалі для системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2, \\ y(t) = \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2. \end{cases}$$

Задача 5.9. Чи буде система цілком спостережуваною?

1. $$\ddot{x} = a^2 x,\ \ y(t) = p\dot{x}(t);$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \alpha x_2, \\ y(t) = x_1 + \beta x_2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Задача 5.10. Для яких параметрів a, b система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = bx_2(t), \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

є цілком спостережуваною? Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Задача 5.11. Побудувати спостерігач у загальному вигляді для такої системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + t^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \\ y(t) = bx_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Задача 5.12. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) + v(t), \\ y(t) = 2x(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x(0) \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова. Побудувати оцінку стану заданої системи (фільтр) за заданими спостереженнями $y(t) \in \mathbb{R}^1$ за умови, що

$$\int_0^\tau \big(v^2(s) + w^2(s)\big)\, ds + x^2(0) \leq 2,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти оцінку похибки оцінювання.

Задача 5.13. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + v_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + v_2(t), \\ y(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + w(t) \end{cases}$$

і відомі спостереження за цією системою $y(t) \in \mathbb{R}^1$. Побудувати оцінку стану (фільтр) і знайти оцінку похибки оцінювання. Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $v_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $v_2(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми,

$$\int_0^\tau \left(v_1^2(s) + v_2^2(s) + w^2(s)\right) ds + x_1^2(0) + 2x_2^2(0) \leq 1,$$

$\tau \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Додаткові завдання

Задача 5.14. Записати матричне диференціальне рівняння для знаходження граміана спостережуваності системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -t^2 x_2(t), \\ y(t) = \sin(t)x_1(t) + \cos(t)x_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Задача 5.15. Побудувати матричне диференціальне рівняння для знаходження граміана спостережуваності і записати умову спостережуваності на інтервалі для системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2, \\ y(t) = kx_1 + x_2, \end{cases}$$

$k > 0$.

Задача 5.16. Побудувати спостерігач у загальному вигляді для такої системи:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + k_1\frac{dx}{dt} + k_2 x = 0, \\ y(t) = x(t) + \beta\frac{dx(t)}{dt}. \end{cases}$$

Задача 5.17. Побудувати спостерігач такої системи у загальному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \\ y(t) = x(t) + \beta \frac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

Задача 5.18. Задана динамічна система

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t), \ y(t) = \sin(t) \cdot x(t),$$

де $x \in \mathbb{R}^1$, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти спостерігач, розв'язком якого є оцінка стану цієї системи.

Задача 5.19. Задана динамічна система

$$\ddot{x} = x, \ y(t) = \dot{x}(t),$$

де $x \in \mathbb{R}^1$, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти спостерігач, розв'язком якого є оцінка стану цієї системи.

Задача 5.20. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) + v(t) + t^2, \\ y(t) = -x(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + (x(0) - 1)^2 \leq 1, \ \tau \in [0, T] \, .$$

Задача 5.21. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t) + v_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + v_2(t), \\ y_1(t) = x_1(t) + w_1(t), \\ y_2(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + w_2(t). \end{cases}$$

Побудувати оцінку стану системи за заданими спостереженнями $y_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^1$ у формі фільтра. Знайти оцінку похибки оцінювання. Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $v_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $v_2(t) \in \mathbb{R}^1$, $w_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $w_2(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми,

$$\int_0^\tau \left(\gamma^2(v_1^2(s) + v_2^2(s)) + \mu^2(w_1^2(s) + w_2^2(s))\right) ds + x_1^2(0) + x_2^2(0) \leq 4,$$

$\tau \in [0, T]$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$, момент часу T є заданим.

Література: [1, 4]

Тема 6

Варіаційний метод в задачі оптимального керування

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 6.1. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^3(s)ds$;

2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (\sin^2 u_1(s) + u_2^2(s))ds$, $u = (u_1, u_2)^*$.

Задача 6.2. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = (tx(t) + u(t))^3,\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.3. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -3.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 6.4. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.5. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + (x(T) - 1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.6. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + (x(T) + 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Сформулюйте означення похідної за напрямком від функціонала.
2. Наведіть означення першої варіації (варіації за Лагранжем) функціонала. Чим це поняття відрізняється від похідної за напрямком?
3. Наведіть означення похідної Фреше.
4. Сформулюйте теорему про необхідну умову функціоналу екстремуму за допомогою першої варіації, а також похідної Фреше.

5. Як побудувати систему у варіаціях?
6. Який зміст має розв'язок системи у варіаціях?
7. Які етапи конструювання похідної Фреше в задачі оптимального керування з функціоналом Больца?
8. Як знайти оптимальне керування лінійною системуою з квадратичним критерієм якості за допомогою варіаційного підходу?

Домашня робота

Задача 6.7. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{I}(u) = \int_0^T \cos u(s) ds$;
2. $\mathcal{I}(u) = \int_0^T (s^2 u_1^4(s) + u_2^2(s)) ds$, $u = (u_1, u_2)^*$.

Задача 6.8. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = \cos(x(t) + u(t)),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.9. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t)u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 6.10. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x^4(s)) ds + x^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.11. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u(s) - v(s))^2\, ds + (x(T) - 3)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, момент часу T і функція $v(t) \in \mathbb{R}^1$ є заданими.

Задача 6.12. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \big(u^2(s) + x^2(s)\big)\, ds + (x(T) - 1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Додаткові завдання

Задача 6.13. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 6.14. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + x_2(t) + 2u(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1, \; x_2(0) = 2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 6.15. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(u_1^2(s) + u_2^2(s) \right) ds + \frac{1}{2} x_1^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^1$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Література: [7]

Тема 7

Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 7.1. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x_1^4(s))ds + x_2^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \sin(x_1(t)) - x_2^2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t)x_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \ x_2(0) = 2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 7.2. Записати крайову задачу принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T x^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \le \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 7.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 7.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 7.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \sin(x(1)) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(0) = 1,$$
$$|u(t)| \le 1, t \in [0, 1].$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$.

Питання, тести для самоконтролю

Розглядаємо задачу оптимального керування з функціоналом Больца з з вільним правим кінцем. Дайте відповіді на такі запитання:

1. Дайте означення функції Гамільтона - Понтрягіна.
2. Як записати спряжену систему за допомогою функції Гамільтона - Понтрягіна?
3. Сформулюйте принцип максимуму Понтрягіна.
4. Яка задача називається крайовою задачею принципу максимуму Понтрягіна?
5. Дайте означення голчатої варіації керування?
6. Дайте означення голчатої варіації треєкторії?
7. Дайте означення елементарноі голки?
8. Сформулюйте лему про голчату варіацію керування.
9. Сформулюйте лему про варіацію функціонала при голчатій варіаціії керування.
10. Наведіть етапи обгрунтування принципу максимуму Понтрягіна.
11. Які обмеження на керування накладаються при обгрунтуванні принцип максимуму Понтрягіна?
12. Яким умовам має задовольняти права частина системи керування при формулюванні принципу максимуму Понтрягіна?
13. Сформулюйте теорему про достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму Понтрягіна.
14. Як знайти оптимальне керування лінійною системуою з квадратичним критерієм якості за допомогою принципу максимуму Понтрягіна?

Домашня робота

Задача 7.6. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T (4u_1^2(s) + u_1^2(s) + \cos^2(x_1(s)))ds + \sin^2(x_2(T)) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 3x_1(t)x_2(t) + 2u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 6x_2(t) - 3x_1(t)x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 4, \; x_2(0) = -2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – функції керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 7.7. Записати крайову задачу принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T (x(s) - z(s))^2 \, ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0,$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, неперервна функція $z(t) \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 7.8. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds + \frac{1}{2} (x(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + u(t), \; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 7.9. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(u^2(s) + x^2(s)\right) ds + \frac{1}{2} (\dot{x}(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, \; x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 7.10. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \cos(x(1)) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \; x(0) = 0,$$
$$0 \leq u(t) \leq \pi, \; t \in [0, 1] \, .$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$.

Додаткові завдання

Задача 7.11. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u_1^2(s) + u_2^2(s)\right) ds + \frac{1}{2}x_1^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^1$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 7.12. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 7.13. Підготуйте доповідь на тему „Про побудову множини досяжності за допомогою принципу максимуму Понтрягіна".

Література: [1, 4, 6, 7]

Тема 8

Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 8.1. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^1 (u^2(s) + x^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{2}.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Задача 8.2. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2(s) - 12sx(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Задача 8.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = -1,\ \dot{x}(0) = 2,\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Задача 8.4. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = T = \int_0^T ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(T) = 1,$$

$$\int_0^T u^2(s)ds = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Наведіть означення функції Лагранжа для загальної постановки задачі оптимального керування.
2. Наведіть означення функції Гамільтона - Понтрягіна для загальної постановки задачі оптимального керування.
3. Сформулюйте принцип максимуму Понтрягіна для загальної задачі оптимального керування.
4. Наведіть етапи обгрунтування принципу максимуму Понтрягіна для загальної задачі оптимального керування.
5. В чому полягає зміст умов трансверсальності.
6. Наведіть постановку задачі оптимальної швидкодії.
7. Наведіть принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії.

Домашня робота

Задача 8.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (u^2(s) + x^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(-1) = x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-1, 1]$.

Задача 8.6. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (u^2(s) + x^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(1) = 0, \dot{x}(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Задача 8.7. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (x(s) + u^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Задача 8.8. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)\sin s ds \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0,\ u(t) \in [-1, 1],$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Додаткові завдання

Задача 8.9. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = T \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x(T) = 0,$$
$$3\int_0^T (u^2(s) - 4x(s))ds \le -1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

Задача 8.10. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^2 x(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,$$
$$x(0) = \dot{x}(0) = x(2) = 0,$$
$$u(t) \in [-2, 2]\,.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 2]$.

Задача 8.11. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^1 u^4(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(1) = \dot{x}(0) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

Задача 8.12. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0,\ x(T) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.13. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = u(t),$$
$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.14. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = u(t),$$
$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0,\ x(T) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.15. Підготуйте доповідь на тему „Принцип максимуму і лінійна задача швидкодії".

Задача 8.16. Підготуйте доповідь на тему „Розв'язування класичних прикладів лінійної задачі швидкодії " (приклади 1, 2 з [4], стор. 216-222).

Література: [1, 4, 6, 7]

Тема 9

Метод динамічного програмування

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 9.1. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 9.2. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 9.3. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u(s) - s)^2\, ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) + t^2,\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 9.4. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. В чому полягає постановка задачі синтезу?
2. Дайте означення функції Белмана.
3. В чому полягає принцип оптимальності Белмана?
4. Наведіть приклад задачі оптимального керування, для якої не виконується принцип оптимальності Белмана.
5. В чому полягає ідея алгоритму методу динамічного програмування? Які особливості цього алгоритму?
6. Наведіть диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для неперервної задачі оптимального керування з вільним правим кінцем.
7. Сформулюйте теорему про достатні умови оптимальності у формі диференціального рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана.
8. Як застосовується метод динамічного програмування до розв'язування задачі оптимального керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості?

Домашня робота

Задача 9.5. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}\left(x(T) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умови, що
$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(0) = x_0.$$
Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 9.6. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:
$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(u^2(s) + x^2(s)\big)\, ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$
за умови, що
$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t), \ x(0) = x_0.$$
Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 9.7. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:
$$\mathcal{I}(u) = a^2 \int_0^T (u(s) - u_0(s))^2\, ds + x^2(T) \to \inf$$
за умови, що
$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(0) = x_0.$$
Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Неперервна функція $u_0(t) \in \mathbb{R}^1$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими, $a > 0$.

Задача 9.8. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:
$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}\dot{x}^2(T) \to \inf$$
за умови, що
$$\ddot{x} = u, \ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = y_0.$$
Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 9.9. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:
$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T (u_1^2(s) + u_2^2(s))ds + x_2^2(T) \to \inf$$
за умови, що
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 9.10. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2(s) - 2sx(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Література: [2, 4]

Тема 10

Задача стабілізації

Завдання для роботи в аудиторії

Задача 10.1. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = u.$$

Задача 10.2. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1x_1 + c_2x_2$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + 2u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

Задача 10.3. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t)x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \sin(x_1(t) + x_2(t)). \end{cases}$$

Питання, тести для самоконтролю

Дайте відповіді на такі запитання:

1. Наведіть означення стійкості і асимптотичної стійкості нульового розв'язку за Ляпуновим.
2. Сформулюйте критерій Гурвіца.

3. Як застосовується критерій Гурвіца до дослідження систем на стійкість?
4. Яка функція називається функцією Ляпунова?
5. Сформулюйте теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість для автономної системи.
6. Сформулюйте теорему Барбашина-Красовського.
7. У чому полягає постановка задачі стабілізації.
8. В якому класі керувань розв'язують задачу стабілізації?
9. У чому полягає постановка задачі модального керування?
10. Як пов'язані задачі стабілізації і модального керування?
11. Як застосовується функція Ляпунова до розв'язування задачі стабілізації?
12. За якої умови можна застосувати диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана до розв'язування задачі стабілізації?

hometask

Задача 10.4. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x'''(t) + 6x''(t) - 2x'(t) - 5x(t) = u.$$

Задача 10.5. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = u.$$

Задача 10.6. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2u. \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Додаткові завдання

Задача 10.7. Побудувати керування u, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x^{(IV)}(t) + 2x''(t) + x(t) = u.$$

Задача 10.8. Побудувати керування u, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 5x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 3u. \end{cases}$$

Задача 10.9. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t) + u_1 - u_2, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 2x_2(t) + u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

Задача 10.10. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1^3(t) - x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (x_1(t) + x_2(t))^2 + u(t). \end{cases}$$

Задача 10.11. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 2u_1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) + 3x_2(t) - u_1 + u_2. \end{cases}$$

Задача 10.12. Побудувати керування u, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 2u. \end{cases}$$

Задача 10.13. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = x_3(t) + u. \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$.

Задача 10.14. Підготуйте доповідь на тему „Задача оптимальної стабілізації".

Література: [4, 9]

Перелік запитань до іспиту

Основні запитання

Основні постановки задач

1. Система керування. Ознаки системи керування.

2. Принципи керування (програмне керування і керування з оберненим зв'язком).

3. Постановка задачі оптимального керування.

4. Постановка задачі стабілізації.

Основні означення і теореми

1. Означення керованості на інтервалі і повної керованості лінійної системи керування.

2. Критерій керованості лінійної стаціонарної системи (другий критерій керованості). Матриця керованості другого роду.

3. Принцип двоїстості Калмана.

4. Означення спостережуваності на інтервалі і повної спостережуваності лінійної системи керування.

5. Другий критерій спостережуваності.

6. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Больца з вільним правим кінцем. Функція Гамільтона-Понтрягіна. Спряжена система. Крайова задача принципу максимуму Понтрягіна.

7. Метод динамічного програмування для задачі оптимального керування неперервною системою з вільним правим кінцем. Принцип оптимальності Белмана. Функція Белмана.

8. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі оптимального керування неперервною системою з вільним правим кінцем.

Загальний перелік запитань

1. Система керування. Ознаки системи керування. Принципи керування (програмне керування і керування з оберненим зв'язком). Задача оптимального керування. Мета математичної теорії керування.

2. Алгебраїчні операції над множинами. Окіл множини.

3. Опуклі множини. Властивості опуклих множин. Опукла оболонка множини. Лема Каратеодорі. Лема про строгу віддільність.

4. Опорні функції. Властивості опорної функції.

5. Відстань від точки до множини. Відхилення від множини до множини. Властивості. Лема про відхилення для опуклих компактів.

6. Метрика Хаусдорфа. Властивості.

7. Багатозначні відображення. Графік. Неперервні багатозначні відображення. Критерій неперервності.

8. Вимірні багатозначні відображення. Вимірний селектор.

9. Інтеграл від багатозначного відображення(інтеграл Аумана). Теорема Ляпунова.

10. Абсолютно неперервні функції. Властивості. Теорема Лебега.

11. Система Каратеодорі. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема про неперервну залежність розв'язку від початкових умов. Система керування як система Каратеодорі.

12. Лінійна система диференціальних рівнянь Каратеодорі. Фундаментальна матриця. Властивості фундаментальної матриці. Формула Коші.

13. Спряжена система. Її властивості.

14. Множина досяжності. Теорема про множину досяжності лінійної системи керування. Компактність і неперервність множини досяжності. Опорна функція множини досяжності.

15. Означення керованості на інтервалі і повної керованості. Моментні рівності. Критерій керованості в лінійних нестаціонарних системах (перший критерій керованості). Грамміан керованості (матриця керованості першого роду). Диференціальне рівняння для грамміана керованості.

16. Керування, яке розв'язує задачу про переведення лінійної нестаціонарної системи з точки в точку за допомогою грамміана керованості з мінімальною нормою.

17. Лема про внутрішню точку. Критерій керованості лінійної стаціонарної системи (другий критерій керованості). Матриця керованості другого роду.

18. Постановка задачі спостереження. Спостережуваність на інтервалі. Повна спостережуваність. Грамміан спостережуваності (матриця спостережуваності першого роду). Перший критерій спостережуваності.

19. Принцип двоїстості Калмана. Другий критерій спостережуваності.

20. Спостерігач. Теорема про структуру спостерігача.

21. Оцінка стану системи на основі грамміана спостережуваності. Матричне диференціальне рівняння для грамміана спостережуваності.

22. Постановка задачі фільтрації. Множинний підхід. Інформаційна область.

23. Задача лінійної фільтрації. Фільтр. Алгоритм побудови фільтра. Похибка оцінювання.

24. Похідна за напрямком. Перша варіація функціоналу. Похідна Фреше. Необхідні умови екстремуму функціоналу.

25. Задача оптимального керування з вільним правим кінцем на основі варіаційного методу. Похідна Фреше.

26. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі варіаційного методу. Алгоритм.

27. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Больца з вільним правим кінцем. Функція Гамільтона-Понтрягіна. Спряжена система. Крайова задача принципу максимуму Понтрягіна.

28. Голчата варіація керування. Лема про голчату варіацію. Лема про варіацію функціонала. Обгрунтування принципа максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування з вільним правим кінцем.

29. Достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

30. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі принципу максимуму Понтрягіна. Алгоритм.

31. Загальна постановка задачі оптимального керування.

32. Принцип максимуму Понтрягіна при загальних обмеженнях. Його зв'язок з принципом Лагранжа.

33. Пакет голок. Ідея обґрунтування принципу максимуму Понтрягіна в загальній постановці.

34. Постановка задачі синтезу. Оптимальний синтез.

35. Метод динамічного програмування для неперервних систем керування з вільним правим кінцем. Принцип оптимальності Белмана. Функція Белмана. Інтегральне рівняння Белмана.

36. Алгоритм методу динамічного програмування. Особливості алгоритму.

37. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана.

38. Теорема про достатні умови оптимальності у формі диференціального рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана.

39. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі методу динамічного програмування. Алгоритм.

40. Постановка задачі стабілізації. Стабілізація стаціонарних систем.

41. Метод функцій Ляпунова і стабілізація систем керування.

Література

[1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. – М.: Физматлит, 2005. – 276 с.

[2] Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник. - К.: Вид-во „Сталь”, 2012. – 116 с.

[3] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

[4] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

[5] Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 1999. – 208 с.

[6] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1980. – 520 с.

[7] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[8] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків. - К., ВПЦ „Київський університет”, 2008. – 352 с.

[9] Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Прикладні задачі теорії стійкості. -К.: Київський університет, 2014. – 142 с.